

אריק דז'לדטי יואל גבע

מתמטיקה

חוברת השלמות לשאלון 571

כיתה יא'

5 יחידות לימוד, שאלון 571

הקדמה

חוברת זו מיועדת לתלמידי 5 יח"ל בכיתה יא' הלומדים לקראת שאלון 571 על פי **תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה**, והיא מהווה השלמה לספרי הלימוד בכיתה יא', 806 כרכים ג'-ד' מאת **יואל גבע ואריק דז'לדטי**.

החוברת כוללת שאלות בכל אחד מנושאי הבחינה:
סדרות, אינדוקציות, הסתברות, גאומטריה, טריגונומטריה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.
רוב השאלות מתאימות לבחינת הבגרות – כשאלות קצרות או ארוכות.
הקפדנו שחלק גדול מהשאלות תכלולנה דגשים המתאימים לתוכנית הלימודים החדשה.

הנושא **פונקציית הצטברות** בחשבון אינטגרלי נמצא רק בחוברת זו, ואינו נמצא בספר הלימוד.

הנושא **אינדוקציה מתמטית** קיים בספר הלימוד 806 כרך ג', אך מאחר שתוכנית הלימודים בנושא זה השתנתה, הבאנו בחוברת זו את הנושא במלואו.

השאלות מתוך החוברת, המומלצות לעבודה בכיתה ובבית, משולבות בהצעת ההוראה לשאלון 571, שפורסמה בנפרד מתוך הספר 806 כרכים ג'-ד'.

מומלץ לבדוק את העדכונים לגבי המיקוד כאשר מלמדים מתוך החוברת.

תודה ענקית לעפר ילין על הייעוץ הפדגוגי והמקצועי בכתיבת החוברת.

תוכן עניינים

סדרות

1	 סדרה חשבונית
5	 סדרה הנדסית (כולל סדרה אינסופית שסכומה מתכנס)
9	 שאלות המשלבות סדרה חשבונית עם סדרה הנדסית
11	 סדרות מסוגים שונים, כלל נסיגה

הסתברות

13	
22	 גאומטריה
30	 טריגונומטריה

חשבון דיפרנציאלי

38	 פונקציות רציונליות
49	 הקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לגרף של $\frac{1}{f(x)}$
58	 פונקציות עם שורשים
69	 הקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לגרף של $\sqrt{f(x)}$
77	 הקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לגרף הנגזרת שלה $f'(x)$
91	 פונקציות טריגונומטריות
102	 בעיות קיצון

חשבון אינטגרלי

107	 חשבון אינטגרלי – פולינומים, פונקציות שהתבנית האלגברית שלהם לא נתונה
116	 חשבון אינטגרלי – פונקציות מורכבות עם מעריך שלם
117	 חשבון אינטגרלי – פונקציות רציונליות
121	 חשבון אינטגרלי – פונקציות עם שורשים
125	 מציאת אינטגרלים עם זיהוי הנגזרת הפנימית
130	 חשבון אינטגרלי – פונקציית הצטברות (אינטגרל מצטבר)
138	 חשבון אינטגרלי – פונקציות טריגונומטריות
145	 בעיות קיצון עם אינטגרלים

אינדוקציה מתמטית

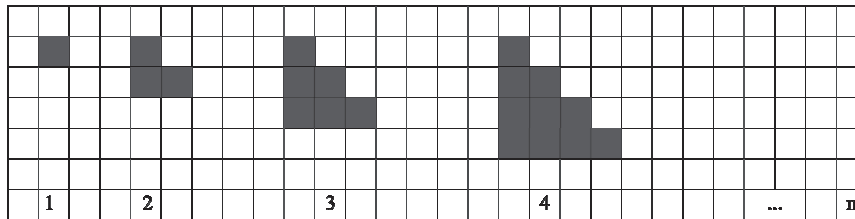
146	 אינדוקציה מתמטית
148	 אינדוקציות – הוכחת תכונות התחלקות
167	 אינדוקציות – הוכחת שוויונות (אישור זהויות)
198	 אינדוקציות עם כלל נסיגה – הוכחת תכונות התחלקות
200	 אינדוקציות עם כלל נסיגה – התלכדות של סדרות
203	 אינדוקציות – שאלות לחזרה

סדרות

פרק זה כולל שאלות בנושא סדרות בהתאם לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד שבספר 806 כרך ג' מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. חלק מהשאלות מדגישות רעיון מסוים (ויזואליות, קריאת נתונים מטבלה או מגרף וכו'), וחלקן מתאימות לבחינת הבגרות (כשאלות קצרות או ארוכות).

סדרה חשבונית

1. לפניכם סדרה של צורות:



- כיצד תיראה צורה מספר 5 בסדרה זו? שרטטו אותה.
- כמה משבצות בסך הכול יש בצורה מספר 60?
- בצורה מספר n יש S_n משבצות. רשמו ביטוי ל- S_n כפונקציה של n בלבד.

2. a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d , שונה מ-0. נתון: $a_7 = -a_{17}$.
א. מצאו את a_{12} .

- האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל- $-a_1$? נמקו.
- (2) מצאו מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל-0.
- האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן - מצאו n כזה, אם לא - נמקו.
- האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמקו. (הבחינו בין מקרים שונים).

3. בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.
סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.
א. הוכיחו שסכום n האיברים הראשונים בסדרה החשבונית הוא 0.
ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0. מצאו את מספר איברי כל הסדרה.
ג. הערך של סכום כל איברי הסדרה הוא 726. מצאו את הפרש הסדרה.

n	1	2	3	4
a_n		21	27	

4. לפניכם טבלה המתארת ערכים של איברים מסוימים בסדרה חשבונית A , שבה 17 איברים.
א. מהו האיבר האמצעי בסדרה A ?
ב. המספר שמצאתם בסעיף א' הוא איבר אמצעי בסדרה חשבונית אחרת B שבה 41 איברים.
ג. האיבר האחרון באותה סדרה B שווה ל-17. מהו האיבר הראשון בסדרה B .
ד. חשבו את סכום האיברים החיוביים בסדרה B .

5. נתונות שתי סדרות חשבוניות. סדרה עולה A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$. סדרה עולה B שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, \dots$. בגרף שלפניכם מתוארים האיבר הראשון של כל סדרה. נתון: $a_1 < b_1$. כמו כן, נתון האיבר הרביעי של סדרה B. א. מצאו את ההפרש של סדרה B. ב. בסדרה B ישנם 19 איברים, בסדרה A ישנם 16 איברים. הסכום של שתי הסדרות שווה. (1) מהו הפרש הסדרה A? (2) מהם שיעורי הנקודה המייצגת את האיבר האחרון בסדרה A?
-

6. נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא: $S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)]$. א. הביעו באמצעות n את הסכום $[2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)]$. ב. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה. ג. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ-102. (1) כמה איברים בסדרה הנתונה קטנים מ-102? (2) חשבו את הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל עבור סכום מסוים של איברים כאלה (לא דווקא הסכום של כל האיברים).

7. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 2k + 7$, $a_4 = 8k - 8$. k הוא פרמטר. מצאו עבור אילו ערכים של k : א. הסדרה החשבונית עולה. ב. הסדרה החשבונית יורדת. ג. הסדרה החשבונית לא עולה ולא יורדת.

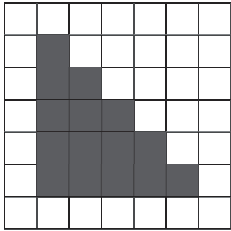
8. נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots$. שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} , מקיימים: $a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$ ו- $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$. א. מצאו את האיבר a_n ואת הפרש הסדרה. ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה: $a_5, a_9, a_{13}, \dots, a_{4k+1}$. הראו שבסדרה החדשה ישנם k איברים. ג. סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450. האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתית הוא $a_1 = -21$. מצאו את הערך של k .

9. א. נתונה סדרה חשבונית שהפרשה 12 ומספר איבריה 10. בין כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה הכניסו שני איברים, כך שנוצרה סדרה חשבונית נוספת. רשמו את הפרש הסדרה המתקבלת ואת מספר איבריה. ב. נתונה סדרה חשבונית שהפרשה d ומספר איבריה n . בין כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה הכניסו k איברים, כך שנוצרה סדרה חשבונית נוספת. הביעו את הפרש הסדרה המתקבלת ואת מספר איבריה. תוכלו להיעזר ב- k, n, d .

10. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3.
 א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף,
 ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.
 (1) הביעו באמצעות n את מספר האיברים בסדרה החדשה.
 (2) הראו כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא $\frac{2n-1}{n}$.
 (3) נתון כי היחס שמופיע בתת-סעיף א(2) שווה ל-1.9.
 הסכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5.
 מצאו את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.
 ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה הנתונה.
 הביעו באמצעות k את הפרש הסדרה המתקבלת.
11. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים ($n > 2$): $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$.
 הפרש הסדרה הנתונה הוא d .
 מהסדרה הנתונה בנו סדרה חדשה של הפרשי ריבועים: $a_2^2 - a_1^2, a_3^2 - a_2^2, \dots, a_n^2 - a_{n-1}^2$.
 א. הוכיחו כי הסדרה החדשה היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא $2d^2$.
 ב. הביעו באמצעות n את מספר האיברים בסדרה החדשה.
 ג. נתון: $a_2^2 - a_1^2 = 64$.
 הביעו את האיבר האחרון בסדרה החדשה באמצעות n ו- d .
 ד. נתון גם: $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 192, d^2 > 1$.
 מצאו את תחום הערכים של n .
12. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_n$ שהפרשה d ובה n איברים בונים סדרה חשבונית חדשה שהאיבר הראשון שלה מתקבל על ידי כך שמחברים את k האיברים הראשונים, האיבר השני שלה מתקבל על ידי כך שמחברים את k האיברים הבאים אחריהם, אחר כך מחברים את k האיברים הבאים אחריהם וכן הלאה (n מתחלק ב- k ללא שארית) באופן הבא: $(a_1 + a_2 + \dots + a_k), (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}), \dots$.
 א. הביעו באמצעות n ו- k את מספר איברי הסדרה החשבונית החדשה.
 ב. הראו שהפרש הסדרה החשבונית החדשה הוא k^2d .
 ג. הביעו באמצעות a_1, d ו- n את סכום האיברים בסדרה החדשה.
13. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{33}$ שהפרשה d ובה 33 איברים.
 מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חשבונית חדשה על ידי חיבור של כל 8 איברים סמוכים באופן הזה: $(a_1 + a_2 + \dots + a_8), (a_2 + a_3 + \dots + a_9), (a_3 + a_4 + \dots + a_{10}), \dots$.
 א. מצאו את מספר האיברים בסדרה החדשה.
 ב. מצאו את הפרש הסדרה החשבונית החדשה.
 ג. האיבר הראשון בסדרה החדשה הוא 100 וסכום איבריה הוא 10,400.
 מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה הנתונה.

14. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n הוא מספר טבעי).
 סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ-0.
 א. (1) הראו כי סכום הסדרה שווה ל- $(2n+3) \cdot a_{n+2}$.
 (2) מצאו את מספר האיברים בסדרה.
 ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב-40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.
 (1) מצאו את האיבר האמצעי.
 (2) מצאו את סכום הסדרה.
 ג. נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$. קבעו אם הסדרה עולה או יורדת.
 מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל k איברים סמוכים (k הוא מספר טבעי),
 באופן הזה: $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$, $(a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1})$, $(a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2})$, ...
 ד. הביעו באמצעות k את מספר האיברים בסדרה החדשה.

תשובות:

1. א.
 ב. 1,830 משבצות.
 ג. $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$.
- 
2. א. $a_{12} = 0$. ב. (1) כן, $a_{23} = -a_1$. (2) $n = 23$. ג. לא.
 ד. אם האיבר הראשון שלילי, הסדרה עולה וישנם 11 איברים שליליים.
 אם האיבר הראשון חיובי, הסדרה יורדת ולא ניתן לדעת כמה איברים שליליים ישנם.
3. ב. 33 איברים. ג. $d = 2$. ד. א. $a_9 = 63$. ב. 143. ג. 2,628.
5. א. $\frac{1}{3}$. ב. (1) 1.025. (2) (16;18.375). 6. א. $2n^2$. ב. $a_n = 6n - 8$. ג. (1) 18 איברים. (2) 884.
7. א. $k > 2.5$. ב. $k < 2.5$. ג. $k = 2.5$. 8. א. $a_n = 15$, $d = 3$. ג. $k = 10$.
9. א. הפרש 4, מספר איברים 28. ב. הפרש $\frac{d}{k+1}$, מספר איברים $nk - k + n$.
10. א. (1) $(2n-1)$ איברים. (3) $a_1 = 1$. ב. $d = \frac{3}{k+1}$.
11. ב. $(n-1)$ איברים. ג. $64 + (n-2) \cdot 2d^2$. ד. $2 < n < 66$.
12. ב. $\frac{n}{k}$. ג. $\frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$. 13. א. 26. ב. $8d$. ג. $d = 3$, $a_1 = 2$.
14. א. (1) הוכחה. (2) 43. ב. (1) 40. (2) 1720. ג. עולה. ד. $44 - k$.

סדרה הנדסית (כולל סדרה אינסופית שסכומה מתכנס)

1. בסדרה הנדסית האיבר הראשון a_1 הוא חיובי.
 - א. דני טוען שהסדרה בהכרח עולה. האם הוא צודק?
 - ב. קבעו בכל אחד מהמקרים הבאים, האם הסדרה עולה או יורדת:
 - (1) המנה מקיימת $q > 1$.
 - (2) המנה מקיימת $0 < q < 1$.
 - ג. האם קיימת סדרה הנדסית יורדת שכל איבריה חיוביים?

2. נתונה סדרה הנדסית שמנתה q גדולה מ-1.
 - א. אילנה טוענת שהסדרה עולה. האם היא צודקת?
 - ב. קבעו בכל אחד מהמקרים הבאים, האם הסדרה עולה או יורדת:
 - (1) האיבר הראשון a_1 הוא חיובי.
 - (2) האיבר הראשון a_1 הוא שלילי.
 - ג. האם קיימת סדרה הנדסית עולה שכל איבריה שליליים?

3. נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
 - ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4 מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.
 - האיבר השישי בסדרה גדול ב-31 מהאיבר הראשון.
 - א. מצאו את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.
 - ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו-II:
 - I. $a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots, a_n \cdot a_{n+1}, a_{n+1} \cdot a_{n+2}$
 - II. $\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$
 - (1) הביעו באמצעות n את מספר האיברים בכל סדרה.
 - (2) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמקו.
 - הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730.
 - ג. (1) מצאו את מספר האיברים בסדרה I.
 - (2) מצאו את הסכום של כל האיברים בסדרה II.

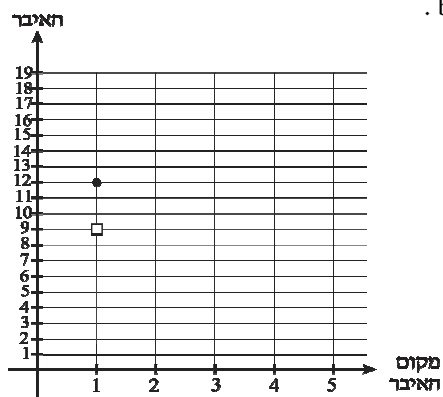
4. נתונה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה S , איברה הראשון a_1 ומנתה q .
 - נתון כי איברי הסדרה הם שליליים.
 - א. קבעו איזו טענה מהטענות (1)-(4) היא הנכונה:
 - (1) $q > 1$
 - (2) $0 < q < 1$
 - (3) $-1 < q < 0$
 - (4) $q < -1$
 - ב. האם הסדרה עולה או יורדת? נמקו.
 - ג. קבעו מה מהבאים נכון: (1) $S > 0$ (2) $S < 0$.

5. נתונה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה מתכנס, איבר הראשון a_1 ומנתה q .

א. הסבירו מדוע בנוסחת הסכום $S = \frac{a_1}{1-q}$ המכנה תמיד חיובי.

ב. בהתבסס על סעיף א', הסבירו כל אחת מהטענות הבאות:

(1) אם $a_1 > 0$, אז $S > 0$. (2) אם $a_1 < 0$, אז $S < 0$.



6. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין-סופיות מתכנסות, a_n ו- b_n . בגרף שלפניכם, האיבר הראשון של אחת הסדרות מתואר באמצעות נקודה עגולה מלאה, והאיבר הראשון של הסדרה האחרת מתואר באמצעות נקודה ריבועית ריקה. נתון: $a_1 > b_1$.

א. מהו a_1 ומהו b_1 ?

ב. המנה של הסדרה a_n היא q ,

והמנה של הסדרה b_n היא $\frac{1}{2}q$.

נתון כי סכום הסדרה a_n גדול פי 2

מסכום הסדרה b_n . חשבו את q .

7. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$.

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$.

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3.

א. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

ב. הוכיחו כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ג. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25. מצאו את הערך של n .

8. a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו- q היא מנת הסדרה.

א. לפניכם ארבע טענות (I – IV). רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציינו את מספרה ונמקו.

(I) $q < 0$. (II) $a_1 < 0$ וגם $q < 0$. (III) $a_1 < 0$. (IV) $a_1 < 0$ או $q < 0$.

נסמן ב- T את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n ,

ונסמן ב- R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n . p הוא פרמטר. נתון: $T + p \cdot R = 0$.

ב. הביעו את p באמצעות q .

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p .

ג. האם b_n היא סדרה שסכומה מתכנס? נמקו.

ד. נתון: p שלילי. הראו שלכל n טבעי $a_{n+1} > a_n$ (כלומר הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

9. a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q ($q \neq 1$). נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשבו את a_5 (מצאו את שתי האפשרויות).

ב. נתון: $a_5 > 0$.

(1) הביעו את a_1 באמצעות q .

(2) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן- מצאו אותו. אם לא- נמקו.

(3) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן- מצאו אותו. אם לא- נמקו.

ג. (1) הביעו באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

(2) נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי).

מצאו את הערך של k , והסבירו מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k .

10. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצאו את המנה של הסדרה a_n .

ב. (1) הוכיחו כי הסדרה b_n המוגדרת על ידי $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$ היא סדרה הנדסית.

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460.

מצאו את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

11. נתונה סדרה כללית a_n . נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הביעו את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $1 < n$ באמצעות n ו- k במידת הצורך.

ב. מצאו את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמקו.

ג. נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$. חשבו את T .

12. נתונה סדרה a_n : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ונתונה סדרת הסכומים S_n : $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$

S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$.

א. הוכיחו כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$. הסבירו מדוע הסדרה a_n היא אינסופית שסכומה מתכנס.

ג. בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו-II:

I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$

II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots$

T הוא הסכום של אין-סוף איברי הסדרה I, M הוא הסכום של אין-סוף איברי הסדרה II.

הביעו באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשטו את הביטוי ככל האפשר.

תשובות:

1. א. דני לא צודק. ב. (1) עולה. (2) יורדת. ג. כן, כאשר $a_1 > 0$ ו- $0 < q < 1$.
2. א. אילנה לא צודקת. ב. (1) עולה. (2) יורדת. ג. כן, כאשר $a_1 < 0$ ו- $0 < q < 1$.
3. א. $a_1 = 1$, $q = 2$.
- ב. (1) בסדרה I יש $(n+1)$ איברים. בסדרה II יש n איברים.
(2) סדרה I הנדסית עולה (המנה שלה היא 4),
סדרה II היא סדרה קבועה, אינה סדרה הנדסית עולה.
- ג. (1) 6 איברים. (2) 20.
4. א. הנכון הוא (2). כדי שאיברי הסדרה יהיו שליליים תמיד (כלומר לא יחליפו סימן),
המנה חייבת להיות חיובית. מאחר שסכום הסדרה גם מתכנס, נקבל שמתקיים $0 < q < 1$.
ב. כאשר כופלים מספר שלילי ב- $0 < q < 1$, המספר מתקרב לאפס, כלומר ככל
שמתקדמים בסדרה, האיברים השליליים מתקרבים לאפס, ולכן הסדרה עולה.
ג. כל האיברים שליליים, ולכן סכומם שלילי, כלומר $S < 0$ והתשובה היא (2).
5. א. המנה q קטנה מ-1, ולכן המכנה $1-q$ תמיד חיובי (ידוע $q < 1$, ולכן $0 < 1-q$).
ב. (1) אם $a_1 > 0$, אז בשבר $\frac{a_1}{1-q}$ המונה וגם המכנה חיוביים, לכן השבר חיובי ו- $S > 0$.
(2) אם $a_1 < 0$, אז בשבר $\frac{a_1}{1-q}$ המונה שלילי והמכנה חיובי, לכן השבר שלילי ו- $S < 0$.
6. א. $a_1 = 12$, $b_1 = 9$. ב. $q = \frac{1}{2}$.
7. א. $a_1 = 12$, $q = \frac{1}{3}$. ג. $n = 7$.
8. א. טענה III (סכום הסדרה הוא $\frac{a_1}{1-q}$, כמו כן $-1 < q < 1$, לכן כש- a_1 שלילי הסכום שלילי).
ב. $P = -\frac{1}{q}$. ג. לא מתכנסת ($-1 < q < 1$, ולכן $p > 1$ או $p < -1$). ד. הוכחה.
9. א. $a_5 = 1$ או $a_5 = -1$. ב. (1) $a_1 = \frac{1}{q^4}$. (2) $n = 9$. (3) אין כזה.
ג. (1) $q^2, q, 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^4}$. (2) $k = 9$.
10. א. $\frac{1}{2}$. ב. (1) הוכחה. מנת הסדרה b_n היא 2. (2) $\frac{1}{20}$.
11. א. $a_1 = k - \frac{1}{9}$, $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$. ב. $k = \frac{1}{3}$. ג. $T = \frac{1}{182}$.
12. א. $\frac{M}{T} = \frac{1-b^2}{b^2}$. ב.

שאלות המשלבות סדרה חשבונית וסדרה הנדסית

1. במפעל לתעשייה קלה החלו לייצר חולצות. בכל שבוע כמות החולצות שייצרו הייתה גדולה במספר קבוע מכמות החולצות שייצרו בשבוע שלפניו. בשבוע הראשון ייצרו 3,000 חולצות. הייצור נמשך 30 שבועות. בתקופה זו ייצרו חולצות סך הכול 177,000 חולצות.
 - א. בכמה הייתה גדולה כמות החולצות שייצרו בכל שבוע מן הכמות שייצרו בשבוע שלפניו?
 - ב. כמה הייצור מכר המפעל את החולצות במשך כמה חודשים.
 - ג. כמות החולצות שנמכרו בכל חודש הייתה גדולה פי q מכמות החולצות שנמכרו בחודש שלפניו. בחודש הרביעי נמכרו 640 חולצות.
 - ד. מספר החולצות שנמכרו בחודש החמישי גדול פי 8 ממספר החולצות שנמכרו בחודש השני.
 - ה. כמה חולצות נמכרו בחודש הראשון?
 - ו. החודש השישי היה החודש האמצעי של חודשי המכירה. כמה חודשים נמשכה המכירה?
 - ז. כמה מן החולצות שייצרו במפעל לא נמכרו?
2. נתונה סדרה חשבונית A , ובה 16 איברים $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. האיבר השמיני בסדרה גדול פי 4 מהאיבר הראשון. האיבר האחרון בסדרה הוא 52.
 - א. מצאו את הפרש הסדרה ואת a_1 .
 - ב. נתונה סדרה הנדסית אינסופית B שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$. נתון: $b_3 = a_2, b_1 = a_{12}$.
 - ג. מצאו את מנת הסדרה. כתבו את שתי האפשרויות.
 - ד. נתון כי הסדרה B היא סדרה יורדת.
 - ה. חשבו את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי זוגיים בסדרה B .
3. נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות שסכומן מתכנס.
 - א. הסדרה הראשונה היא סדרה A שהמנה שלה היא q : $a_1, a_2, a_3, \dots$ ($a_1 \neq 0$).
 - ב. הסדרה השנייה היא סדרה B שהמנה שלה היא 0.5: $b_1, b_2, b_3, \dots$ ($b_1 \neq 0$).
 - ג. משתי הסדרות בונים סדרה הנדסית C אינסופית מתכנסת חדשה $c_1, c_2, c_3, \dots$ המקיימת לכל טבעי: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.
 - ד. הביעו את המנה של הסדרה c_n באמצעות q .
 - ה. הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.
 - א. לגבי כל אחד מההיגדים (1) – (2), קבעו אם הוא נכון או לא נכון.
 - ב. (1) כל איברי הסדרה B הם שליליים.
 - ג. (2) הסדרה החדשה יורדת.
 - ו. נתון כי מנת הסדרה A , מנת הסדרה B ומנת הסדרה C הם שלושה איברים ראשוניים של סדרה חשבונית, בסדר זה. מצאו את הפרש הסדרה החשבונית.
 - ז. נתון כי סכום ארבעת האיברים האחרונים של הסדרה החשבונית הוא 13.
 - ח. חשבו את סכום באיברים העומדים במקומות הזוגיים של הסדרה החשבונית.

4. סכום n האיברים הראשונים של סדרה נתונה A הוא $S_n = -2n^2 + 5n + c$.
- א. הביעו באמצעות n את האיבר הכללי a_n של הסדרה הנתונה, בעבור $n \geq 2$.
- ב. (1) בעבור איזה ערך של c הסדרה הנתונה היא סדרה חשבונית לכל n טבעי?
 (2) מהו הערך של d , הפרש הסדרה החשבונית?
- ג. נתונה סדרה הנדסית אינסופית B שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$.
- נתון: האיבר הראשון b_1 של הסדרה B שווה להפרש d של הסדרה החשבונית.
 מנת הסדרה B שווה ל- $-\frac{3}{d}$.
- (1) הסבירו מדוע סכום הסדרה B הוא מתכנס.
- (2) האם הסדרה B עולה או יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו.
- (3) חשבו את הסכום $-b_1 - b_3 - b_5 - b_7 - \dots$.

תשובות:

1. א. 200 חולצות. ב. 80 חולצות. ג. 11 חודשים. ד. 13,240 חולצות.
2. א. הפרש הסדרה הוא 3, $a_1 = 7$. ב. $q = 0.5$ או $q = -0.5$. ג. 80.
3. א. $\frac{q}{0.5} = 2q$. ב. (1) נכון. (2) לא נכון. ג. $d = \frac{1}{6}$. ד. 20.
4. א. $a_n = -4n + 7$. ב. (1) $c = 0$. (2) $d = -4$. ג. (1) $0 < q = \frac{3}{4} < 1$. (2) עולה. (3) $9\frac{1}{7}$.

סדרות מסוגים שונים, כלל נסיגה

1. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_n + a_{n+1} = 4n + 2$, $a_1 = 4$.
 א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצאו את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.
 ב. הוכיחו כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.
 אם בסדרה יש 101 איברים, מצאו:
 ג. את ערך האיבר העומד באמצע הסדרה.
 ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.
2. נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$.
 א. הוכיחו כי מתקיים $a_{n+2} = a_n + c$ (c הוא מספר קבוע), ומצאו את c .
 ב. כתבו דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתבו לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).
 ג. נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית. חשבו את a_1 .
 ד. בנו סדרה חדשה בת $2n+1$ איברים: $a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, \dots, a_{2n+1} - (2n+1)$.
 האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43. חשבו את סכום הסדרה החדשה.
3. נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל $b_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot b_n}$.
 א. הוכיחו כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית, וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.
 מהי המנה של כל אחת מהסדרות הללו?
 ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- $3\frac{7}{16}$.
 (1) הביעו את b_2 באמצעות b_1 .
 (2) מצאו את b_1 (מצאו את שתי האפשרויות).
4. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1 = -\frac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.
 א. הוכיחו כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים גם הם סדרה הנדסית.
 ב. (1) רשמו את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . הביעו את תשובתכם באמצעות c אם יש צורך.
 (2) הביעו באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .
 (3) הוכיחו שלכל n טבעי, הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב- n .
 ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.
 (1) הראו כי b_n היא סדרה הנדסית.
 (2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?
 (3) נתון שהסדרה האינ-סופית b_n היא סדרה יורדת. הביעו באמצעות c את סכומה.

5. סדרה מוגדרת לכל n טבעי באמצעות הנוסחה $a_n = \sin(n\pi + \frac{\pi}{3})$.
 א. חשבו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. מצאו את סכום 100 האיברים הראשונים בסדרה.
6. נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.
 א. מצאו את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n .
 הסדרה S_n היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n : $S_1, S_2, S_3, \dots$.
 נתון כי $S_n = n \cdot a_n$ לכל n טבעי.
 ב. הראו כי הפרש הסדרה a_n הוא 0.
 ג. היעזרו בסעיפים הקודמים, ומצאו את a_1 .
 ד. נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$ לכל n טבעי.
 (1) חשבו את ההפרש $(b_2 - b_1)$. (2) חשבו את ההפרש $(b_{20} - b_{19})$.
 ה. היעזרו בסעיפים הקודמים, ומצאו את הסכום $(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{20} - b_{19})$.
7. נתונה סדרה $a_n = \frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{2^n}$. b_n ו- c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים,
 המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$. נתון: $c_3 = \frac{1}{8}$, $b_6 = 64$.
 א. (1) מצאו את a_3 ואת b_3 . (2) מצאו את a_6 ואת c_6 .
 ב. (1) מצאו את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n . (2) מצאו את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n .
 את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב- A_n ,
 את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב- B_n ,
 ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב- C_n .
 ג. הראו ש- $C_n = B_n - A_n$.
 ד. עבור אילו ערכי n מתקיים האי-שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?

תשובות:

1. א. $a_{50} + a_{51} = 202$. ב. $a_{n+2} - a_n = 4$. ג. $a_{51} = 104$. ד. $S_{101} = 10,304$.
2. א. $c = 6$. ב. $0, 11, 6, 17$. ג. $a_1 = 4$. ד. $1, 763$.
3. א. המנה של כל אחת מהסדרות היא $(q = \frac{1}{2})$. ב. (1) $b_2 = \frac{1}{2b_1}$. (2) $b_1 = \frac{1}{3}$ או $b_1 = 1\frac{1}{2}$.
4. ב. (1) $a_7 = -c^2$, $a_6 = c^2$, $a_5 = -c$, $a_4 = c$, $a_3 = -1$, $a_2 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{c}$.
 (2) $S_7 = -\frac{1}{c}$. (3) הוכחה. ג. (1) הוכחה. (2) $c > 1$. (3) $S = \frac{2c^2}{c-1}$.
5. א. $a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ב. 0.
6. א. $1,064$. ג. $a_1 = 56$. ד. (1) 112 . (2) $1,120$. ה. $11,704$.
7. א. (1) $a_3 = 7\frac{7}{8}$, $b_3 = 8$. (2) $a_6 = 63\frac{63}{64}$, $c_6 = \frac{1}{64}$. ב. (1) $b_1 = 2$, $q_b = 2$. (2) $c_1 = \frac{1}{2}$, $q_c = \frac{1}{2}$. ד. $n \geq 4$.

הסתברות

פרק זה כולל שאלות בנושא הסתברות בהתאם לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד שבספר 806 כרך ד' מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. רוב השאלות מתאימות לבחינת הבגרות (כשאלות קצרות או ארוכות).

1. חברה מייצרת טלפונים ניידים חדשניים עם "מסך תלת ממד". כדי לבדוק את הביקוש לטלפונים אלה, ערכה החברה סקר טלפוני. בסקר השתתפו צעירים ומבוגרים. חלק מהמשתתפים בסקר הצהירו שלא יקנו את הטלפון החדשני והשאר הצהירו שיקנו אותו. נמצא כי 50% מהמבוגרים הצהירו כי יקנו את הטלפון החדשני. $\frac{2}{3}$ מבין אלה שהצהירו כי לא יקנו את הטלפון החדשני, היו צעירים. $\frac{1}{5}$ מהמשתתפים בסקר היו צעירים שגם טענו כי לא יקנו את הטלפון החדשני.
א. בסקר השתתפו 2000 איש. כמה צעירים השתתפו בסקר?
ב. כמה צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני?
2. מבין כל תלמידי י"ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי. הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית. הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית, ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית. מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו.
א. מהי ההסתברות שתלמיד י"ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית?
ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם. בעיר יש 600 תלמידי י"ב.
מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?
3. במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים, 40% היו ממושבים ו-40% היו מערים. 70% מן הנבחנים הצליחו במבחן. $\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן. ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.
א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?
ב. משה הצליח במבחן. מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

4. בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.
 37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן.
 $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.
 מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.
 א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?
 ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמקו.
 ג. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא לא נעזר בחבריו ועבר את המבחן?
 ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן.
 מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I – II :
 (I) התלמיד נעזר בחבריו.
 (II) התלמיד לא עבר את המבחן.
5. בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י"ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות.
 נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הבגרות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הבגרות. א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הבגרות היא 0.9. שיעורם של הנכשלים בבחינת הבגרות מכלל התלמידים שניגשו לבחינה בשנה זו היה 20%.
 (1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הבגרות?
 (2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת. מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הבגרות?
 (3) בוחרים באקראי תלמיד שנכשל בבחינת הבגרות. מהי ההסתברות שהוא נכשל גם בבחינת המתכונת?
 ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע "עבר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את בחינת הבגרות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הבגרות בשנה זו היא a ($0 < a < 1$). הביעו באמצעות a את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו.
6. בחדר I נמצאים k נשים ו- k גברים ($k > 1$).
 בחדר II נמצאים k נשים ו- $3k$ גברים.
 מטילים קובייה מאוזנת.
 אם מתקבל מספר המתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I.
 אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II.
 כאשר בוחרים באופן זה, הסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי $\frac{15}{7}$ מההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II.
 א. מצאו את k .
 ב. מצאו את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.
 ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר. מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I?

7. בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים.
 בקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים.
 מוציאים באקראי כדור מקופסה I.
 אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.
 אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.
 שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II, ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.
 לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.
 א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.
 חשבו את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.
- ענו על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבתם בסעיף א.
 ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?
 ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.
 מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?
8. בשק יש 80 כדורים. מקצתם עשויים מזכוכית והשאר עשויים מפלסטיק.
 20 מן הכדורים שבשק הם כחולים והשאר צהובים. 70% מן הכדורים שבשק הם כדורים צהובים מפלסטיק. 25% מן הכדורים העשויים זכוכית הם צהובים.
 א. כמה כדורים מפלסטיק יש בשק?
 ב. הוציאו באקראי כדור מן השק וחזירו אותו לשק.
 (1) מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו הוא כדור כחול מזכוכית?
 (2) ידוע שהכדור שהוציאו מן השק הוא כחול. מהי ההסתברות שהוא מזכוכית?
 ג. הוציאו באקראי כדור מן השק וחזירו אותו לשק. את הפעולה הזאת (הוצאה וחזרה) עשו 3 פעמים. מהי ההסתברות שבדיוק 2 מן הכדורים שהוציאו הם צהובים?
9. נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ-0) והשאר הן ספרות אי-זוגיות. יוני יוצר מספר דו ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:
 הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות, והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.
 יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.
 א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי-זוגי היא $\frac{4}{7}$.
 מהו מספר הספרות האי-זוגיות בקבוצה הנתונה?
 ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?
 אמילי יוצרת מספר תלת-ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:
 הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות, הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות, והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.
 אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.
 ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.
 מהי ההסתברות שבמספר התלת-ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

10. הוועדה המארגנת של תחרות "נולד לשיר" מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א' או יצטרפו אליו שני שופטים נוספים: שופט ב' ושופט ג'.
ההצבעה של שופט א' לא תשתנה אם הוא ישפוט לבד או אם ישפוט עם האחרים.
ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים.
אם ישפוט בתחרות רק שופט א' – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם השופט יצביע בעדו.
אם ישפוט שלושת השופטים – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם לפחות 2 מהשופטים יצביעו בעדו. יוסי הוא אחד המתמודדים בתחרות.
נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו.
ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5.
א. האם ההסתברות, שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק שופט א', שווה להסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות שלושת השופטים? נמקו.
ב. לבסוף הוחלט שבתחרות ישפוט שלושת השופטים.
נתון כי ההסתברות, ששופט א' הצביע בעד יוסי אם ידוע כי יוסי עבר לשלב נוסף בתחרות, גדולה מ-0.8. מצאו את תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי.
11. נערך סקר בקרב מספר גדול של סטודנטים (בנים ובנות).
חצי מהסטודנטים המשתתפים בסקר היו בנים.
בסקר נמצא כי מספר הבנות הסובלות מרעש גדול פי 3 ממספר הבנים הסובלים מרעש.
נמצא גם כי 5% מבין הבנים סובלים מרעש.
א. ידוע כי אחד המשתתפים בסקר שנבחר באקראי, סובל מרעש.
מהי ההסתברות שהנבחר הוא בת?
ב. בחרו באקראי 5 סטודנטים מבין משתתפי הסקר.
ידוע כי לכל היותר 2 מבין הסטודנטים שנבחרו באקראי, סובלים מרעש.
מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם סובל מרעש?
12. בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים. נמצא כי המאורע "תושב העיר המשתתף בחוג לריקודי עם" והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.
מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון. מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.
א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?
ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם. עיתונאי ראיון 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?
13. מבין העובדים בחברה גדולה בוחרים באקראי 4 עובדים.
ההסתברות שלכל היותר ל-3 עובדים יש השכלה גבוהה היא $\frac{255}{256}$.
א. לאיזה אחוז מהעובדים יש השכלה גבוהה?
ב. מהי ההסתברות שמבין 4 עובדים שבוחרים באקראי, ל-3 אין השכלה גבוהה?
ג. 40% מעובדי החברה הן נשים. ל- $\frac{1}{4}$ מהנשים יש השכלה גבוהה.
מבין העובדים שיש להם השכלה גבוהה בחרו באקראי שני עובדים.
מהי ההסתברות ששני העובדים הם נשים?

14. בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי: מסלול א' או מסלול ב'.
נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.
10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.
40% מן התלמידים הם בנות.
א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת). מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?
ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת" והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א'" הם מאורעות בלתי תלויים? נמקו.
ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.
נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.
(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות).
כמה בנות נבחרו?
15. אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.
המנצח בסיבוב מקבל נקודת אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.
נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1,
ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2,
ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7.
הסיבובים אינם תלויים זה בזה.
א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?
ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?
ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.
מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?
ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתח. (בכל משחק שני סיבובים).
מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?
16. ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.
מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות: קבוצה של 4 אנשים (נשים/גברים) לריאיון ברדיו וקבוצה של 4 אנשים (נשים/גברים) לריאיון בטלוויזיה.
א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?
ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.
מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?
17. במכונת מזל אפשר לזכות ב- 50 שקל, ב- 100 שקל או לא לזכות כלל.
דן משחק 5 משחקים במכונה זו.
ההסתברות שדן יזכה ב- 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות שהוא יזכה ב- 50 שקל בדיוק פעם אחת. (ההסתברות לזכות ב- 50 שקל שונה מאפס).
ההסתברות שדן לא יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.
א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב- 50 שקל במשחק בודד?
ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב- 100 שקל במשחק בודד?
ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב- 100 שקל בדיוק.
מהי ההסתברות שהוא לא זכה ב- 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

18. חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים. חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית. כל הסטודנטים שמביאים אוכלים מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה. הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום. א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית. (1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית? (2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם? ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום. (1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה? (2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים במשך היום?
19. שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו. יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים. ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר. א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב-2 משחקים או ב-3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב-4 משחקים. חשבו את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד. בסבב השני יש 2 משחקים. ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון – היא 0.34. ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד? ג. חשבו את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.
20. למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4. לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3. מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת. המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר. נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$. א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמקו את תשובתכם. ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק? ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

21. א. מחלקים 2 כדורים לבנים וכדור 1 שחור בין שני כדים.
 בכל כד חייב להיות לפחות כדור אחד.
 בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו כדור אחד.
 מצאו באיזה אופן צריך לחלק את הכדורים בין שני הכדים,
 כדי שהסיכוי להוציא כדור לבן יהיה הגדול ביותר.
 ב. בכד אחד יש 5 כדורים: 2 לבנים ו-3 שחורים.
 (1) מוציאים באקראי 5 פעמים כדור מהכד עם החזרה (בכל פעם מחזירים לכד את הכדור שהוצא).
 מהי ההסתברות להוציא בדיוק פעמיים כדור לבן?
 (2) מוציאים באקראי 6 פעמים כדור מהכד עם החזרה.
 מהי ההסתברות להוציא בדיוק 3 פעמים כדור לבן,
 כך שהכדור הלבן השלישי יוצא בפעם השישית?
הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

22. אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חצים למטרה.
 הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא $P > 0$, ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.
 כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.
 הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה
 לפגוע בה בכל חמש הזריקות.
 א. מצאו את P .

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה
 גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).
 ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?
 ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?
 (2) גם תמר משתתפת במשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- P
 ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.
 תמר החטיאה בזריקה הראשונה. מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

23. בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו-8 כדורים צהובים.
 על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.
 $\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.
 מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים
 שרשומה עליהם הספרה 0.
 דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.
 א. מה ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה 1?
 ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול או כדור שרשומה עליו הספרה 1,
 מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק:
 הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.
 בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.
 הוא יפסיק לשחק כאשר יצבור 5 נקודות.
 ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק.

24. בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.
 אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות של-4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות של-6 מהם בדיוק יש קלנועית.
 א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?
 ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל-3 מהם יש קלנועית. מהי ההסתברות של-4 מהם בדיוק יש קלנועית?
 ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד של-3 מהם בדיוק יש קלנועית. מהי ההסתברות שייבחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

25. גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים.
 בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.
 המנצחת במשחק כולו תהיה זו שתזכה ביותר סיבובים מחברתה.
 אם לשתיהן מספר שווה של זכויות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.
 נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא $\frac{1}{3}$.
 א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.
 (1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?
 (2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?
 ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.
 הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של 4 הסיבובים תהיה תיקו-
 הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר סיבובים,
 תנצח במשחק כולו. מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?
 ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני.
 מהו הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?

26. במבחן רב-ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.
 לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.
 התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.
 תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.
 תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.
 כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.
 א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
 בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.
 (1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
 (2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?
 ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
 בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת,
 מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
 מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
 ג. על 3 מן השאלות ידע הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.
 בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש- k מבין 4 התשובות המוצגות
 אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
 ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות
 שהיא תצבור 100 נקודות במבחן. מצאו את k . נמקו.

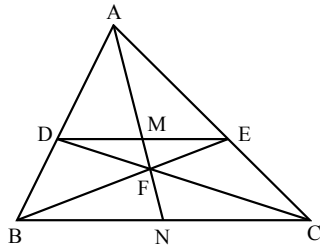
תשובות:

1. א. 1600 צעירים. ב. 1200.
2. א. $\frac{1}{3}$. ב. 40 תלמידים.
3. א. $\frac{1}{2}$. ב. $\frac{1}{2}$.
4. א. $\frac{2}{9}$. ב. כן ($\frac{35}{37} > \frac{56}{63}$). ג. 0.56. ד. 0.44.
5. א. (1) 180 תלמידים. (2) 0.4. (3) 0.6. ב. $a - a^2$.
6. א. $k = 4$. ב. $\frac{11}{105}$. ג. $\frac{15}{188}$.
7. א. מספר הכדורים הכחולים הוא 5. ב. 0.3595. ג. 0.5338.
8. א. 64 כדורים. ב. (1) $\frac{3}{20}$. (2) $\frac{3}{5}$. ג. $\frac{27}{64}$.
9. א. 4 ספרות אי-זוגיות. ב. $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{7}{15}$.
10. א. הסתברות שווה. ב. $0.6 < P \leq 1$.
11. א. $\frac{3}{4}$. ב. $\frac{45}{136}$.
12. א. 18%. ב. 0.579825.
13. א. 25%. ב. $\frac{27}{64}$. ג. 0.16.
14. א. 0.48. ב. לא, המאורעות הם מאורעות תלויים. ג. שתי בנות.
15. א. 0.32. ב. 0.68. ג. $\frac{7}{34}$. ד. 0.2841.
16. א. $\frac{64}{729}$. ב. $\frac{8}{11}$.
17. א. $\frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{6}$. ג. $\frac{3}{5}$.
18. א. (1) 80%. (2) 0.8322. ב. (1) 8%. (2) $\frac{10}{11}$.
19. א. $\frac{1}{2}$. ב. 0.3. ג. $\frac{15}{34}$.
20. א. על פאה אחת. ב. 0.3466. ג. 0.5533.
21. א. כד א': 1 לבן; כד ב': 1 לבן ו-1 שחור. ב. (1) $\frac{216}{625}$. (2) $\frac{432}{3125}$.
22. א. $P = \frac{5}{8}$. ב. 0.7248. ג. (1) 0.5188. (2) 0.5188.
23. א. $\frac{9}{40}$. ב. $\frac{3}{31}$. ג. 0.252105.
24. א. $p = \frac{1}{5}$. ב. $\frac{16}{103} = 0.15534$. ג. $\frac{64}{15625} = 0.004096$.
25. א. (1) $\frac{1}{9}$. (2) $\frac{8}{27}$. ב. $\frac{137}{729}$. ג. $\frac{137}{211}$.
26. א. (1) $\frac{27}{64}$. (2) $\frac{37}{64}$. ב. $\frac{4}{9}$. ג. $k = 2$.

גאומטריה

חלק זה כולל שאלות בנושא גאומטריה בהתאם לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד שבספר 806 כרך ג' מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. רוב השאלות מתאימות ברמתן לבחינת הבגרות (כשאלות קצרות או ארוכות).

1. במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC בהתאמה,



כך ש- $DE \parallel BC$. BE ו-CD נחתכים בנקודה F.

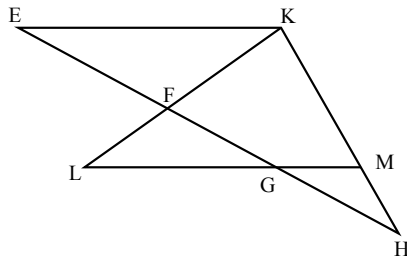
AF חותך את DE בנקודה M, והמשכו חותך את BC בנקודה N (ראה ציור).

הוכיחו: א. $\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$

ב. $\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}$

ג. $DM = EM$ ו- $BN = CN$.

2. נתון משולש KHE.



הנקודות M ו-G נמצאות על הצלעות KH ו-EH בהתאמה,

כך ש- $GM \parallel EK$. הנקודה F נמצאת על הצלע EH.

המשכי הקטעים GM ו-FK נפגשים בנקודה L.

(ראו ציור). נתון: $\angle KML = \angle KFH$.

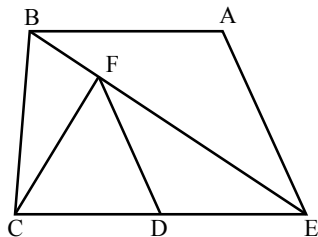
א. הוכיחו כי $\triangle KHE \sim \triangle FLG$.

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$, $EH = 12.5$ ס"מ, $LG = 5$ ס"מ.

(1) מצאו את האורך של EK.

(2) מצאו את היחס $\frac{MH}{KH}$.

3. נתון טרפז ABCE ($AB \parallel EC$).



הנקודה F נמצאת על האלכסון BE כך ש- $CF \perp BE$.

הנקודה D היא אמצע הבסיס CE (ראו ציור).

נתון: $\angle CEB = \angle AEB$, $EA = 4a$, $ED = 3a$.

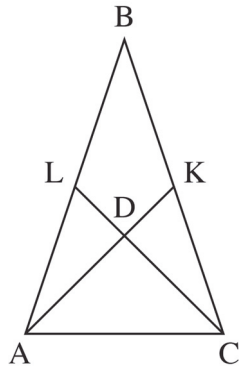
א. הוכיחו כי $\triangle EAB \sim \triangle EDF$.

ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S.

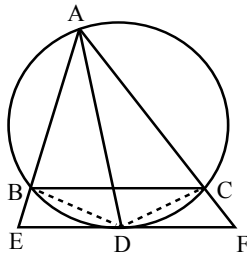
הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEF.

ג. המשך DF חותך את AB בנקודה G.

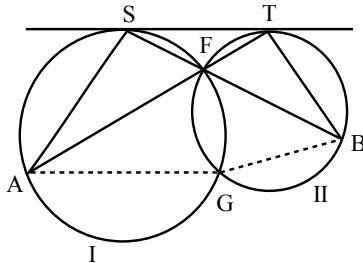
הביעו באמצעות S את שטח המשולש BFG.



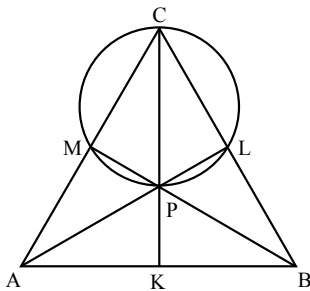
4. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$).
 AK ו-CL הם תיכונים במשולש,
 החותכים זה את זה בנקודה D.
 נתון: $AK \perp CL$.
 א. הוכיחו: $BD = AC$.
 ב. חשבו את היחס $\frac{S_{BLDK}}{S_{\triangle ABC}}$.
 ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע ALKC.
 (1) הוכיחו: $\angle AML = 90^\circ$.
 (2) מצאו את היחס $\frac{AM}{AD}$.
 תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.



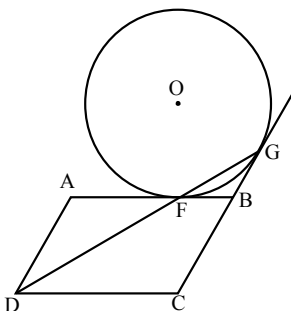
5. נתון כי במשולש AEF חוצה-זווית AD הוא.
 D היא נקודת ההשקה של הצלע EF למעגל,
 החותך את הצלעות AE ו-AF בנקודות B ו-C בהתאמה.
 המעגל עובר גם דרך קדקוד A (ראו ציור).
 הוכיחו: א. $BC \parallel EF$.
 ב. $\triangle ABD \sim \triangle DCF$.
 ג. $AD \cdot BD = DF \cdot AB$.



6. שני מעגלים I ו-II נחתכים בנקודות F ו-G.
 הישר ST משיק למעגל I בנקודה S,
 ולמעגל II בנקודה T.
 המשך SF חותך את המעגל II בנקודה B,
 והמשך TF חותך את מעגל I בנקודה A (ראו ציור).
 א. הוכיחו כי $\frac{ST}{AS} = \frac{TB}{ST}$.
 ב. (1) הוכיחו כי $\angle AGF = \angle SFA + \angle SAF$.
 (2) הוכיחו כי אם הנקודות A, G ו-B נמצאות על ישר אחד, אז $\angle SFA = 60^\circ$.

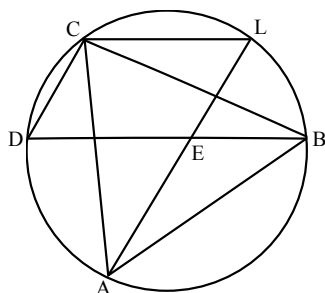


7. א. הוכיחו כי אם במשולש שני תיכונים שווים זה לזה, המשולש הוא שווה-שוקיים.
 ב. במשולש ABC הנקודות M ו-L, K ו-P
 הן אמצעי הצלעות CB, CA ו-AB בהתאמה.
 הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים במשולש,
 ונתון שהיא נמצאת על מעגל העובר
 דרך הנקודות M ו-L (ראו ציור).
 נתון גם כי $AL = BM$.
 (1) הוכיחו כי $BM \perp AC$.
 (2) הוכיחו כי $AK = AM$.



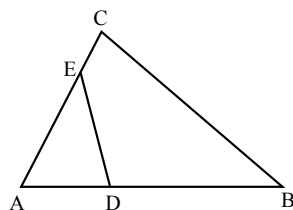
8.

- נתונה מקבילית ABCD .
 הצלע AB משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה F .
 המשך הצלע CB משיק למעגל בנקודה G (ראו ציור).
 נתון : $AF = AD$.
 א. הוכיחו כי הנקודה F נמצאת על הישר DG .
 ב. נתון גם : $FC \perp DC$, $BO = BC$.
 (1) הוכיחו כי $OF = FC$.
 (2) הוכיחו כי $FB = \frac{1}{2}BO$.



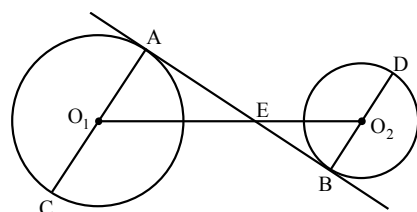
9.

- משולש שווה-צלעות ABC חסום במעגל.
 נקודות D ו-L נמצאות על המעגל,
 כך ש- $BD \parallel LC$.
 המיתרים AL ו-BD נחתכים בנקודה E (ראו ציור).
 א. הוכיחו כי המרובע LEDC הוא מקבילית.
 ב. (1) הוכיחו כי $\triangle ADE$ הוא משולש שווה-צלעות.
 (2) הוכיחו כי $LC + LB = LA$.



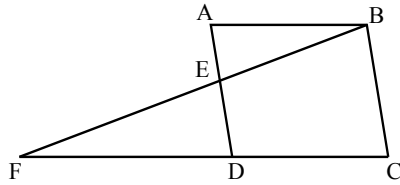
10.

- במרובע BDEC המשכי הצלעות BD ו-CE
 נפגשים בנקודה A , כמתואר בציור.
 נתון כי המרובע BDEC הוא בר-חסימה במעגל.
 א. הוכיחו כי $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.
 נתון : שטח המשולש ACB גדול פי 4 משטח המשולש ADE .
 נקודה F נמצאת על הצלע ED כך ש- $\angle EAF = \angle DAF$.
 המשך AF חותך את BC בנקודה G .
 ב. (1) הוכיחו כי $\triangle AEF \sim \triangle ABG$. (2) מצאו את היחס $\frac{EF}{BG}$.
 ג. הוכיחו כי $\frac{GC}{BG} = \frac{AD}{AE}$.

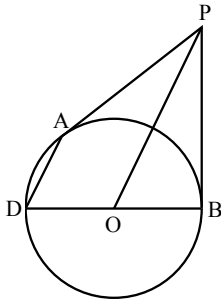


11.

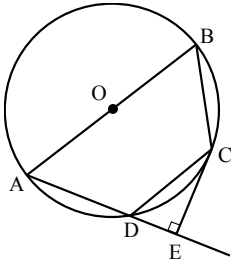
- AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1 . BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2 .
 ישר משיק למעגלים O_1 ו- O_2 בנקודות A ו-B בהתאמה.
 המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2 בנקודה E (ראו ציור).
 נתון : רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ,
 רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ,
 אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ.
 א. (1) מצאו את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמקו.
 (2) הוכיחו כי $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$.
 ב. הוכיחו כי הנקודה E נמצאת על הישר CD .



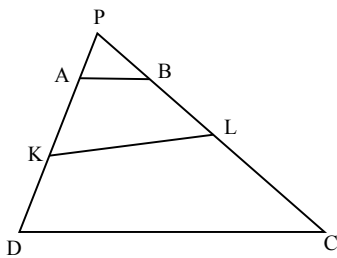
12. במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD. המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F (ראו ציור). נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר. שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.
א. מצאו את שטח המשולש BED.
ב. נתון גם כי המרובע BCDE הוא בר חסימה במעגל.
מצאו את היחס $\frac{AB}{EF}$.



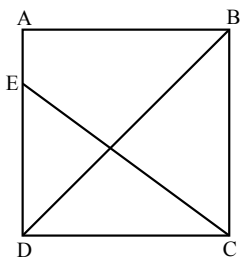
13. PA ו-PB משיקים למעגל שמרכזו O. המשך BO חותך את המעגל בנקודה D (ראו ציור). א. הוכיחו: $PO \parallel AD$.
הנקודה C נמצאת על הקוטר DB כך ש- $AC \perp DB$. ב. הוכיחו: $\triangle ADC \sim \triangle POB$.
PD חותך את AC בנקודה E. ג. הוכיחו: $\triangle DEC \sim \triangle DPB$.
ד. הוכיחו: $AC = 2EC$.



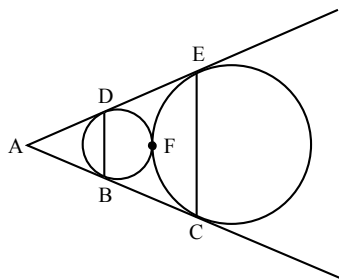
14. מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O. הצלע AB היא קוטר. E היא נקודה על המשך AD כך ש- $CE \perp AE$. א. הוכיחו: $\triangle CDE \sim \triangle ABC$.
נתון גם: $OD \perp AC$, $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}$. ב. הוכיחו כי $OC \parallel AD$.
ג. הוכיחו כי CE משיק למעגל.



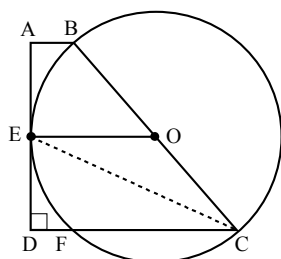
15. נתון משולש PDC. הנקודות B ו-L מונחות על הצלע PC. הנקודות A ו-K מונחות על הצלע PD, כמתואר בציור. נתון כי המרובע ABLK הוא בר חסימה במעגל וגם המרובע KLCD הוא בר חסימה במעגל. א. הוכיחו $AB \parallel DC$.
נתון: 3 ס"מ = PA, 4 ס"מ = PB, שטח המשולש ABP הוא S סמ"ר, שטח המרובע ABCD הוא 24S סמ"ר.
ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD? נמקו.
ג. מצאו את אורך הצלע PD.
ד. נתון גם: 5 ס"מ = BL.
היעזרו בדמיון משולשים והביעו באמצעות S את שטח המרובע KLCD.



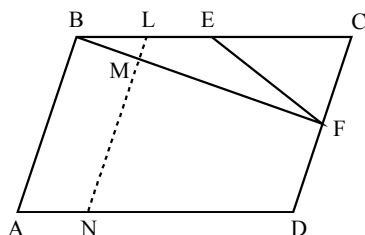
16. בריבוע ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD (ראה ציור).
 מעגל העובר דרך הנקודות E, D ו-C
 חותך את האלכסון BD בנקודה M,
 ואת הצלע BC בנקודה N.
 הנקודה M נמצאת בין הקדקוד B
 ובין נקודת החיתוך של BD עם CE.
 א. הוכיחו כי $CD = EN$.
 ב. האם הקטע DM קצר מהקטע CE, ארוך ממנו או שווה לו? נמקו.



17. נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה,
 המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F.
 AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו-C,
 AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו-E, כמתואר בציור.
 א. הוכיחו שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה שוקיים.
 ב. המשיק המשותף למעגלים עובר בנקודה F.
 חותך את שוקי הטרפז, BC ו-DE, בנקודות G ו-H בהתאמה.
 הוכיחו: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.
 ג. נסמן ב-R את רדיוס המעגל הגדול
 וב-r את רדיוס המעגל הקטן. הוכיחו כי $R \cdot BD = r \cdot CE$.



18. נתון מעגל שמרכזו O.
 ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle ADC = 90^\circ$, $AB \parallel DC$).
 הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E,
 והנקודות B ו-C נמצאות על המעגל כך ש-BC הוא קוטר.
 הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F, כמתואר בציור.
 א. הוכח: $\angle BCD = 2\angle DEF$.
 ב. הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle DFE$.
 ג. הוכח: $BC = DF + DC$.



19. המרובע ABCD הוא מקבילית.
 הזווית A היא זווית חדה.
 הנקודה E היא אמצע הצלע BC
 והנקודה F אמצע הצלע CD (ראו ציור).
 א. שטח המשולש ECF הוא S.
 הביעו את שטח המקבילית ABCD
 באמצעות S. נמקו את תשובתכם.
 ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.
 דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל-AB וחותך את BF ואת AD בנקודות M ו-N בהתאמה.
 ג. נתון $BE = EF$. האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמקו את קביעתכם.
 חשבו את היחס $\frac{LM}{MN}$.

20. המרובע ABCD חסום במעגל.

הנקודה G נמצאת על הצלע CD,

כך ש- $AB = AG$ וגם $CB = CG$.

המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD

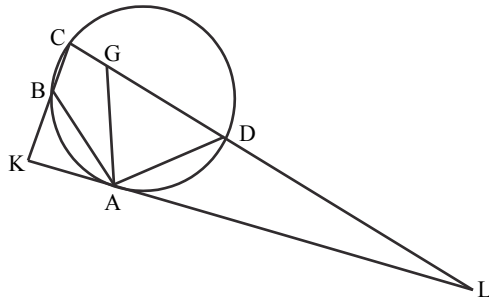
בנקודה L, וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K

(ראו ציור).

א. הוכיחו כי $AD = AG$.

ב. (1) הוכיחו כי $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) הוכיחו כי $AD^2 = BK \cdot CD$.

$$\frac{S_{\Delta LDA}}{S_{\Delta KAB}} = \frac{LA}{AK} \text{ ג. הראו כי}$$


21. ABCD הוא מעוין. E ו-F הן אמצעי צלעות AB ו-BC בהתאמה.

הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.

מן הנקודה E העלו אנך ל-AB,

החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).

א. הוכיחו: הנקודה G היא מרכז

המעגל החוסם את המשולש ABC.

הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M,

שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

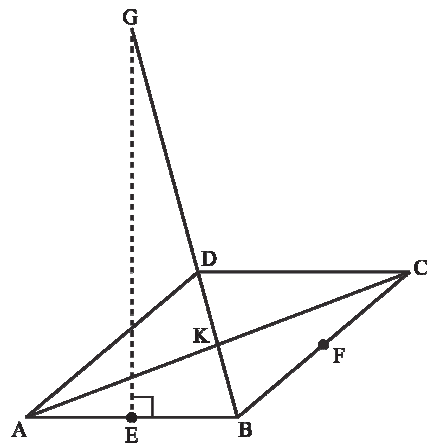
ב. הוכיחו שהמשולשים MFC, BKC, ו-BFG דומים זה לזה.

נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ,

וב- r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. (1) הוכיחו כי $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$ וכי $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$.

(2) הראו כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$.



22. המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

BF הוא קוטר המעגל.

מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל –

האחד משיק למעגל בנקודה B

והאחר חותך את המשך הצלע CF בנקודה D,

כמתואר בציור שלפניכם.

נתון: $AD \perp CD$.

א. הוכיחו: $\angle BFC = \angle BAD$

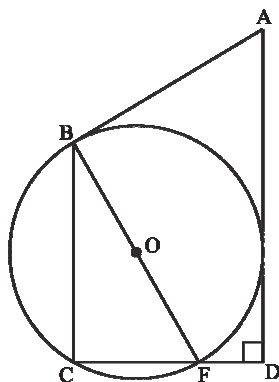
נתון: K היא נקודה על הצלע BC ,

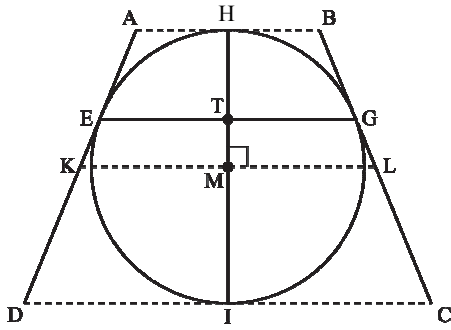
כך ש-FK חוצה את BFC.

ב. הוכיחו: $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$.

ג. הוכיחו: $KB \cdot AB = 2R^2$.

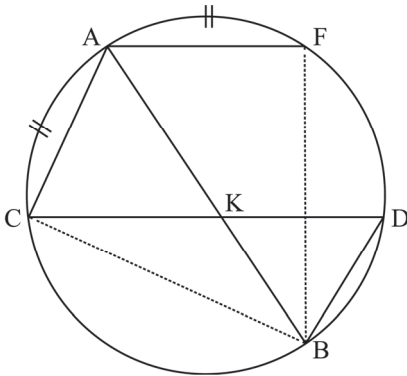
ד. הסבירו מדוע שטח $\triangle BFK$ גדול משטח $\triangle KFC$.





23. EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r .
 דרך נקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל.
 דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG וחותך את המשיקים בנקודות K ו-L, כמתואר בציור.
 דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל- KL אשר חותך את המיתר EG בנקודה T ואת המעגל בנקודות H ו-I, כמתואר בציור.
 נסמן: $TG = a$.
 א. (1) הוכיחו: $TG \cdot ML = MG^2$.
 (2) הביעו את אורך הקטע KL באמצעות a ו- r .

- דרך הנקודות H ו-I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר טרפז שווה שוקיים ABCD שחוסם את המעגל, כמתואר בציור.
 ב. (1) הוכיחו $BC = KL$.
 (2) הביעו את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו- r .
 ג. האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל יכול להיות קטן מ- $\frac{4}{\pi}$? נמקו.



24. AB הוא קוטר במעגל.
 CD ו- AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.
 AB ו- CD נחתכים בנקודה K (ראו ציור).
 נתון כי $\widehat{CA} = \widehat{AF}$.
 (הקשתות המסומנות בציור).
 א. (1) הוכיחו כי $\angle FAB = \angle CAB$.
 (2) הוכיחו כי $BK = BD$.
 ב. הוכיחו כי המרובע AFKC הוא מעוין.
 ג. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.
 (1) הוכיחו כי $\triangle BDC \sim \triangle CAB$.
 (2) הוכיחו כי CD הוא קוטר במעגל.

תשובות:

2. ב. (1) 7.5 ס"מ = EK . (2) $\frac{MH}{KH} = \frac{2}{5}$.

3. ב. $\frac{9}{8}S$. ג. $\frac{1}{16}S$.

4. א. הוכחה. ב. $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3}$. ג. (1) הוכחה. (2) $\frac{AM}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = 0.79$.

11. א. (1) $\frac{9}{5}$.

12. א. 36 סמ"ר. ב. $\frac{AB}{EF} = \frac{3}{4}$.

15. ב. DM קצר מ-CE .

16. ב. לא. ג. 15 ס"מ. ד. 16S סמ"ר.

19. א. $S_{ABCD} = 8S$. ב. $\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}$. ג. לא ניתן לחסום את המרובע ABFD במעגל.

22. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

ד. לשני המשולשים יש גובה משותף לצלעות KB ו-KC . בנוסף לפי משפט חוצה זווית $KB < KC$.

23. א. (1) הוכחה. (2) $KL = \frac{2r^2}{a}$. ב. (1) הוכחה. (2) $P_{ABCD} = \frac{8r^2}{a}$. ג. לא.

24. א. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ב. הוכחה. ג. (1) הוכחה. (2) הוכחה.

טריגונומטריה

חלק זה כולל שאלות בנושא טריגונומטריה בהתאם לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד שבספר 806 כרך ג' מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. השאלות מתאימות ברמתן לבחינת הבגרות.

- 1.** במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$),

BM הוא תיכון לשוק (ראו ציור).

נתון: $\angle BAC = 50^\circ$.

א. חשבו את גודל הזווית הקהה AMB.

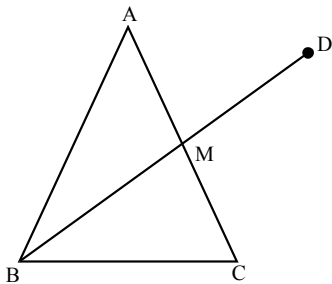
ממשיכים את BM עד הנקודה D.

נתון גם :

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

ב. חשבו את זוויות המשולש AMD.



2. טרפז שווה-שוקיים ABCD (DC || AB)

חסום במעגל שמרכזו M.

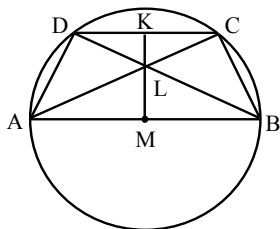
הבסיס AB הוא קוטר במעגל זה.

אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה L.

המשך ML חותך את DC בנקודה K

(ראו ציור). נתון כי $\angle BAD = \alpha$.

הביעו באמצעות α את היחס $\frac{KL}{LM}$.



3. שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מבפנים בנקודה A.

נקודה F נמצאת על המעגל הגדול,

כך שקטע המרכזים של שני המעגלים נמצא על AF.

AF חותך את המעגל הקטן בנקודה E.

דרך נקודה B שעל המעגל הקטן העבירו ישר

המקביל למשיק המשותף לשני המעגלים.

המקביל חותך את המעגל הגדול בנקודה C (ראו ציור).

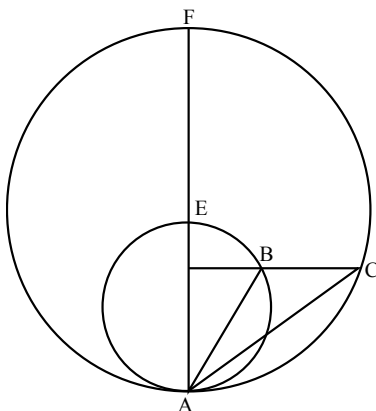
רדיוס המעגל הגדול הוא R , ורדיוס המעגל הקטן הוא r .

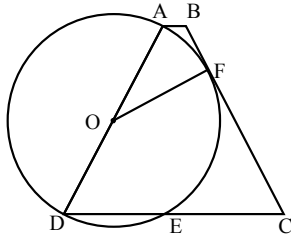
נתון: $\sphericalangle FAB = \beta$, $\sphericalangle BAC = \alpha$.

א. (1) הביעו באמצעות α ו- β את BCA . נמקו.

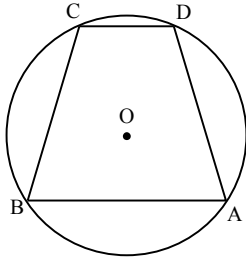
(2) הביעו רק באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AC}{AB}$.

ב. הביעו באמצעות α ו- β את היחס $\frac{R}{r}$.

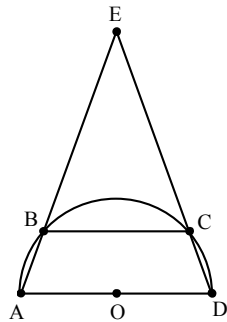




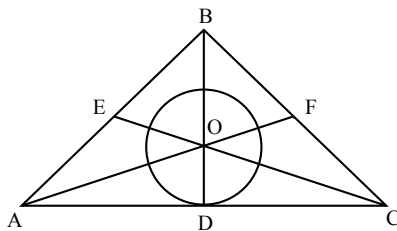
4. נתון טרפז שווה-שוקיים ABCD ($AD=BC$). השוק AD היא קוטר במעגל שמרכזו O. השוק BC משיקה למעגל בנקודה F. המעגל חותך את הבסיס DC בנקודה E (ראו ציור). נתון: $\angle BCD = \alpha$.
 א. הביעו באמצעות α את גודל הזווית FOD.
 ב. (1) הביעו באמצעות α את גודל הזווית ODF.
 (2) הביעו באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.



5. במעגל חסום טרפז ABCD ($AB \parallel DC$). מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראו ציור). רדיוס המעגל הוא R וגובה הטרפז הוא h. נתון: $\angle BOA = 3\alpha$, $\angle COD = \alpha$.
 א. הביעו באמצעות α את $\angle DAB$.
 ב. הביעו את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו-R.
 ג. הביעו את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו-h.
 ד. נתון כי שטח המשולש COD הוא $\frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$. מצאו את α .

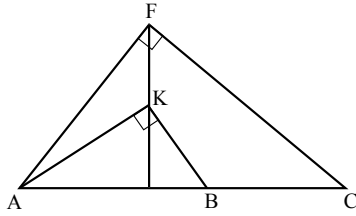


6. נתון טרפז ABCD ($BC \parallel AD$) החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R, כך ש-AD הוא קוטר של חצי המעגל. המשכי השוקיים AB ו-DC נפגשים מחוץ למעגל בנקודה E (ראו ציור). נתון: $\angle EAD = \alpha$.
 א. הביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע BC.
 ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α ? נמקו.
 ג. נתון כי שטח המשולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD. מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED לבין R?



7. ABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AB=BC$). AF, CE ו-BD הם תיכונים במשולש, הנחתכים בנקודה O (ראו ציור).
 א. הוכיחו: $S_{ABOE} = S_{ACOD}$.
 מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC בנקודה D. נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC.
 ב. חשבו את גודל הזווית ACE.
 ג. הביעו את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

8. במשולש ישר-זווית $\triangle AFC$ ($\angle AFC = 90^\circ$), הנקודה K נמצאת על הגובה ליתר, כך ש- $\angle FAK = \beta$ ו- $\angle KAC = \alpha$.



B היא נקודה על היתר AC כך ש- $\angle AKB = 90^\circ$ (ראו ציור).

רדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle AFC$ הוא R , ורדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle AKB$ הוא r .

א. (1) הביעו באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AF}{AK}$.

(2) הביעו באמצעות α ו- β את היחס $\frac{R}{r}$.

ב. הביעו באמצעות R ו- r בלבד את רדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle AKF$.

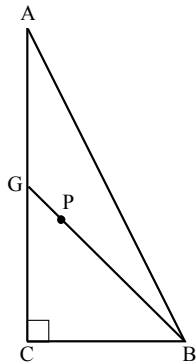
9. במשולש ישר-זווית $\triangle ACB$ ($\angle ACB = 90^\circ$) נקודה G היא אמצע הניצב AC .

נקודה P נמצאת על GB כך ש- $PG = 4 \cdot BG$ (ראו ציור).

רדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle CGB$ הוא R . נתון: $GC = BC$.

א. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle ACB$.

ב. הביעו באמצעות R את מרחק הנקודה P ממרכז המעגל החוסם את המשולש $\triangle ACB$.



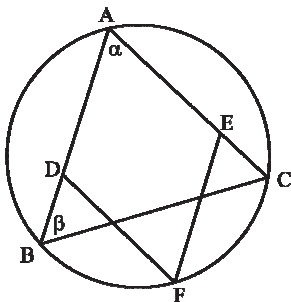
10. $\triangle ABC$ הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). M היא נקודה על היתר כל ש- $AM:MC = \sqrt{3}:4$. נתון: $\angle ABM = 30^\circ$, $BM = 8$.

א. (1) סמנו: $MC = 4x$ וחשב את זוויות המשולש $\triangle ABC$.

(2) חשבו את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים $\triangle ABM$ ו- $\triangle CBM$.

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים $\triangle ABM$ ו- $\triangle CBM$ ב- O_1 ו- O_2 בהתאמה. (1) הסבירו מדוע המרובע BO_1MO_2 הוא דלתון.

(2) חשבו את אורך הקטע O_1O_2 .



11. $\triangle ABC$ הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R . הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות AB ו- AC בהתאמה, והנקודה F נמצאת על הקשת BC , כך שהמרובע $ADFE$ הוא מעוין (ראו ציור). נתון: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

א. (1) הביעו באמצעות α ו- β את $\angle ABF$.

(2) הביעו באמצעות R , α ו- β את אורך האלכסון AF .

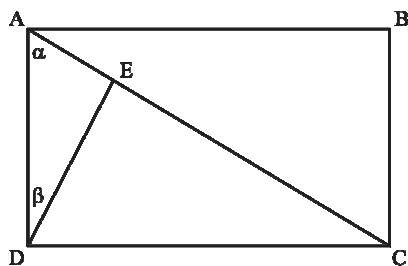
ב. הביעו באמצעות R , α ו- β את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ג. הראו כי שטח המעוין הוא $2R^2 \tan \frac{\alpha}{2}$.

ד. נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין $ADFE$ הוא $\frac{3}{5}R$. חשבו את β .

12. נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראו ציור).



נתון כי $\angle ADE = \beta$, $\angle DAC = \alpha$.

R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

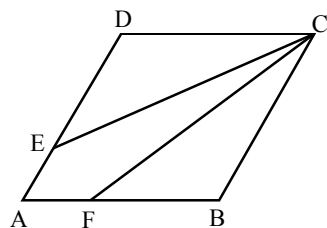
א. הביעו את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β .

ב. הראו כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

(1) הראו כי $\triangle DEC$ הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הביעו את BE^2 באמצעות R_1 .



13. נתון מעוין ABCD. E ו-F הן נקודות

על הצלעות AD ו-AB בהתאמה

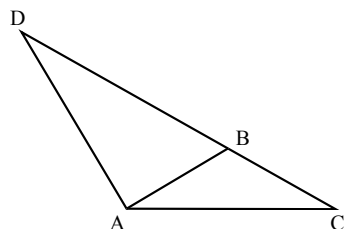
כך ש- $AE = AF$ ו- $FB = 2AF$.

נתון כי $\angle DCB = 60^\circ$.

א. מצאו את גודל הזווית FCB.

ב. נתון כי אורך האלכסון AC הוא b.

הביעו באמצעות b את היקף המרובע AECF.



14. נתון משולש שווה-שוקיים ADC שבו $AD = AC$.

נקודה B נמצאת על הצלע DC

כך ש- $AB = BC$ ו- $DC = 3BC$ (ראה ציור).

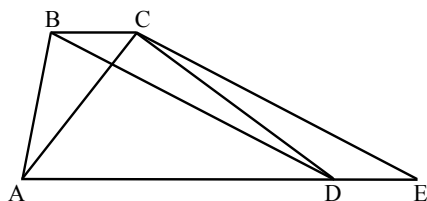
א. מצאו את גודל הזווית במשולש ADC.

ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

BT הוא גובה לצלע AC במשולש ABC.

מצאו את האורך של הקטע DT.



15. נתון טרפז ABCD ($BC \parallel AD$).

הנקודה E נמצאת על המשך AD

כך ש- $CE \parallel BD$ (ראה ציור).

נתון: $\angle CAD = 2\angle DBC$,

$DB = 1.8AC$.

א. מצאו את גודל הזווית CEA.

ב. נתון גם כי שטח המשולש ACE הוא 87.873 סמ"ר.

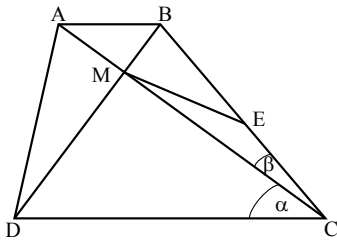
מצאו את גובה הטרפז.

16. אלכסוני הטרפז ABCD מאונכים זה לזה ונפגשים בנקודה M.

E היא אמצע השוק BC (ראו ציור).

נתון: $DC = a$, $\angle ACB = \beta$, $\angle ACD = \alpha$.

א. הביעו באמצעות a , α ו- β את האורך של ME.



נתון: $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{1}{3}$, $a = 6.6$ ס"מ.

ב. מצאו את האורך של AB.

נתון גם: $BM = 1.3$ ס"מ.

ג. מצאו את הזווית DCB.

17. נתון משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).

AE הוא גובה לבסיס BC, ו-BT הוא תיכון לשוק AC (ראו ציור).

נתון: $BC = 2k$, $\angle TBC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$.

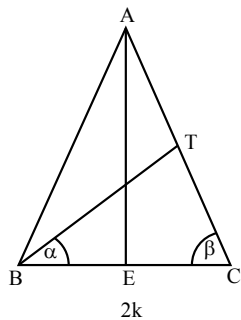
א. (1) הביעו את האורך של TC באמצעות k ו- β בלבד.

(2) היעזרו בתת-סעיף א(1),

והראו כי $\sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cdot \cos \beta$.

ב. נתון גם: $TE = 5$ ס"מ, $k = 4$ ס"מ.

(1) מצאו את β . (2) מצאו את α .



18. נתון משולש שווה-צלעות ABC.

נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראו ציור).

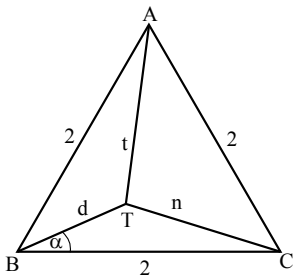
נתון: $\angle TBC = \alpha$, $CT = n$ ס"מ, $AT = t$ ס"מ.

$BT = d$ ס"מ, $AT = t$ ס"מ.

אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.

א. הוכיחו כי $\sin(\alpha - 30^\circ) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ב. הביעו את שטח המשולש ATC באמצעות α ו- d .



19. הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם במשולש ABC.

המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E.

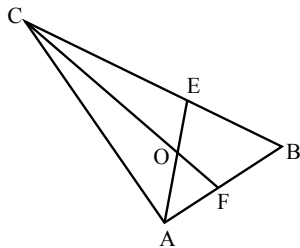
המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F (ראו ציור).

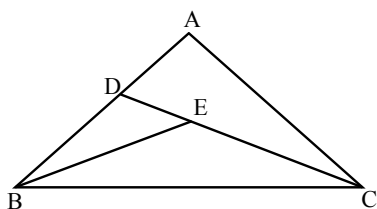
נתון: $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$.

א. הביעו באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60^\circ$.

הראו כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל- $\frac{1}{2}BC$.



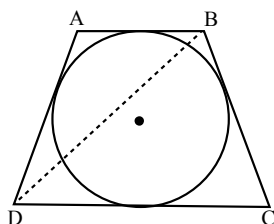


20. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) זווית הבסיס היא 2α . הנקודה E היא מפגש חוצי-הזווית במשולש ABC. המשך CE חותך את הצלע AB בנקודה D (ראה ציור). נתון: $\angle BAC > 90^\circ$, $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$. א. מצאו את α .

- ב. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.
ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC הוא 2 ס"מ. מצאו את אורך הקטע AE.

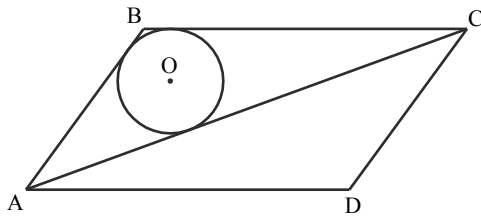
21. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). BD הוא חוצה זווית במשולש ABC. המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E. גודל הזווית ABC הוא 2β . א. הביעו באמצעות β את $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$.

- היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE. אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלתם.
ב. נתון: BE שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC. חשבו את היחס $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$.
נסמן ב-a את אורך השוק AB.
ג. הביעו באמצעות a את רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש ABC.

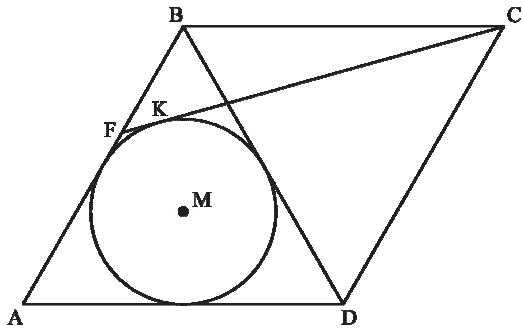


22. מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$), כמתואר בציור. נתון: $\angle BCD = 70^\circ$. א. הביעו באמצעות r:
(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.
(2) את שוק הטרפז.
(3) את אלכסון הטרפז.
ב. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

23. ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel DC$). נתון: $\angle C = 60^\circ$, $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$). א. הביעו את שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו-b.
נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$. ב. חשבו את b.
ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצאו את R.
(2) הסבירו מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.
(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצאו את r.



