גאומטריה אנליטית – היפרבולה

בפרק זה נעסוק בהיפרבולה.

הגדרה: היפרבולה היא המקום הגאומטרי של הנקודות, שהערך המוחלט של הפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות (הנקראות מוקדי ההיפרבולה) הוא גודל קבוע.

ההיפרבולה שבה נדון נקראת היפרבולה קנונית.
בהיפרבולה כזו המוקדים נמצאים בנקודות $(c;0)$ ו- $(-c;0)$
המרחק בין שני המוקדים הוא $2c$.

משוואת היפרבולה קנונית היא $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

היפרבולה זו סימטרית לעומת הצירים,
מרכז ההיפרבולה (אמצע הקטע המחבר את שני המוקדים) הוא נקודת ראשית הצירים.

הפרמטרים המאפיינים את משוואת ההיפרבולה הם a ו- b.

הנקודות $(a;0)$ ו- $(-a;0)$ הן נקודות החיתוך של ההיפרבולה עם ציר ה- x, ונקראות גם קדקודי ההיפרבולה.
אורך הציר הממשי של ההיפרבולה, המחבר נקודות אלה, הוא $2a$.

ההיפרבולה אינה חותכת את ציר ה- y.
אורך הציר המדומה של ההיפרבולה הוא $2b$.

הקשר בין a, b ו- c הוא $b^2=c^2-a^2$.

בהיפרבולה שוות שוקיים מתקיים $a=b$.

מיתר בהיפרבולה הוא קטע המחבר שתי נקודות שעל ההיפרבולה.
מיתר העובר דרך מרכז היפרבולה קנונית, כלומר ראשית הצירים, נקרא **קוטר בהיפרבולה**.
בהיפרבולה קנונית כל קוטר חותך את ההיפרבולה בשתי נקודות ששיעוריהן **נגדיים.**

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

תרגילים

1. מצאו את נקודות החיתוך של ההיפרבולות הבאות עם ציר ה- x, ואת אורך הציר הממשי שלהן.

א. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{24}=1$. ב. $2x^2-5y^2=162$.

2. מצאו את אורך הציר המדומה של ההיפרבולות הבאות:

א. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{49}=1$ ב. $3x^2-5y^2=105$

3. מצאו את מוקדי ההיפרבולות הבאות:

א. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. ב. $x^2-3y^2=18$.

4. מצאו את המשוואה של היפרבולה קנונית על פי הנתונים הבאים:

א. אורך הציר הממשי שלה הוא 14 ואורך הציר המדומה הוא 10.

ב. אורך הציר המדומה שלה הוא $4\sqrt{10}$, והמרחק בין מוקדיה הוא $4\sqrt{30}$.

ג. המרחק בין מוקדיה הוא $8\sqrt{5}$ והיא עוברת דרך הנקודה $(-12;-8)$.

ד. אורך הציר המדומה שלה הוא 12, והמרחק מהמוקד השמאלי לקדקוד הימני הוא 18.

ה. ההיפרבולה עוברת דרך הנקודות $(6;3)$ ו- $(8;\sqrt{30})$.

ו. ההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $(-8;-2)$, ואחד מציריה גדול פי שניים מן הציר האחר.

ז. אורך הציר המדומה שלה הוא $\sqrt{72}$, וקדקוד שלה נמצא במרחק 3 יחידות מהישר $y=x$.

ח. אורך הציר הממשי שלה הוא 16, והאנך לציר ה- x במוקד הימני, חותך את ההיפרבולה בנקודה, ששיעור ה- y שלה הוא 2.

5. מצאו את המשוואה של היפרבולה שוות שוקיים:

א. העוברת דרך הנקודה $(5;3)$.

ב. שאחד המוקדים שלה נמצא בנקודה $(4;0)$.

6. א. מצאו את נקודות החיתוך של ההיפרבולה $2x^2-y^2=64$ עם הישר $y=x+2$.

ב. מצאו את נקודת אמצע המיתר של ההיפרבולה, הנמצא על הישר $y=x+2$.

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

7. מצאו את הנקודות על ההיפרבולה $x^2-2y^2=32$,
שמרחקן מראשית הצירים הוא $\sqrt{80}$.
הדרכה: סמנו ב- $(x_1;y_1)$
את הנקודה המבוקשת, והיעזרו בנוסחה למרחק בין שתי נקודות.

8. ארבעת קדקודיו של מלבן נמצאים על ההיפרבולה $3x^2-4y^2=72$.
צלע המלבן, המקבילה לציר ה- x, ארוכה פי שניים מן הצלע האחרת.
מצאו את קדקודי המלבן.

תשובות:

1. א. $(6;0)$, $(-6;0)$, 12. ב. $(9;0)$, $(-9;0)$, 18. **2.** א. 14. ב. $2\sqrt{21}$.

3. א. $(10;0)$, $(-10;0)$. ב. $(\sqrt{24};0)$, $(-\sqrt{24};0)$.

4. א. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$. ב. $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{40}=1$. ג. $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{32}=1$. ד. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. ה. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$.

ו. $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$ או $\frac{x^2}{63}-\frac{y^2}{252}=1$. ז. $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{18}=1$. ח. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$.

5. א. $x^2-y^2=16$. ב. $x^2-y^2=8$. **6.** א. $(10;12)$ ו- $(-6;-4)$. ב. $(2;4)$.

7. $(8;4)$, $(8;-4)$, $(-8;4)$, $(-8;-4)$. **8.** $(6;3)$, $(6;-3)$, $(-6;3)$, $(-6;-3)$.

רדיוסי וקטור של ההיפרבולה

נתונה נקודה $(x_1;y_1)$ הנמצאת על ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

המרחק של נקודה $(x_1;y_1)$ ממוקד של ההיפרבולה נקרא רדיוס וקטור.

המרחק של הנקודה מהמוקד הימני F_1 מסומן r_1.

המרחק של הנקודה מהמוקד השמאלי F_2 מסומן r_2.

הפרש המרחקים הוא קבוע ושווה ל- $2a$, ולכן $|r_2-r_1|=2a$

ניתן להיעזר בנוסחה זו בשאלות שעוסקות במרחק של נקודה שעל ההיפרבולה ממוקדי ההיפרבולה.
נדגיש שלרוב אפשר לפתור שאלות כאלה גם בעזרת הנוסחה למרחק בין שתי נקודות
באופן הבא: נסמן ב- $(x_1;y_1)$ נקודה על ההיפרבולה.
כדי למצוא את שיעורי הנקודה, נציב אותה במשוואת ההיפרבולה.
כמו כן, ניעזר בנוסחה למרחק בין שתי נקודות כדי להביע את מרחקה מהמוקד.

9. מצאו נקודה על ההיפרבולה $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, שמרחקה מהמוקד הימני שלה הוא 12.
רשמו את שתי האפשרויות המתקבלות.
הדרכה: סמנו ב- $(x_1;y_1)$ את הנקודה המבוקשת, והרכיבו שתי משוואות.
משוואה ראשונה באמצעות הצבת הנקודה $(x_1;y_1)$ במשוואת ההיפרבולה.
משוואה שנייה: היעזרו בנוסחה למרחק בין שתי נקודות כדי להביע את מרחק הנקודה $(x_1;y_1)$ מהמוקד הימני של ההיפרבולה.

10. על ההיפרבולה $7x^2-9y^2=1008$, מצאו את הנקודות, שמרחקן מהמוקד השמאלי שלה ההיפרבולה גדול פי 3 ממרחקן מהמוקד הימני שלה.
תוכלו לפתור בשתי דרכים.
דרך א: בדומה להדרכה שבשאלה **9**.
דרך ב: היעזרו בנוסחה $|r_2-r_1|=2a$.

11. נתונה ההיפרבולה $4x^2-5y^2=20$.
א. מצאו את הפרמטר a של ההיפרבולה ואת מוקדי ההיפרבולה.
ב. על ההיפרבולה $4x^2-5y^2=20$, מצאו את הנקודות,
שסכום מרחקיהן ממוקדי ההיפרבולה הוא $6\sqrt{5}$.

12. על ההיפרבולה $4x^2-3y^2=84$, מצאו נקודות שמהן רואים בזווית ישרה את הקטע המחבר את מוקדי ההיפרבולה.
הדרכה: סמנו ב- $(x_1;y_1)$ את הנקודה המבוקשת, והרכיבו שתי משוואות.
משוואה ראשונה באמצעות הצבת הנקודה $(x_1;y_1)$ במשוואת ההיפרבולה.
משוואה שנייה: היעזרו בניצבות ישרים.

13. הנקודה $(12;\sqrt{45})$ נמצאת על היפרבולה, ומרחקה מהמוקד השמאלי של ההיפרבולה הוא 23.
א. מצאו את שיעורי המוקד השמאלי של ההיפרבולה.
ב. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

תשובות:

9. $(16;\sqrt{108})$, $(16;-\sqrt{108})$. **10.** $(18;\sqrt{140})$, $(18;-\sqrt{140})$.

11. $(5;4)$, $(5;-4)$, $(-5;4)$, $(-5;-4)$.