24. נתונה מקבילית ABCD .
 AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.
 במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O .
 נתון: הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו-3
 מן הישרים AD ו-AC בהתאמה; $OA = 10$.
 א. חשבו את גודלי זוויות המקבילית.
 ב. חשבו את אורך האלכסון AC .
 ג. חשבו את שטח המקבילית.



25. ABCD הוא מעוין שאורך צלעו הוא a .
 נתון: $\angle BAD = 60^\circ$.
 במשולש ABD חסום מעגל שמרכזו M .
 מן הקדקוד C העבירו משיק למעגל
 שהמשכו חותך את הצלע AB
 בנקודה F והוא משיק למעגל
 בנקודה K (ראו ציור).
 א. הביעו באמצעות a את רדיוס המעגל.
 ב. (1) הסבירו מדוע הנקודה M
 נמצאת על אלכסון המעוין AC .
 (2) חשבו את גודל הזווית ACF .
 ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ACF .

תשובות:

1. א. 100.56° . ב. $40.34^\circ, 79.44^\circ, 60.22^\circ$. 2. $-\cos 2\alpha$.
3. א. (1) $90^\circ - (\alpha + \beta)$ (2) $\frac{\cos \beta}{\cos(\alpha + \beta)}$. ב. $\frac{\cos^2 \beta}{\cos^2(\alpha + \beta)}$.
4. א. $270^\circ - 2\alpha$. ב. (1) $\alpha - 45^\circ$ (2) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin(135^\circ - \alpha) \sin(\alpha + 45^\circ)} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.
5. א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. ב. $2R \cos \alpha$. ג. $\frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. ד. 30° . 6. א. $BC = -2R \cos 2\alpha$. ב. $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. ג. 1.59 .
7. א. $\angle ACE = 17.66^\circ$. ג. $OE = \frac{R\sqrt{1+\pi^2}}{2} = 1.648R$.
8. א. (1) $\frac{AF}{AK} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}$ (2) $\frac{R}{r} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2(\alpha + \beta)}$. ב. $\sqrt{R}\sqrt{r}$. 9. א. $\frac{\sqrt{10}}{2}R$. ב. $\frac{R}{2}$.
10. א. (1) $53.13^\circ, 36.87^\circ, 90^\circ$ (2) $R_{\triangle ABM} = 5, R_{ACBM} = 6\frac{2}{3}$.
11. א. (1) $\beta + \frac{\alpha}{2}$ (2) $2R \sin(\beta + \frac{\alpha}{2})$. ב. $\frac{R \sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. ג. הוכחה . ד. 53.13° .
12. א. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$. ב. הוכחה . ג. הוכחה . (1) הוכחה . (2) $BE^2 = R_1^2(4 - \sqrt{3})$.
13. א. 23.41° . ב. 2.063b . 14. א. $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$. ב. 10.58 ס"מ $4\sqrt{7}$ ס"מ .
15. א. 25.84° . ב. 7.845 ס"מ . 16. א. $ME = \frac{a \cos \alpha}{2 \cos \beta}$. ב. 2.2 ס"מ AB . ג. 49.94° .
17. א. $TC = \frac{k}{2 \cos \beta}$. ב. (1) $\beta = 66.42^\circ$ (2) $\alpha = 37.37^\circ$.
18. א. $\frac{AE}{CF} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\frac{\alpha - \beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta) \sin \alpha}$. 19. א. $\sqrt{3} - d \cos(30^\circ - \alpha)$ או $\sqrt{3} - d[\sin(60^\circ - \alpha) + \sin \alpha]$. ב. $\sqrt{3} - d \cos(30^\circ - \alpha)$.
20. א. $\alpha = 20^\circ$. ב. 2.79 . ג. 1.459 ס"מ . 21. א. $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\sin 2\beta \cdot \sin 4\beta \cdot \sin 3\beta}{\sin^3 \beta}$. ב. 20.99 . ג. $r = 0.165a$.
22. א. (1) 2.856r (2) 2.128r (3) 2.92r . ב. 0.6435 .
23. א. $AD = BC = b - a$. ב. $b = 12$. ג. (1) $R = 6.11$ (3) $r = 2\sqrt{3}$.
24. א. $54.33^\circ, 125.67^\circ$. ב. $AC = 27.08$. ג. $S_{ABCD} = 171.73$.
25. א. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. ב. הוכחה . (1) הוכחה . (2) $\angle ACF = 14.478^\circ$. ג. $S_{\triangle ACF} = 0.267a^2$.

פונקציות רציונליות

פרק זה כולל פונקציות רציונליות המתאימות לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד שבספר 806 כרך ד' מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. רוב השאלות קצרות ואינן כוללות חקירה מלאה של פונקציה, אלא מדגישות רעיון מסוים. הדגשנו בעיקר את הרעיונות הבאים:

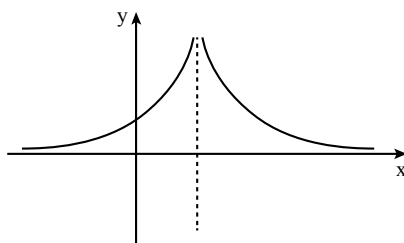
פתרון שאלות באמצעות גרף הפונקציה, טרנספורמציות של פונקציה רציונלית (הזזות, מתיחות, שיקופים וכו') וחקירה של הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$, הנקראת פונקציה הופכית ל- $f(x)$, בהסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$. הבעה על ידי פרמטרים (כולל הקשר בין ערך הפרמטר למספר הפתרונות של המשוואה), אסימפטוטות אנכיות ואופקיות, "חורים" בגרף, פונקציות ללא תבנית אלגברית ידועה.

1. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$.

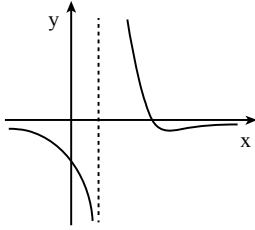
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
- (3) מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - 2$ המקיימת:
 - הסתמכו על סעיף א, וענו על התת-סעיפים שלפניכם.
 - (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?
 - (2) מה הם השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
 - (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x) = f(x) + k$.
 - מצאו את הערך של k עבורו שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ הוא 4.

2. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{9x - 18}{x^2 - 9x + 18}$.

- א. מצאו: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מאונכות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
- ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) + k$. הגרף של הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x .
 - (1) מצאו את הערכים האפשריים של k .
 - (2) מבין שני ערכי k שמצאתם, הציבו את הערך הגדול יותר של k , ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



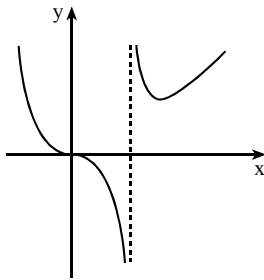
3. א. לפניכם גרף של פונקציה רציונלית $f(x)$, המוגדרת בתחום $x \neq 1$. נגדיר $g(x) = -f(x)$. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותו התחום.



- ב. לפניכם גרף של פונקציה רציונלית $h(x)$, המוגדרת בתחום $x \neq 1$.
 נגדיר $k(x) = -h(x)$.
 שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $k(x)$ באותו התחום.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$.

- א. מצאו: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
 (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מאונכות לצירים.
 ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{2x+5}{x-4}$.
 (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?
 (2) היעזרו בסעיפים קודמים ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של כל אחת מהפונקציות הבאות:
 (1) $f(x) - 6$ (2) $f(x - 6)$ (3) $6 \cdot f(x)$ (4) $-f(x) + 6$



5. לפניכם גרף של פונקציה רציונלית $f(x)$, המוגדרת כאשר $x \neq 2$.
 גרף הפונקציה נפגש עם הצירים רק בראשית, ונקודת הקיצון היחידה של הגרף היא (3; 27) מינימום, ראו ציור.
 הפונקציה $g(x) = f(x - 2)$ מקיימת $g(x) = f(x - 2)$.
 א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x + a)$ נמצאת על ציר ה- y .
 מצאו את הערך של הפרמטר a .

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$.

- א. חקרו את הפונקציה ומצאו:
 (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
 (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מאונכות לצירים.
 ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. כופלים פי 4 את שיעור ה- y של כל הנקודות הנמצאות על הגרף של $f(x)$, מבלי לשנות את שיעור ה- x שלהם, כך שהתקבלה פונקציה $h(x)$.
 (1) בטאו את הפונקציה $h(x)$ באמצעות $f(x)$.
 (2) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
 ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$.
 מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
 ה. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של כל אחת מהפונקציות הבאות:
 (1) $2f(x) - 3$ (2) $f(-x)$ (3) $f(2 \cdot x)$ (4) $f(3x - 6)$

7. נתונה הפונקציה $y = \frac{2}{x} - x^2$. מצאו :

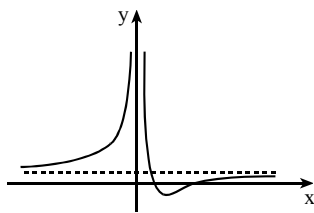
- תחום הגדרה.
 - שיעורי נקודת הקיצון וקבעו את סוגה.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - האם לגרף הפונקציה יש נקודות חיתוך עם הצירים?
 - מהי משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה?
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(-x)$.
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $-f(-x)$.
 - נגדיר: $g(x) = f(2x)$.
- מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. היעזרו בסעיף ב.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$.

- הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = f(2x)$. נתון: $g(x) = \frac{kx}{x^2 + m}$.
- מצאו את ערכי הפרמטרים k ו- m .
 - נתון כי שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הם: $(0.5; 1.5)$ מקסימום, $(-0.5; -1.5)$ מינימום.
- מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, מבלי לגזור את הפונקציה $f(x)$.

9. א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 + 4x + 5}$.

- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה.
- נגדיר: $g(x) = f(2x)$.
- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. היעזרו בסעיף א.
- נגדיר: $h(x) = f(-x)$.
- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. היעזרו בסעיף א.
- נגדיר: $i(x) = f(-2x + 1)$.
- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. היעזרו בסעיף א.



10. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים הן $(2; 0)$, $(6; 0)$. נקודת הקיצון של הפונקציה היא $(3, -\frac{1}{3})$ מינימום.

הישר $y = 1$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה, ראו ציור.

- נגדיר: $g(x) = |f(x) + k|$.
- ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$. מצאו את הערך של k (מצאו את שתי האפשרויות).
- נגדיר: $h(x) = |f(x)| + m$.
- ידוע שגרף הפונקציה $h(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$. מצאו את הערך של m (מצאו את שתי האפשרויות).
- מצאו לאילו ערכי x :
- (1) הגרף של הפונקציה $|f(x)| + f(x)$ מתלכד עם גרף הפונקציה $2f(x)$.
- (2) הגרף של הפונקציה $|f(x)| + f(x)$ מתלכד עם ציר ה- x .

11. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 7x + 10}$.

א. חקרו את הפונקציה ומצאו: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = (f(x))^n$, n הוא מספר זוגי.

(1) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

היעזרו ב- n במידת הצורך.

תוכלו להיעזר בסעיפים קודמים.

(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + 4x}{x^2 + 3x + b}$ ו- a, b הם פרמטרים.

נתון: $x=1, y=1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצאו את a ואת b .

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים (מלבד $x=1$ ו- $y=1$)? הסבירו את תשובתכם.

(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)| = -f(x)$. נמקו.

13. נתונה הפונקציה $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ ו- a הוא פרמטר.

ענו על סעיף א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבעו את סוגן.

(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצאו את a .

הציבו את הערך של a שמצאת וענו על הסעיפים ג-ד.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x) + k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצאו את k (מצא את שתי האפשרויות).

נמקו את תשובתכם.

14. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - a}$

a הוא פרמטר, $a \neq 0$, $a \neq 4$.

ענו על סעיף א. הביעו באמצעות a במידת הצורך.

הבחינו בין $a > 0$ ובין $a < 0$ במידת הצורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה- x .

(4) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x (אם יש כאלה).

ענו על סעיף ב. הביעו באמצעות a במידת הצורך.

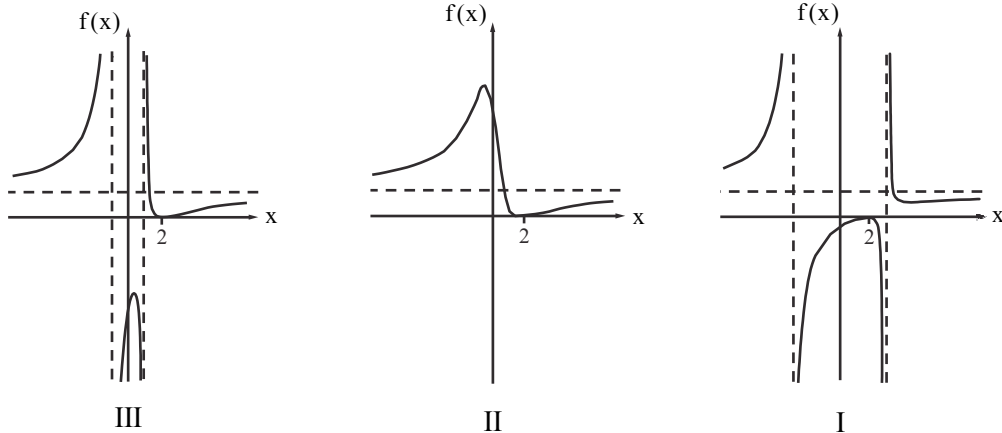
הבחינו בין $a > 4$ ובין $a < 4$ במידת הצורך.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. לפניכם שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a .

כתבו מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I–III.

נמקו את תשובתכם.



15. נתונות שלוש פונקציות: $f(x) = \frac{x-6}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{x-6}$, $h(x) = \frac{x^2-1}{x}$

קבעו איזו פונקציה משיקה לציר ה- x . נמקו.

הדרכה: לא חובה לגזור את הפונקציה.

16. נתונות שלוש פונקציות: $f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}$, $g(x) = \frac{x^2}{(x-3)(x+3)}$, $h(x) = \frac{x(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}$

א. קבעו לאיזו פונקציה יש את התכונה הבאה:

יש לה שני ערכי x שבהם היא לא מוגדרת, ואסימפטוטה אנכית אחת.

נמקו את בחירתכם, והסבירו מדוע הפונקציות האחרות אינן מתאימות.

ב. קבעו איזו פונקציה משיקה לציר ה- x .

17. לפניכם שתי טענות.
קבעו עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את תשובתכם.
אם הטענה אינה נכונה, הציגו דוגמה נגדית.
(1) גרף של פונקציה אינו חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
(2) גרף של פונקציה תמיד חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
18. נתונה פונקציה רציונלית $f(x)$, המקיימת: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה. נמקו.
(1) נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x מתקבלות בהכרח בכל נקודה שבה $g(x) = 0$.
(2) נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x מתקבלות בהכרח בכל נקודה שבה $h(x) = 0$.
(3) לפונקציה $f(x)$ יש בהכרח אסימפטוטות אנכיות כאשר $h(x) = 0$.
19. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 12x + 32}{x^2 + 9x + 20}$.
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,
והראו שעבור כל $x \neq -4$ בתחום מתקיים: $f(x) = \frac{x+8}{x+5}$.
ב. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
ג. הנקודה A היא נקודת אי-רציפות סליקה ("חור") של הפונקציה $f(x)$.
(1) מצאו את שיעורי הנקודה A .
(2) הראו שהישר המחבר את הנקודה A עם ראשית הצירים – חוצה את הזווית שבין הצירים.
20. נתונה שתי פונקציות: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$. נסמן: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$?
ב. הראו שבתחום שמצאתם בסעיף א' מתקיים: $h(x) = x$.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
21. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - kx + m}{x^2 - 6x + 5}$, המוגדרת כאשר $x \neq 5$, $x \neq 1$. נתון: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 1.75$.
מצאו את ערכי הפרמטרים k ו- m .
22. א. רשמו תבנית אלגברית של פונקציה רציונלית, שיש לה שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת, שתי אסימפטוטות אנכיות ואסימפטוטה אופקית אחת.
ב. רשמו תבנית אלגברית של פונקציה רציונלית, שיש לה שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת, אסימפטוטה אנכית אחת ואסימפטוטה אופקית אחת.

23. נתונה הפונקציה $g(x) = x^4 - 4x + 4$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,

והסבירו מדוע לכל x מתקיים: $g(x) \geq 1$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^4 - 4x + 4}$. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$? נמקו.

24. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מקיימות: $f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$. נתון: $f(x_1) = 288$, $f'(x_1) = 354$, $g'(x_1) = 0$. חשבו את הערך של x_1 .

25. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x + k}$.

מצאו באיזה תחום נמצא הפרמטר k , כך שלפונקציה $f(x)$:

א. יש שני ערכי x שעבורם היא לא מוגדרת.

ב. יש ערך אחד של x שעבורו היא לא מוגדרת.

ג. אין ערכי x שעבורם היא לא מוגדרת.

26. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a}$, a הוא פרמטר.

א. לאילו ערכים של a , הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של x .

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, אם נתון $a > 1$.

ג. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, אם נתון $a < 0$.

27. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - k - 6}{x^2 + 1}$, המוגדרת לכל ערך של x .

א. מצאו לאילו ערכים של הפרמטר k גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

דרך נקודות אלה העבירו ישרים המאונכים לציר ה- x . המרחק בין הישרים הוא 8.

מצאו את ערך הפרמטר k .

28. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - k}{x^2 - 9}$.

א. מהו הערך של k שעבורו אין לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אנכית?

ב. נתון $k \neq 9$.

(1) מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(2) לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ,

הנמצאות בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

מצאו את תחום הערכים של k . נמקו.

29. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3}$.

מצאו לאילו ערכים של הפרמטר a יש לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון. כמה נקודות קיצון יש לפונקציה במקרה זה?

30. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = x + \frac{m(x-1)}{x}$. m הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות השייכות למשפחה.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון.

ב. (1) מצאו את תחום הערכים שבו נמצא הפרמטר m .

(2) הביעו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m , וקבעו את סוג הקיצון.

ג. לכל ערך של m מתקבל גרף אחר לפונקציה $f(x)$.

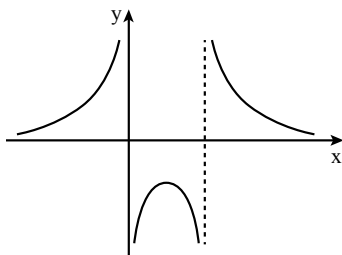
קיימת נקודה הנמצאת על כל הגרפים המתקבלים ל- $f(x)$ וששיעוריה אינם תלויים בפרמטר m . מצאו את שיעורי נקודה קבועה זו.

תשובות:

1. א. (1) $x \neq 1, x \neq 0$ (4)

ב. (1) $y = 0, x = 1, x = 0$ (2)

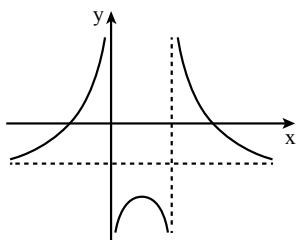
(3) $(\frac{1}{2}; -8)$ מקסימום.



ב. (1) $y = -2, x = 1, x = 0$ (3)

(2) $(\frac{1}{2}; -10)$ מקסימום.

ג. $k = 12$



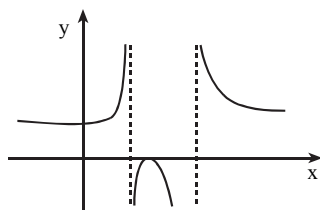
2. א. תחום הגדרה: $x \neq 3, x \neq 6$. נקודות חיתוך: $(2; 0), (0; -1)$.

אסימפטוטות: $y = 0, x = 6, x = 3$.

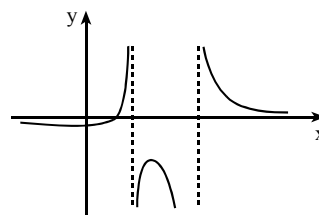
נקודות קיצון: $(4; -9)$ מקסימום, $(0; -1)$ מינימום.

עלייה: $3 < x < 4$ או $0 < x < 3$. ירידה: $x > 6$ או $4 < x < 6$ או $x < 0$.

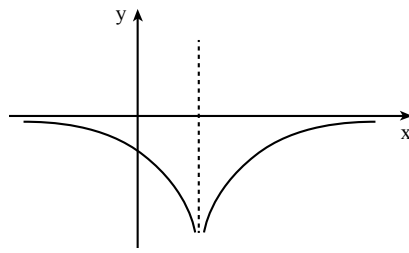
ב. (1) $k = 9$ או $k = 1$.



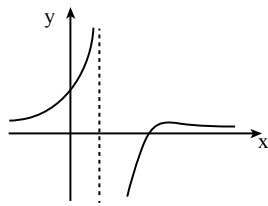
(2)



3. א.



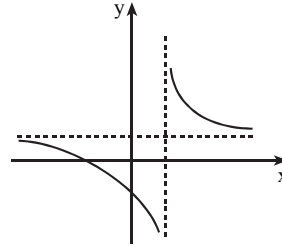
ב.



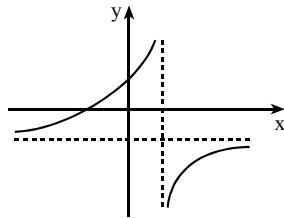
4. א. (1) $x \neq 4$. (2) אין. (3) עלייה: אין, ירידה: $x > 4$ או $x < 4$.

(4) $(0; -1.25)$, $(-2.5; 0)$. (5) $y = 2$, $x = 4$. ג. (1) $y = -2$, $x = 4$.

ב.



ג. (2).



ד. (1) $y = -4$, $x = 4$. (2) $y = 2$, $x = 10$. (3) $y = 12$, $x = 4$. (4) $y = 4$, $x = 4$.

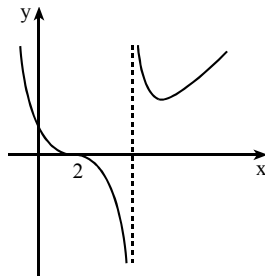
5.

א. $x \neq 4$.

ב. מינימום. $(5; 27)$.

ד. $a = 3$.

ג.



6.

א. (1) $x \neq 1$. (2) מקסימום. $(5; 1\frac{1}{8})$.

(3) עלייה: $1 < x < 5$, ירידה: $x > 5$ או $x < 1$.

(4) $(0; -2)$, $(2; 0)$, $(-1; 0)$. (5) $y = 1$, $x = 1$.

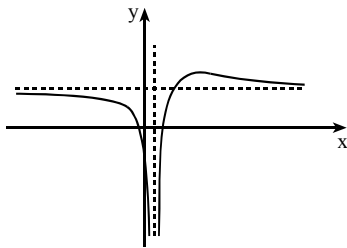
ג. (1) $h(x) = 4f(x)$. (2) מקסימום. $(5; 4.5)$.

ד. מינימום. $(5; -\frac{9}{16})$.

ה. (1) $y = -1$, $x = 1$. (2) $y = 1$, $x = -1$.

(3) $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$. (4) $y = 1$, $x = 2\frac{1}{3}$.

ב.



7.

א. $x \neq 0$. ב. $(-1; -3)$ מקסימום. ו.

ג. עלייה: $x < -1$.

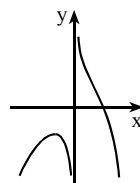
ירידה: $-1 < x < 0$ או $x > 0$.

ד. כן, $(1.26; 0)$.

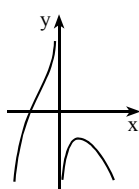
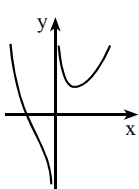
ה. $x = 0$.

ט. מקסימום. $(-0.5; -3)$.

ז.



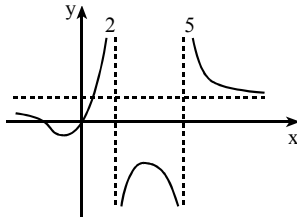
ח.



8. א. $k=1\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{4}$. ב. $(1;1.5)$ מקסימום, $(-1;-1.5)$ מינימום.

9. א. $(-2;2)$ מקסימום. ב. $(-1;2)$ מקסימום. ג. $(2;2)$ מקסימום. ד. $(1.5;2)$ מקסימום.

10. א. $k=1\frac{1}{3}$ או $k=-\frac{2}{3}$. ב. $m=\frac{2}{3}$. ג. (1) $x \geq 6$ או $x \leq 2$, $x \neq 0$. (2) $2 \leq x \leq 6$.



11. א. תחום הגדרה: $x \neq 2$, $x \neq 5$.

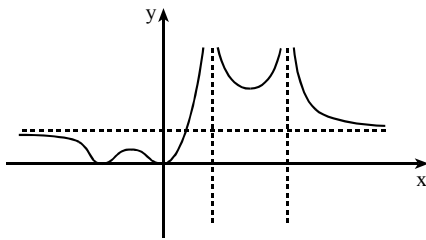
נקודות חיתוך: $(-3;0)$, $(0;0)$.

עלייה: $2 < x < 3$ או $-1 < x < 2$.

ירידה: $x > 5$ או $3 < x < 5$ או $x < -1$.

$(3;-18)$ מקסימום, $(-1;-\frac{2}{9})$ מינימום.

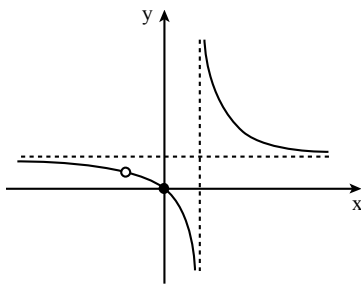
אסימפטוטות: $x=2$, $x=5$, $y=2$.



ג. (1) $(3;18^n)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, (2)

$(-1;(\frac{2}{9})^n)$ מקסימום,

$(-3;0)$ מינימום.



ג.

12. א. $b=-4$, $a=1$.

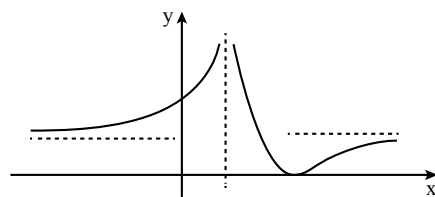
ב. (1) $x \neq -4$, $x \neq 1$. (2) $(0;0)$.

(3) אין. יש "חור" ב- $(-4;\frac{4}{5})$.

(4) ירידה: $1 < x$ או $-4 < x < 1$.

או $x < -4$. עלייה: אין.

ד. $0 \leq x < 1$.



13. א. (1) $x \neq 2$. (2) $y=a$, $x=2$. (3) $(3;a-1)$ מינימום. ג.

(4) עלייה: $x > 3$ או $x < 2$; ירידה: $2 < x < 3$.

ב. $a=1$.

ד. $k=1$ או $k=-1$.

14. א. (1) עבור $a < 0$: כל x . עבור $a > 0$: $x \neq \sqrt{a}$, $x \neq -\sqrt{a}$.

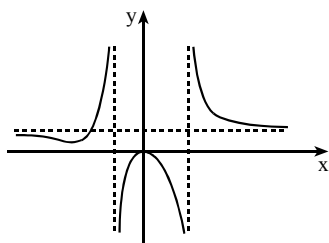
(2) $(2,0)$, $(0;-\frac{4}{a})$. (3) $y=1$. (4) עבור $a < 0$: אין. עבור $a > 0$: $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$.

ב. עבור $a > 4$: $(2,0)$ מקסימום, $(\frac{a}{2};\frac{a-4}{a})$ מינימום.

עבור $a < 4$: $(2,0)$ מינימום, $(\frac{a}{2};\frac{a-4}{a})$ מקסימום.

ג. I. $a > 4$: II. $a < 0$: III. $0 < a < 4$.

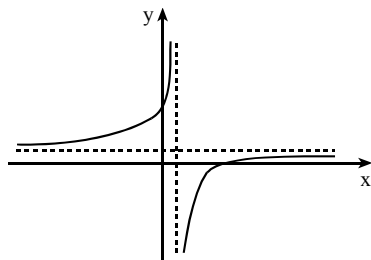
15. $g(x)$. 16. $f(x)$.



17. (1) לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(-2; 1)$.



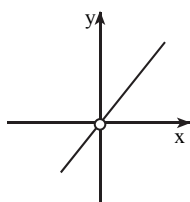
(2) לא נכונה. דוגמה נגדית:

$$f(x) = \frac{x-5}{x-1}$$

אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

18. (1) לא נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה.

19. א. $x \neq -5, x \neq -4$. ב. $x = -5, y = 1$. ג. $A(-4; 4)$.



ג.

20. א. $x \neq 0$.

21. $m = -10, k = 3$.

22. א. לדוגמה: $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$. ב. לדוגמה: $g(x) = \frac{x(x+4)}{(x-3)(x+4)}$.

23. א. (1) כל x . (2) מינימום. ב. כל x .

24. $1\frac{37}{59}$.

25. א. $k < 4$. ב. $k = 4$. ג. $k > 4$.

26. א. $a > 0.25$. ב. כל x . ג. $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$.

27. א. $k > -6$. ב. $k = 10$.

28. א. $k = 9$. ב. (1) $x = 3, x = -3$. (2) $0 < k < 9$.

29. $a > 0$, שתי נקודות קיצון.

30. א. $x \neq 0$. ב. (1) $m < 0$. (2) מינימום, $(-\sqrt{-m}; m - 2\sqrt{-m})$, מקסימום. ג. $(1; 1)$.

הקשר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הגרף של $\frac{1}{f(x)}$

נתמקד עכשיו במקרה שבו נתונה פונקציה $f(x)$, ובהסתמך על הפונקציה ועל הגרף שלה, נחקור ונשרטט את גרף הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$, הנקראת פונקציה הופכית ל- $f(x)$.

נסכם את הכללים העיקריים לגבי הקשר בין פונקציה $f(x)$ לפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$:

א. בנקודה שבה הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x , הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת, לכן $g(x)$ אינה מוגדרת עבור ערך x זה, וגם כפופה לתחום ההגדרה המקורי של $f(x)$.

ב. עבור כל x בתחום ההגדרה של $g(x)$, ערך הפונקציה $g(x)$ שווה למספר ההופכי לערך של הפונקציה $f(x)$.

ג. לגרף של $g(x)$ אין נקודות מפגש עם ציר ה- x .

ד. כאשר הפונקציה $f(x)$ חיובית, כלומר הגרף שלה נמצא מעל ציר ה- x , אז גם הפונקציה $g(x)$ חיובית, וכאשר הפונקציה $f(x)$ שלילית, כלומר הגרף שלה נמצא מתחת לציר ה- x , אז גם הפונקציה $g(x)$ שלילית.

ה. כאשר הפונקציה $f(x)$ עולה, אז הפונקציה $g(x)$ יורדת (בתנאי שהיא מוגדרת), וכאשר הפונקציה $f(x)$ יורדת, אז הפונקציה $g(x)$ עולה (בתנאי שהיא מוגדרת).

ו. עבור ערך x שעבורו לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום פנימית, לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מקסימום פנימית (בתנאי ש- $g(x)$ מוגדרת עבור אותו x).

נקודת מינימום $(x_1; y_1)$ של $f(x)$, הופכת לנקודת מקסימום $(x_1; \frac{1}{y_1})$ של $g(x)$.

ועבור ערך x שעבורו לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום פנימית, לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום פנימית (בתנאי ש- $g(x)$ מוגדרת עבור אותו x).

נקודת מקסימום $(x_1; y_1)$ של $f(x)$, הופכת לנקודת מינימום $(x_1; \frac{1}{y_1})$ של $g(x)$.

ז. הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יכולים להיפגש רק בנקודות שבהן $f(x) = 1$ או $f(x) = -1$ (אם בכלל קיימות כאלה נקודות).

ח. אסימפטוטות אנכיות ו"חורים":

(1) אם גרף הפונקציה $f(x)$ נפגש עם ציר ה- x בנקודה $(b; 0)$, אז לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x = b$.

(2) אם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x = b$, אז הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת עבור ערך זה של x , ויש לה "חור" בנקודה שערך ה- y שלה הוא אפס, כלומר בנקודה $(b; 0)$.

(3) כאשר לפונקציה $f(x)$ יש "חור" בנקודה $(x_1; y_1)$:

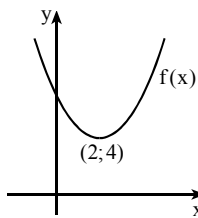
אם $y_1 \neq 0$, אז לפונקציה $g(x)$ יש "חור" בנקודה $(x_1; \frac{1}{y_1})$.

ואם $y_1 = 0$, אז לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x = x_1$.

ט. אסימפטוטות אופקיות:

- (1) אם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = a$ ($a \neq 0$), אז לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{1}{a}$.
- (2) אם עבור $x \rightarrow +\infty$ (או $x \rightarrow -\infty$) הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$, כלומר אין לה אסימפטוטה אופקית, אז הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- 0^+ או ל- 0^- , ויש לה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.
- (3) אם עבור $x \rightarrow +\infty$ (או $x \rightarrow -\infty$) הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- 0^+ או ל- 0^- , כלומר יש לה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$, אז הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$, ואין לה אסימפטוטה אופקית.

31. בציור נתונה פונקציה ריבועית $f(x)$, שיש לה נקודת מינימום ב- $(2;4)$.



והיא חיובית לכל ערך של x .

נקודת המפגש של הגרף עם ציר ה- y היא $(0;6)$.

נסמן: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. מצאו עבור הפונקציה $g(x)$:

א. תחום הגדרה. ב. נקודת המפגש של הגרף עם ציר ה- y .

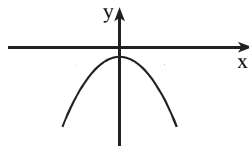
ג. תחומי חיוביות ושליליות.

ד. נקודת קיצון. ה. תחומי עלייה וירידה.

ו. שרטטו את הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ באותה מערכת צירים.

32. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת, רציפה ושליטת לכל x .

נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $(0; -\frac{1}{3})$ מקסימום.



מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

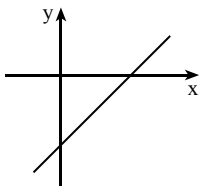
ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ג. כתבו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

ד. היעזרו בשרטוט הנתון וקבעו מהי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$.

ה. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

33. בציור שלפניכם מתוארת פונקציה קווית $f(x)$, החותכת את ציר ה- x בנקודה $(3;0)$.



נסמן: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. מצאו עבור הפונקציה $g(x)$:

א. אסימפטוטה אנכית ואסימפטוטה אופקית.

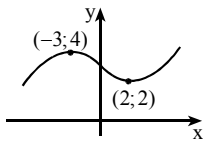
ב. תחומי חיוביות ושליליות.

ג. הסבירו מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון.

ד. הסבירו מדוע הפונקציה $g(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

ה. שרטטו במערכת צירים אחת את הגרף של $f(x)$ ואת הגרף של $g(x)$.

ו. נתון: $g(a) = \frac{2}{5}$. מהו הערך של $f(a)$? נמקו.



34. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת ורציפה לכל x .

על השרטוט מסומנת נקודות הקיצון

היחידות של הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

ב. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x) = \frac{1}{f(x)} + 4$, וקבעו את סוג הקיצון.

35. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

א. מצאו עבור $f(x)$: (1) נקודת קיצון וקבעו את סוגה.

(2) נקודות חיתוך עם הצירים.

(3) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. היעזרו בסעיף א' ומצאו עבור פונקציה זו:

(1) אסימפטוטות מאונכות לצירים. (2) נקודת קיצון.

(3) תחומי עלייה וירידה. (4) תחומי חיוביות ושליליות.

ג. הוסיפו את גרף הפונקציה $g(x)$ לאותה מערכת צירים.

ד. קבעו ללא חישובים, מהו ערך הביטוי $f(6) \cdot g(6)$. נמקו.

36. א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ ואת נקודות החיתוך שלה עם הצירים, ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים הבאים:

(1) מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון? נמקו.

(3) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

37. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x . נסמן: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, כך ש- $g(x)$ מוגדרת לכל x .

עבור כל אחת מהטענות קבעו האם היא נכונה בוודאות:

א. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

ב. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש אותן נקודות אפס.

ג. אם לפונקציה $g(x)$ יש קיצון עבור x מסוים, אז לפונקציה $f(x)$ יש קיצון עבור אותו x .

ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש קיצון עבור x מסוים, אז לפונקציה $g(x)$ יש קיצון עבור אותו x .

38. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x . הוכיחו שאם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$

נפגשים זה עם זה, אז נקודת המפגש נמצאת על הישר $y = 1$ או על הישר $y = -1$.

39. א. דניאל טוען שהפונקציה $y = x$ מתלכדת עם הפונקציה ההופכית שלה. האם הוא צודק?
 ב. כתבו משוואה של פונקציה שמתלכדת עם הפונקציה ההופכית שלה (שתי אפשרויות).

40. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4$.
 א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ב. היעזרו בסעיף א' ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^4}$.

41. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$.
 א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ב. היעזרו בסעיף א' ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^3}$.

42. נתונה הפונקציה $f(x) = x^n$.
 א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:
 (1) עבור n זוגי. (2) עבור n אי זוגי.
 ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^n}$:
 (1) עבור n זוגי. (2) עבור n אי זוגי.

43. $f(x)$ היא פונקציה גזירה ומוגדרת לכל x , כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x .
 א. הוכיחו שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;
 ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.
 ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע $x < 3$.
 כתבו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$.

44. א. נתונה פונקציה $f(x)$. ידוע כי x_1 היא נקודת מינימום (מקומי) של הפונקציה $f(x)$.
 כמו כן, $f'(x_1) = 0$, $f''(x_1) \neq 0$, $f(x_1) \neq 0$.
 הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 הוכיחו: x_1 היא נקודת מקסימום (מקומי) של הפונקציה $g(x)$.
 ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$.
 מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה.
 ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$, וקבעו את סוגה.

45. $f(x)$ היא פונקציה מוגדרת וגזירה לכל x , כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x .

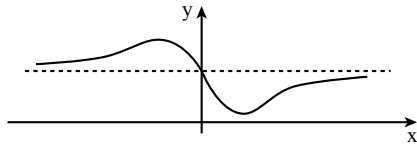
נתון: לפונקציה יש מינימום עבור $x = x_1$.

מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = \frac{k}{f(x)}$, k פרמטר. מצאו את התחום של k , אם לפונקציה $g(x)$:

א. יש מקסימום עבור $x = x_1$. ב. יש מינימום עבור $x = x_1$.

46. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x . הפונקציה חיובית בכל התחום.

נקודות הקיצון של הפונקציה הן $\left(\frac{2}{3}; a\right)$ מינימום, $\left(-\frac{2}{3}; b\right)$ מקסימום.



לפונקציה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=1$, ראו ציור.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א. (1) הסבירו מדוע הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x .

(2) מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומה סוגן?

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5) כמה נקודות מפגש יש בין הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$? נמקו.

ב. הוסיפו לסרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

47. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת ורציפה לכל x .

על השרטוט מסומנת נקודות האפס

ונקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

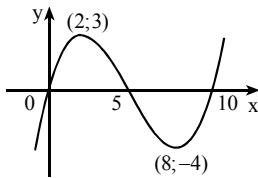
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ג. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

ד. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ה. האם יש לפונקציה $g(x)$ אסימפטוטות מאונכות לצירים? אם כן, רשמו את משוואתיהן.



48. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת, רציפה וחיובית לכל x .

נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$

היא $(3; 1)$ מקסימום. לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y=0$.

מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

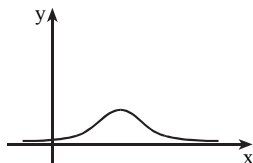
ב. כתבו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

ג. היעזרו בשרטוט הנתון והשלימו:

(1) עבור $x \rightarrow \infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל-____, ולכן הפונקציה $g(x)$ שואפת ל-____.

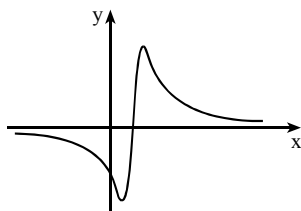
(2) עבור $x \rightarrow -\infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל-____, ולכן הפונקציה $g(x)$ שואפת ל-____.

ד. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



49. נתונה פונקציה רציונלית $f(x)$, שיש לה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=3$. מצאו את האסימפטוטה האופקית של כל אחת מהפונקציות הבאות:

$$(1) \frac{1}{f(x)} \quad (2) \frac{1}{f(x)+2} \quad (3) \frac{1}{-f(x-5)} \quad (4) \frac{1}{2f(x)+1}$$



50. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת ורציפה לכל x . נקודת האפס היחידה של הפונקציה היא $(3;0)$, ונקודות הקיצון שלה הן $(2;-2)$ מינימום, $(4;2)$ מקסימום.

מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

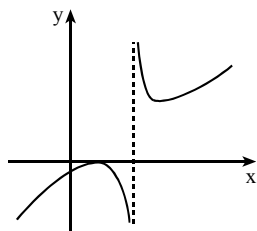
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ג. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

ד. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ה. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות: (1) $\frac{1}{f(x)}+3$, (2) $\frac{1}{f(x-3)}$.



51. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.

לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית אחת שמשוואתה $x=5$. נקודת האפס היחידה של הפונקציה היא $(3;0)$, ונקודות הקיצון שלה הן $(7;8)$ מינימום, $(3;0)$ מקסימום.

מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ב. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$,

אם ישנן, וקבעו את סוג הקיצון.

ג. כתבו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$.

ד. כתבו את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $g(x)$.

ה. כתבו את שיעורי הנקודה שבה מתקבל "חור" בגרף הפונקציה $g(x)$.

ו. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות: (1) $-\frac{1}{f(x)}$, (2) $\frac{1}{f(-x)}$.

52. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-3}$.

מצאו עבור הפונקציה $f(x)$: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. היעזרו בסעיפים קודמים, ומצאו עבור פונקציה זו:

(1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.

(3) אסימפטוטות מאונכות לצירים. (4) שיעורי נקודה שבה יש "חור" בגרף.

(5) שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות: (1) $\frac{1}{2 \cdot f(x)} - 6$, (2) $\frac{1}{f(2x)}$.

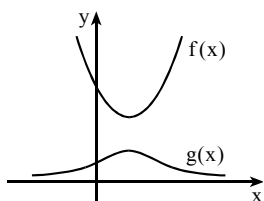
תשובות:

31. א. כל x . ב. $(0; \frac{1}{6})$.

ג. חיוביות: כל x , שליליות: אף x .

ד. $(2; \frac{1}{4})$ מקסימום.

ה. עלייה: $x < 2$, ירידה: $x > 2$.



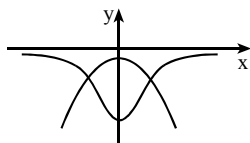
ו.

32. א. כל x .

ב. חיוביות: אין, שליליות: כל x .

ג. $(0; -3)$ מינימום.

ד. $y = 0$.



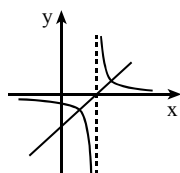
ה.

33. א. $y = 0$, $x = 3$.

ב. חיוביות: $x > 3$;

שליליות: $x < 3$.

ו. $f(a) = \frac{5}{2}$.



ה.

34. א. $(2; \frac{1}{2})$ מקסימום, $(-3; \frac{1}{4})$ מינימום. ב. $(2; 4\frac{1}{2})$ מקסימום, $(-3; 4\frac{1}{4})$ מינימום.

35. א. (1) $(1.5; -0.25)$ מינימום. (2) $(0; 2)$, $(2; 0)$, $(1; 0)$. (3)

ב. (1) $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

(2) $(1.5; -4)$ מקסימום.

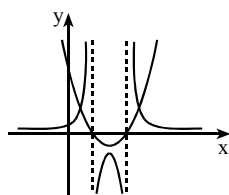
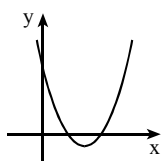
(3) עלייה: $1 < x < 1.5$ או $x < 1$.

ירידה: $x > 2$ או $1.5 < x < 2$.

(4) חיוביות: $x > 2$ או $x < 1$,

שליליות: $1 < x < 2$.

ג.



ד. $f(6) \cdot g(6) = 1$.

36. א. $(3; 0)$ מקסימום; $(0; -9)$.

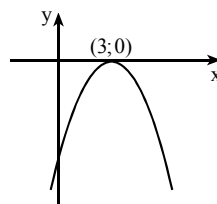
ב. (1) $y = 0$, $x = 3$. (2) לא.

(3) עלייה: $x > 3$,

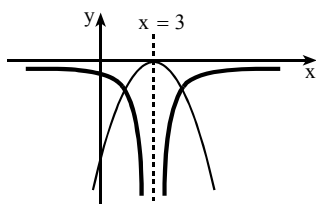
ירידה: $x < 3$.

(4) חיוביות: אין,

שליליות: $x \neq 3$.

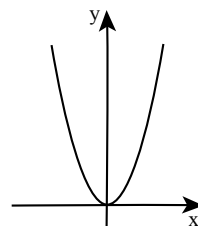


ג.

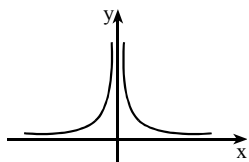


37. א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. נכונה. 39. א. דניאל אינו צודק. ב. $y = -1$, $y = 1$.

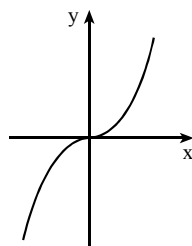
40. א.



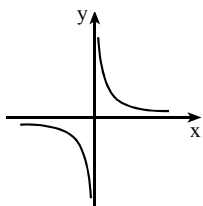
ב.



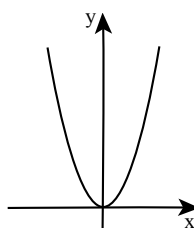
41. א.



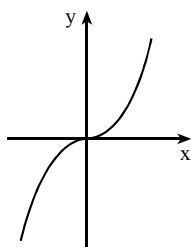
ב.



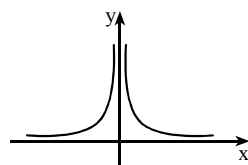
42. א. (1)



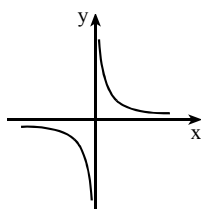
(2)



ב. (1)



(2)



43. ב. עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$. 44. ב. מינימום. $(0; \frac{1}{2})$. ג. מקסימום. $(0; 2)$.

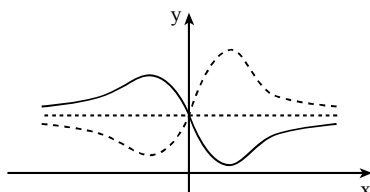
45. א. $k > 0$. ב. $k < 0$.

46. א. (2) $(\frac{2}{3}; \frac{1}{a})$ מקסימום, $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{b})$ מינימום. ב.

(3) עלייה: $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$;

ירידה: $x < -\frac{2}{3}$ או $x > \frac{2}{3}$.

(4) $y = 1$ נקודה אחת.



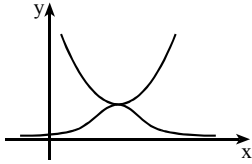
47. א. $x \neq 0$, $x \neq 5$, $x \neq 10$. ב. חיוביות: $x > 10$ או $0 < x < 5$, שליליות: $5 < x < 10$ או $x < 0$.

ג. $(8; -\frac{1}{4})$ מקסימום, $(2; \frac{1}{3})$ מינימום.

ד. עלייה: $2 < x < 5$ או $5 < x < 8$, ירידה: $x > 10$ או $8 < x < 10$ או $0 < x < 2$ או $x < 0$.

ה. כן, $x = 0$, $x = 5$, $x = 10$, $y = 0$.

ד.



48. א. כל x . ב. $(3; 1)$ מינימום.

ג. (1) עבור $x \rightarrow \infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל-0,

ולכן הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- ∞ .

(2) עבור $x \rightarrow -\infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל-0,

ולכן הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- ∞ .

49. (1) $y = \frac{1}{3}$ (2) $y = \frac{1}{5}$ (3) $y = -\frac{1}{3}$ (4) $y = \frac{1}{7}$.

50. א. $x \neq 3$. ב. חיוביות: $x > 3$, שליליות: $x < 3$. ג. $(2; -\frac{1}{2})$ מקסימום, $(4; \frac{1}{2})$ מינימום.

ד. עלייה: $x > 4$ או $x < 2$, ירידה: $3 < x < 4$ או $2 < x < 3$.

ה. (1) $(2; 2\frac{1}{2})$ מקסימום, $(4; 3\frac{1}{2})$ מינימום. (2) $(5; -\frac{1}{2})$ מקסימום, $(7; \frac{1}{2})$ מינימום.

51. א. $x \neq 5$, $x \neq 3$. ב. $(7; \frac{1}{8})$ מקסימום. ג. $y = 0$. ד. $x = 3$. ה. $(5; 0)$.

ד. (1) $(7; -\frac{1}{8})$ מינימום. (2) $(-7; \frac{1}{8})$ מקסימום.

52. א. $x \neq 3$. ב. $(5; 8)$ מינימום, $(1; 0)$ מקסימום.

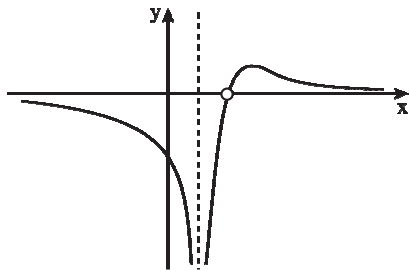
ג. (1) $x \neq 1$, $x \neq 3$.

(2) $(5; \frac{1}{8})$ מקסימום.

(3) $y = 0$, $x = 1$.

(4) $(3; 0)$.

(5)



ד. (1) $(5; -5\frac{15}{16})$ מקסימום. (2) $(2; \frac{1}{8})$ מקסימום.

פונקציות עם שורשים ריבועיים

פרק זה כולל פונקציות עם שורשים ריבועיים לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד הנמצא בספר 806 כך ד מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. רוב השאלות קצרות ואינן כוללות חקירה מלאה של פונקציה, אלא מדגישות רעיון מסוים. הדגשנו בעיקר את הרעיונות הבאים:

תחום הגדרה (כולל פתרון אי שוויונות עם פרמטרים), חיוביות ושליטיות בדרך אלגברית או גרפית, נקודות קצה, הבעה על ידי פרמטרים, אסימפטוטות אופקיות, "חורים" בגרף, השוואה בין פונקציית השורש הריבועי לפונקציית הערך המוחלט, טרנספורמציות של פונקציות וחקירה של הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בהסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$.

1.

נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2\sqrt{x+5}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. האם יש ערכים של x שעבורם $f(x) > 0$?

ג. אריאל טוען שבנקודת המקסימום הנמצאת בקצה תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

רועי טוען שבנקודת הקצה הנ"ל הפונקציה $f(x)$ אמנם מוגדרת, אבל הנגזרת $f'(x)$ אינה מוגדרת.

מי מבין השניים צודק? נמקו.

2.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-6}{\sqrt{x^2+1}}$.

א. הראו שהפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .

ב. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

3.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$.

4.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-k}$, $k > 1$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה המקבילה לציר ה- y ? נמקו.

5.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)(x-b)}}{x-4}$, b הוא פרמטר גדול מ-4.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. נתון: $f(b+4) = -f(4-b)$. מצאו את הערך של b .

6. תחום ההגדרה של הפונקציה הזוגית $f(x) = \sqrt{cx^2 + bx - 1}$ הוא $|x| \geq 4$.
 א. לאילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ מוגדרת.
 ב. מצאו את ערכי הפרמטרים b ו- c .

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - kx + 1}$, k הוא פרמטר.
 ידוע כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של x .
 א. מצאו את התחום שבו נמצא הפרמטר k .
 ב. נתון: $-2 \leq k \leq 2$.
 (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
 (2) ידוע כי הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים $y \geq \frac{\sqrt{7}}{4}$ ורק אותם. מצאו את הערך של k .

8. נתונה הפונקציה $g(x) = 2x^2 + c$. c הוא פרמטר. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כך: $f(x) = \sqrt{g(x)}$.
 אחת מנקודות החיתוך של הגרפים של פונקציות הנגזרת, $f'(x)$ ו- $g'(x)$,
 היא נקודה ששיעור ה- x שלה הוא 1.
 א. מצאו את ערך הפרמטר c .
 ב. (1) הוכיחו ש- $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
 (2) מצאו את שיעורי כל הנקודות שבהן הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ חותכים זה את זה.

9. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = 2x + m\sqrt{x-6}$, m הוא פרמטר.
 א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ השייכות למשפחה.
 ב. הנקודה P היא נקודה קבועה ששיעוריה אינם תלויים ב- m והיא נמצאת על כל הגרפים השייכים למשפחת הפונקציות $f(x)$.
 (1) מהו שיעור ה- x של הנקודה P ?
 (2) מצאו את שיעורי הנקודה P .

10. קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $x^2 = \sqrt{x+4}$.
 הדרכה: שרטטו את הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \sqrt{x+4}$.

11. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$.
 א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{x}$.
 (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
 (2) האם הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ זהות זו לזו? נמקו.
 (3) עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) = g(x)$? נמקו.

12. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

- א. האם תחום ההגדרה של שתי הפונקציות זהה?
 ב. האם הגרפים של שתי הפונקציות מתלכדים זה עם זה?
 אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, רשמו מה ההבדל ביניהם.

13. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{ax - bx^2}$, $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$. a ו- b הם פרמטרים.

- נתון: $a > 0$, $b > 0$.
 א. ידוע שלשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. הוכיחו: $a = 2b$.
 ב. נתונה המנה $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

- (1) מהו תחום ההגדרה של המנה?
 (2) הראו שהמנה היא פונקציה קבועה ורשמו את משוואתה.
 (3) שרטטו סקיצה של פונקציית המנה.

14. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. הראו כי עבור $x > 0$ מתקיים $f(x) = 1$ ועבור $x < 0$ מתקיים $f(x) = -1$.
 ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

15. א. הסבירו מדוע מתקיים: עבור $x > 0$ מתקיים $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ ועבור $x < 0$ מתקיים $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = -1$.

ב. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2}$.

- (1) מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת משתי הפונקציות.
 (2) הראו שעבור $x > 0$ מתקיים $g(x) = f(x)$ ועבור $x < 0$ מתקיים $g(x) = -f(x)$.
 ג. (1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 (2) בהסתמך על תת-הסעיפים (1) ו-(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

16. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{(x+2)^2}$.

- א. הראו כי הפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .
 ב. הסבירו מדוע מתקיים $f(x) = |x+2|$.
 ג. קבעו לאילו ערכי x מתקיים: $f(x) = x+2$. נמקו.
 ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

17. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{(x+1)^2}$.

- א. הסבירו מדוע $g(x) = |x+1|$.
 ב. קבעו לאילו ערכי x מתקיים: $g(x) = x+1$. נמקו.

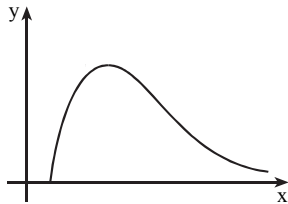
18. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x^3 + 2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. הראו ש- $f(x)$ היא פונקציה קווית ורשמו את התבנית האלגברית של הפונקציה הקווית.
 ג. נתון: $g(x) = 0.8x^2$. מצאו את התחום שבו הגרף של $f(x)$ נמצא מעל הגרף של $g(x)$.

19. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^n}$, הפרמטר n הוא מספר טבעי.
 א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$:
 ב. עבור n אי-זוגי.

20. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \sqrt{5-x}$.
 א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.
 ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$. c הוא פרמטר.
 מהו הערך של c שעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x ? נמקו.
 ג. נתונה הפונקציה $h(x) = 2 - f(x)$.
 מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגן.
 ד. נתונה הפונקציה $k(x) = f(-x)$.
 מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $k(x)$, וקבעו את סוגן.
 ה. נתונה הפונקציה $n(x) = f(-5x)$.
 מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $n(x)$, וקבעו את סוגן.

21. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x-m}}{x}$. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \geq 4$.



- א. מצאו את ערך הפרמטר m .
 ב. מהי משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.
 ג. לפניכם סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 שרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
 ושל גרף הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x-m)$,
 עבור הערך של הפרמטר m שמצאתם בסעיף א'.

22. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (5) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x+3)$.
 ב. (1) הוכיחו ש- $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
 (2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

23. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2mx}{\sqrt{x^2 - 4m^2}}$. m הוא פרמטר שונה מאפס.

א. עבור $m > 0$ מצאו (הבע באמצעות m במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(3) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

(4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: (1) עבור $m > 0$, (2) עבור $m < 0$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(2x)$, $m > 0$. הביעו באמצעות m :

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

24. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$, a הוא פרמטר גדול מ-1.

א. מצאו עבור פונקציית הנגזרת $f'(x)$:

(1) תחום הגדרה. (2) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

(3) נקודות חיתוך עם הצירים. (4) תחומי עלייה וירידה.

(5) שרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסיפו לסקיצה ששרטטת בתת-סעיף א(5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונות שתי משוואות, I ו-II: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} = k$, I, $\sqrt{x^2 + a} = k$, II.

מצאו את תחום הערכים של k שעבורם אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II. הביעו באמצעות a במידת הצורך.

25. א. רשמו תבנית אלגברית של פונקציה המוגדרת לכל ערך של x ,

ויש לה שתי אסימפטוטות אופקיות שונות.

ב. רשמו תבנית אלגברית של פונקציה שיש לה שתי אסימפטוטות אנכיות שונות

ושתי אסימפטוטות אופקיות שונות.

26. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

(1) מצאו את תחום ההגדרה.

(2) מצאו את האסימפטוטות האופקיות של כל אחת מהפונקציות הבאות (אם ישנן):

$$y = \frac{\sqrt{16 - x^4}}{3x^2} \quad \text{ג.}$$

$$y = \frac{\sqrt{9x^4 - 1}}{2x^2} \quad \text{ב.}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} \quad \text{א.}$$

27. לפניכם שתי טענות.

קבעו עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

(1) אם פונקציה $f(x)$ מקיימת $f'(x) > 0$ עבור כל x , אז כאשר $x \rightarrow \infty$, הפונקציה שואפת ל- ∞ .

(2) אם פונקציה $f(x)$ מקיימת $f'(x) > 0$ עבור כל x , אז כאשר $x \rightarrow -\infty$, הפונקציה שואפת ל- $-\infty$.

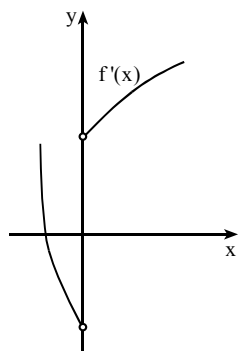
28.

לפניכם שלוש פונקציות המוגדרות לכל ערך של x .
מצאו את האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y של כל אחת מהפונקציות:

א. $y = \sqrt{x^2 + 9} - x + 1$ ב. $y = 5x - \sqrt{25x^2 + 1}$ ג. $y = 2x + \sqrt{4x^2 + 6} + 2$

29.

$f(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת בתחום $x \geq -3$.
 $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$. בציור מוצג הגרף של $f'(x)$.



נתון: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}}$

- מצאו את תחום ההגדרה של $f'(x)$.
- מצאו את האסימפטוטה האנכית של $f'(x)$.
- מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון. נמקו.
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$. נמקו.

30.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x} - 2}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$. הנגזרת של $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x) \cdot f'(x)$. מצאו את תחום הירידה של הפונקציה $g(x)$. נמקו.

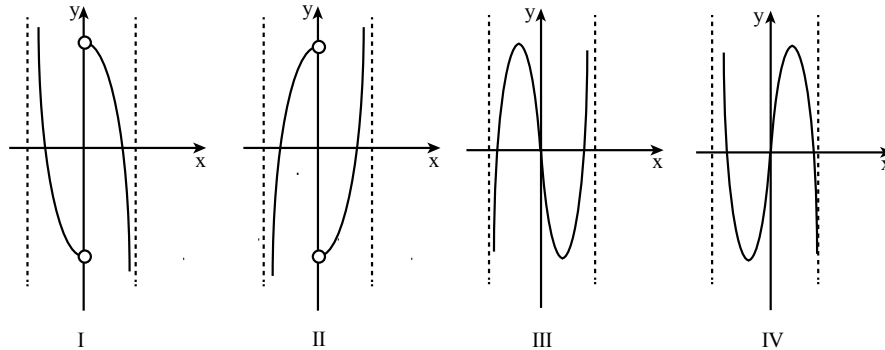
31.

נתון כי הפונקציה הזוגית $f(x) = \sqrt{8 - ax + bx^2} + c$ מוגדרת בתחום $-2 \leq x \leq 2$ בלבד.

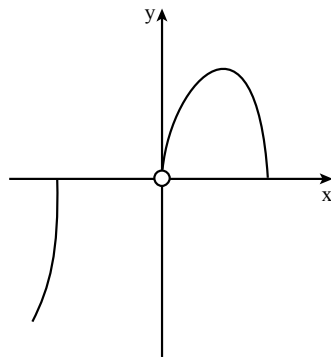
- a , b ו- c הם פרמטרים, $c > 0$. מצאו את הערך של הפרמטר a ואת הערך של הפרמטר b .
- הציבו את הערך של a ואת הערך של b , וענו על הסעיפים ב-ג.
- מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$, ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\sqrt{2}$. השטח המוגבל על ידי שני המשיקים ועל ידי ציר ה- x הוא $\frac{49\sqrt{2}}{2}$. מצאו את הערך של הפרמטר c .
- בתחום $-2 \leq x \leq 2$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = -f(x)$. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$, ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\sqrt{2}$. מהו סוג המרובע שנוצר על ידי שני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ ושני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$? נמקו.

32. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$, $g(x) = \sqrt{8x^2-x^4}$.

- א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. מצאו את תחום ההגדרה.
 (2) מצאו את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ עם הצירים.
 ב. מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות, וקבעו את סוגן.
 ג. על פי הסעיפים א ו-ב, סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. לפניכם ארבעה גרפים, IV-I. איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמקו.



33. בציור שלפניכם מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{12x^3-x^5}}{x}$,



- שתחום ההגדרה שלה הוא $0 < x \leq 2\sqrt{3}$, $x \leq -2\sqrt{3}$.
 א. הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות בדיוק. מצאו את תחום הערכים של k .
 ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{12x-x^3}$, שתחום ההגדרה שלה הוא $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$, $x \leq -2\sqrt{3}$.
 (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (3) עבור הערכים של k שמצאת בסעיף א', מצאו בכמה נקודות חותך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה $g(x)$.

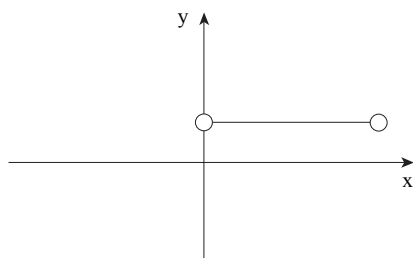
34. נתונות הפונקציות $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$.

- א. מצאו עבור כל אחת מהפונקציות:
 (1) את תחום ההגדרה.
 (2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
 (3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבעו את סוגן.
 ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.
 ג. נתונה הפונקציה $h(x) = g(x) - k$, $k > 0$. עבור אילו ערכים של k אין לפונקציה $h(x)$ נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$? נמקו.

תשובות:

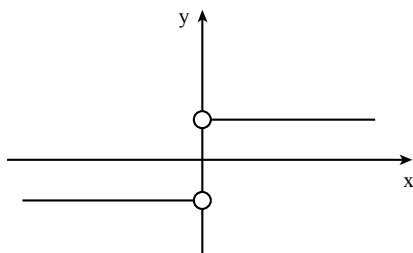
1. א. $x \geq -5$ ב. לא ג. רועי צודק.
2. ב. חיוביות: $x > 6$, שליליות: $x < 6$ 3. א. $x \geq 2$ ב. $x \geq 2$ או $x < 0$.
4. א. $x \leq -1$ או $x \geq 1$ ב. $x \neq k$, כן, הישר $x = k$.
5. א. $x \geq b$ או $x \leq 1$ ב. $b = 7$.
6. א. $x \geq 4$ או $x \leq -4$ ב. $b = 0$, $c = \frac{1}{16}$.
7. א. $-2 \leq k \leq 2$ ב. (1) כל x (2) $k = 1.5$ או $k = -1.5$.
8. א. $c = -1.75$ ב. (2) $(1; 4)$, $(-1; -4)$.
9. א. $x \geq 6$ ב. (1) $x = 6$ (2) $P(6; 12)$ 10. שני פתרונות.
11. א. $x > 0$ ב. (1) $x \geq 0$ (2) לא (3) $x > 0$ 12. א. כן ב. כן.

13. ב. (1) $0 < x < 2$ (3).



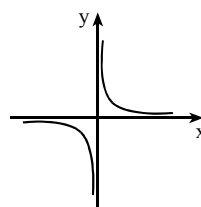
(2) $y = \sqrt{b}$

14. א. $x \neq 0$ ג.

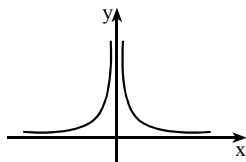


15. ב. (1) $-f(x)$, $x \neq 0$, $-g(x)$, $x \neq 0$.

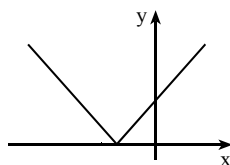
ג. (1)



(2)



16. ג. $x \geq -2$ ד.

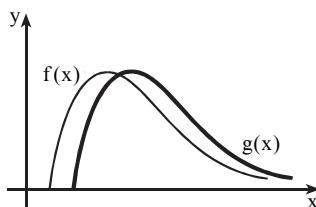


17. ב. $x \geq -1$.

18. א. כל x . ב. $f(x) = 2x$. ג. $0 < x < 2.5$. 19. א. כל x . ב. $x \geq 0$.

20. א. $(5;0)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, $(4;16)$ מקסימום. ב. $c = -16$ או $c = 0$.
 ג. $(5;2)$ מקסימום, $(0;2)$ מקסימום, $(4;-14)$ מינימום.
 ד. $(-5;0)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, $(-4;16)$ מקסימום.
 ה. $(-1;0)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, $(-0.8;16)$ מקסימום.

21. א. $m = 4$. ב. $y = 0$. ג.



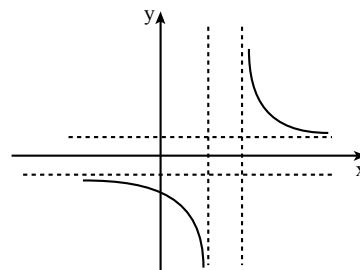
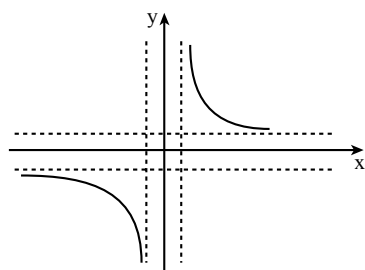
22. א. (1) $x > 4$ או $x < 2$. (2) $(0; -1.06)$.

(3) $x = 2$, $x = 4$, כאשר $x \rightarrow \infty : y = 1$, כאשר $x \rightarrow -\infty : y = -1$.

(4) ירידה: $x > 4$ או $x < 2$, עלייה: אף x .

ב. (2)

(5)



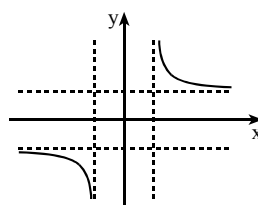
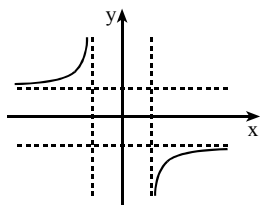
23. א. (1) $x > 2m$ או $x < -2m$.

(2) $x = -2m$, $x = 2m$, כאשר $x \rightarrow \infty : y = 2m$, כאשר $x \rightarrow -\infty : y = -2m$.

(3) עלייה: אף x ; ירידה: $x > 2m$ או $x < -2m$. (4) אין חיתוך עם הצירים.

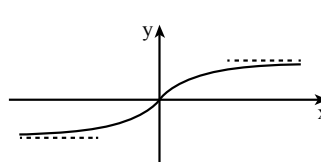
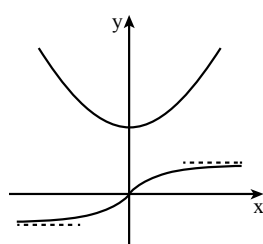
עבור $m < 0$:

ב. עבור $m > 0$:



ג. (1) $x > m$ או $x < -m$. (2) עלייה: אף x , ירידה: $x > m$ או $x < -m$.

24. א. (1) כל x . (2) כאשר $x \rightarrow \infty$, $y=1$, כאשר $x \rightarrow -\infty$, $y=-1$. (3) $(0;0)$.
(4) עלייה: כל x ; ירידה: אין.



ב. $k \leq -1$ או $1 \leq k < \sqrt{a}$.

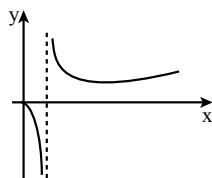
25. א. לדוגמה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. ב. לדוגמה: $g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4}}$.

26. א. (1) $x \neq 0$. (2) $y=1$. ב. (1) $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ או $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$. (2) $y=1.5$. ג. (1) $-2 \leq x \leq 2$, $x \neq 0$. (2) אין.

27. (1) לא נכונה. (2) לא נכונה.

28. א. $y=1$ (כאשר $x \rightarrow \infty$). ב. $y=0$ (כאשר $x \rightarrow \infty$). ג. $y=2$ (כאשר $x \rightarrow -\infty$).

29. א. $x > -3$, $x \neq 0$. ב. $x = -3$. ג. $x = -2$ מקסימום.
ד. עלייה: $x > 0$ או $-3 < x < -2$; ירידה: $-2 < x < 0$.



30. א. (1) $x \geq 0$, $x \neq 2$. (2) $x=2$.

(3) $(0;0)$.

(4) $(0;0)$ מקסימום, $(8;4)$ מינימום.

ב. $2 < x < 8$.

31. א. $a=0$, $b=-2$. ב. $c=3$. ג. מעוין.

32. א. (1) $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$.

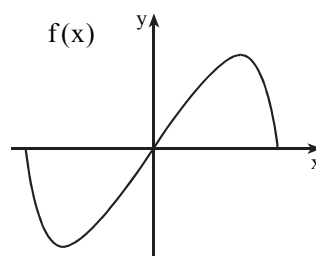
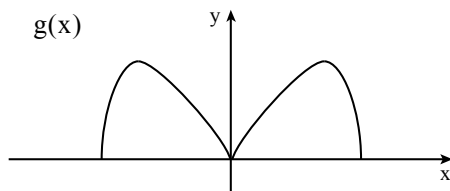
(2) $f(x)$: $(-\sqrt{8};0)$, $(0;0)$, $(\sqrt{8};0)$. $g(x)$: $(-\sqrt{8};0)$, $(0;0)$, $(\sqrt{8};0)$.

ב. $f(x)$: $(2;4)$ מקסימום מוחלט, $(-2;-4)$ מינימום מוחלט.

$g(x)$: $(2;4)$ מקסימום מוחלט, $(-2;4)$ מקסימום מוחלט.

$(\sqrt{8};0)$ מינימום מוחלט, $(0;0)$ מינימום מוחלט, $(-\sqrt{8};0)$ מינימום מוחלט.

ג.



ד. גרף I.

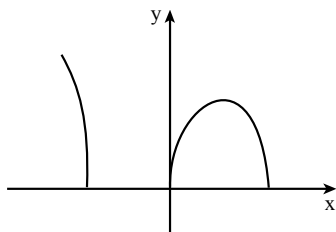
33. א. $0 \leq k < 4$.

ב. (1) עלייה: $0 < x < 2$;

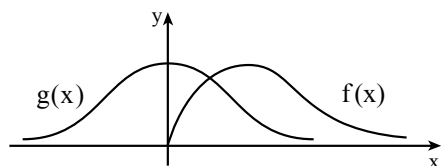
ירידה: $2 < x < 2\sqrt{3}$ או $x < -2\sqrt{3}$.

(3) ב-3 נקודות.

(2)



ב.



34. א. (1) $f(x)$: $x \geq 0$, $g(x)$: כל x .

(2) $f(x)$: $y = 0$, $g(x)$: $y = 0$.

(3) $f(x)$: מינימום, $(0; 0)$, מקסימום, $(1; \frac{1}{\sqrt{2}})$.

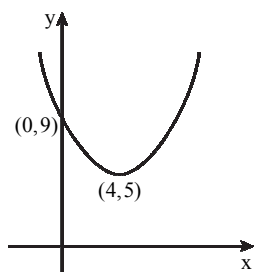
$g(x)$: מקסימום, $(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$.

ג. $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

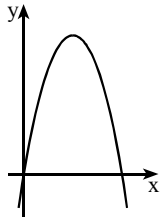
הקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לבין הגרף של $\sqrt{f(x)}$

נתמקד עכשיו בחקירה של הפונקציה $\sqrt{f(x)}$, בהסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$.
 נסכם את הכללים העיקריים לגבי הקשר בין פונקציה $f(x)$ לפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$:

- הפונקציה $g(x)$ מוגדרת רק כאשר $f(x) \geq 0$, כלומר היא מוגדרת כאשר הפונקציה $f(x)$ חיובית (והגרף שלה נמצא מעל ציר ה- x) או כאשר הפונקציה $f(x)$ מתאפסת (והגרף שלה נפגש עם ציר ה- x).
 כאשר $f(x) < 0$, הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת.
- עבור כל x בתחום שבו $g(x)$ מוגדרת, ערך הפונקציה $g(x)$ שווה לשורש הריבועי של ערך הפונקציה $f(x)$.
- נקודות המפגש של $g(x)$ עם ציר ה- x זהות לנקודות המפגש של $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש נקודות כאלה).
- הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה אי שלילית בכל התחום שבו היא מוגדרת.
- כאשר הפונקציה $f(x)$ חיובית (במצב זה, כאמור, הפונקציה $g(x)$ מוגדרת):
 - אם הפונקציה $f(x)$ עולה, אז גם הפונקציה $g(x)$ עולה.
 - אם הפונקציה $f(x)$ יורדת, אז גם הפונקציה $g(x)$ יורדת.
 - אם לערך מסוים של x יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון פנימית, אז עבור אותו ערך של x גם לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון פנימית וזאתו סוג.
- הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יכולים להיפגש רק בנקודות שבהן $f(x) = 1$ או $f(x) = 0$ (אם קיימות כאלה נקודות על הגרף של $f(x)$).
 בהקשר זה, נשים לב שכאשר $0 < f(x) < 1$, אז $\sqrt{f(x)} > f(x)$, כלומר הגרף של $\sqrt{f(x)}$ נמצא מעל הגרף של $f(x)$.
 וכאשר $f(x) > 1$, אז $\sqrt{f(x)} < f(x)$, כלומר הגרף של $\sqrt{f(x)}$ נמצא מתחת לגרף של $f(x)$.



35. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת וחיובית לכל x .
 לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון (מינימום) רק ב- $(4; 5)$.
 והיא חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0; 9)$.
 הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מקיימת:
 בהסתמך על הציור:
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 - מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y .
 - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
 - שרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.



36. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x .
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון (מקסימום) רק ב- $(2;4)$
והיא חותכת את ציר ה- x בנקודות $(0;0)$ ו- $(4;0)$.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

בהסתמך על הציור:

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$

(כולל הנקודות שבקצות תחום ההגדרה של הפונקציה), וקבעו את סוג הקיצון.

ג. (1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

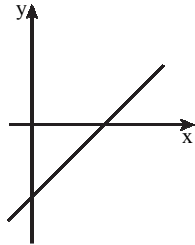
(2) שרטטו את הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ באותה מערכת צירים.

(את $f(x)$ שרטטו במקורו).

ד. (1) הסבירו מדוע הפונקציות $f(x)$ ו- $\sqrt{f(x)}$ נפגשות כאשר $f(x) = 1$ או כאשר $f(x) = 0$.

כמה נקודות מפגש כאלה קיימות בסך הכול? נמקו.

(2) הסבירו מדוע כאשר $f(x) > 1$, אז $\sqrt{f(x)} < f(x)$, וכאשר $0 < f(x) < 1$, אז $\sqrt{f(x)} > f(x)$.



37. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = x - 3$.

א. מצאו את נקודת האפס של הפונקציה.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,

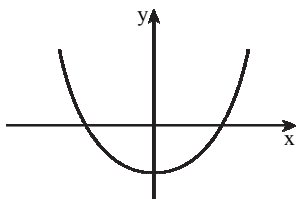
וקבעו את סוג הקיצון.

ד. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. (1) מצאו את שיעורי נקודות המפגש בין הגרף של $f(x)$ לגרף של $g(x)$.

(2) באילו תחומים מתקיים $g(x) > f(x)$?

(3) באילו תחומים מתקיים $g(x) < f(x)$?



38. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 0.64$.

א. מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

ג. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ה. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

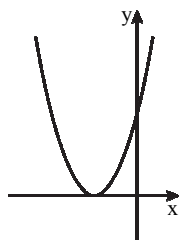
ו. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ז. (1) הסבירו מדוע נקודות המפגש בין הגרף של $f(x)$ לגרף של $g(x)$

מתקבלות כאשר $f(x) = 0$ או כאשר $f(x) = 1$.

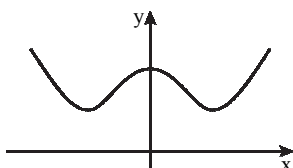
(2) מצאו את שיעורי נקודות המפגש בין הגרף של $f(x)$ לגרף של $g(x)$.

(3) באילו תחומים מתקיים $g(x) > f(x)$? (4) באילו תחומים מתקיים $g(x) < f(x)$?



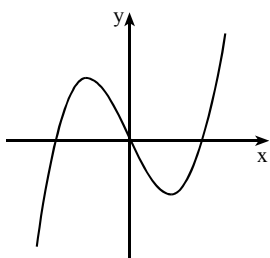
39. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 4x + 4$.
- מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה.
 - מצאו את נקודות המפגש של הפונקציה עם הצירים.
 - הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מקיימת: $g(x)$ מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 - מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
 - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
 - הסבירו מדוע $g(x) = |x+2|$ (1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ (2).

40. הפונקציה $f(x)$, שהגרף שלה מתואר לפניכם, מוגדרת, רציפה וחיובית לכל x .
 לפונקציה יש שלוש נקודות קיצון:
 (3;2) מינימום, (0;4) מקסימום, (-3;2) מינימום.



- הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מקיימת:
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
 - מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומהו סוגן?
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

41. לפונקציה $f(x)$ שהגרף שלה מתואר לפניכם, יש נקודות קיצון
 ב- $(-2;16)$ ו- $(2;-16)$ והיא חותכת את ציר ה- x

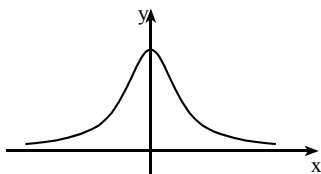


- בנקודות $(\sqrt{12};0)$, $(0;0)$ ו- $(-\sqrt{12};0)$.
- הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מקיימת:
- מבלי לחקור את הפונקציה $g(x)$:
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 - מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוג הקיצון.
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 - הסבירו מדוע הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x) = \sqrt{f(x)}$ נפגשות על הישר $y=1$ או על ציר ה- x .
 - כמה נקודות מפגש בין $f(x)$ ו- $g(x) = \sqrt{f(x)}$ קיימות בסך הכול? נמקו.
 - מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $h(x) = -\sqrt{f(x)} + 7$, וקבעו את סוג הקיצון.

42. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת, חיובית וגזירה לכל ערך של x .
 ידוע כי x_1 היא נקודת מינימום פנימית של הפונקציה $f(x)$. כמו כן, $f'(x_1) = 0$, $f''(x_1) \neq 0$.
 הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מקיימת:
- הוכיחו: x_1 היא נקודת מינימום פנימית של הפונקציה $g(x)$.

43. נתונה פונקציית פולינום $f(x)$, חיובית לכל x .
 הוכיחו שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום מסוים, אז הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ עולה גם היא באותו התחום; ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום מסוים, אז הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ יורדת גם היא באותו התחום.

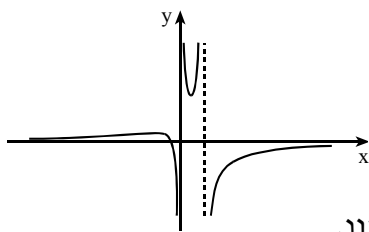
44. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .
 א. הוכיחו שאם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $\sqrt{f(x)}$ נפגשים זה עם זה, אז נקודת המפגש נמצאת על הישר $y=1$ או על ציר ה- x .
 ב. הראל טוען שכאשר $0 < f(x) < 1$, אז $\sqrt{f(x)} > f(x)$. האם הוא צודק?
 ג. טלי טוענת שכאשר $f(x) > 1$, אז $\sqrt{f(x)} < f(x)$. האם היא צודקת?



45. לפונקציה $f(x)$, שהגרף שלה מתואר לפניהם, יש נקודת קיצון יחידה (מקסימום) ב- $(0;6)$, ואסימפטוטה אחת שמשוואתה $y=0$.
 הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מקיימת:
 א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
 ג. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. תמר טוענת כי אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית וחיובית, אז גם הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ היא פונקציה זוגית וחיובית. האם תמר צודקת? נמקו.
 ה. בחרו את התשובה הנכונה:
 עבור $x \rightarrow \infty$, גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל/מתחת לגרף הפונקציה $f(x)$.

46. נתונה פונקציה $f(x)$.
 רועי טוען כי אם $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, אז גם הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ היא פונקציה אי-זוגית. הסבירו מדוע רועי אינו צודק.

47. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+5}$.
 א. מצאו: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.
 (3) תחומי עלייה וירידה. (4) תחומי חיוביות ושליליות.
 (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מקיימת:
 (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $h(x) = \sqrt{f(x-5)} - 6$, וקבעו את סוג הקיצון.
 ה. מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $h(x) = \sqrt{f(x-5)} - 6$.



48. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -\frac{3x+1}{x^2-x}$.

נקודות הקיצון של הפונקציה הן: $(\frac{1}{3}; 9)$ מינימום, $(-1; 1)$ מקסימום.

מגדירים: $g(x) = \sqrt{-\frac{3x+1}{x^2-x}}$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

ג. מצאו את שיעורי נקודות המפגש בין הגרף של הפונקציה $f(x)$

לגרף של הפונקציה $g(x)$ (אם ישנן).

ד. מצאו לאילו ערכי x מתקיים $f(x) < g(x)$.

ה. מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $h(x) = \sqrt{f(x)+4}$.

49. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-6}{x^2-1}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = -\sqrt{\frac{x-6}{x^2-1}}$. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x) = \frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{x^2-1}}$?

50. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2+6x+7}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבעו את סוגן.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

51. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2+3}$.

א. מצאו: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה ונקודות חיתוך עם הצירים.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

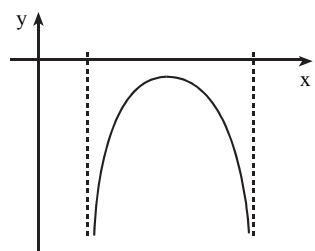
(1) מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

הערה: אין צורך לגזור את הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

52. נתונה פונקציית פולינום $f(x)$.



בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{f(x)}}$.

הישרים $x = a$ ו- $x = b$ הם אסימפטוטות אנכיות

של הפונקציה $g(x)$, $a > b > 0$.

לפונקציה $g(x)$ יש מקסימום $(c; k)$, $c > 0$, $k < 0$.

א. מהם תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$?

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

תשובות:

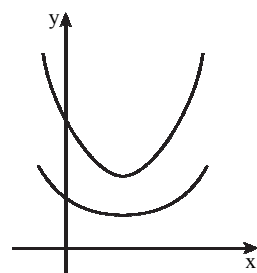
35.

א. כל x .

ב. $(0; 3)$.

ג. $(4; \sqrt{5})$ מינימום.

ד.



36.

א. $0 \leq x \leq 4$.

ב. $(4; 0)$ מינימום,

$(2; 2)$ מקסימום,

$(0; 0)$ מינימום.

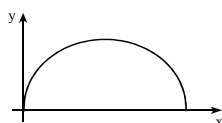
ד. (1) ארבע נקודות.

(2) כאשר מספר גדול מ-1,

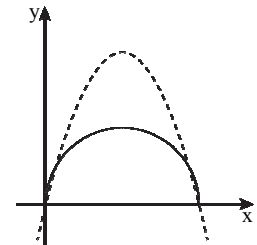
השורש הריבועי שלו קטן ממנו,

וכאשר מספר נצמא בין 0 ל-1, השורש הריבועי שלו גדול ממנו.

ג. (1)



(2)



37.

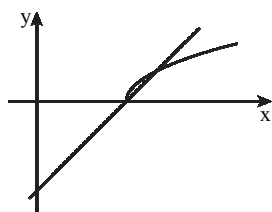
א. $(3; 0)$.

ב. $x \geq 3$.

ג. $(3; 0)$ מינימום,

ה. (1) $(3; 0)$, $(4; 1)$. (2) $3 < x < 4$. (3) $x > 4$.

ד.



38.

א. $(0; -0.64)$.

ב. $(0; -0.64)$, $(0.8; 0)$, $(-0.8; 0)$.

ג. $x \geq 0.8$ או $x \leq -0.8$. ד. $(0.8; 0)$, $(-0.8; 0)$.

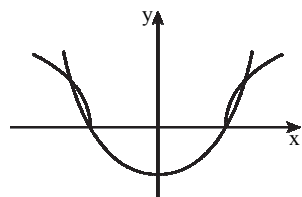
ה. $(0.8; 0)$ מינימום, $(-0.8; 0)$ מינימום.

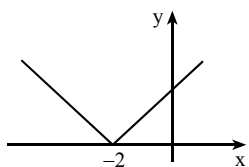
ז. (2) $(0.8; 0)$, $(-0.8; 0)$, $(\sqrt{1.64}; 1)$, $(-\sqrt{1.64}; 1)$.

(3) $0.8 < x < \sqrt{1.64}$ או $-\sqrt{1.64} < x < -0.8$.

(4) $x > \sqrt{1.64}$ או $x < -\sqrt{1.64}$.

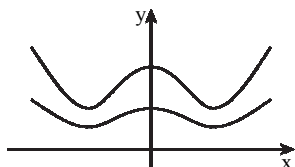
ו.





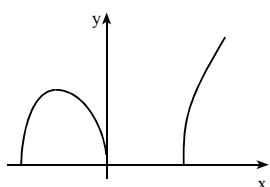
ו. (2)

39. א. $(-2; 0)$. ב. $(0; 4)$, $(-2; 0)$.
 ג. כל x .
 ד. $(-2; 0)$, $(0; 2)$.
 ה. $(-2; 0)$ מינימום.



ג.

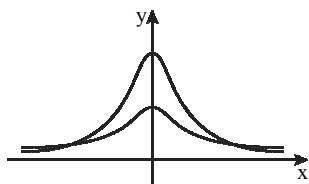
40. א. כל x .
 ב. $(3; \sqrt{2})$ מינימום,
 $(0; 2)$ מקסימום,
 $(-3; \sqrt{2})$ מינימום.



ג.

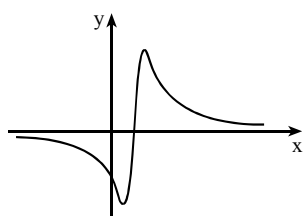
41. א. $x \geq \sqrt{12}$ או $-\sqrt{12} \leq x \leq 0$.
 ב. $(-2; 4)$ מקסימום, $(0; 0)$ מינימום,
 $(\sqrt{12}; 0)$ מינימום, $(-\sqrt{12}; 0)$ מינימום.
 ד. (2) שש נקודות.
 ה. $(-2; 3)$ מינימום.

44. א. הראל צודק. ב. טלי צודקת.



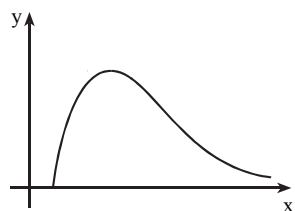
ג.

45. א. כל x .
 ב. $(0; \sqrt{6})$ מקסימום.
 ד. כן, תמר צודקת.
 ה. מעל.



ב.

47. א. (1) כל x .
 (2) $(1; -\frac{1}{2})$ מינימום, $(3; \frac{1}{2})$ מקסימום.
 (3) עלייה: $1 < x < 3$, ירידה: $x > 3$ או $x < 1$.
 (4) חיוביות: $x > 2$, שליליות: $x < 2$.
 (5) $y = 0$.



(3)

- ג. (1) $x \geq 2$.
 (2) $(2; 0)$ מינימום,
 $(3; \frac{1}{2})$ מקסימום.
 ד. $(8; \frac{1}{\sqrt{2}} - 6)$ מקסימום. ה. $y = -6$.

48. א. $0 < x < 1$ או $x \leq -\frac{1}{3}$. ב. $(\frac{1}{3}; 3)$ מינימום, $(-\frac{1}{3}; 0)$ מינימום, $(-1; 1)$ מקסימום.

ג. $(-1; 1)$, $(-\frac{1}{3}; 0)$. ד. $-1 < x < -\frac{1}{3}$ או $x < -1$. ה. $y = 2$.

49. א. $x \neq -1$, $x \neq 1$. ב. חיוביות: $x > 6$ או $-1 < x < 1$.

שליליות: $1 < x < 6$ או $x < -1$. ג. $x \geq 6$ או $-1 < x < 1$. ד. $x \geq 6$.

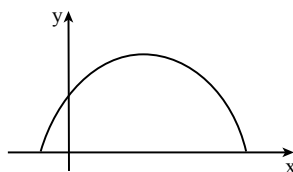
50. א. $-1 \leq x \leq 7$.

ב. $(3; 4)$ מקסימום מוחלט,

$(-1; 0)$ מינימום מוחלט,

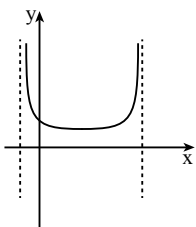
$(7; 0)$ מינימום מוחלט.

ג.



ד. (1) $-1 < x < 7$

(2)



51. א. תחום הגדרה: $x \leq 0$.

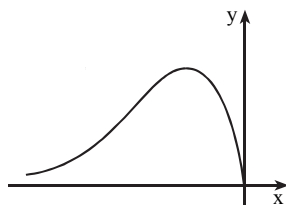
נקודות קיצון:

$(0; 0)$ מינימום, $(-1; 0.25)$ מקסימום.

עלייה: $x < -1$, ירידה: $-1 < x < 0$.

נקודות חיתוך: $(0; 0)$.

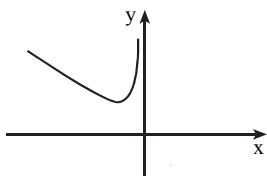
ב.



ג. (1) $(-1; 4)$ מינימום.

(2) $x = 0$

(3)

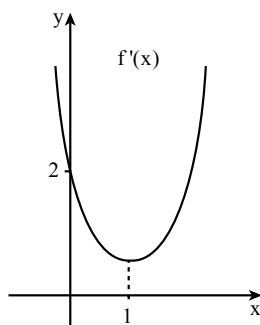


52. א. $a < x < b$. ב. $(c; \frac{1}{k^2})$ מקסימום.

הקשר בין גרף של פונקציה לגרף הנגזרת שלה

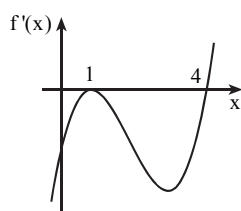
פרק זה כולל שאלות עם הקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לגרף הנגזרת שלה $f'(x)$, ולגרף הנגזרת השנייה שלה $f''(x)$, המתאימות לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד הנמצא בספר 806 כך ד מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. השאלות כוללות פונקציות פולינום, פונקציות רציונליות, פונקציות עם שורשים ריבועיים ופונקציות ללא תבנית אלגברית נתונה. הדגשנו בעיקר: מעבר מגרף של פונקציה לגרף של הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה שלה, ולהיפך, כולל מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. זיהוי ואבחנה בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת הראשונה והשנייה של הפונקציה. תכונות מיוחדות של גרף הנגזרת כאשר הפונקציה היא זוגית או אי-זוגית. שאלות הכוללות גרף של נגזרת ומשלבות הזזות, מתיחות וטרנספורמציות של פונקציות.

1.



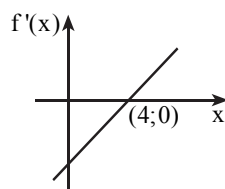
- נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x .
 בציור שלפניכם מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x .
 א. על פי הגרף של $f'(x)$:
 (1) מצאו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בחלקו החיובי. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ג. נתון כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא $f'(x) = x^2 - kx + m$. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

2.



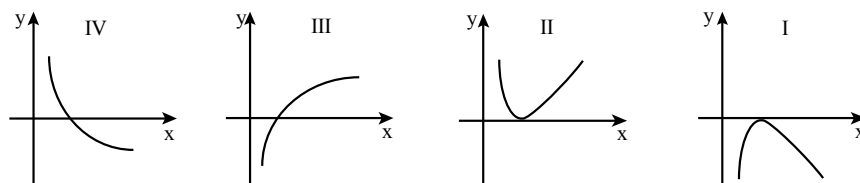
- בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$ בתחום $-1 < x < 5$.
 א. לפניכם שלוש טענות. אחת מהן נכונה. בחרו מביניהן את הטענה הנכונה:
 (1) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ונקודת פיתול אחת.
 (2) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ושתי נקודות פיתול.
 (3) לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון ונקודת פיתול אחת.
 משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 + cx$.
 ב. מצאו את ערכי הפרמטרים a , b ו- c .
 ג. מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ יורדת וקעורה כלפי מטה.

3.

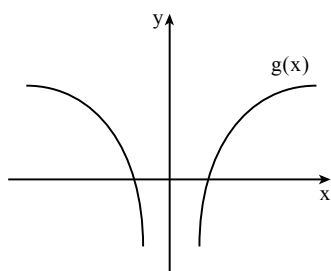


- נתונה פונקציה $f(x)$. לפניכם הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 נתון כי $f'(x)$ היא פונקציה קווית וכי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$.
 א. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
 ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = 1 - f(x+1)$, וקבעו את סוג הקיצון.
 ג. מהם תחומי השליליות של הפונקציה $h(x)$ המקיימת $h(x) = f'(x-2)$?

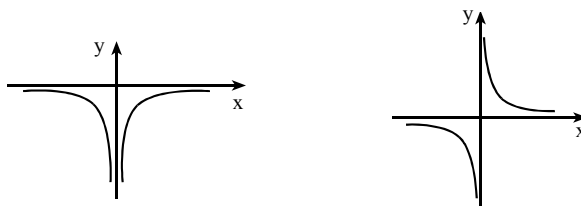
4. נתונה הפונקציה $f(x)$, המוגדרת כאשר $x > 0$.
 לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד. נקודת הקיצון היא מסוג מקסימום.
 א. איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניכם מתאים לגרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$?
 נמקו את תשובתכם.



- ב. נתון כי שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ שווה ל-0.
 שרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם ישנם).

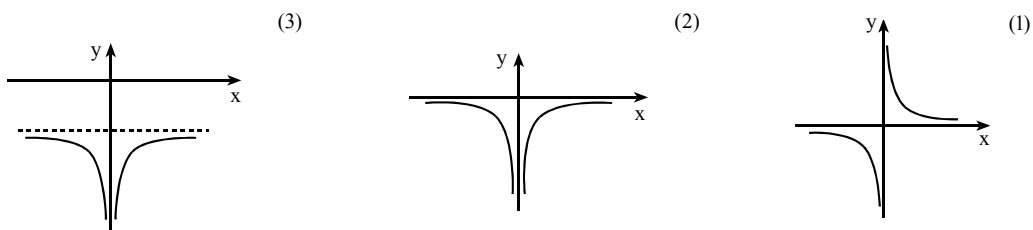


5. בשרטוט שלפניכם מתואר גרף של פונקציה רציונלית $g(x)$.
 הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרת לכל x השונה מ-0, ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.
 הישר $x = 0$ הוא האסימפטוטה האנכית לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.
 א. שרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$. נמקו.
 ב. שרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$. נמקו.
 ג. נתון כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית.
 הסבירו מדוע $g''(x)$ היא פונקציה זוגית. נמקו.
6. לפניכם גרפים של פונקציה רציונלית $f(x)$, ונגזרתה $f'(x)$, המוגדרות עבור $x \neq 0$.

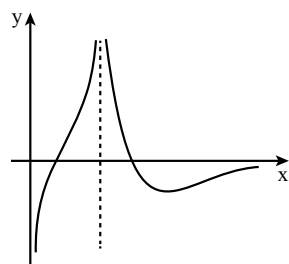


- א. קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה:
 (1) הגרף הימני יכול להתאים ל- $f(x)$ והשמאלי ל- $f'(x)$.
 (2) הגרף השמאלי יכול להתאים ל- $f(x)$ והימני ל- $f'(x)$.
 ב. נתון כי משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x) = \frac{a}{x}$, a הוא פרמטר.
 (1) איזה מבין שני הגרפים מתאים ל- $f(x)$?
 (2) מהו תחום הערכים המתאים לפרמטר a ?

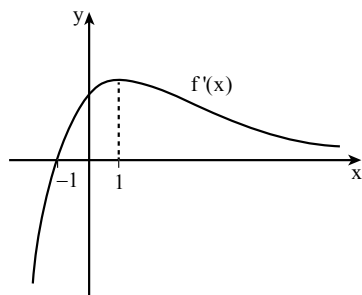
7. לפניכם גרפים של פונקציה רציונלית $f(x)$, של נגזרתה $f'(x)$ ושל נגזרתה השנייה $f''(x)$. הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרפים (1) ו-(2). האסימפטוטה האופקית לגרף (3) היא הישר המקווקו, המקביל לציר ה- x ונמצא מתחתיו.



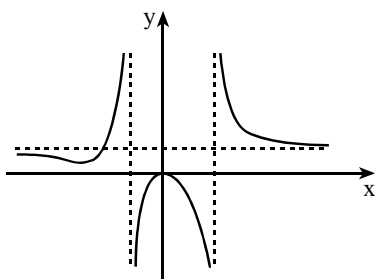
- א. מבין שלושת הגרפים הבאים, זהה איזה גרף מתאים לכל פונקציה.
 ב. נתון כי משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x) = \frac{a}{x^2} + k$, a ו- k פרמטרים.
 (1) מהו תחום הערכים המתאים לפרמטר a ?
 (2) מהו תחום הערכים המתאים לפרמטר k ?



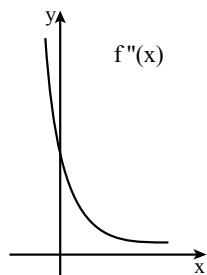
8. נתונה פונקציה רציונלית $f(x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$. לפניכם גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת אף היא בתחום $x > 0$. האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$ הן $x=0$ ו- $x=3$, ראו ציור. ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש גם אסימפטוטה אופקית, $y=0$. נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם הצירים הן $(1; 0)$ ו- $(5; 0)$.
 א. האם ישנן נקודות על הגרף של $f(x)$ שבהן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 0.25?
 אם כן, כמה נקודות כאלה קיימות?
 ב. היעזרו בציור ורשמו את התחומים שבהם הפונקציה $f(x)$ עולה, ואת התחומים שבהם היא יורדת.
 ג. הישר $y=-4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x > 3$.
 (1) מצאו את השיעורים של נקודת ההשקה. נמקו.
 (2) הסבירו מדוע $f(10) < -4$.



9. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x . בציור שלפניכם מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 א. היעזרו בנתונים הרשומים בגרף, ומצאו:
 (1) ערך מספרי עבור שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
 (2) ערך מספרי עבור שיעור ה- x של נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.
 (3) את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. נתון: $f(0) < 0$.
 שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע שהישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x)$ רק כאשר $x \rightarrow \infty$.



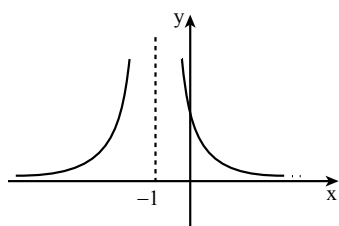
10. לפניכם גרף של פונקציה רציונלית $f(x)$.
 משוואות האסימפטוטות של הפונקציה הן $x = -1$, $x = 2$, $y = 1$.
 נקודות הקיצון של הפונקציה הן $(0; 0)$ מקסימום, $(-4; \frac{8}{9})$ מינימום.
 א. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.
 כתבו את התחום שבו נמצא שיעור ה- x של נקודה זו.
 ב. על פי הגרף של הפונקציה $f(x)$, מצאו את התחום שבו מתקיים: פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית. נמקו.
 ג. הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של פונקציה $g(x)$, כלומר $g'(x) = f(x)$.
 תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ זהה:
 (1) האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון?
 (2) מצאו תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.



11. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{k}{(x+1)^4}$ בתחום $x > -1$. k הוא פרמטר.
 בציור שלפניכם נתון הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום $x > -1$.
 הגרף של $f''(x)$ אינו חותך את ציר ה- x . $f''(x)$ יורדת בכל התחום.
 א. האם הפרמטר k הוא חיובי או שלילי?
 ב. (1) מצאו בתחום הנתון את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה). הביעו באמצעות k במידת הצורך.
 (2) מצאו בתחום הנתון את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.
 (3) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמקו.
 (4) סרטטו בתחום הנתון סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ג. האם לפונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יש נקודות פיתול בתחום הנתון? נמקו.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + \frac{27}{x} + 60$.
 א. מצאו את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $2 \cdot f'(x)$.
 ב. מצאו את משוואת הפונקציה $g(x) = f(x^2)$, והראו שהנקודה שמצאתם בסעיף א' נמצאת על הגרף של $g(x)$.

13. א. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה רציונלית המקיימת:
 לפונקציה יש שלוש אסימפטוטות: $x = -1$, $x = 4$, $y = 0$.
 הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq -1$ ו- $x \neq 4$.
 נתון: $f(0) > 0$, $f(1.5) = 0$, $f'(x) < 0$ רק עבור $-1 < x < 4$, $f(x) < 0$ עבור $x > 4$ ו- $f(x) > 0$ עבור $x < -1$.
 (1) על פי הנתונים שבסעיף זה, סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.
 (2) על פי הגרף שסרטטתם, הראו כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון בתחום $-1 < x < 4$, וקבעו את סוגה. נמקו. אין צורך למצוא את השיעורים של נקודת הקיצון.
 ב. נתון גם כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(x) = \frac{3a - 3bx}{(x^2 - ax - 4)^2}$.
 a ו- b הם פרמטרים. מצאו את הפונקציה $f(x)$.



14. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציית מנה המוגדרת עבור $x \neq -1$.

בציור מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$

וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמקו.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות בלבד: $y=1$, $x=-1$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-1$.

סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

על פי תשובתכם לסעיף א' ועל פי הנתונים שבסעיף ב'.

ג. נתון גם $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, a, b, c, d הם פרמטרים שונים מאפס.

(1) הביעו באמצעות a את b, c, d .

(2) כתבו את הפונקציה $f(x)$ ללא פרמטרים.

15. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$, $a > 0$, הוא פרמטר, a .

א. מצאו (הביעו באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) אם נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד ובהן $x = \pm a$.

(1) היעזרו בגרף של $f(x)$, והביעו באמצעות a את התחום שבו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$

חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית. נמקו.

(2) הביעו באמצעות a את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבעו את סוגן.

16. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

א. מצאו עבור הפונקציה $f(x)$:

(1) תחום הגדרה. (2) אסימפטוטות מאונכות לצירים. (3) נקודות חיתוך עם הצירים.

(4) נקודות הקיצון, וקבעו את סוגן. (5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.

על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$, ציינו באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים, גדול מ-4, קטן מ-4

או שווה ל-4? נמקו.

ד. כמה נקודות קיצון יש לגרף הפונקציה $f'(x)$?

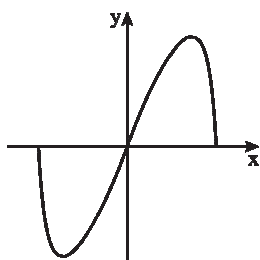
17. לפניכם שתי טענות. קבעו עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את תשובתכם.

א. אם לפונקציה $f(x)$ המוגדרת עבור $x > 0$ וגזירה בכל התחום יש נקודת מקסימום ב- (3;6)

ואסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=2$, אז לפונקציה יש לפחות נקודת פיתול אחת.

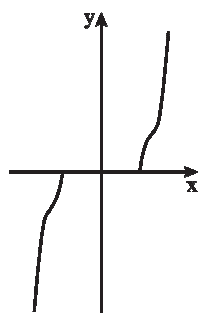
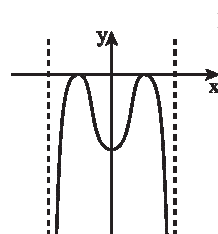
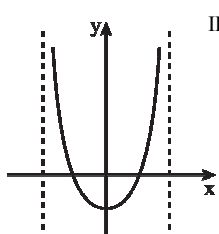
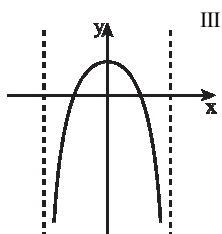
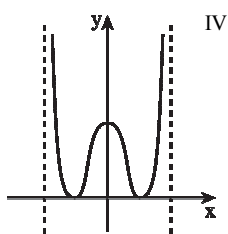
ב. אם לפונקציה $f(x)$ המוגדרת עבור $x > 0$ וגזירה בכל התחום יש נקודת מינימום ב- (3;6)

ואסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=2$, אז לפונקציה יש לפחות שתי נקודות פיתול.



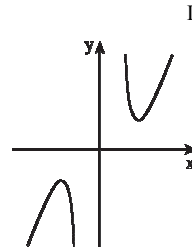
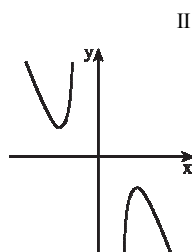
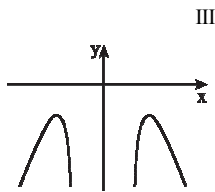
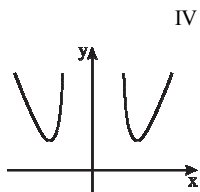
18. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{24-x^2}$.

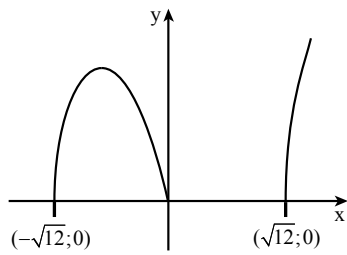
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
 - הסבירו מדוע לפונקציה $f(x)$ יש לפחות נקודת פיתול אחת.
- נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת עבור $-\sqrt{24} < x < \sqrt{24}$.
- (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 - (2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
- ה. לפניכם ארבעה גרפים המסומנים I, II, III ו-IV.
- קבעו איזה מהם עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
- נמקו את תשובתכם.



19. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = 2x\sqrt{x^2-4}$.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
 - האם לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודות אפס? נמקו.
 - מהם תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?
- ה. לפניכם ארבעה גרפים המסומנים I, II, III ו-IV.
- קבעו איזה מהם עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
- נמקו את תשובתכם.
- ו. בהסתמך על סעיפים קודמים, קבעו האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול.
- אם כן, קבעו כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$.
- אם לא, נמקו.





20. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^3 - 12x}$.

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-\sqrt{12} \leq x \leq \sqrt{12}$, $x \geq \sqrt{12}$ היעזרו בגרף וענו על הסעיפים הבאים:

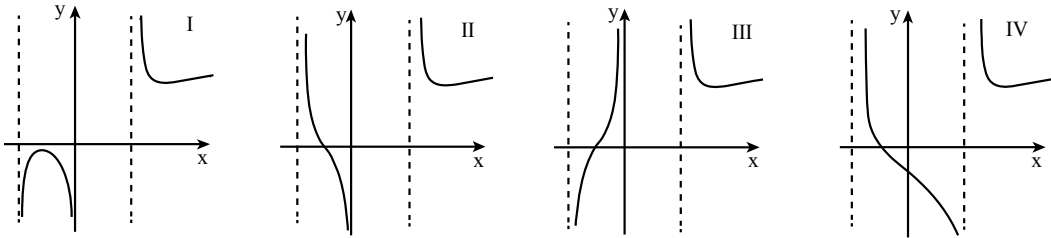
א. (1) האם תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של $f(x)$?

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות האנכיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם עשוי להיות הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

ג. על פי תשובותיכם לסעיפים קודמים, קבעו, מבלי למצוא את $f''(x)$,

האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול. כתבו את התחום שבו נמצאת נקודת הפיתול.



21. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax^2 + 9}$. a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) הביעו באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצאו תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

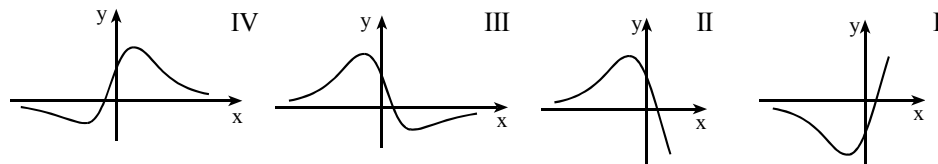
ג. (1) הראו שפונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(2) חנייתה טוענת שלפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת פיתול.

האם היא צודקת? אם כן, קבעו מהם שיעורי נקודת הפיתול.

22. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x . נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x) = \frac{3(1+x)(1-2x)}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$.

א. מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך, איזה גרף מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמקו.



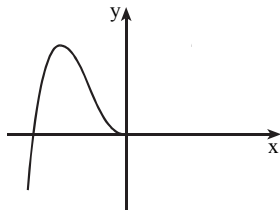
ב. (1) מצאו תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$ ותחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ של הפונקציה $f(x)$. נמקו.

(2) היעזרו בגרף של $f'(x)$ שבסעיף א', ומצאו בין אילו שני מספרים שלמים עוקבים

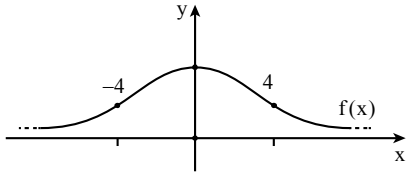
נמצא שיעור ה- x של נקודת הקיצון של $f(x)$. נמקו.

(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי הגרף חותך את ציר ה- x

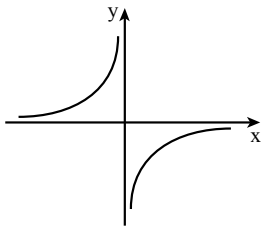
רק בנקודה אחת שבה $x=3$.



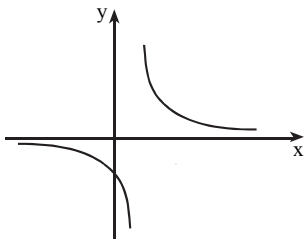
23. א. קבעו האם הטענה הבאה נכונה: אם פונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, אז פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה זוגית.
 ב. נתונה פונקציה אי-זוגית $f(x)$.
 בשרטוט שמשמאל מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x \leq 0$.
 (1) השלימו את הגרף של $f'(x)$ גם עבור $x > 0$.
 (2) הסבירו מדוע $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.



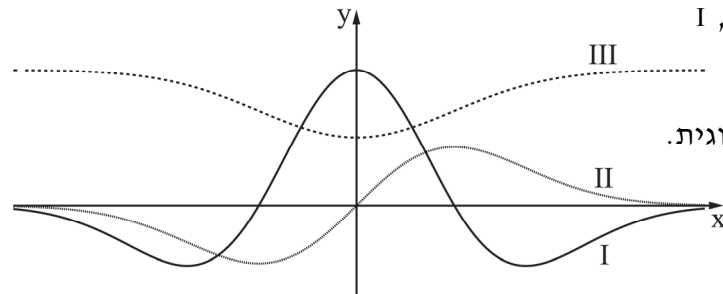
24. א. קבעו האם הטענה הבאה נכונה: אם פונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית, אז פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.
 ב. לפניכם גרף של פונקציה זוגית $f(x)$. על הגרף מסומנים שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.
 (1) שרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 (2) מהו התחום שבו הפונקציה $h(x) = f'(x) \cdot f''(x)$ חיובית?



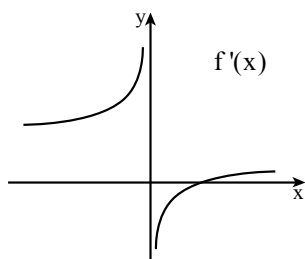
25. בציור שמשמאל מתואר גרף של פונקציה רציונלית אי-זוגית $f(x)$.
 א. הסבירו מדוע פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה זוגית.
 ב. העבירו ישר ℓ_1 המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(2; -1)$, והעבירו ישר אחר ℓ_2 המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה אחרת, T .
 שני המשיקים מקבילים זה לזה. T היא הנקודה היחידה על גרף הפונקציה $f(x)$ שבה המשיק מקביל ל- ℓ_1 .
 מצאו את השיעורים של הנקודה T . נמקו.



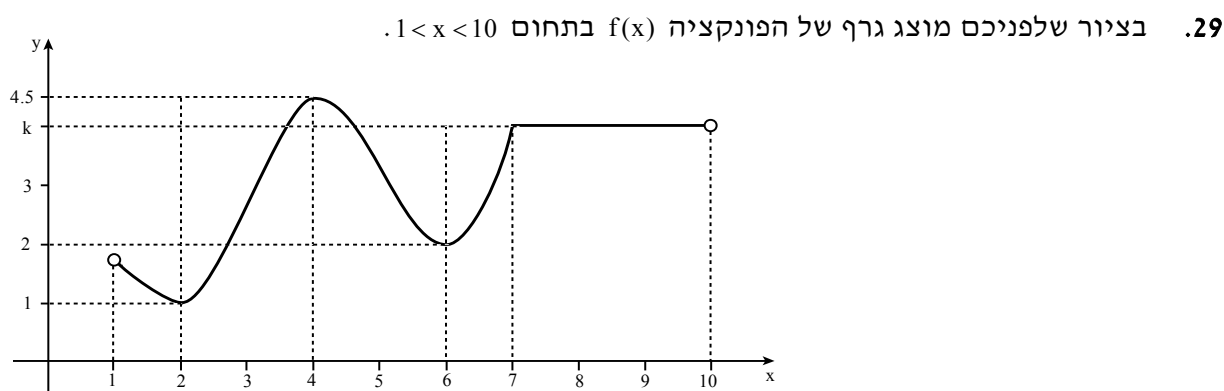
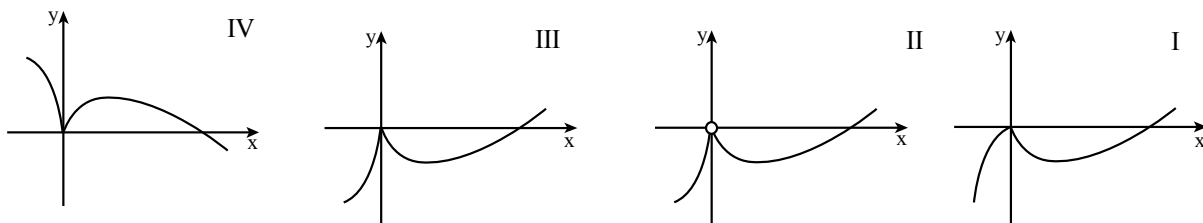
26. נתונה פונקציה רציונלית אי-זוגית $f(x)$, המוגדרת עבור $x \neq 0$.
 הגרף של $f(x)$ הוזהב- a יחידות ימינה, כך שהתקבלה הפונקציה $g(x)$.
 לפניכם סקיצה של הפונקציה $g(x)$.
 א. הביעו באמצעות a את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $g(x)$.
 ב. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 3$, והעבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.
 המשיקים מקבילים זה לזה. מצאו את הערך של a .



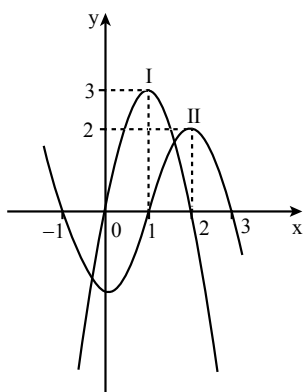
27. לפניכם שרטוט המתאר את הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, המוגדרות לכל x .
 גרף III נמצא כולו מעל גרף II.
 א. התאימו כל אחד מן הגרפים I, II, III לפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.
 נמקו את קביעותיכם.
 ב. נתון כי גרף II מייצג פונקציה אי-זוגית.
 האם הנגזרת השלישית $f'''(x)$ היא פונקציה זוגית, פונקציה אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.



28. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .
 בציור שלפניכם מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,
 המוגדרת עבור $x \neq 0$.
 לפניכם ארבעה גרפים I-IV.
 איזה גרף עשוי לתאר את הפונקציה $f(x)$?
 נמקו.



- הסתמכו על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים, וענו על הסעיפים הבאים:
 א. מצאו עבור אילו ערכים של x השונים מ-7 מתקיים:
 (1) $f'(x) < 0$. נמקו. (2) $f'(x) > 0$. נמקו. (3) $f'(x) = 0$. נמקו.
 ב. לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול כאשר $x = 3$ ו- $x = 5$.
 מצאו את התחום שבו מתקיים $f'(x) \cdot f''(x) > 0$.

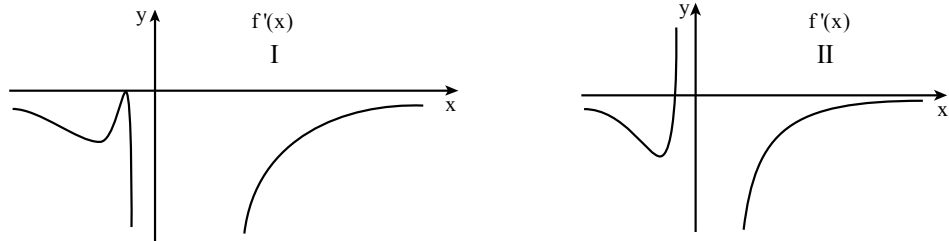


30. בציור שלפניכם מוצגים שני גרפים I ו-II, של פונקציות המוגדרות בתחום $-1.1 \leq x \leq 3.1$. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 א. קבעו איזה מבין הגרפים I ו-II הוא של הפונקציה $f(x)$. נמקו.
 ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 (1) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של $g(x)$, וקבעו את סוגן.
 (2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
 ג. נתונה הפונקציה $h(x) = -\frac{1}{f(x)}$.
 מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של $h(x)$, וקבעו את סוגן.

31. נתונה הפונקציה $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$, n הוא מספר טבעי גדול מ-1.

- א. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 ב. הראו כי עבור n אי-זוגי $f'(x) \leq 0$ לכל $x \neq 0$.

לפניכם שני גרפים, I ו-II. (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון).



אחד הגרפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n זוגי, והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n אי-זוגי. היעזרו בגרפים I ו-II, וענה על הסעיפים ג, ד, ו-ה.
 ג. עבור n אי-זוגי:

- (1) מצאו כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמקו.
 (2) מצאו כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמקו.
 ד. עבור n זוגי:

- (1) מצאו כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמקו.
 (2) מצאו כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמקו.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונות הפונקציות: $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$, $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$.

מהו הסימן של המכפלה $g''(x) \cdot h''(x)$ עבור $x > 0$? נמקו.

32. בטבלה שלפניכם מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $1 < x < 2$.

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	1.19	1.28	1.36	1.43

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה. נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון.

- א. קבעו מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמקו.
 ב. קבעו אם הטענה $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$ נכונה. נמקו.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.

- ג. בקטע הנתון מצאו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמקו.
 ד. הראו כי בתחום $1.1 \leq x \leq 1.3$ אין פתרון למשוואה $g'(x) = f'(x)$.

תשובות:

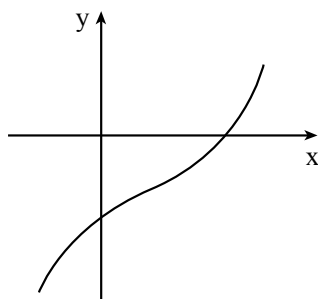
1. א. (1) עלייה: כל x ;

ירידה: אין.

(2) $\cup$: $x > 1$;

$\cap$: $x < 1$.

ב.



ג. $(1;1)$.

2. א. טענה (2) . ב. $a=8$, $b=18$, $c=-16$. ג. $1 < x < 3$.

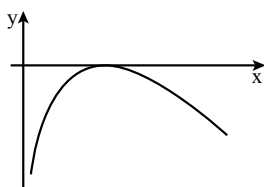
3. א. $(4;2)$ מינימום. ב. $(3;-1)$ מקסימום. ג. $x < 6$.

4. א. גרף IV .

ג. עלייה: אין.

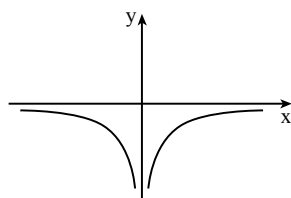
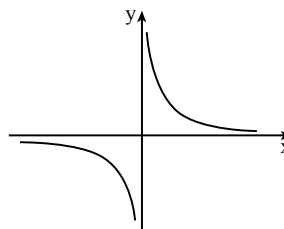
ירידה: $x > 0$.

ב.



5. א.

ב.



6. א. (1) נכונה. (2) נכונה. ב. (1) הגרף הימני. (2) $a > 0$.

7. א. $f(x)$ - (3) , $f'(x)$ - (1) , $f''(x)$ - (2) . ב. (1) $a < 0$. (2) $k < 0$.

8. א. כן, שתי נקודות. ב. עולה: $3 < x < 5$ או $1 < x < 3$; יורדת: $x > 5$ או $0 < x < 1$. ג. (1) $(5;-4)$.

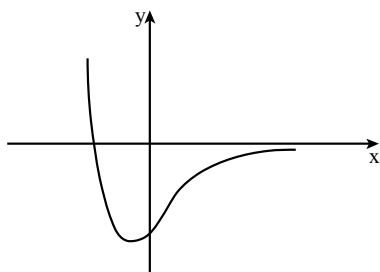
9. א. (1) $x = -1$, מינימום.

(2) $x = 1$.

(3) $\cup$: $x < 1$;

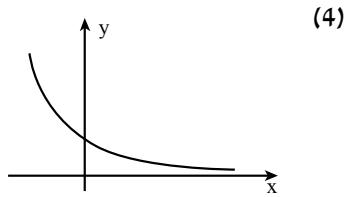
$\cap$: $x > 1$.

ב.



10. א. $x < -4$. ב. $-4 < x < -1$.

ג. (1) לא. (2) $-1 < x < 0$ או $-4 < x < -1$; $x > 2$ או $0 < x < 2$ או $x < -4$.



11. א. חיובי.

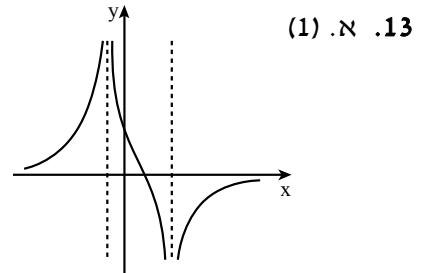
ב. (1) $(0; k)$. (2) עלייה : אין ; ירידה : $x > -1$.

(3) לא.

ג. לא.

12. א. $(-18; 3)$ מקסימום. ב. $g(x) = -x^4 + \frac{27}{x^2} + 60$.

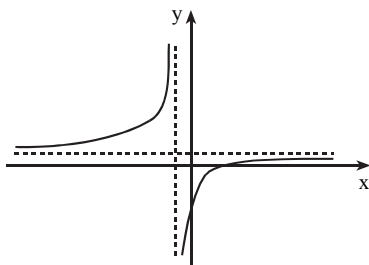
(2) קיימת נקודת קיצון מסוג מקסימום. ב. $f(x) = \frac{9-6x}{(x^2-3x-4)^2}$.



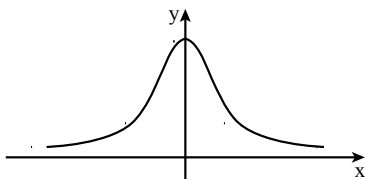
14. א. $x < -1$: $\cup$, $x > -1$: $\cap$.

ג. (1) $d=a$, $c=a$, $b=-a$.

(2) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.



ב.



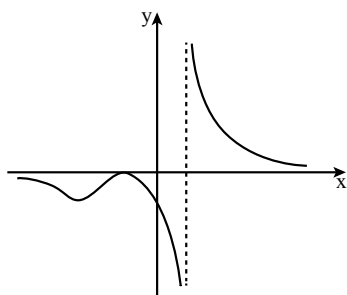
15. א. (1) כל x .

(2) $\left(0; \frac{2}{a^2}\right)$. (3) $y=0$.

(4) $\left(0; \frac{2}{a^2}\right)$ מקסימום.

ג. (1) $f''(x) > 0$ כאשר $x > a$ או $x < -a$. $f''(x) < 0$ כאשר $-a < x < a$.

(2) $x=a$ מינימום, $x=-a$ מקסימום.



16. א. (1) $x \neq 1$ (2) $x = 1$, $y = 0$ (3) $(-2; 0)$, $(0; -4)$ (5)

(4) $(-2; 0)$ מקסימום, $(-8; -\frac{4}{81})$ מינימום.

ב. נקודת פיתול אחת נמצאת בתחום $x < -8$,

ונקודת פיתול שנייה בתחום $-8 < x < -2$.

ג. השטח קטן מ-4. ד. שתי נקודות.

17. א. נכונה. ב. נכונה.

18. א. $-\sqrt{24} \leq x \leq \sqrt{24}$. ב. $(\sqrt{24}; 0)$ מינימום, $(\sqrt{12}; 12)$ מקסימום, $(-\sqrt{12}; -12)$ מינימום, $(-\sqrt{24}; 0)$ מינימום.

ג. בתחום שבין שתי נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$, הפונקציה $f(x)$ מוגדרת,

ולכן יש לה בתחום זה נקודת פיתול.

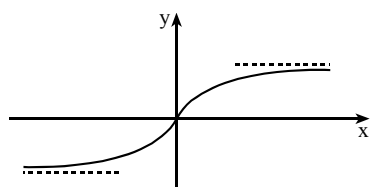
ד. (1) $-\sqrt{24} < x < \sqrt{24}$. (2) חיוביות: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$, שליליות: $\sqrt{12} < x < \sqrt{24}$ או $-\sqrt{24} < x < -\sqrt{12}$.

ה. גרף III (על פי תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$).

19. א. $x \geq 2$ או $x \leq -2$. ב. $(2; 0)$ מינימום, $(-2; 0)$ מקסימום. ג. לא.

ד. חיוביות: $x > 2$ או $x < -2$, שליליות: אין. ה. גרף IV. ו. שתי נקודות פיתול.

20. א. (1) לא. (2) $x = -\sqrt{12}$, $x = 0$, $x = \sqrt{12}$. ב. גרף II. ג. כן, התחום הוא $x > \sqrt{12}$.



(4)

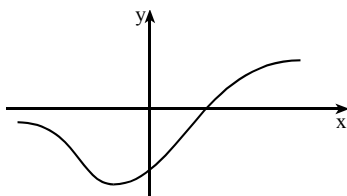
21. א. (1) כל x .

ב. (1) כל x .

(2) $y = -\sqrt{a}$, $y = \sqrt{a}$.

(3) עלייה: כל x ; ירידה: אין.

ג. כן, חניטה צודקת. שיעורי נקודת הפיתול הם $(0; 0)$.



(3)

22. א. IV.

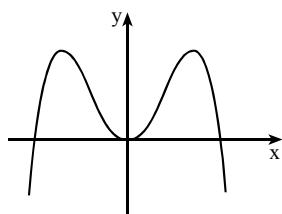
ב. (1) $x > \frac{1}{2}$ או $x < -1$;

$-1 < x < \frac{1}{2}$;

(2) בין -1 ל-0.

23. א. הטענה נכונה.

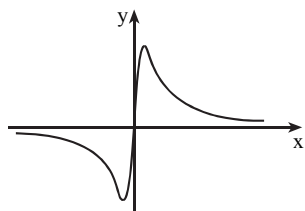
ב. (1)



24. א. הטענה נכונה.

ב. (2) $0 < x < 4$ או $x < -4$.

ב. (1)



25. ב. $(-2; 1)$.

26. א. $x=a$ ב. $a=1.5$.

27. א. III - $f(x)$, II - $f'(x)$, I - $f''(x)$ ב. אי-זוגית.

28. גרף III.

29. א. (1) $4 < x < 6$ או $1 < x < 2$ (2) $6 < x < 7$ או $2 < x < 4$ (3) $7 < x < 10$ או $x=6$ או $x=4$ או $x=2$.

ב. $6 < x < 7$ או $4 < x < 5$ או $2 < x < 3$.

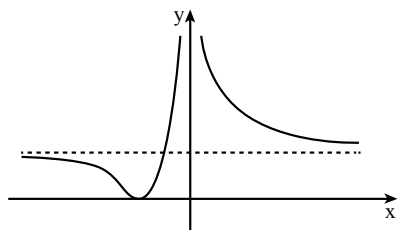
30. א. גרף II הוא של $f(x)$.

ב. (1) $x=0$ מקסימום, $x=2$ מינימום,

(2) עלייה: $3 < x < 3.1$ או $2 < x < 3$ או $-1 < x < 0$ או $-1.1 < x < -1$; ירידה: $1 < x < 2$ או $0 < x < 1$.

ג. $x=0$ מינימום, $x=2$ מקסימום.

ד. (3)



31. א. $x=0$ ב. $y=1$.

ג. (1) אין. (2) שתי נקודות פיתול.

ד. (1) נקודת קיצון אחת.

(2) נקודת פיתול אחת.

ה. חיובי.

32. א. הסימן הוא חיובי. ב. הטענה נכונה. ג. עלייה: $1 < x < 2$; ירידה: אין.

פונקציות טריגונומטריות

פרק זה כולל שאלות עם פונקציות טריגונומטריות המתאימות לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הנמצא בספר הלימוד. רוב השאלות קצרות יחסית ואינן כוללות חקירה מלאה של הפונקציה, אלא מדגישות רעיון מסוים. הדגשנו בעיקר את הרעיונות הבאים: הכרת הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות והגרפים שלהן, ובהסתמך על כך שרטוט של פונקציות המתקבלות מהזזה, מתיחה או טרנספורמציה אחרת של פונקציות אלה, גם ללא שימוש בנגזרת. פתרון או הוכחה של אי שוויונות טריגונומטריים, מציאת אסימפטוטות אנכיות ואופקיות, מציאת "חור" בגרף.

1. נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + \cos 3x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.
 - א. מצאו, ללא שימוש בנגזרת, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הדרכה: היעזרו בגרף הפונקציה $y = \cos x$.
 - ב. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - 2$.
 - ג. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.
2. מצאו, ללא שימוש בנגזרת, את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $y = -3\cos \frac{x}{3} + 1$ בתחום $2\pi \leq x \leq 5\pi$.
 - הדרכה: היעזרו בגרף הפונקציה $y = \cos x$.
3. א. מצאו, ללא שימוש בנגזרת, את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $y = \sin^2 x$ בתחום $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.
 - הדרכה: היעזרו בגרף הפונקציה $y = \sin x$.
 - ב. (1) הראו כי מתקיים: $2 - \cos^2 x = 1 + \sin^2 x$. (2) היעזרו בסעיפים קודמים ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $y = 2 - \cos^2 x$ בתחום $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.
4. מצאו, ללא שימוש בנגזרת, את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $y = \frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.
 - הדרכה: היעזרו בגרף הפונקציה $y = \cos x$.

5. א. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x$. הזיזו את הפונקציה $f(x)$ ב- $\frac{\pi}{2}$ יחידות שמאלה.

האם הגרף שהתקבל מתלכד עם הגרף של $g(x) = \cos x$?

ב. הזיזו את הפונקציה $g(x)$ ב- π יחידות שמאלה.

(1) רועי טוען שהגרף שהתקבל מתלכד עם הגרף של $h(x) = \cos(-x)$. האם רועי צודק? נמקו.

(2) אריאל טוען שהגרף שהתקבל מתלכד עם הגרף של $k(x) = -\cos x$. האם אריאל צודק? נמקו.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos 2x$.

א. הוכיחו כי: $f(x - \pi) = f(x)$.

ב. ינאי מסתמך על סעיף א' וטוען כי אם נזיז π יחידות ימינה את גרף הפונקציה $f(x)$

הגרף המתקבל מתלכד עם הגרף של $f(x)$. האם ינאי צודק? נמקו.

ב. אסתי טוענת כי אם נזיז π יחידות שמאלה את גרף הפונקציה $f(x)$

הגרף המתקבל מתלכד עם הגרף של $f(x)$. האם אסתי צודקת? נמקו.

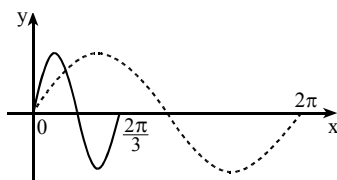
7. נתונה פונקציה $f(x)$. יואב הזיז את גרף הפונקציה 2π יחידות ימינה.

עידו הזיז את גרף הפונקציה π יחידות שמאלה.

הם קיבלו גרפים זהים זה לזה. לפניכם ארבע פונקציות:

$$(1) y = 3 \cos x \quad (2) y = \sin 3x \quad (3) y = \tan x \quad (4) y = \cos 6x$$

קבעו אילו מהפונקציות הבאות יכולות להיות $f(x)$. נמקו.



8. בציור מתוארים גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$

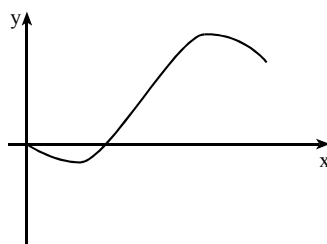
בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ (הגרף המקווקו)

וגרף הפונקציה $y = \sin kx$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.

א. מצאו את הערך של k .

ב. לכל אחת מהפונקציות הנתונות יש שתי נקודות קיצון פנימיות.

מחברים את ארבע הנקודות הנ"ל ומקבלים מרובע. חשבו את שטח המרובע.



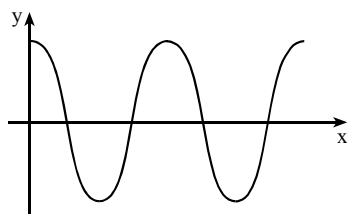
9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$.

בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$\frac{x}{\sin x} = 2$$

כמה פתרונות יש למשוואה

בתחום הנתון? נמקו.



10. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \cos ax$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$,

a הוא פרמטר.

א. קבעו מהו הערך של הפרמטר a .

ב. הסבירו מדוע מתקיים $f(x) = f(x - \frac{\pi}{2})$.

ג. כמה פתרונות בתחום יש למשוואה $f^2(x) = f(x)$.

ד. כמה פתרונות בתחום יש למשוואה $|f(x)| = 0.5$.

11. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^3 x + 5\sin x - 7$.
 א. הסבירו מדוע גרף הפונקציה $f(x)$ אינו חותך את ציר ה- x .
 ב. האם גרף הפונקציה $g(x) = f(x) - 1$ חותך את ציר ה- x ?
 ג. האם גרף הפונקציה $g(x - 2)$ חותך את ציר ה- x ?

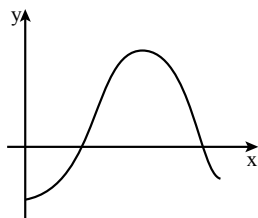
12. א. פתרו את אי השוויון $\sin x > \frac{1}{2}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 ב. פתרו את אי השוויון $2\cos^2 x - 1 < 0$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

13. א. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\cos x + 1$.
 מצאו את תחומי השליליות של הפונקציה בתחום $\pi \leq x \leq 2\pi$.
 ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 מצאו את התחום שבו מתקיים $f(x) > 0$.

14. א. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{\sin 2x + \cos x}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{3 - 2\cos x}$.
 הסבירו מדוע הפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .

15. א. הוכיחו את אי השוויון $-1 \leq \sin^2 x - \cos^2 x \leq 1$.
 ב. הוכיחו את אי השוויון $-1 \leq \sin^4 x - \cos^4 x \leq 1$.
 פתרו בשתי דרכים:
 (1) היעזרו בסעיף א' ובנוסחאות הכפל המקוצר.
 (2) היעזרו בתכונות של הפונקציות סינוס וקוסינוס במעגל היחידה.

16. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x - \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצאו את נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון.
 ב. נתונה הפונקציה $g(x) = x^2 - 4x + 8$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
 מצאו את נקודת המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון.
 ג. האם קיים פתרון למשוואה $x^2 - 4x + 8 = \sin x - \cos x$ בתחום הנתון? נמקו.



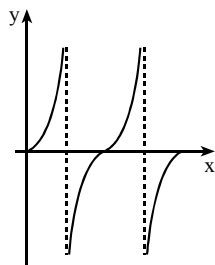
17. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$.
 המוגדרת לכל x בתחום $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$.
 בציור מוצג הגרף של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.
 מצאו את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

18. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x + 2\cos x + 4x - 2\pi - 1$.
 א. הראו שהפונקציה נפגשת עם ציר ה- x כאשר $x = \frac{\pi}{2}$.
 ב. הסבירו מדוע הפונקציה עולה לכל ערך של x .
 ג. מצאו לאילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ חיובית.

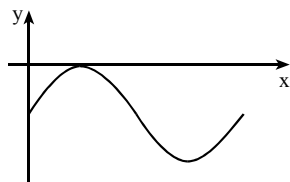
19. נתונה הפונקציה $f(x) = kx + \cos x$ בתחום $0 < x < \pi$.
 מצאו באיזה תחום נמצא הפרמטר k , כך שלפונקציה $f(x)$:
 (1) אין נקודות קיצון.
 (2) יש נקודת קיצון אחת.
 (3) יש שתי נקודות קיצון.

20. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos x + \frac{a}{\cos x} - 2$, $|a| > 1$.
 גרף הפונקציה משיק לציר ה- x .
 מצאו את הערך של a .

21. נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2\cos x + k$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, k הוא פרמטר.
 מצא לאילו ערכים של k , גרף הפונקציה נמצא כולו מעל ציר ה- x .



22. נתונה הפונקציה $f(x) = x \cos x$.
 א. הראו ששיעורי ה- x שעבורם $f'(x) = 0$ מקיימים $\tan x = \frac{1}{x}$.
 בציור מתואר גרף הפונקציה $g(x) = \tan x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 ב. מהן האסימפטוטות המקבילות לציר ה- y המופיעות בציור?
 ג. היעזרו בציור וקבעו בכמה נקודות בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ מתקיים $f'(x) = 0$.



23. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \sin x - 1$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 א. הסבירו מדוע הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x בתחום הנתון.
 ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{(\sin x - 1)\cos x}{\cos x}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 עבור התחום הנתון:
 (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) בעבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) = g(x)$?
 (3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

24. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- א. מצאו בתחום הנתון: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות אנכיות.
- ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.
- ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- עבור התחום הנתון: (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
- (2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
25. נתונה הפונקציה $y = 2x + \frac{1}{\tan x}$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
- א. מצאו בתחום הנתון את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצאו בתחום הנתון את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
26. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^3(3x - \pi)$, המוגדרת לכל x .
- א. בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ מצאו:
- (1) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- (2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ב. (1) הוכיחו כי הפונקציה זוגית.
- (2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.
- ג. רשמו את משוואות הישרים המשיקים לגרף הפונקציה בתחום $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ ומאונכים לציר ה- y .
27. נתונה הפונקציה $f(x) = -\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\sin x$ בקטע $0 \leq x \leq 3\pi$.
- א. (1) בקטע הנתון מצאו עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.
- (2) בקטע הנתון מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- ב. (1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.
- (2) מצאו משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים האי-שוויון $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$. נמקו.
28. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$, ונתון התחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. בתחום הנתון ענו על הסעיפים א ו-ב.
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) האם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית או אי-זוגית? נמקו.
- (3) מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- (4) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - a$.
- (1) מצאו את הערכים האפשריים של a שעבורם יש למשוואה $f(x) - a = 0$ פתרון אחד בלבד.
- (2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ עבור כל אחד מערכי a שמצאתם בתת-סעיף ב (1).

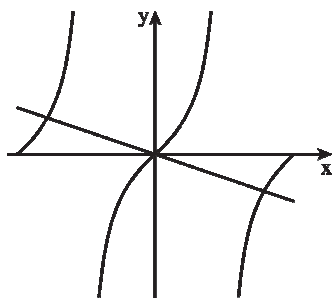
- 29.** $f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x , כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x .
 א. הוכיחו שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;
 ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

- נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x .
 ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמקו.
 ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמקו.
 (2) הראו שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.
 (3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, וקבעו את סוגן.
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

- ענו על סעיף ד. תוכלו להיעזר בתשובותיכם על הסעיפים הקודמים.
 ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמקו.
 (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקציה $g(x)$.

- 30.** נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 \sin x$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 א. (1) קבעו אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמקו.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x בתחום הנתון.
 (3) הסבירו מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי-שלילית בתחום הנתון.
 (4) קבעו אם פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמקו.



- ב. (1) הראו ששיעורי ה- x שבעבורם $f'(x) = 0$ מקיימים $\tan x = -\frac{1}{3}x$.
 (2) בצויר שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות $h(x) = -\frac{1}{3}x$ ו- $g(x) = \tan x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. היעזרו בצויר, וקבעו כמה נקודות בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ מקיימות $f'(x) = 0$.

- נתון: שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 2.46 בקירוב.
 ענו על הסעיפים ג-ד בעבור התחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ג. (1) מהם שיעורי ה- x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום? נמקו וקבעו את סוגן.
 (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום.
 ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, בתחום.
 (2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום? נמקו.

31. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \cos 2x + \sin^2 x$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

a הוא פרמטר.

- א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או אף לא אחת מהן? נמקו.
- ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (הביעו באמצעות a אם צריך), אם נתון כי הפונקציה אינה קבועה?
- קבעו את סוגן בהתאם לערך של a (התייחסו לשתי האפשרויות עבור a).
- ג. מצאו את הערך של a שעבורו הפונקציה $f(x)$ היא קבועה. נמקו.

נתון $a > 1$.

- ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- (2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

32. נתונות הפונקציות $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

ענו על סעיף א עבור התחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצאו את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .
- (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו גם על סעיף ב עבור התחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

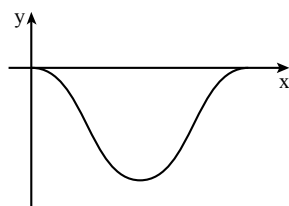
ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכיחו: $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

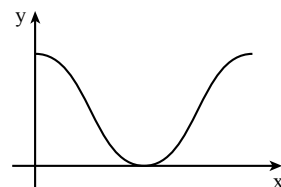
- (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- תוכלו להיעזר בתשובותיכם על הסעיפים הקודמים.

תשובות:

1. א. $\left(\frac{2\pi}{3}; 2\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$ מינימום, $(0; 2)$ מקסימום.

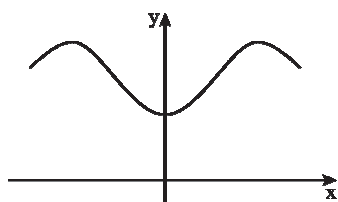


ג.



ב.

2. $(3\pi; 4)$ מקסימום.



ב. (2)

3. א. $(0; 0)$ מינימום,

$\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ מקסימום,

$\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$ מקסימום.

4. $(0; 1)$ מינימום.

5. א. כן. ב. (1) לא. (2) כן.

6. ב. כן. ג. כן. 7. (3) ו- (4).

8. א. $k = 3$. ב. $\frac{4\pi}{3}$. 9. א. פתרון אחד.

10. א. $a = 4$. ג. 7 פתרונות. ד. 8 פתרונות. 11. ב. לא. ג. לא.

12. א. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. ב. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

13. א. $\pi \leq x < \frac{4\pi}{3}$. ב. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

14. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ או $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ או $\frac{11\pi}{6} \leq x < 2\pi$.

16. א. $\left(\frac{3}{4}\pi; \sqrt{2}\right)$. ב. $(2; 4)$. ג. לא. 17. $(3; 2)$.

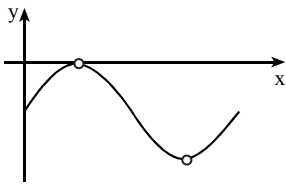
18. ג. $x > \frac{\pi}{2}$. 19. (1) $k \geq 1$ או $k \leq 0$. (2) k אף k . (3) $0 < k < 1$.

20. $a = -3$. 21. $k > -0.886$.

22. ב. $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$. ג. שתי נקודות.

23. ב. (1) $0 \leq x \leq 2\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$.

(2) $0 \leq x \leq 2\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$.



24. א. (1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{4}$.

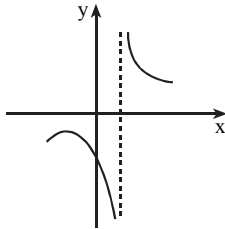
(2) $(-\frac{\pi}{2}; -1)$ מינימום, $(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ מקסימום,

מינימום. $(\frac{\pi}{2}; 1)$

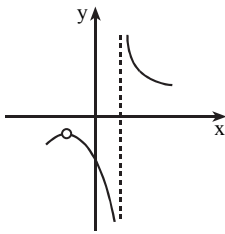
(3) עלייה: $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$;

ירידה: $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ או $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

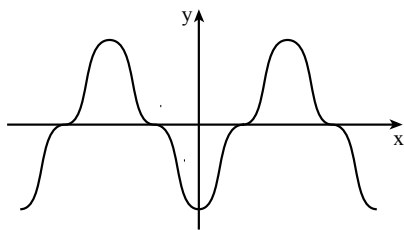
(4) $(0; -1)$. (5) $x = \frac{\pi}{4}$.



ג. (1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{4}$, $x \neq -\frac{\pi}{4}$. (2)



25. א. $0 < x < \pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}$. ב. $x = 0$, $x = \pi$.



ב. (2)

26. א. (1) $(\frac{\pi}{2}; 0)$, $(\frac{\pi}{6}; 0)$, $(0; -1)$.

(2) $(0; -1)$ מינימום, $(\frac{\pi}{3}; 1)$ מקסימום,

מינימום. $(\frac{2\pi}{3}; -1)$

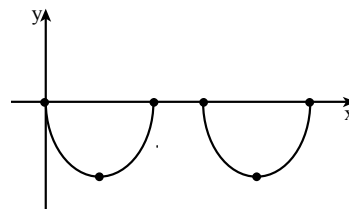
ג. $y = 0$, $y = -1$, $y = 1$.

27. א. (1) $0 \leq x \leq \pi$ או $2\pi \leq x \leq 3\pi$.

(2) $(0; 0)$ מקסימום, $(\frac{1}{2}\pi; -\frac{1}{2})$ מינימום, $(\pi; 0)$ מקסימום,

$(2\pi; 0)$ מקסימום, $(2\frac{1}{2}\pi; -\frac{1}{2})$ מינימום, $(3\pi; 0)$ מקסימום.

(2) $y = -\frac{1}{2}$.



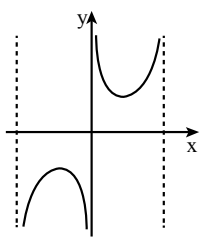
ב. (1)

ג. לא.

28. א. (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

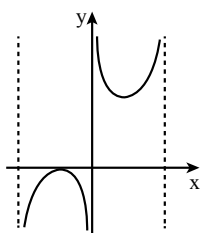
(2) אי-זוגית.

(3) $(\frac{\pi}{4}; 2)$ מינימום, $(-\frac{\pi}{4}; -2)$ מקסימום.

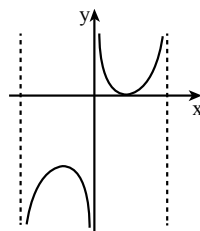


(4)

$a = -2$



ב. (1) $a = -2$, $a = 2$ (2) $a = 2$



29. א. הוכחה.

(4)

ב. לא $(2 + \sin^2 x \geq -1, \cos x \geq -1)$,

לכן סכומם גדול מ-1 או שווה לו,

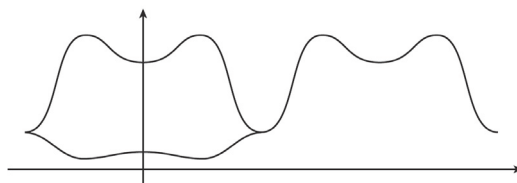
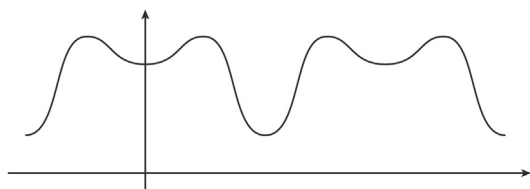
ולכן לא יכול להיות שווה 0.

ג. (1) כן $(\sin^2 x - \cos x)$ הן פונקציות זוגיות).

(2) הוכחה.

(3) $(0; 3)$ מינימום, $(\frac{\pi}{3}; 3\frac{1}{4})$ מקסימום, $(\pi; 1)$ מינימום.

ד. (1) כל x . (2)



30. א. (1) $f(x)$ זוגית. (2) $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$. (3) הוכחה. (4) $f'(x)$ אי זוגית.

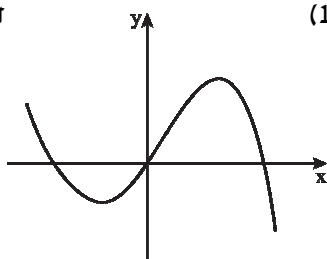
ב. (1) הוכחה. (2) שלוש נקודות.

ג. (1) $x = \pi$ מינימום קצה, $x = 2.46$ מקסימום, $x = 0$ מינימום,

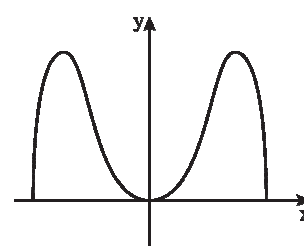
$x = -2.46$ מקסימום, $x = -\pi$ מינימום קצה.

ד. (2) 2 נקודות פיתול לפחות.

(1) ד.



(2)



31. א. $f(x)$ זוגית.

ב. עבור $a < \frac{1}{2}$: $(\pi; a)$ מינימום, $(\frac{\pi}{2}; 1-a)$ מקסימום, $(0; a)$ מינימום,

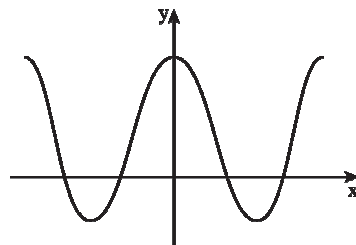
$(-\frac{\pi}{2}; 1-a)$ מקסימום, $(-\pi; a)$ מינימום,

עבור $a > \frac{1}{2}$: $(\pi; a)$ מקסימום, $(\frac{\pi}{2}; 1-a)$ מינימום, $(0; a)$ מקסימום,

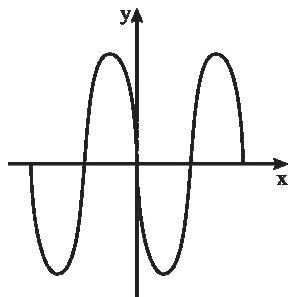
$(-\frac{\pi}{2}; 1-a)$ מינימום, $(-\pi; a)$ מקסימום,

ג. $a = \frac{1}{2}$.

(2)



ד. (1)



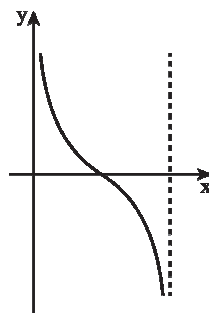
32. א. (1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. (2) $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

(3) עלייה : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, ירידה : אין.

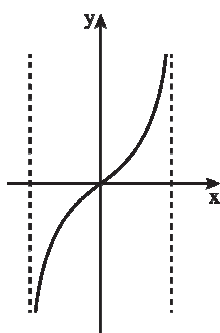
ב. (1) $0 < x < \pi$.

(2) הוכחה.

(3)



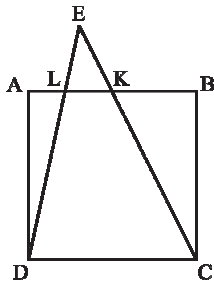
(4)



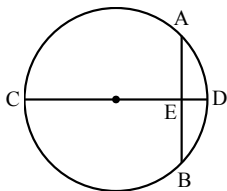
בעיות ערך קיצון

פרק זה כולל שאלות בנושא בעיות קיצון בהתאם לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד בספר 806 כך ד' מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. רוב השאלות הן ברמת בחינת הבגרות.

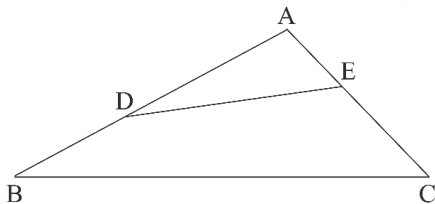
1. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) אורך היתר הוא k ס"מ (k הוא פרמטר). הניצב AB הוא גם יתר במשולש ADB , שהוא שווה-שוקיים וישר זווית ($\angle ADB = 90^\circ$). א. סמנו $AB = x$ והביעו את BC באמצעות x ו- k . ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה $BC \cdot AD^2$ הוא $3\sqrt{3}$. מצאו את שטח המשולש ADB (ערך מספרי), כאשר המכפלה $BC \cdot AD^2$ היא מקסימלית.



2. $ABCD$ הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ. L ו- K הן נקודות על הצלע AB . נתון כי הישרים CK ו- DL חותכים זה את זה בנקודה E , הנמצאת מחוץ לריבוע $ABCD$ (ראו ציור). נסמן: $LK = x$. א. הביעו באמצעות x את גובה המשולש KLE . ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים ADL , BCK ו- KLE הוא מינימלי? נמקו. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.



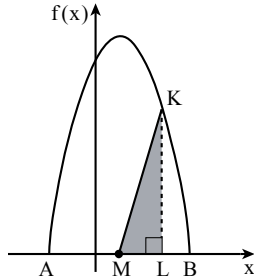
3. CD הוא קוטר במעגל שרדיוסו R . AB הוא מיתר במעגל המאונך לקוטר CD וחותך אותו בנקודה E , כך ש- $CE > R$ (ראו ציור). הביעו באמצעות R את השטח המקסימלי של המשולש ABC .



4. במשולש ABC נתון: $AB = 30$, $AC = 20$, $\angle CAB = \alpha$. α הוא קבוע. הנקודה D נמצאת על הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC (ראו ציור). נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא רבע משטח המשולש ABC . סמנו את אורך הקטע AD ב- x . א. הביעו באמצעות x את אורך הקטע AE . ב. (1) הביעו באמצעות α את האורך המינימלי של הקטע DE . (2) הסיקו מתת-סעיף (1) את הערך של x שבעבורו היחס $\frac{DE}{BC}$ הוא מינימלי. הסבירו.

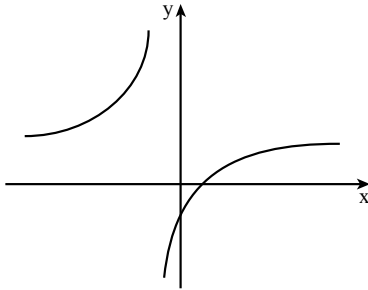
5. מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים). מחלק אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע. סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$. מצאו את הערך של k .

6. בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x + c$ בתחום האי-שליליות שלה. A ו-B הן נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .



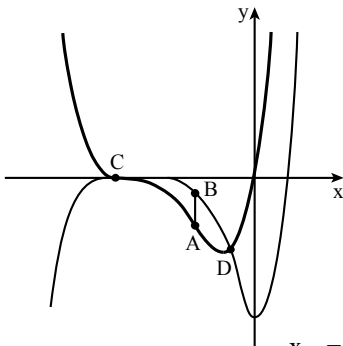
- נתון: $x_B = 2t$, $x_A = -t$ ($t > 0$).
א. מצאו את t ואת c .
M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה- x .
K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל ציר ה- x .
מהנקודה K הורידו אנך לציר ה- x , החותך את הקטע AB בנקודה L.
ב. מצאו עבור אילו שיעורי x של הנקודה K, שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.
מצאו את שני הפתרונות האפשריים. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (ראו ציור).



- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- x . הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C ואת הישר $y = 2x$ בנקודה D. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה C ב- t . מצאו מה צריך להיות הערך של t , כדי שהאורך של הקטע CD יהיה מינימלי: (1) עבור $t > -1$, (2) עבור $t < -1$.
ג. מצאו את האורך המינימלי של הקטע CD עבור כל $t \neq -1$.

8. לפניכם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.



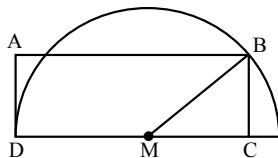
- א. התאימו בין הגרפים I ו-II לבין הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$. נמקו.
נתון: $f'(x) = x(x+b)^3$, $b > 1$ הוא פרמטר.
לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב- $x = -1$.
ב. מצאו את b .
ג. C ו-D הן נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ בתחום $x < 0$, כמתואר בציור.
הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים I ו-II בהתאמה, כך הישר AB מאונך לציר ה- x . נתון: $x_D = 1 - \sqrt{5}$, $x_C = -4$, $x_C < x_A < x_D$.
מצאו את שיעור ה- x של הנקודות A ו-B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי (אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = t$. נתון: $1 \leq t \leq 5$.
המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B . הנקודה O היא ראשית הצירים.
א. מצאו את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.
ב. מצאו את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

10. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) אורך השוק הוא b .
 BD הוא גובה לשוק AC . DE הוא אנך לבסיס BC .

סמנו $\angle BAC = 2x$, ומצאו מה צריך להיות הגודל של $\angle BAC$, כדי שאורך האנך DE יהיה מקסימלי.
בתשובתכם דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



11. נתון מלבן $ABCD$.

הצלע DC מונחת על הקוטר של חצי מעגל שהרדיוס שלו R ומרכזו M כך ש- $DC \geq R$.
הצלע AD משיקה לחצי המעגל בנקודה D , והקדקוד B נמצא על המעגל (ראו ציור).

נסמן: $\angle BMC = x$, $S(x)$ – שטח המלבן $ABCD$.

א. מצאו מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $S(x)$ יהיה מקסימלי.

ב. הביעו באמצעות R את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $S(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

12. נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A .

מנקודה כלשהי P , הנמצאת על הקשת BC ,

הורידו אנך ל- AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L (ראו ציור).

השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC

ובין הרדיוסים AB ו- AP , והקטעים LP ו- LC .

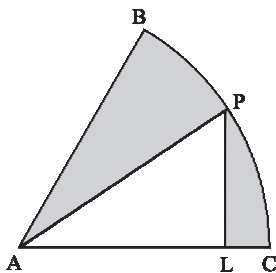
נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi - 36$.

א. (1) מצאו את הזווית PAC שעבורה השטח האפור

שמתקבל הוא מינימלי.

(2) מצאו את R .

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL ? נמקו.



13. נתונה הפונקציה $g(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{7}{3}\pi$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

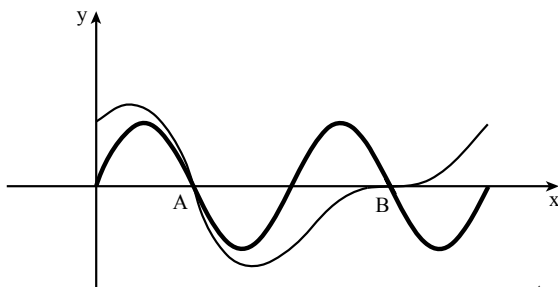
ב. מצאו את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$,

כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

(1) מצאו את האורך המקסימלי של הקטע AB .

(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמקו.



14. נתונות שתי פונקציות : $f(x) = 0.5 \sin(2x) + \cos x$

$$g(x) = \sin(2x)$$

בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

בתחום הנתון הגרפים של הפונקציות נפגשים בשתי נקודות, A ו-B, הנמצאות על ציר ה-x, כמתואר בצור. א. דרך נקודה על ציר ה-x,

הנמצאת בין הנקודות A ו-B, מעבירים אנך לציר ה-x.

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות M ו-N.

מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN.

ב. דרך נקודה על ציר ה-x, הנמצאת בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, מעבירים אנך לציר ה-x.

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות K ו-L.

מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL.

15. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + \frac{\cos x}{\sin x}$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. (1) מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

השיפוע של משיק זה הוא המקסימלי מבין השיפועים של כל המשיקים

לגרף הפונקציה בתחום הנתון.

מצאו את הזווית שמשיק זה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

16. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \sin(2x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

ענו על הסעיפים שלפניכם עבור התחום הנתון.

א. מצאו את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גרף הפונקציה $f(x)$.

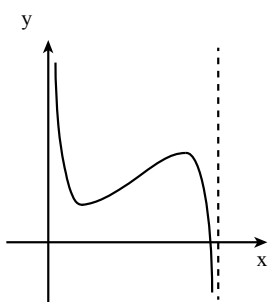
ב. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. (1) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות:

1. א. $\sqrt{k^2 - x^2}$ ב. 1.5 סמ"ר. 2. א. $\frac{6x}{6-x}$ ב. $6-3\sqrt{2}$ 3. $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$
4. א. $\frac{150}{x}$ ב. (1) $\sqrt{300-300\cos\alpha}$ (2) $\sqrt{150}$ 5. $k=5$
6. א. $c=8, t=2$ ב. $x=1+\sqrt{3}$ או $x=1-\sqrt{3}$
7. א. תחום הגדרה: $x \neq -1$ אסימפטוטה אנכית: $x=-1$ אסימפטוטה אופקית: $y=1$
- ב. (1) $t=0$ (2) $t=-2$ ג. $\frac{1}{2}$
8. א. $f(x): \Pi, f'(x): I, b=4$ ג. $x_A = x_B = -2$
9. א. $x=\sqrt{3}$ ב. $x=5$ 10. 109.47°
11. א. $\frac{\pi}{3}$ ב. $\frac{1}{2}R^2$ 12. א. (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $R=12$ ב. 36
13. א. $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{2\pi}{3}; 0\right), \left(\frac{5\pi}{3}; 0\right)$ ב. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{4\pi}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ג. (1) 1. (2) שני קטעים.
14. א. $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$ ב. 1.



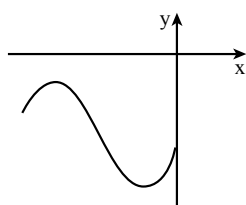
(3)

15. א. $0 < x < \pi$

ב. (1) $x=\pi, x=0$

(2) מינימום, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}+1\right)$, מקסימום, $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}-1\right)$

ג. 45°



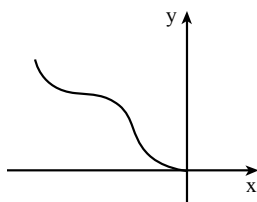
ב.

16. א. השיפוע הגדול ביותר הוא -0.886 ;

השיפוע הקטן ביותר הוא -2.255 .

ג. (1) $-\frac{\pi}{12} < x < 0, -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{5\pi}{12}$; (2)

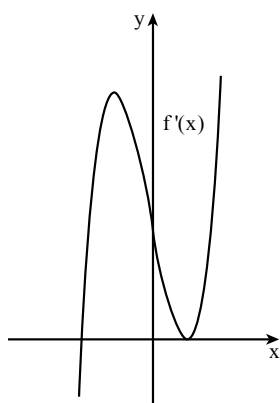
$-\frac{5\pi}{12} < x < -\frac{\pi}{12}$; $\cap$



חשבון אינטגרלי

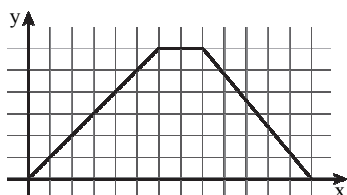
חלק זה כולל שאלות עם אינטגרלים בהתאם לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הלימוד בספר 806 כרך ד' מאת יואל גבע ואריק דז'לדטי. רוב השאלות קצרות יחסית ומדגישות רעיון מסוים. הדגשנו בעיקר: משמעות קבוע האינטגרציה c , משמעות האינטגרל המסוים, הדומה והשונה בין חישוב אינטגרל מסוים לחישוב שטח בין גרפים של פונקציות, הבנה (גרפית) מתי האינטגרל המסוים חיובי, שלילי או אפס, מתי הוא מינימלי ומתי הוא מקסימלי. ניתוח של אינטגרל של פונקציות ללא תבנית אלגברית, הזזות ומתיחות של פונקציות וההשפעה שלהן על השטח בין הפונקציה לציר ה- x ועל שטח בין שתי פונקציות. חישובי שטחים הכוללים את גרף הנגזרת ואת הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת שלה, חישובי שטחים עם פונקציות של ערך מוחלט, אימות אינטגרלים על ידי גזירה.

פולינומים, פונקציות ללא תבנית אלגברית נתונה



1. $f(x)$ היא פונקציה שמוגדרת לכל x .
בציור שלפניכם מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עובר דרך הנקודות $(-2;0)$, $(1;0)$.
א. על פי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,
מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מהו שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$,
ומהו סוג הקיצון? נמקו.
(3) נתון כי פונקציית הנגזרת היא $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$.
שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא -10 .
מצאו את הפונקציה $f(x)$.
ב. מצאו את השיעורים של הנקודות שבהן שיפוע המשיק
לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 0 .

2. נתון כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x , ומקיימת: $f'(x) = x^2 - 6x + 5$.
א. הישר $y = 10\frac{2}{3}$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.
מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
נתון כי הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x , ומקיימת: $f'(x) = g'(x)$.
ב. המרחק בין נקודת המקסימום של $f(x)$ לנקודת המקסימום של $g(x)$ הוא 1 .
מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.
מצאו את שתי האפשרויות.
ג. (1) סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
וסקיצות של שני הגרפים האפשריים של $g(x)$.
(2) כמה נקודות פגישה עם ציר ה- x יש לכל אחד משלושת הגרפים שסרטטתם?

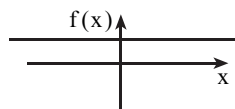


3. בשרטוט מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 13$. כל משבצת מייצגת יחידה אחת.

א. חשבו את האינטגרל המסוים $\int_0^6 f(x) dx$.

היעזרו בנוסחה לחישוב שטח של משולש.

ב. חשבו את האינטגרל המסוים $\int_0^{13} f(x) dx$. היעזרו בנוסחה לחישוב שטח של טרפז.



4. גרף הפונקציה $f(x)$ הוא ישר המקביל לציר ה- x ועובר בנקודה $(0;1)$.

חשבו את האינטגרל המסוים $\int_1^3 f(x) dx$.

היעזרו בנוסחה לחישוב שטח של מלבן.

5. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$. הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(0;0)$, $(3;0)$, $(6;0)$.

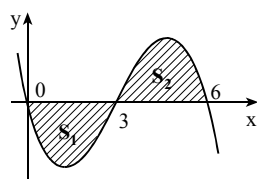
א. קבעו האם $\int_0^3 f(x) dx$ חיובי או שלילי?

ב. קבעו האם $\int_3^6 f(x) dx$ חיובי או שלילי?

ג. בכל אחד מתתי הסעיפים הבאים רשום נתון.

לפי הנתון, קבעו האם מתקיים: $S_1 < S_2$ או $S_1 > S_2$, $S_1 = S_2$.

(1). נתון: $\int_0^6 f(x) dx = 0$. (2). נתון: $\int_0^6 f(x) dx > 0$. (3). נתון: $\int_0^6 f(x) dx < 0$.



6. גרף הפונקציה $f(x)$ רציף וחותך את ציר ה- x בשלוש נקודות, המסומנות בציור.

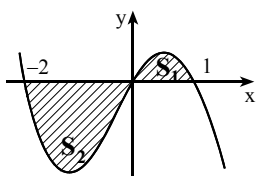
השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה- x הוא S .

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$

וציר ה- x ברביע הראשון. S_2 הוא השטח המוגבל

על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה- x ברביע השלישי.

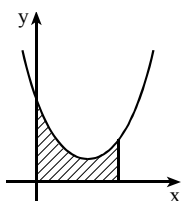
נתון גם: $\int_{-2}^1 f(x) \cdot dx = K$. הביעו באמצעות S ו- K את S_1 ו- S_2 .



7. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת, רציפה וגזירה לכל ערך של x .

א. נתון: $\int_1^4 f(x) dx = 10$, $\int_4^6 f(x) dx = 8$. חשבו את $\int_1^6 f(x) dx$.

ב. נתון: $\int_8^{12} f(x) dx = 19$, $\int_8^{10} f(x) dx = 9$. חשבו את $\int_{10}^{12} f(x) dx$.



8. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ על ידי הישר $x=3$ ועל ידי שני הצירים (השטח המקווקו שבציור).

א. מגדירים: $g(x) = f(x) + 1$.

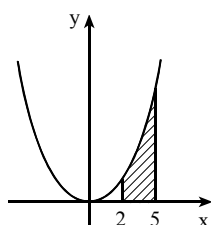
הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי

גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x=3$ ועל ידי שני הצירים.

$$\text{דרך א': היעזרו בכך ש-} \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) + 1) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 1 dx$$

דרך ב': היעזרו בכך שלשטח המקווקו התווסף מלבן שאורכו 3 ורוחבו 1.

ב. נתונה הפונקציה: $n(x) = f(x) + 4$. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $n(x)$, על ידי הישר $x=3$ על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $y=k$ שווה ל- S . מהו הערך של k ? נמקו.



9. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=2$ ו- $x=5$ (השטח המקווקו שבציור).

מגדירים: $g(x) = 3f(x)$, $f(x) = 2h(x)$.

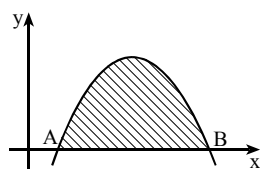
א. הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$,

ציר ה- x והישרים $x=2$ ו- $x=5$.

$$\text{תוכלו להיעזר בכלל הבא: } \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

ב. הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, גרף הפונקציה $-g(x)$

והישרים $x=2$ ו- $x=5$.



10. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, החותך את ציר ה- x בנקודות $(1;0)$, $(5;0)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x (השטח המקווקו שבציור).

א. נגדיר: $g(x) = f(x-2)$.

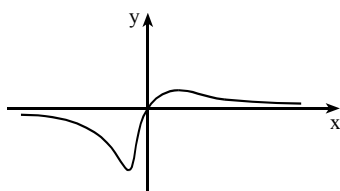
קבעו האם השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$

לבין ציר ה- x גדול, קטן או שווה ל- S . נמקו.

$$\text{ב. קבעו האם על פי סעיף א' מתקיים: } \int_1^5 f(x) dx = \int_3^7 f(x-2) dx$$

ג. נגדיר: $h(x) = f(2x)$.

קבעו האם השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $h(x)$ לבין ציר ה- x גדול, קטן או שווה ל- S . נמקו.



11. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת ורציפה לכל x .

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=k$ ו- $x=m$,

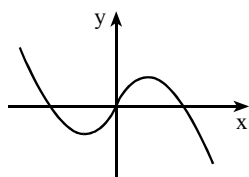
$k > 0$, $m < 0$.

מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת: $g(x) = 3 \cdot f(x)$.

הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

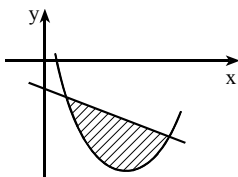
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=k$ ו- $x=m$. נמקו.

12. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = x - \frac{x^3}{3}$.



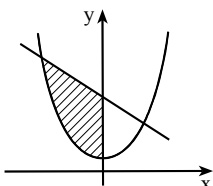
- א. הוכיחו ש- $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית.
 ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הגרף של $f(x)$ עם הצירים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל-ידי ציר ה- x .
 ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x) = |f(x)|$.
 ה. מצאו ללא חישובי אינטגרלים את גודל השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

13. לפניכם גרפים של שתי פונקציות:



- פונקציה ריבועית $f(x)$ ופונקציה קווית $g(x)$.
 נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות (השטח המקווקו שבציר).
 א. האם השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)+3$ ו- $g(x)+3$, גדול, קטן או שווה ל- S ?
 ב. האם השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x+3)$ ו- $g(x+3)$, גדול, קטן או שווה ל- S ?
 ג. האם השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(\frac{1}{2}x)$ ו- $g(\frac{1}{2}x)$, גדול, קטן או שווה ל- S ?

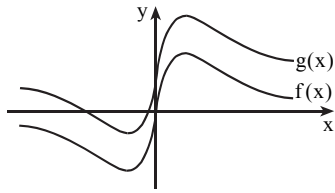
14. לפניכם גרפים של שתי פונקציות:



- פונקציה ריבועית $f(x)$ ופונקציה קווית $g(x)$.
 S_1 הוא השטח המוגבל ברביע השני על ידי הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי ציר ה- y (השטח המקווקו).
 א. מגדירים: $h(x) = f(x) - 2$, $t(x) = g(x) - 2$.
 S_2 הוא השטח המוגבל משמאל לציר ה- y על ידי הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו- $t(x)$ ועל ידי ציר ה- y .
 האם השטח S_1 גדול מהשטח S_2 , קטן ממנו או שווה לו? נמקו.
 ב. נתונות הפונקציות $k(x) = f(-x)$, $m(x) = g(-x)$.
 נסמן ב- S_3 את השטח המוגבל מימין לציר ה- y על ידי הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ ועל ידי ציר ה- y . הביעו את השטח S_3 באמצעות S_1 .

15. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות, רציפות, גזירות וחיוביות לכל ערך של x .

- נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=2$ ו- $x=m-1$, m פרמטר ($m > 2$).
 נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=2$ ו- $x=m$ ($m > 2$) שווה ל- $2S$ בעבור כל m .
 הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x > 2$ (כתבו את שתי האפשרויות).
 אין צורך להוכיח את תשובתכם.



16. נתונה הפונקציה $f(x)$.
 גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז ב-2 יחידות כלפי מעלה כך שהתקבלה הפונקציה $g(x)$.
 לפניכם סקיצה של הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.
 חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $x=3$.

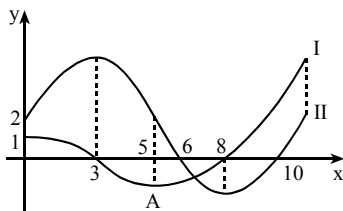
17. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת וגזירה לכל ערך של x .
 מגדירים פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x+2)$.

קבעו האם הטענה הבאה נכונה: לכל $a < b$ מתקיים השוויון: $\int_a^b g(x) dx = \int_{a+2}^{b+2} f(x) dx$.

18. נתונה פונקציה $f(x)$.
 גרף הפונקציה הוזז שמאלה ב-3 יחידות, כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$.
 א. בטאו את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.

ב. ציינו אילו מן הביטויים הבאים שווה בהכרח ל- $\int_0^3 f(x) dx$:

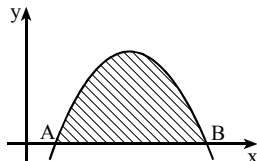
(1) $\int_0^3 f(x+3) dx$ (2) $\int_{-3}^0 f(x+3) dx$ (3) $\int_0^3 f(x-3) dx$ (4) $\int_{-3}^0 g(x) dx$



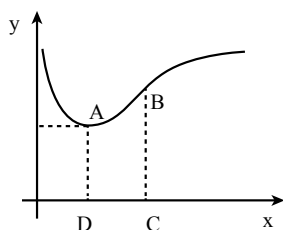
19. בציור שלפניכם מתוארים, לאו דווקא לפי הסדר, הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 11$, כאשר $g(x) = f'(x)$.
 א. זהו איזה מהגרפים הוא הגרף של הפונקציה $g(x)$. נמקו.

ב. נתון כי הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=0$ מאונך לישר המשיק לגרף של $f(x)$ בנקודה $x=5$.

חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף של הנגזרת השנייה $f''(x)$ ועל ידי שני הצירים.



20. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
 הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(1; 0)$ ו- $(5; 0)$.
 נקודת המקסימום של הפונקציה היא $(3; 4)$.
 א. הראו שהפונקציה קעורה כלפי מטה עבור כל ערך של x .
 ב. היעזרו בנתונים ובסעיף א' והסבירו (ללא שימוש באינטגרלים) מדוע השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x (השטח המקווקו) גדול מ-8 וקטן מ-16.



21. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x > 0$.

נתון: $x_B = x_C = t$, $x_A = x_D = k$.

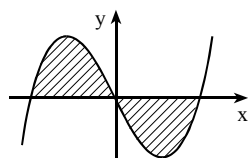
נתון כי בתחום $k < x < t$ הפונקציה עולה וקעורה כלפי מעלה.

נסמן ב- S את שטח הטרפז $ABCD$.

קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה:

$$(1) S = (t-k) \cdot f(t) \quad (2) S > (t-k) \cdot f(k)$$

$$(3) 2S = (t-k) \cdot [f(t) + f(k)] \quad (4) S > \int_k^t (f(x))dx$$



22. בציור מתואר גרף של פונקציה אי זוגית $f(x)$.

הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(5;0)$, $(0;0)$ ו- $(-5;0)$, ראו ציור.

א. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) + k$.

$$\text{נתון: } \int_{-5}^5 g(x)dx = 20. \text{ מצאו את הערך של } k.$$

ב. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = -f(x) + b$.

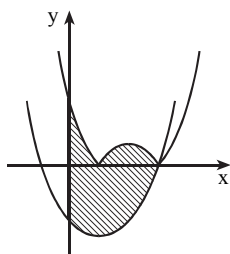
$$\text{נתון: } \int_{-5}^5 h(x)dx = 30. \text{ מצאו את הערך של } b.$$

23. נתונה פונקציה זוגית $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x .

$$\text{א. קבעו האם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה בהכרח: } \int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx, \text{ } 0 < a < b$$

ב. (1) הסבירו מדוע פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

$$(2) \text{ קבעו האם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה: } \int_a^b f'(x)dx + \int_{-b}^{-a} f'(x)dx = 0, \text{ } 0 < a < b$$



24. בציור מתוארים הגרפים של שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 - 4x - 5, \quad g(x) = |x^2 - 7x + 10|$$

א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$.

ב. עבור התחום שבין שתי נקודות האפס שמצאתם בסעיף א',

קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או לא נכונה:

$$(1) \text{ משוואת הגרף שנמצא מעל ציר ה-} x \text{ היא } y = x^2 - 7x + 10.$$

$$(2) \text{ משוואת הגרף שנמצא מעל ציר ה-} x \text{ היא } y = -x^2 + 7x - 10.$$

ג. חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות ועל ידי ציר ה- y (השטח המקווקו).

25. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 + 4x + b$

$$g(x) = -x^2 + c$$

b ו- c הם פרמטרים גדולים מ-0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P .

א. (1) הביעו באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P .

(2) הראו כי $c = b - 2$.

(3) הביעו באמצעות b את משוואת המשיק המשותף.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$,

אם ידוע כי $b > 4$.

הישר $x = a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D , את הגרף של $f(x)$ בנקודה A

ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B (A, D ו- B הן שלוש נקודות שונות).

ג. (1) הביעו את שיעורי הנקודות A, D ו- B באמצעות a ו- b .

(2) הראו כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB .

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי המשיק המשותף ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = -a$,

הוא S . הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$

ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = -a$.

26. לפניכם הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$

26.

(פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$) בתחום $-2.5 \leq x \leq 2.5$.

שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.

א. התאימו בין הגרפים I ו-II

ובין הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$. נמקו.

ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$

בתחום המתואר בגרף? נמקו את תשובתכם.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$

בתחום המתואר בגרף?

נמקו את תשובתכם.

ג. עבור איזה ערך של x בתחום $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$,

הוא מינימלי?

נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

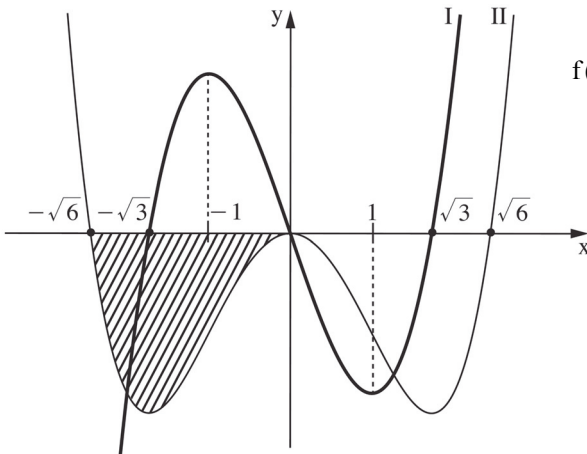
נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t .

ה. הביעו באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה- x

(השטח המקוקו בציר).

ו. נתון: קיימים a, b ו- c ממשיים כך ש- $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$.

מצאו את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.



27. נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x , ונתונה הפונקציה $g(x)$.

נתון: $g(x) = k + 2x$, $\int_0^1 g(x) dx = 0$, k הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את הערך של k .

(2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. נתון גם כי בתחום $x \geq 0$ מתקיים: $f(0) = k$, $f''(x) > 0$, $f(x) \geq g(x)$.

סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $x \geq 0$.

ג. בתחום $x \geq 0$ איזה שטח גדול יותר: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ושני הצירים

או השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$? נמקו.

ד. נתון גם: $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + f(0)$, a הוא פרמטר,

הגרף של $g(x)$ משיק לגרף של $f(x)$ בנקודה הנמצאת בתחום $x \geq 0$.

(1) הסבירו מדוע נקודת ההשקה היא $(0; -1)$.

(2) מצאו את הפונקציה $f(x)$.

תשובות:

1. א. (1) עלייה: $x > -2$; ירידה: $x < -2$. (2) מינימום. (3) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 14$.

ב. $(1; 17)$, $(-2; -10)$.

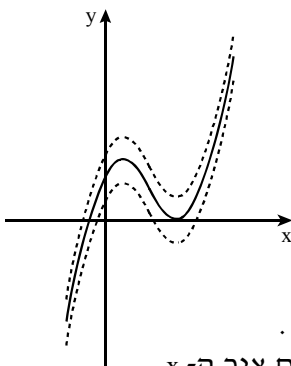
2. א. $(1; 10\frac{2}{3})$ מקסימום, $(5; 0)$ מינימום.

ב. אפשרות א':

$(1; 11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(5; 1)$ מינימום.

אפשרות ב':

$(1; 9\frac{2}{3})$ מקסימום, $(5; -1)$ מינימום.



ג. (1)

ג. (2) לגרף של $f(x)$ (המצויר בקו מלא) יש שתי נקודות פגישה עם ציר ה- x .

לגרף העליון של $g(x)$ (המצויר בקו מקווקו) יש נקודת פגישה אחת עם ציר ה- x .

לגרף התחתון של $g(x)$ (המצויר בקו מקווקו) יש 3 נקודות פגישה עם ציר ה- x .

3. א. 18. ב. 45. ג. 2. ד. 4.

5. א. שלילי. ב. חיובי. ג. (1). $S_1 = S_2$. (2). $S_1 < S_2$. (3). $S_1 > S_2$.

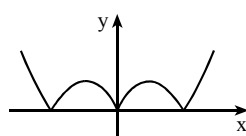
6. $S_2 = \frac{S-K}{2}$, $S_1 = \frac{S+K}{2}$.

7. א. 18. ב. 10. ג. 8. ד. $S+3$. ה. 4.

9. א. $\frac{1}{2}S$. ב. $\frac{3}{2}S$. ג. 10. א. שווה ל- S . ב. כן. ב. קטן מ- S . ג. $3 \cdot S$.

ה. $1\frac{1}{2}$.

12. א. $(0; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$. ב. $1\frac{1}{2}$. ג. ד.



13. א. שווה ל-S. ב. שווה ל-S. ג. גדול מ-S.

14. א. שווה ל-S₂. ב. S₁.

15. $g(x) = -f(x)$ או $g(x) = 3 \cdot f(x)$.

16. 6.

17. כן. 18. א. $g(x) = f(x+3)$. ב. (2), (4).

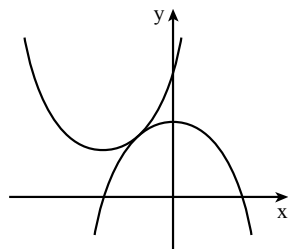
19. א. גרף I הוא של $g(x)$. ב. 2.

21. (1) לא נכונה. (2) נכונה. (3) נכונה. (4) נכונה.

22. א. $k=2$. ב. $b=3$.

23. א. נכונה. ב. (2). נכונה. 24. א. (5;0), (2;0). ב. (1) לא נכונה. (2). נכונה. ג. $46\frac{1}{2}$.

ב.



25. א. (1) $(-1; b-3)$. (2) $y = 2x + b - 1$.

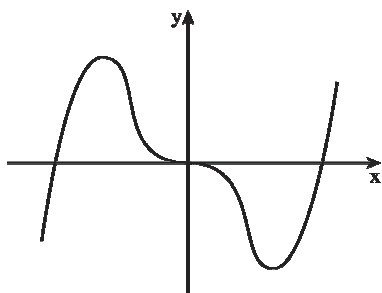
ג. (1) $D(a; 2a + b - 1)$,

$A(a; a^2 + 4a + b)$

$B(a; -a^2 + b - 2)$

ד. 2S.

ד.



26. א. $f'(x) : \Pi$, $f''(x) : I$.

ב. (1) שתי נקודות קיצון פנימיות

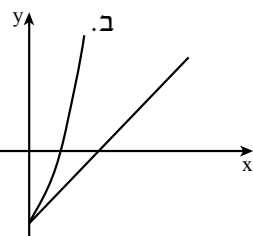
(כמספר נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם ציר x).

(2) שלוש נקודות פיתול

(כמספר נקודות החיתוך של $f''(x)$ עם ציר x).

ג. $x=1$. ה. $S=t$.

ו. $\frac{a}{b} = -\frac{1}{10}$, $c=0$.



27. א. (1) $k=-1$. (2) $(0; -1)$, $(\frac{1}{2}; 0)$.

ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=1$

הוא גדול יותר.

ד. (2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$.

אינטגרלים של פונקציות מורכבות עם מעריך שלם

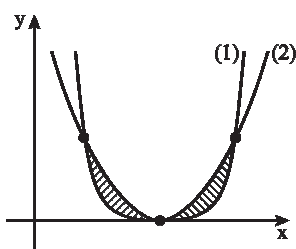
1. יואב מצא את הפונקציה הקדומה $F(x) = \int (2x-5)dx$ בשתי דרכים:

$$\text{דרך א - } F(x) = \int (2x-5)dx = \frac{2x^2}{2} - 5x + c = x^2 - 5x + c$$

דרך ב - יואב השתמש בנוסחה לאינטגרל של פונקציה מורכבת:

$$F(x) = \int (2x-5)^1 dx = \frac{(2x-5)^2}{2 \cdot 2} + c = \frac{4x^2 - 20x + 25}{4} + c = x^2 - 5x + 6.25 + c$$

כיצד אפשר להסביר את התוצאות השונות?



2. לפניכם הגרפים של הפונקציות $f(x) = (x-2)^6$ ו- $g(x) = (x-2)^4$.

א. מצאו את שיעורי נקודות המפגש בין שני הגרפים.

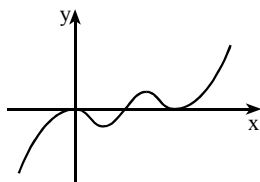
ב. התאימו כל פונקציה לגרף (1) או גרף (2).

ג. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה:

(1) השטח המקווקו כולו שווה ל- $\int_1^3 (g(x) - f(x))dx$

(2) השטח המקווקו כולו שווה ל- $\int_1^2 (g(x) - f(x))dx + \int_2^3 (g(x) - f(x))dx$

ד. חשבו את השטח המקווקו כולו.



3. נתונה הפונקציה $f(x) = (x^2 - 6x)^3$.

לפניכם גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x .

א. מצאו את נקודות האפס של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x .

ג. על סמך התוצאות שבסעיף ב' הסבירו מדוע $\int_0^6 f'(x)dx = 0$

תשובות:

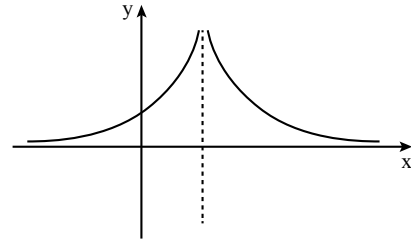
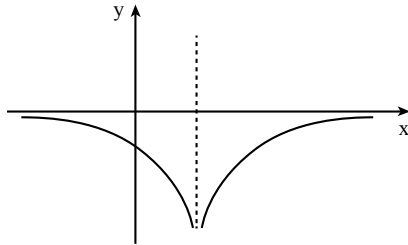
1. הקבוע c אינו זהה בשתי ההצגות של הפונקציה הקדומה ($c_1 = c_2 + 6.25$).

2. א. $(1;1), (3;1), (2;0)$. ב. $f(x) - (1)$, $g(x) - (2)$. ג. (1) הטענה נכונה. (2) הטענה נכונה. ד. $\frac{4}{35}$.

3. א. $(0;0), (3;0), (6;0)$. ב. 1,458.

אינטגרלים של פונקציות רציונליות

1. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$ (המתואר מימין) המוגדרת עבור $x \neq 2$ וגרף של פונקציה $g(x)$ (המתואר משמאל) המקיימת $g(x) = -f(x)$.



- א. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=b$ ($2 < a < b$). האם השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=b$ שווה אף הוא ל- S ? נמקו את תשובתכם.

- ב. הביעו באמצעות S את האינטגרלים המסוימים הבאים:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1) \quad \int_a^b g(x) dx \quad (2)$$

- ג. הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=b$ ($2 < a < b$).

2. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום $x \neq -2$.

בשרטוט משמאל מתואר גרף הפונקציה.

בתחום $x > -2$ הפונקציה יורדת וקעורה כלפי מעלה.

בתחום $x < -2$ הפונקציה יורדת וקעורה כלפי מטה.

א. מצאו את הסימן של האינטגרלים המסוימים הבאים,

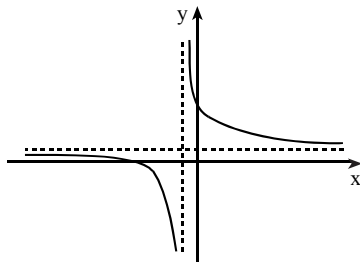
במידה וניתן לדעת מה הסימן ($t > k > -2$):

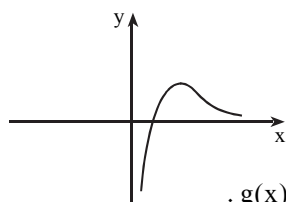
$$\int_k^t f(x) dx \quad (1) \quad \int_k^t f'(x) dx \quad (2) \quad \int_k^t f''(x) dx \quad (3)$$

ב. מצאו את הסימן של האינטגרלים המסוימים הבאים,

במידה וניתן לדעת מה הסימן ($t < k < -2$):

$$\int_t^k f(x) dx \quad (1) \quad \int_t^k f'(x) dx \quad (2) \quad \int_t^k f''(x) dx \quad (3)$$





3. נתונה פונקציה רציונלית אי זוגית $f(x)$, המוגדרת בתחום $x \neq 0$.

לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x > 0$. נתון: $f(1) = 0$.

א. הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה בתחום $x < 0$.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = 2 \cdot f(x)$.

(1) הראו ש- $g(1) = 0$.

(2) למערכת הצירים שבסעיף א', הוסיפו במקווקו את גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. נסמן ב- S את השטח המוגבל ברביע השלישי

על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = -2$.

(1) קבעו האם הטענה הבאה נכונה, ונמקו: $\int_{-2}^{-1} f(x) dx = S$.

(2) הביעו באמצעות S את השטח המוגבל ברביע השלישי על ידי הגרפים של שתי הפונקציות,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = -2$.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-4}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

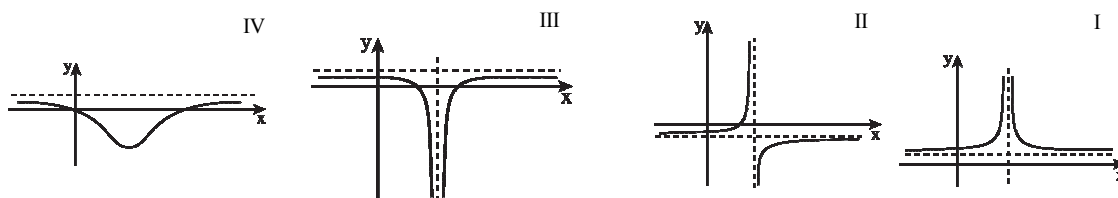
ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

ג. מצאו את תחומי עלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ומהי האסימפטוטה האופקית שלה?

(2) איזה גרף מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניכם, עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$?



ו. (1) מהם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x ?

(2) חשבו את השטח המוגבל ברביע הראשון על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושני הצירים.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a}$. a הוא פרמטר גדול מ-1.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(הביעו באמצעות a במידת הצורך.)

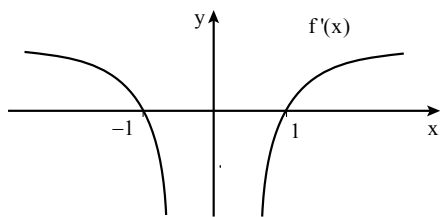
(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות בדיוק.

שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. בתחום $x \leq 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$,

על ידי הישר $x = -1$ ועל ידי ציר ה- x , שווה ל- $\frac{1}{2}$.

חשבו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (מצאו ערכים מספריים).



6. בציור שלפניכם מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

האסימפטוטה ההיחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -2$.

א. רק על פי נתוני השאלה:

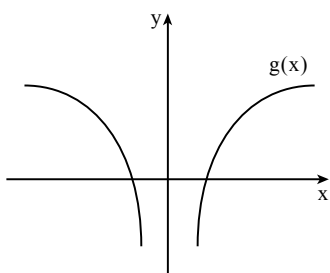
(1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון

של הפונקציה, וקבעו את סוג הקיצון.

(2) סרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמקו.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$, a ו- b הם פרמטרים שונים מ-0.

(1) הראו ש- $a = b$. (2) מצאו את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).



7. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרת לכל x השונה מ-0,

ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר $x = 0$ הוא האסימפטוטה האנכית

לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.

א. (1) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$. נמקו.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g''(x)$. נמקו.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$ שווה ל-5.25.

ב. הישר $x = 1$ חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ בנקודה A,

והישר $x = 2$ חותך גרף זה בנקודה B.

מצאו את ההפרש בין שיעור ה- y של הנקודה A ובין שיעור ה- y של הנקודה B. נמקו.

ג. הביטוי $y = \frac{a}{x^3}$ מתאר אחת מן הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$. a הוא פרמטר גדול מ-0.

(1) קבעו איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמקו את קביעתכם.

(2) מצאו את הערך של a .

8. נתון: הפונקציה $g(x) = \frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}$ היא פונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרות באותו התחום.

נתון כי משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודת הפיתול שלה היא $y = \frac{3}{2}x - 3$.

א. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ב. נגדיר: $h(x) = |g(x)|$. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$,

הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. נתון כי $\int_a^2 g(x) dx = t$, $0 < a < 2$, t הוא פרמטר. הביעו באמצעות t את $\int_a^2 (h(x) - g(x)) dx$.

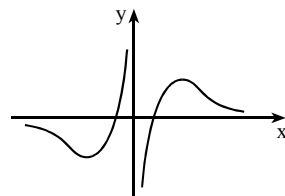
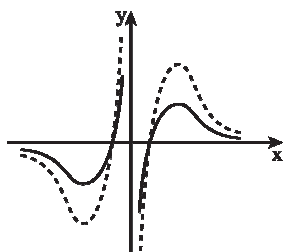
תשובות:

1. א. כן. ב. $S(1)$. ג. $-S(2)$. ד. $2S$.

2. א. (1) חיובי. (2) שלילי. (3) חיובי. ב. (1) לא ניתן לדעת. (2) שלילי. (3) שלילי.

3. א. ב. (2) ג. (1) הטענה אינה נכונה.

$S(2)$



4. א. $x \neq 4$

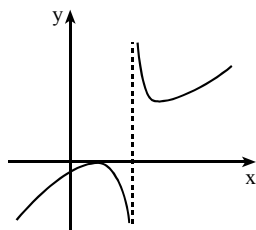
ב. מקסימום, $(2;0)$, מינימום, $(6;8)$.

ג. עלייה: $x > 6$ או $x < 2$, ירידה: $2 < x < 4$ או $4 < x < 6$.

ה. (1) תחום הגדרה: $x \neq 4$,

אסימפטוטה: $y=1$. (2) גרף III.

ו. (1) $(2;0)$, $(6;0)$. (2) 1.

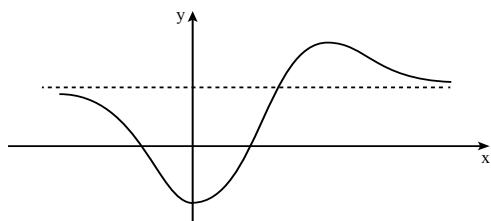


(3)

5. א. (1) $y=1$

(2) $(0;-1)$ מינימום, $(2a; \frac{4a+1}{4a-1})$ מקסימום.

ב. $(-2;0)$, $(1;0)$.

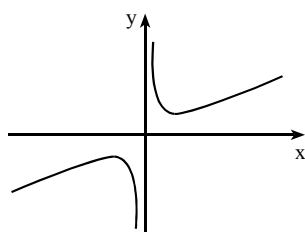


(2)

6. א. (1) $(1;2)$ מינימום,

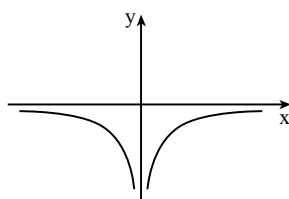
$(-1;-2)$ מינימום.

ב. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (2)



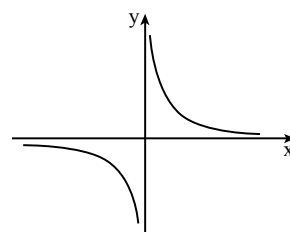
ב. 5.25

ג. (1) $g'(x)$. (2) $a=6$.



(2)

7. א. (1)



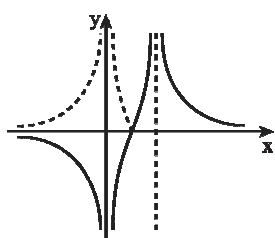
8. א. (1) $g(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{(x-4)^2}$

(2) $x \neq 0$, $x \neq 4$

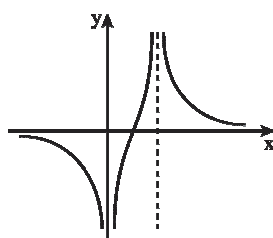
(3) ירידה: $x < 0$ או $x > 4$

עלייה: $0 < x < 4$

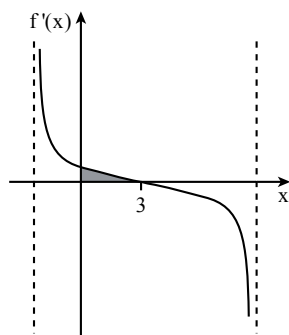
ג. $-2t$



ב.



אינטגרלים של פונקציות עם שורשים



1. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2 + bx + 16}$.

b הוא פרמטר.

בשרטוט שלפניכם מתואר גרף

פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. מצאו את הערך של b.

ב. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הנגזרת $f'(x)$,

על ידי ציר ה-y, ועל ידי ציר ה-x

(השטח האפור שבציור).

2. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 16}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. מצאו את כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

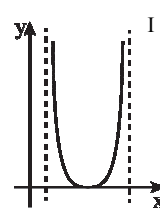
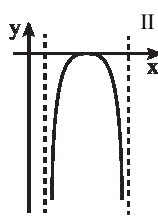
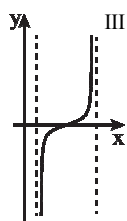
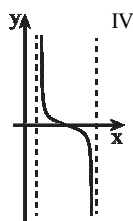
נתונה הפונקציה $g(x) = 2 \cdot f(x)$.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה שבה גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$ נפגש עם ציר ה-x.

ה. מצאו את התחום שבו $g'(x)$ חיובית ואת התחום שבו היא שלילית.

ו. איזה גרף מבין הגרפים I, II, III או IV עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$?



ז. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית $g'(x)$, על ידי הישר $x=7$ ועל ידי ציר ה-x.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$.

א. הראו שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של x.

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה (אם ישנם).

ג. נסמן ב-S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה-x

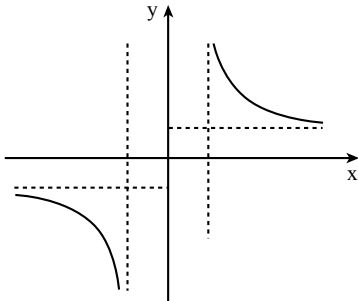
ועל ידי הישרים $x=2$ ו- $x=4$.

הביעו באמצעות S את האינטגרל המסוים הבא: $\int_2^4 \sqrt{3x^2 - 18x + 36} \cdot dx$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$.

- א. מצאו: (1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 (4) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצאו את הסימן של האינטגרל המסוים $\int_k^t f'(x) dx$, אם נתון כי k ו- t גדולים מ-3. נמקו.

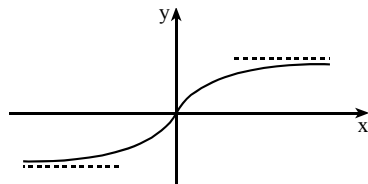


5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a פרמטר חיובי.

בשרטוט משמאל מתוארת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x > a$ או $x < -a$.
 א. הראו שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ב. מצאו את ערך הביטוי: $\int_{2a}^{3a} f(x) dx + \int_{-3a}^{-2a} f(x) dx$.

הערה: אין צורך לבצע אינטגרציה.



6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+6}}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. (1) מצאו את האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x עבור $x > 0$.
 (2) מצאו את האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x עבור $x < 0$.
 ג. בשרטוט משמאל מתואר גרף הפונקציה.
 היעזרו בשרטוט וענה על תתי הסעיפים הבאים.
 הערה: אין צורך לבצע אינטגרציה.

(1) הסבירו מדוע עבור כל מספר חיובי a מתקיים: $\int_a^{a+1} f(x) dx < 2$.

(2) הסבירו מדוע עבור כל מספר שלילי b מתקיים: $-6 < \int_{b-3}^b f(x) dx < 0$.

7. נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מקיימות $\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = 3$, $f(0) = 1$.

- א. מצאו את הערך המספרי של $f(3)$.
 ב. נתון גם: $f'(x) = kx + 2$, k הוא פרמטר. מצאו את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).
 ג. הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מקיימת $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
 (1) הראו כי $g(x) = |x+1|$.
 (2) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

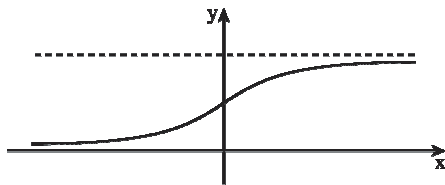
א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

ב. מצאו את התחום שבו $f(x) > 0$.

ג. בתחום שבו $f(x) > 0$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

נתון שגרף הפונקציה $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(\frac{2}{3}; 3)$.

מצאו את הפונקציה $g(x)$.



9. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $f(x) = g(x) + 1$.

הוכיחו שהפונקציה $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(2) הסבירו מדוע לכל שני מספרים b ו- c המקיימים $0 < b < c$ מתקיים:

$$\int_{-c}^{-b} f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = 2(c-b)$$

בתשובתכם תוכלו להיעזר בסרטוט מתאים ובשיקולי סימטריה.

אין צורך לבצע אינטגרציה.

10. א. חשבו את האינטגרל המסוים $\int_3^8 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} dx$.

הדרכה: צמצמו את הביטוי שבתוך האינטגרל.

ב. חשבו את האינטגרל המסוים $\int_6^{11} \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x^2-6x+8}} dx$.

תוכלו לפתור בשתי דרכים: (1) בעזרת צמצום.

(2) בעזרת הזזה של האינטגרל מסעיף א'.

תשובות:

1. א. $b=6$. ב. 1.

2. א. $2 \leq x \leq 8$. ג.

ב. $(5;3)$ מקסימום, $(2;0)$ מינימום, $(8;0)$ מינימום.

ד. $(1) 2 < x < 8$. $(2) (5;0)$.

ה. חיובית: $2 < x < 5$, שלילית: $5 < x < 8$.

ו. גרף IV (על פי תחומי חיוביות ושלייליות).

ז. $-2\sqrt{5}+6 \approx 1.53$.

3. ב. חיוביות: כל x , שליליות: אין. ג. $\sqrt{3} \cdot S$.

4. א. $(1) x < -3$ או $x > 3$.

(2) אין.

$(3) y = -1$, $y = 1$, $x = -3$, $x = 3$.

(4) עלייה: $x < -9$; ירידה: $x > 3$ או $-9 < x < -3$.

ג. הסימן שלילי.

5. ב. 0.

6. א. כל x . ב. $(1) y = 2$. $(2) y = -2$.

7. א. $f(3)=16$.

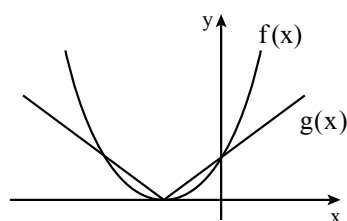
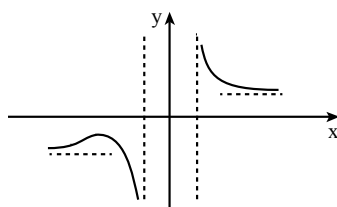
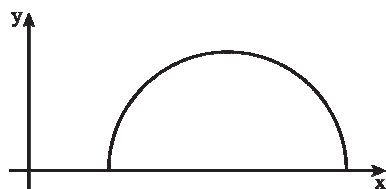
ב. $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

ג. $(1) g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$.

8. א. $x \neq 0$. ב. $x > 0$ או $x < -2$. ג. $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}} + 1$.