12. א. $a=\sqrt{5}$, $(3;0)$, $(-3;0)$. ב. $(\sqrt{33};4)$, $(\sqrt{33};-4)$, $(-\sqrt{33};4)$, $(-\sqrt{33};-4)$.

13. א. $(-10;0)$. ב. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

האסימפטוטות של ההיפרבולה

משוואת האסימפטוטות של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

הן $y=\frac{b}{a}x$ ו- $y=-\frac{b}{a}x$.

14. מצאו את האסימפטוטות של ההיפרבולות הבאות:

א. $9x^2-16y^2=144$. ב. $4x^2-49y^2=100$.

15. מצאו את האסימפטוטות של כל היפרבולה שוות שוקיים.

16. מצאו את המשוואה של היפרבולה קנונית על פי הנתונים הבאים:

א. יש לה קדקוד בנקודה $(6;0)$, והישר $3y=2x$ הוא אסימפטוטה שלה.

ב. אורך הציר המדומה שלה הוא 10,
והישר $x+\sqrt{2}\cdot y=0$ הוא אסימפטוטה שלה.

ג. המרחק בין מוקדיה הוא 20,
והישר $4y+3x=0$ הוא אסימפטוטה שלה.

ד. הנקודה $(-3;4)$ נמצאת עליה, והישר $y=2x$ הוא אסימפטוטה שלה.

ה. הנקודה $(18;3)$ נמצאת עליה,
והנקודה $(9;3)$ נמצאת על אחת האסימפטוטות שלה.

ו. הנקודה $(-7;5)$ נמצאת עליה, והאסימפטוטות שלה מאונכות זו לזו.

17. משוואת אחת האסימפטוטות של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, היא $y=0.5x$.
ההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $(20;5\sqrt{3})$.

א. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

ב. A היא אחת מנקודות החיתוך של ההיפרבולה עם ציר ה- x.
דרך A הורידו אנך לאסימפטוטה הנ"ל, שחותך אותה בנקודה B.
מצאו את אורך הקטע AB.

18. אורך הציר הממשי של היפרבולה הוא 24.
מקצות ציר זה מעלים אנכים לאחת האסימפטוטות של ההיפרבולה.
אנכים אלה חותכים את האסימפטוטה בנקודות A ו- B.
אורך הקטע AB הוא 16. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

19. הישר $4x-3y+40=0$ מאונך לאחת האסימפטוטות של היפרבולה,
ועובר דרך אחד המוקדים שלה.
מצאו את משוואת ההיפרבולה.

20. נתונה ההיפרבולה $4x^2-y^2=128$.
מצאו את הנקודות שמרחקן מאחת האסימפטוטות של ההיפרבולה גדול פי שניים
ממרחקן מהאסימפטוטה האחרת שלה.

תשובות:

14. א. $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$ ב. $y=\frac{2}{7}x$, $y=-\frac{2}{7}x$. **15.** $y=x$, $y=-x$.

16. א. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$. ב. $\frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{25}=1$. ג. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. ד. $4x^2-y^2=20$.

ה. $x^2-9y^2=243$. ו. $x^2-y^2=24$. **17.** א. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{25}=1$. ב. $AB=2\sqrt{5}$.

18. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{180}=1$. **19.** $9x^2-16y^2=576$. **20.** $(6;4)$, $(6;-4)$, $(-6;4)$, $(-6;-4)$.

היפרבולה שמוקדיה על ציר ה-y

עד כה עסקנו רק בהיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ שמוקדיה על ציר ה-x.

אפשר לדון גם על היפרבולה שמשוואתה $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

המוקדים של היפרבולה כזו נמצאים על ציר ה-y בנקודות $(0;c)$ ו-$(0;-c)$.

21. מצאו את נקודות החיתוך של ההיפרבולות הבאות עם ציר ה-y.

א. $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1$. ב. $-5x^2+2y^2=50$.

22. מצאו את מוקדי ההיפרבולות הבאות:

א. $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. ב. $-x^2+2y^2=18$.

תשובות:

21. א. $(0;8)$, $(0;-8)$. ב. $(0;5)$, $(0;-5)$.

22. א. $(0;5)$, $(0;-5)$. ב. $(0;\sqrt{27})$, $(0;-\sqrt{27})$.

היפרבולה עם מעגל, אליפסה או פרבולה

23. נתונה ההיפרבולה $3x^2-4y^2=32$, ונתון המעגל $x^2+y^2=20$.
מצא את נקודות החיתוך בין ההיפרבולה למעגל.

24. מצאו את נקודות החיתוך של ההיפרבולה $3x^2-4y^2=12$
עם המעגל $(x-8)^2+y^2=25$.

25. א. מצאו את נקודות החיתוך של ההיפרבולה $4x^2-y^2=4$
עם האליפסה $4x^2+9y^2=36$.
ב. מצאו משוואת מעגל, העובר דרך הנקודות שמצאתם בסעיף א'.

26. לאליפסה $x^2+2y^2=a^2+20$ ולהיפרבולה $x^2-3y^2=a^2$,
יש מוקדים משותפים.
מצאו את משוואות האליפסה וההיפרבולה.

27. נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, ונתונה היפרבולה.

קדקודי ההיפרבולה הם מוקדי האליפסה,
ומוקדי ההיפרבולה הם קדקודי האליפסה, הנמצאים על ציר ה- x .
מצאו את שיעורי ארבע נקודות החיתוך של ההיפרבולה עם האליפסה.

28. נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-9}=1$, $a\neq 3$, $a>0$.

מצאו לאילו ערכי a (אם יש כאלה), מייצגת המשוואה:
א. אליפסה (שאינה מעגל). ב. היפרבולה. ג. מעגל.

29. נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-4}=4$.

מצאו לאילו ערכי a (אם יש כאלה), מייצגת המשוואה:
א. מעגל. ב. היפרבולה. ג. אליפסה (שאינה מעגל).

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

תשובות:

23. $(4;2)$, $(4;-2)$, $(-4;2)$, $(-4;-2)$. **24.** $(4;3)$, $(4;-3)$, $\left(\frac{36}{7};\frac{5\sqrt{33}}{7}\approx 4.10\right)$, $\left(\frac{36}{7};-\frac{5\sqrt{33}}{7}\approx -4.10\right)$.

25. א. $(\sqrt{1.8};\sqrt{3.2})$, $(\sqrt{1.8};-\sqrt{3.2})$, $(-\sqrt{1.8};\sqrt{3.2})$, $(-\sqrt{1.8};-\sqrt{3.2})$. ב. $x^2+y^2=5$.

26. $x^2+2y^2=32$, $x^2-3y^2=12$. **27.** $\left(\pm\sqrt{\frac{96}{7}};\pm\sqrt{\frac{4}{7}}\right)$.

28. א. $a>3$. ב. $0<a<3$. ג. אף a .

29. א. $a=\pm\sqrt{2}$. ב. $a>2$ או $a<-2$. ג. $-2<a<2$, $a\neq 0$, $a\neq\pm\sqrt{2}$.

שאלות נוספות עם היפרבולה

30. דרך נקודה P , הנמצאת על היפרבולה, שמשוואתה $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$,
מעבירים מאונך לציר ה- x , החותך את האסימפטוטות של ההיפרבולה בנקודות A ו- B .
הוכיחו: $AP\cdot BP=b^2$.

31. הוכיחו כי המרחק של מוקד ההיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
מאסימפטוטה של ההיפרבולה שווה ל- b .

32. הוכיחו כי מכפלת המרחקים של נקודה שעל ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
משתי האסימפטוטות שלה הוא $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

33. מן המוקד הימני של היפרבולה מורידים אנך לאסימפטוטה שלה.
הוכיחו כי אנך זה חותך את האסימפטוטה בנקודה שבה $x=\frac{a^2}{c}$

34. AA' הוא הציר הממשי של היפרבולה, שמשוואתה $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.
F_1 ו- F_2 הם מוקדי ההיפרבולה (F_1 - המוקד הימני).
$P(x_1;y_1)$ היא נקודה על ההיפרבולה.
דרך F_1 מעבירים מקביל ל- AP החותך את הישר $x=a$ בנקודה Q .
דרך F_1 מעבירים מקביל ל- $A'P$ החותך את הישר $x=-a$ בנקודה R .
הוכיחו: $y_Q\cdot y_R=\frac{b^4}{a^2}$.

35. AB הוא הציר הממשי של היפרבולה, שמשוואתה $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.
F_1 ו- F_2 הם מוקדי ההיפרבולה (F_1 - המוקד הימני).
$P(x_1;y_1)$ היא נקודה על ההיפרבולה.
דרך F_1 מעבירים מקביל ל- AP החותך את הישר $x=b$ בנקודה Q.
דרך F_2 מעבירים מקביל ל- BP החותך את הישר $x=b$ בנקודה R.
הוכיחו: $\sphericalangle QOR=90^\circ$ (O - ראשית הצירים)

36. מצאו את הנקודות הנמצאות על האסימפטוטות של ההיפרבולה $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$,
שמהן רואים בזווית ישרה את הקטע המחבר את מוקדי ההיפרבולה.