9. א. כל x . ב. $y = 2$, $y = 0$.

10. א. 2 . ב. 2 .



אינטגרלים הכוללים את זיהוי הנגזרת הפנימית

1. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

הישר $y = \frac{1}{3}x + 3$ חותך את הגרף של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושל הפונקציה $f(x)$?

(2) מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

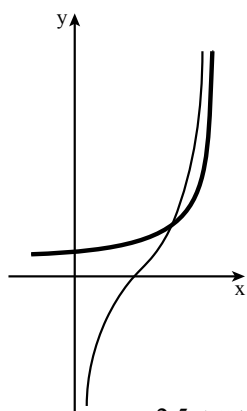
(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסיפו לסקיצה שסרטטתם בתת-סעיף (5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי משוואות, I ו-II : I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = k$, II. $\sqrt{x^2+9} = k$, נתון כי $k > 0$.

מצאו את תחום הערכים של k שעבורם אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II.



2. בציור נתונות שתי פונקציות : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, $g(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,

ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$,

ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$.

ג. נתונות הפונקציות $t(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}} + 2$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + 2$

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישר $x = 2.5$.

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו- $t(x)$ ועל ידי הישר $x = 2.5$.

האם השטח S_1 גדול מהשטח S_2 , קטן ממנו או שווה לו? נמקו.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}$, a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו.

ג. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = -1$,

שווה ל-4. מצאו את הערך של a .

ד. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $f(x) = g'(x)$.

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ היא נקודה שבה $x = 0$.

(1) הראו כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת : $g(x) = 2x^2$.

(2) מצאו את התחום שבו מתקיים $f(x) > g(x)$.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. b ו- c הם פרמטרים.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית. מצאו את b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצאו את תחום הערכים של c .

ד. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

וקבעו את סוגה (הביעו באמצעות c אם צריך).

(2) מצאו את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$,

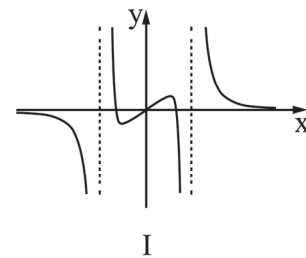
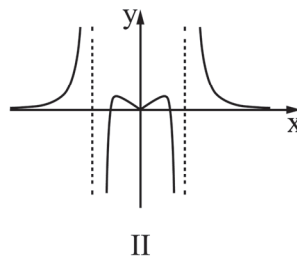
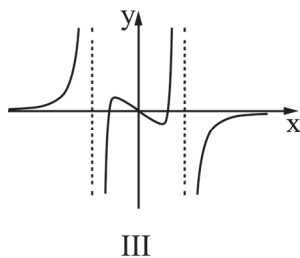
וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

לפניכם גרפים III-I.

(1) איזה מן הגרפים, III-I, הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) הביעו באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a הוא פרמטר.

ענו על הסעיפים א-ו עבור $a > 0$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a במידת הצורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) רשמו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת $f'(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ו. מצאו את ערך הביטוי: $\int_{2a}^{3a} f(x) dx + \int_{-3a}^{-2a} f(x) dx$.

ענו על סעיף ז עבור $a = 0$.

ז. (1) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x+5)$.

ב. (1) הוכיחו ש- $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבירו מדוע לכל $1 < x < b$ מתקיים השוויון: $\int_a^b g(x) dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x) dx$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$, a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. הוכיחו: $a > 1$.

ענו על סעיף ב. אם יש צורך, הביעו באמצעות a .

- ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (2) כתבו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .
 (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a = 3$.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ,

ועל ידי הישרים $x = \frac{2}{3}$ ו- $x = 2$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x .

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{3}$ ו- $x = b$ ($b > \frac{1}{3}$).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$

ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{3}$ ו- $x = b$ שווה ל- $2S$ בעבור כל b .

הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x > \frac{1}{3}$ (כתבו את שתי האפשרויות).

אין צורך להוכיח את תשובתכם.

8. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x - a}$, a הוא פרמטר המקיים $-4 < a < 2$.
א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

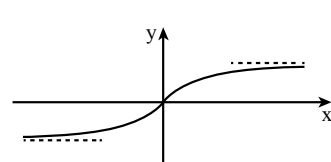
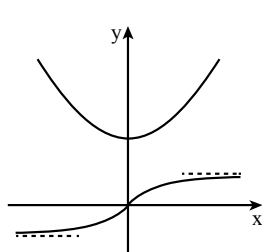
- (2) הסבירו מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- y .
(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .
(4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?
(5) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.
ב. (1) הביעו באמצעות a את שיעורי ה- x שבעבורם $f'(x) = 0$ (אם יש כאלה).
(2) מצאו את הערך של a שבעבורו $f'(x) \neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

הציבו $a = -1$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-ד.
ג. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?
(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשבו את $\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx$. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

תשובות:

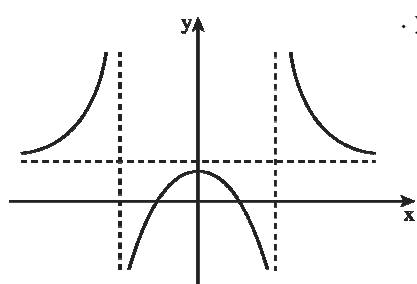
1. א. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.
ב. (1) $f'(x)$ - כל x ; $f(x)$ - כל x . (2) $y = -1, y = 1$. (3) $(0; 0)$. (4) עלייה: כל x ; ירידה: אין.



ג. $1 \leq k < 3$

2. א. (1) $f(x)$: $x < 3$, $g(x)$: $0 < x < 3$. (2) $f(x)$: $x = 3, y = 0$, $g(x)$: $x = 3, x = 0$.
ב. 0.6945 . ג. $S_1 = S_2$.

3. א. כל x . ב. אי-זוגית. ג. $a = 4$. ד. $0 < x < 2$.

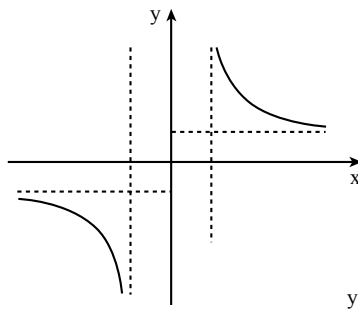


4. א. $x \neq -2, x \neq 2$.
ב. $b = 0$.
ג. $0 < c < 4$.
ד. (1) $(0, \frac{c}{4})$ מקסימום.

5. א. $x > a$ או $x < -a$.

ב. $x = a$, $x = -a$, $y = 1$, $y = -1$.

ג. ירידה: $x > a$ או $x < -a$;
עלייה: אין.



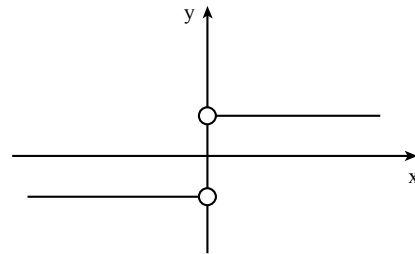
(2)

ה. (1) $x = a$, $x = -a$, $y = 0$.

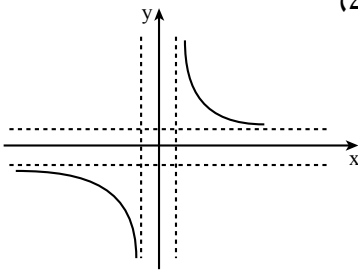
ו. ערך הביטוי שווה ל-0.

ז. (1) $x \neq 0$

(2)



ב. (2)



(5)

6. א. (1) $x > 6$ או $x < 4$.

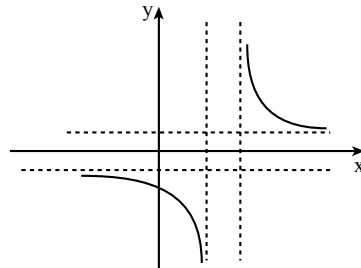
(2) $(0; -1.02)$.

(3) $x = 4$, $x = 6$,

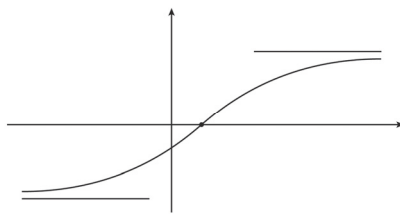
$y = 1$, $y = -1$.

(4) ירידה: $x > 6$ או $x < 4$.

עלייה: אף x .



(4)



7. א. הוכחה.

ב. (1) $(\frac{1}{a}, 0)$, $(0, -1)$.

(2) $y = \sqrt{a}$, $y = -\sqrt{a}$.

(3) עולה לכל x .

ג. 2. ד. $g(x) = -f(x)$, $g(x) = 3f(x)$.

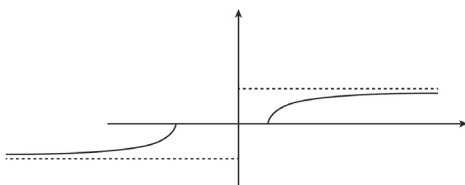
8. א. (1) $x \geq 1$, $x \leq -2$. (2) הוכחה. (3) $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

(4) $(1, 0)$, $(-2, 0)$. (5) $f(x) < 0$ עבור $x < -2$, $f(x) > 0$ עבור $x > 1$.

ב. (1) $x = \frac{8-a}{2a+2}$. (2) $a = -1$.

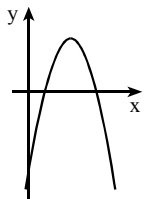
ג. (1) $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה. (2)

ד. $6\sqrt{2} - 2\sqrt{10} = 2.16$.



אינטגרלים – פונקציית הצטברות (אינטגרל מצטבר)

1. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, החותך את ציר ה- x בנקודות $(1;0)$, $(5;0)$.



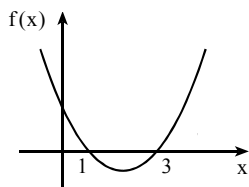
מגדירים פונקציה חדשה: $a > 0$, $g(a) = \int_0^a f(x) dx$.

א. האם $g(1)$ חיובי, שלילי או אפס? נמקו.

ב. הסבירו מדוע: (1) $g(1) < g(0.5)$ (2) $g(1) > g(3)$ (3) $g(6) < g(5)$.

ג. הסבירו מדוע בתחום $0 < a < 3$, הפונקציה $g(a)$ מקבלת מינימום עבור $a=1$.

2. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, החותך את ציר ה- x בנקודות $(1;0)$, $(3;0)$.



מגדירים: $t > 0$, $g(t) = \int_0^t f(x) dx$.

א. לפניכם שלושה ערכים של t .

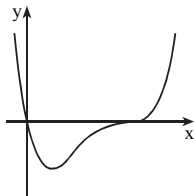
בעבור איזה מהם הערך של $g(t)$ הוא הגדול ביותר? נמקו.

(1) $t=0.5$ (2) $t=1$ (3) $t=2$.

ב. הסבירו מדוע בתחום $2 \leq t \leq 4$, הפונקציה $g(t)$ מקבלת מינימום עבור $t=3$.

3. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת וגזירה לכל ערך של x .

גרף הפונקציה נפגש עם ציר ה- x בנקודות $(0;0)$, $(4;0)$, ויש לו מינימום



עבור $x=1$. לפניכם האינטגרל $\int_0^t f(x) dx$, $t \geq 0$.

א. הסבירו מדוע עבור $t=0$ ערך האינטגרל הוא אפס.

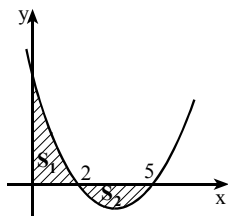
ב. קבעו עבור כל אחד מן המקרים שלפניך האם ערך

האינטגרל הוא חיובי, שלילי או שלא ניתן לדעת. נמקו.

(1) עבור $t=1$ (2) עבור $t=4$ (3) עבור $t=6$.

ג. האם קיים ערך של t שבעבורו האינטגרל $\int_0^t f(x) dx$ מקבל ערך מינימלי? אם כן, מהו ערכו של t ?

4. לפניכם גרף של פונקציה ריבועית $f(x)$, החותך את ציר ה- x בנקודות $(2;0)$ ו- $(5;0)$.



נתון: $\int_0^5 f(x) dx = 4\frac{1}{6}$. היעזרו בגרף ובנתונים **בלבד**.

א. קבעו איזה שטח גדול יותר: S_1 או S_2 .

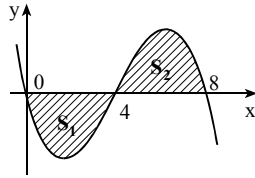
נסמן: $0 < k < 6$, $S(k) = \int_0^k f(x) dx$.

ב. (1) מצאו את k , כך שהערך של הפונקציה $S(k)$ הוא מקסימלי.

(2) מצאו לאילו ערכים של k הפונקציה $S(k)$ יורדת.

ג. מהם שיעורי נקודת המינימום הפנימית של הפונקציה $S(k)$?

5. גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודות $(0;0)$, $(4;0)$, $(8;0)$.



נתון: $\int_0^8 f(x) dx = 0$.

א. הסבירו מדוע $S_1 = S_2$ (ראו ציור).

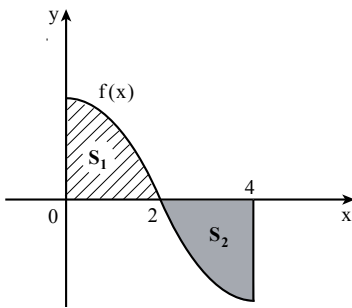
ב. לפניכם האינטגרל $\int_0^t f(x) dx$, $0 \leq t \leq 8$.

(1) לאיזה ערך של t האינטגרל הוא מינימלי?

(2) לאילו ערכי t האינטגרל הוא מקסימלי?

מהי התוצאה המקסימלית של האינטגרל?

ג. נסמן: $h(a) = \int_{-1}^a f(x) dx$, $a \geq -1$. הסבירו מדוע $h(8) = h(0)$.



6. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 4$.

הגרף חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$ והצירים (השטח המקווקו בציור).

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, ציר ה- x והישר $x = 4$ (השטח האפור).

נסמן: $0 \leq x \leq 4$, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

א. הסבירו מדוע גרף הפונקציה $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0;0)$.

ב. נתון: $g(4) = 0$. הסבירו מדוע $S_1 = S_2$.

ג. מצאו לאילו ערכים של x , הפונקציה $g(x)$ יורדת. נמקו.

7. לפניכם גרף של פונקציה זוגית $f(x)$, החותך את ציר ה- x בנקודות $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. ידוע כי השטח הכלוא על ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו) שווה ל-8.

נתון: $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \frac{2}{15}$.

א. חשבו את השטח הנמצא מעל ציר ה- x ,

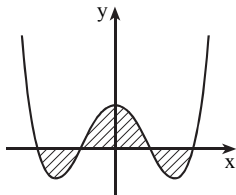
ומוגבל על ידי גרף הפונקציה וציר ה- x .

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$, $x > -2$.

(1) חשבו את $g(0)$.

(2) הסבירו מדוע הנקודה $(-1; -1 \frac{7}{15})$ נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) הסבירו מדוע בתחום $x > 0$ הפונקציה $g(x)$ אינה שלילית.



8. גרף הפונקציה $f(x)$ הוא קו ישר. כל משבצת מייצגת יחידה אחת.

א. מצאו את: $f(0)$, $f(4)$.

ב. נסמן: $h(a) = \int_0^a f(x) dx$, $a \geq 0$.

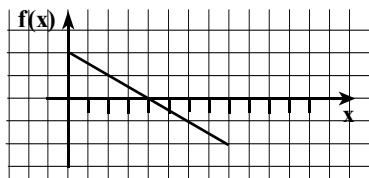
(1) חשבו את $h(4)$. היעזרו בחישוב שטח של משולש.

(2) מצאו את שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $h(a)$.

(3) חשבו את $h(6)$.

הדרכה: היעזרו בתת-סעיף ב(1).

(4) כמה פתרונות יש למשוואה $h(a) = -2$?



9. בשרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 7$.

כל משבצת מייצגת יחידה אחת.

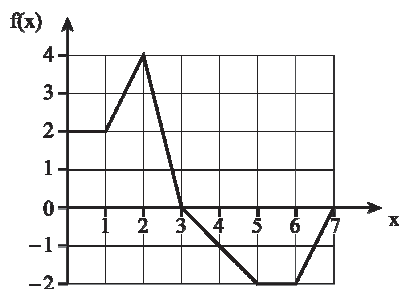
נתונה הפונקציה $h(t) = \int_0^t f(x) dx$ בתחום זה.

א. חשבו את הערכים של $h(0)$, $h(3)$, $h(5)$.

ב. קבעו באיזה תחום הפונקציה $h(t)$ יורדת. נמקו.

ג. האם קיים ערך t בתחום הנתון,

שבעבורו הפונקציה $h(t)$ שלילית?



10. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$ בתחום $-0.5 \leq x \leq 6.5$.

כל משבצת מייצגת יחידה אחת.

א. (1) מהם שיעורי נקודת המינימום של $f(x)$.

(2) מהם שיעורי נקודות האפס של $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \int_{-0.5}^x f(t) dt$, $-0.5 \leq x \leq 6.5$.

ב. (1) מצאו את שיעור ה- x של כל אחת מנקודות הקיצון

של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

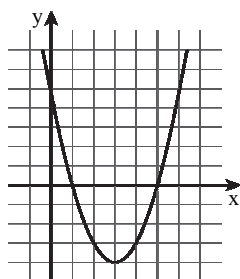
ג. (1) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) של הפונקציה $g(x)$.

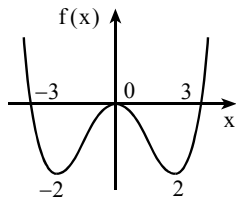
ד. האם מתקיים $g(5) = g(1)$? נמקו.

ה. נתון: $g(6.5) > 0$.

שרטטו סקיצה של $g(x)$ בתחום $-0.5 \leq x \leq 6.5$.

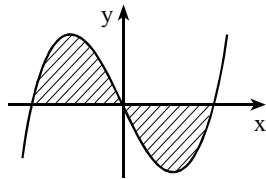


11. לפניכם גרף של פונקציה זוגית $f(x)$, המוגדרת בתחום $-4 \leq x \leq 4$.
 על הגרף מסומנים שיעורי ה- x של נקודות האפס ונקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$.



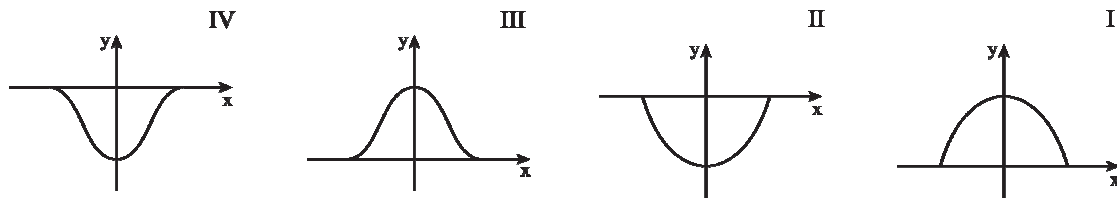
- הפונקציה $g(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$, מוגדרת בתחום $-4 \leq x \leq 4$.
- מצאו את שיעורי ה- x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, בתחום $-4 \leq x \leq 4$, וקבעו את סוגן.
 - (1) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.
 - (2) מצאו תחומי קעירות כלפי מעלה ($\cup$) וכלפי מטה ($\cap$) של $g(x)$.
 - ג. נתון: $g(4) < 0$.
 - שרטטו סקיצה אפשרית של $g(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 4$.

12. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$.
- (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 - (2) הראו שהפונקציה $f(x)$ היא אי זוגית.

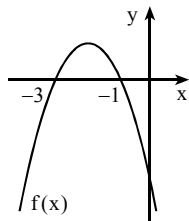


- ב. מצאו את הערך של a שעבורו מתקיים השוויון $\int_0^4 f(x+a) dx = 0$.
- ג. נסמן: $S(t) = \int_{-2}^t f(x) dx$. נתון: $-2 \leq t \leq 2$.

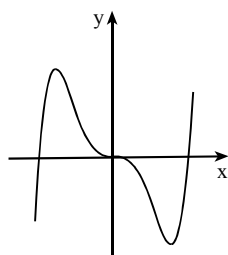
- (1) האם קיימים ערכים של t , שעבורם הפונקציה $S(t)$ שלילית? נמקו.
- (2) לפניכם ארבעה גרפים (I-IV). איזה מן הגרפים מתאר את הפונקציה $S(t)$ בתחום $-2 \leq t \leq 2$?



13. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.
 בציור מסומנות נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .



- נסמן: $g(t) = \int_t^0 f(x) dx$. נתון: $t < 0$.
- מצאו את ערכי ה- t של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(t)$, וקבעו את סוגן.
 - הדרכה: שימו לב שהגבול התחתון של האינטגרל משתנה, והגבול העליון של האינטגרל קבוע.
 - ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(t)$.



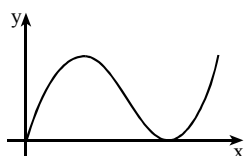
14. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = 3x^5 - 12x^3$.

א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ב. קבעו האם הטענה הבאה נכונה. אין צורך בחישובים. נמקו.

ג. נסמן: $S(a) = \int_a^1 f(x) dx$, $a < 1$.

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $S(a)$ בתחום $a < 1$.

15. בציור מתואר חלק מגרף של פונקציה אי זוגית $f(x)$. נתון: $f(7) = 0$, ראו ציור.



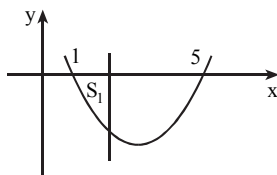
א. חשבו את ערך האינטגרל המסוים $\int_{-4}^4 f(x) dx$.

ב. המספר t מקיים $-8 \leq t \leq 8$.

האם קיים ערך של t בעבורו האינטגרל $\int_{-8}^t f(x) dx$ הוא חיובי?

ג. מצאו לאילו ערכים של t יהיה הערך של האינטגרל $\int_{-8}^t f(x) dx$: (1) מינימלי. (2) מקסימלי.

16. בציור מתוארים הישר $x = 2$ וגרף של פונקציה $f(x)$, בתחום $x > 0$, החותך את ציר ה- x בנקודות $x = 1$ ו- $x = 5$. נתון: $f(2) = -3$, $f''(x) > 0$ לכל x .

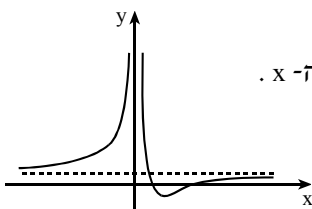


א. האם ייתכן $\int_1^5 f(x) dx > 0$?

ב. הסבירו מדוע $1.5 < S_1 < 3$.

ג. נתונה פונקציה המקיימת $g(t) = \int_{0.5}^t f(x) dx$, $t > 0.5$.

מצאו את שיעורי ה- t של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(t)$. נמקו.



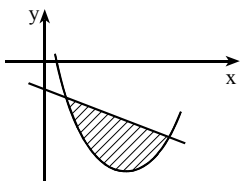
17. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{8}{x} + \frac{12}{x^2}$.

א. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $S(x) = \int_2^x f(t) dt$, $2 < x$.

מהו סוג נקודת הקיצון של $S(x)$, ועבור איזה ערך של x מתקבלת נקודת הקיצון?
 ג. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או אינה נכונה. אין צורך בחישובים.
 היעזרו באסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$. נמקו.

(1) $\int_{-3}^{-1} f(x) dx < \int_{-3}^{-1} f^2(x) dx$. (2) $\int_6^8 \sqrt{f(x)} dx > \int_6^8 f(x) dx$



18. לפניכם גרפים של פונקציה קווית $f(x)$ ופונקציה ריבועית $g(x)$.

הגרפים נחתכים בנקודות $(-3; 2)$ ו- $(8; -6)$.

נסמן: $h(t) = \int_1^t [f(x) - g(x)] dx$. נתון: $1 \leq t \leq 9$.

א. מהו הערך של $h(1)$? נמקו.

ב. האם $h(2)$ חיובי או שלילי? נמקו.

ג. האם $h(8)$ גדול מ- $h(2)$ או קטן ממנו? נמקו.

ד. לאיזה ערך t , יש לפונקציה $h(t)$ מינימום פנימי, ולאיזה ערך של t יש לה מקסימום פנימי? נמקו.

19. בציור מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^3 - 9x$ ו- $g(x) = -x^2 + 3x$.

הגרפים נחתכים בנקודות שבהן $x = 3$, $x = 0$ ו- $x = -4$.

נסמן ב- S את השטח המקווקו כולו.

א. קבעו עבור הטענה הבאה האם היא נכונה או לא נכונה: $\int_{-4}^3 (f(x) - g(x)) dx < S$.

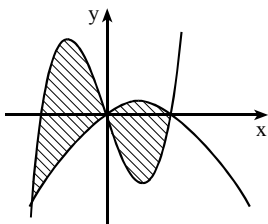
ב. נסמן: $h(t) = \int_{-4}^t [f(x) - g(x)] dx$. נתון: $t \geq -4$.

(1) מהו הערך של $h(-4)$? נמקו.

(2) האם $h(-2)$ חיובי או שלילי? נמקו.

(3) האם $h(2)$ גדול מ- $h(0)$ או קטן ממנו? נמקו.

(4) לאיזה ערך של t , יש לפונקציה $h(t)$ נקודת מינימום, ולאיזה ערך של t יש לה נקודת מקסימום? נמקו.



20. בציור שלפניכם מתוארים הגרפים I ו- II.

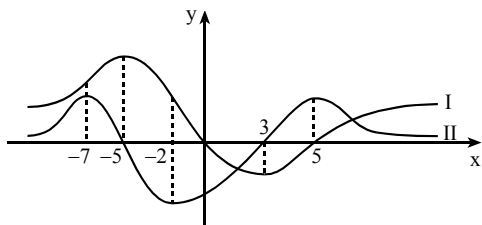
אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$,

והאחר הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. קבעו עבור כל גרף לאיזו פונקציה הוא מתאים. נמקו.

ב. (1) אריאל טוען ש- $\int_0^5 f(x) dx < 0$. האם אריאל צודק?

(2) אריאל טוען ש- $\int_{-7}^{-5} f'(x) dx < 0$. האם אריאל צודק?



ג. מעבירים משיקים לגרף I: משיק אחד בנקודת המקסימום הפנימית שלו ומשיק שני

בנקודת המינימום הפנימית שלו. המרחק בין שני המשיקים הוא k .

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- x .

קבעו איזו טענה מהבאות היא נכונה: (1) $S = k$ (2) $S > k$ (2) $S < k$

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \int_x^5 [f'(t) - f(t)] dt$, המוגדרת בתחום $x < 5$.

כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $g(x)$, ומהו סוג הקיצון? נמקו.

21. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = |f(x)|$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

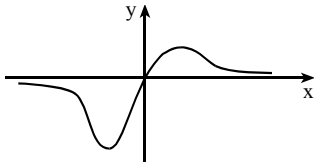
ב. הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$ מקיימות:

$$a \geq -1, \quad h(a) = \int_{-1}^a f(x) dx, \quad t(a) = \int_{-1}^a g(x) dx$$

(1) קבעו האם עבור $-1 < a < 0$ הפונקציה $h(a)$ חיובית או שלילית.

(2) קבעו האם עבור $-1 < a < 0$ הפונקציה $t(a)$ חיובית או שלילית.

ג. מצאו את השיעורים של נקודת הפגישה בין הגרפים של הפונקציות $h(a)$ ו- $t(a)$.



תשובות:

1. א. שלילי. 2. א. $t=1$.

3. ב. (1) שלילי. (2) שלילי. (3) לא ניתן לדעת. ג. כן, $t=4$.

4. א. S_1 גדול יותר. ב. (1) $k=2$. (2) $2 < k < 5$. ג. $(5; 4\frac{1}{6})$.

5. ב. (1) $t=4$. (2) $t=8$, $t=0$. התוצאה המקסימלית היא אפס.

6. ג. $2 < x < 4$. 7. א. $5\frac{1}{15}$. ב. $1\frac{1}{15}$.

8. א. $f(0)=2$, $f(4)=0$. ב. (1) $h(4)=4$. (2) $(4; 4)$. (3) $h(6)=3$. (4) פתרון אחד.

9. א. $h(0)=0$, $h(3)=7$, $h(5)=5$. ב. $3 < x < 7$. ג. לא.

ה.

10. א. (1) $(3; -4)$. (2) $(1; 0)$, $(5; 0)$.

ב. (1) $x=1$ מקסימום, $x=5$ מינימום,

$x=-0.5$ מינימום (קצה),

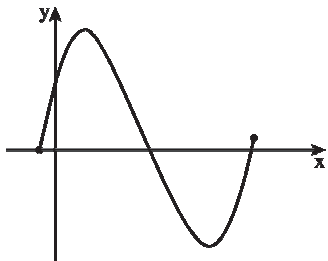
$x=6.5$ מקסימום (קצה).

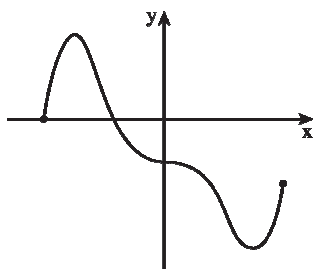
(2) עלייה: $-0.5 < x < 1$ או $5 < x < 6.5$,

ירידה: $1 < x < 5$.

ג. (1) $x=3$. (2) $3 < x < 6.5$.

ד. לא, $g(5) < g(1)$.





ד.

11. א. $x = -3$ מקסימום, $x = 3$ מינימום.

$x = -4$ מינימום (קצה),

$x = 4$ מקסימום (קצה).

ב. (1) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$.

(2) $2 < x < 4$ או $-2 < x < 0$: $\cup$

$0 < x < 2$ או $-4 < x < -2$: $\cap$

12. א. (1) $(-2;0)$, $(0;0)$, $(2;0)$. ב. $a = -2$. ג. (1) לא. (2) גרף III.

13. א. $t = -3$ מקסימום, $t = -1$ מינימום. ב. עלייה: $t < -3$ או $-1 < t < 0$, ירידה: $-3 < t < -1$.

14. א. $(-2;0)$, $(0;0)$, $(2;0)$. ב. הטענה נכונה. ג. עלייה: $0 < a < 1$ או $a < -2$, ירידה: $-2 < a < 0$.

15. א. 0. ב. לא. ב. (1) $t = 0$. (2) $t = 8$, $t = -8$.

16. א. לא. ג. $t = 1$ מקסימום, $t = 5$ מינימום.

17. א. (1) $(-2;0)$, $(6;0)$. (2) $y = 1$. ב. $x = 6$ מינימום.

ג. (1) הטענה נכונה. (2) הטענה נכונה.

18. א. $h(1) = 0$. ב. $h(2)$ שלילי. ג. גדול ממנו. ד. $t = 2$ מינימום, $t = 8$ מקסימום.

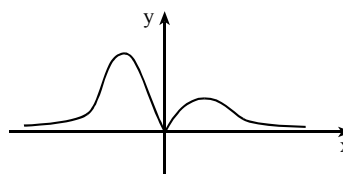
19. א. נכונה.

ב. (1) $h(-4) = 0$. (2) $h(-2)$ חיובי. (3) קטן ממנו. (4) $t = 0$ מקסימום, $t = 3$ מינימום.

20. א. $f(x) - I$. ב. $f'(x) - II$. ב. (1). כן. (2). לא. ג. $S = k$.

ד. נקודת קיצון אחת, מסוג מינימום (על פי הציור, בתחום $0 < x < 3$).

21. א. ב. (1) שלילית. (2) חיובית. ג. $(-1;0)$.



אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות

1. עידו מצא את הפונקציה הקדומה $F(x) = \int -4 \sin x \cdot \cos x \, dx$ בשתי דרכים :

דרך א - עידו השתמש בזהות $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$.

$$F(x) = \int -4 \sin x \cdot \cos x \, dx = \int -2 \sin 2x \, dx = -2 \cdot \frac{-\cos 2x}{2} + c = \cos 2x + c$$

דרך ב - עידו זיהה את הפונקציה $\sin x$ ואת הנגזרת שלה $\cos x$,

$$\int f(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$$

$$F(x) = \int -4 \sin x \cdot \cos x \, dx = -4 \cdot \frac{\sin^2 x}{2} + c = -2 \sin^2 x + c$$

עידו בדק וראה כי $\cos 2x$ שונה מ- $-2 \sin^2 x$.

כיצד אפשר להסביר את התוצאות השונות?

2. יואב מצא את הפונקציה הקדומה $F(x) = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \, dx$ בשתי דרכים.

דרך א - יואב זיהה את הפונקציה $\tan x$ ואת הנגזרת שלה $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int f(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$$

$$F(x) = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \, dx = \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \tan x \cdot (\tan x)' \, dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

דרך ב - יואב השתמש בזהות $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ואחר כך נעזר באינטגרל

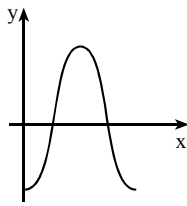
$$\int f(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$$

$$F(x) = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx = \int (\cos x)^{-3} \cdot \sin x \, dx$$

$$F(x) = -\int (\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) \, dx = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$$

יואב בדק וראה כי $\frac{\tan^2 x}{2}$ שונה מ- $\frac{1}{2 \cos^2 x}$.

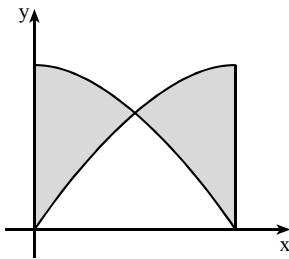
כיצד אפשר להסביר את התוצאות השונות?



3. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = k \cos x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$, k הוא פרמטר.
 א. קבעו מהו תחום הערכים האפשריים עבור הפרמטר k . נמקו.
 ב. מהו תחום ערכי ה- y של הפונקציה $f(x)$? הביעו תשובתכם באמצעות k .

ג. קבעו ללא חישובים את הערך של האינטגרל המסוים $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

4. בציור מוצגים בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ הגרפים של הפונקציה העולה $f(x)$ ושל הפונקציה היורדת $g(x)$. נקודת החיתוך היחידה של שני הגרפים בתחום הנתון היא $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.



השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$ (השטח האפור בציור) הוא $2\sqrt{2} - 2$.

נתון גם: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - g(x)] dx = 0$

מצאו את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל ידי ציר ה- y (השטח השמאלי המסומן בציור).

5. א. חשבו את האינטגרל המסוים $\int_0^{\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$.

ב. היעזרו בסעיף א' והסבירו מדוע $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$.

ג. חשבו את האינטגרל המסוים $\int_0^{\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$.

ד. היעזרו בסעיפים קודמים וחשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים:

(1) $\int_0^{\pi} (\cos^2 x) dx$ (2) $\int_0^{\pi} (\sin^2 x) dx$

6. מצאו את האינטגרלים הבאים. יש להיעזר, בין היתר, בזהויות טריגונומטריות.

א. $\int \cos^2 x dx$ ב. $\int \sin^3 x dx$ ג. $\int (\tan^2 x + 1) dx$

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^3 x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בתחום הנתון על ידי גרף הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

8. נתונה הפונקציה $f(x) = x - \tan x$.

א. הוכיחו כי $f'(x) = -\tan^2 x$.

ב. מצאו את האינטגרל $\int (\sin^2 x + \cos^2 x + \tan^2 x) dx$.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}}$ בתחום $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$.

a הוא פרמטר גדול מ-0. הפונקציה מוגדרת לכל x בתחום הנתון.

א. בתחום הנתון מצאו עבור אילו ערכי x : (1) $f(x) > 0$. נמקו. (2) $f(x) < 0$. נמקו.

ב. מצאו את ערך האינטגרל $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x) dx$.

ג. נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x = -\frac{\pi}{6}$

ו- $x = \frac{7\pi}{6}$, שווה ל-8. מצאו את הערך של a.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. בתחום הנתון מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. בתחום הנתון מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. בתחום הנתון סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. (1) נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)$. הראו כי $g'(x) = f(x)$.

(2) בתחום הנתון מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x.

11. נתונות שתי פונקציות : $f(x) = 2 \sin^2 x$, $g(x) = \sin(2x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. (1) בתחום הנתון מצאו את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) בתחום הנתון מצאו את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה-x.

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$. הראו כי $h'(x) = f(x)$.

(2) בתחום $0 \leq x \leq \pi$ מצאו את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \cos \frac{x}{2}$ בתחום $2\pi \leq x \leq 5\pi$.

א. (1) מצאו תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.

(2) הראו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום הנתון.

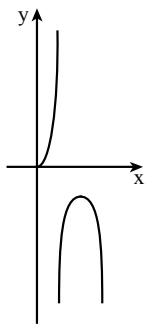
(3) רק על פי התשובות לתת-סעיפים (1) ו-(2), סרטטו סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

(4) כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x) = 40$ בתחום הנתון? נמקו.

ב. (1) רשמו את הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון.

(2) האם השטח, המוגבל בתחום הנתון על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

והגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, שווה לערך האינטגרל המסוים $\int_{2\pi}^{5\pi} (f'(x) - f''(x)) dx$?



13. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ (ראו ציור).

ענו על הסעיפים א, ב ו-ג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן על פי הציור.

ב. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$.

מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x והישר $x = \frac{\pi}{6}$.

14. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x}$.

א. בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(4) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבעו את סוגן.

ב. בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

(1) הראו שפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x וציר ה- y .

15. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos(4x)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, a ו- b הם פרמטרים.

לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$. נתון כי $b < 0$.

א. הביעו באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

ד. (1) מצאו את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x) dx$.

(2) בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חותך את ציר ה- x

בנקודה אחת שבה $x = k$.

בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq k$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, שווה ל- S .

הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה- x

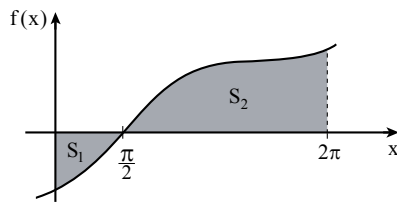
ועל ידי הישר $x = \frac{2\pi}{3}$ בתחום $k \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$. נמקו.

הערה: אין צורך למצוא את $f''(x)$.

16. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.
 (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
 ג. נתון: $0 < a < \frac{\pi}{2}$.
 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x = a$ וציר ה- x שווה ל-1. מצאו את a .

17. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x . גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי. נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $(\frac{\pi}{2}; 0)$ (ראו ציור).



נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$ (השטח האפור בציור) שווה ל- $10\pi^2 + 16$.

נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$.

- א. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים (שטח S_1 המסומן בציור).
 הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.
 ב. מצאו את $F(\frac{\pi}{2})$.
 ג. נתון: $f'(x) = 8\sin x + 8$. מצאו את $f(x)$.

18. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sin x + \cos 2x - 1$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

- א. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז שמאלה ב- $\frac{\pi}{2}$ כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ב. (1) בטאו את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.
 (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (3) הוכיחו כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

לפניכם שלושה ביטויים, I - III: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + \pi) dx$: I $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x + \frac{\pi}{2}) dx$: II $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x - \frac{\pi}{2}) dx$: III

- ג. ציינו איזה מן הביטויים I - III שווה ל- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$. נמקו את תשובתכם. אין צורך בחישוב.

תשובות:

1. קבוע האינטגרציה c שונה בשתי ההצגות, $c_2 = c_1 + 1$.

2. קבוע האינטגרציה c שונה בשתי ההצגות, $c_2 = c_1 + \frac{1}{2}$.

3. א. $k < 0$. ב. $k \leq f(x) \leq -k$. ג. 0 .

4. $\sqrt{2} - 1$. 5. א. 0 . ג. π . ד. $\frac{1}{2}\pi$ (1) $\frac{1}{2}\pi$ (2).

6. א. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$. ב. $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$. ג. $\tan x + c$.

7. א. $(0;0)$, $(\frac{\pi}{2};0)$, $(\pi;0)$, $(\frac{3\pi}{2};0)$, $(2\pi;0)$.

ב. חיוביות: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, שליליות: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, $x \neq \pi$. ג. 4.

8. ב. $\tan x + c$.

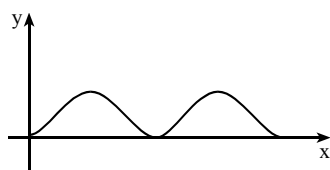
9. א. (1) $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{6}$. (2) $-\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2}$. ב. 0 . ג. $a = \frac{1}{2}$.

10. א. $(\pi;0)$, $(\frac{\pi}{2};0)$, $(0;0)$.

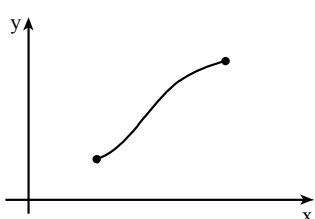
ב. מינימום, $(\frac{\pi}{4};1)$ מקסימום, $(0;0)$.

$(\frac{\pi}{2};0)$ מינימום, $(\frac{3\pi}{4};1)$ מקסימום, $(\pi;0)$ מינימום.

ד. (2) $\frac{\pi}{2}$.



11. א. (1) $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \pi$. (2) $(\pi;0)$, $(0;0)$: $f(x)$; $(\pi;0)$, $(\frac{\pi}{2};0)$, $(0;0)$: $g(x)$. ב. (2) $2 + \frac{\pi}{2}$.



12. א. (1) תחום עלייה: $2\pi < x < 5\pi$;

תחום ירידה: אין.

(4) אין פתרונות בתחום הנתון.

ב. (1) 2.25. (2) כן.