37. דרך המוקד F של היפרבולה, שמשוואתה $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$,
מעבירים מקביל לאחת האסימפטוטות של ההיפרבולה.
המקביל חותך את ההיפרבולה בנקודה P. הוכיחו: $PF=\frac{b^2}{2a}$.

38. P ו- Q הם קדקודי ההיפרבולה $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.
דרך הנקודה P הורידו אנך לאחת האסימפטוטות של ההיפרבולה, החותך את ציר ה- y בנקודה C.
האנך מנקודה Q לאותה אסימפטוטה, חותך את ציר ה- y בנקודה D.
הביעו את אורך הקטע CD באמצעות a ו- b.

39. על גרף ההיפרבולה שמשוואתה $xy=1$, בוחרים שתי נקודות A ו- B,
ברביע הראשון, ונקודה C ברביע השלישי.
הוכיחו כי שלושת הגבהים של המשולש ABC נפגשים בנקודה,
הנמצאת על גרף ההיפרבולה ברביע הראשון.

40. דרך נקודה P, הנמצאת על היפרבולה, שמשוואתה $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$,
מעבירים מקבילים לשתי האסימפטוטות של ההיפרבולה.
הוכיחו כי שטח המקבילית, הנוצרת על ידי שתי האסימפטוטות,
ועל ידי שני המקבילים, הוא: $\frac{ab}{2}$.

תשובות:

36. $(a;b)$, $(a;-b)$, $(-a;b)$, $(-a;-b)$. **38.** $\frac{2a^2}{b}$.

מקומות גאומטריים עם היפרבולה

41. מצאו את המקום ההנדסי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(10;0)$ גדול פי 1.25 ממרחקן מהישר $x=6.4$.

42. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$.

א. מצאו את המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים,
המחברים את ראשית הצירים עם נקודות על ההיפרבולה הנתונה.
ב. מהם שיעורי המוקדים של המקום הגאומטרי, שמצאתם בסעיף א'?

43. א. מצאו את המקום ההנדסי של מרכזי כל המעגלים המקצים על ציר ה- x קטע שאורכו $2a$, ועל ציר ה- y קטע שאורכו $2b$.
ב. מהן האסימפטוטות של המקום הגאומטרי, שמצאתם בסעיף א'?

44. נתונים שני ישרים $y=2x$, $y=-2x$.
מצאו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמכפלת המרחקים שלהן משני הישרים שווה ל- 16.
מצאו את שיעורי המוקדים, עבור כל אחת מהמשוואות שמצאתם.

45. נתון מעגל M שמשוואתו $x^2+y^2+4x=0$, ונקודה $A(2;0)$ מחוצה לו.
מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי שעליו מונחים מרכזי המעגלים, העוברים דרך הנקודה A, והנוגעים במעגל הנתון,
כאשר מרכז המעגל M נמצא מחוץ למעגלים הללו.

46. נתונים שני מעגלים: $(x-5)^2+y^2=4$ ו- $(x+5)^2+y^2=64$.
מצאו את המקום ההנדסי שעליו מונחות כל הנקודות, שמרחקיהן הקצרים ביותר משני המעגלים הנתונים שווים, אם נתון שהנקודות נמצאות מחוץ למעגלים.

47. AA' הוא הציר הגדול של האליפסה $4x^2+9y^2=36$.
PQ הוא מיתר באליפסה המקביל לציר ה- y.
מצאו את המקום הגאומטרי של נקודות החיתוך של הישרים AP ו- $A'Q$.
הראו שהמקום הגאומטרי הוא היפרבולה.

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

48. שני קטעים AB ו- CD ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה בנקודה O
(O – ראשית הצירים). נתון: $AB = 2a$, $CD = 2b$, $a \neq b$.
הראו שהמקום הגיאומטרי של כל הנקודות P , המקיימות $PA \cdot PB = PC \cdot PD$,
הוא היפרבולה.

תשובות:

41. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. **42.** א. $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$. ב. $(5;0)$, $(-5;0)$.

43. א. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$. ב. $y = x$, $y = -x$.

44. $4x^2 - y^2 = 80$: $(10;0)$, $(-10;0)$. $y^2 - 4x^2 = 80$: $(0;10)$, $(0;-10)$.

45. $3x^2 - y^2 = 3$. באזורים שבהם ההיפרבולה נמצאת מחוץ למעגל הנתון.

46. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. באזורים שבהם ההיפרבולה נמצאת מחוץ לשני המעגלים הנתונים.

47. א. $4x^2 - 9y^2 = 36$.

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי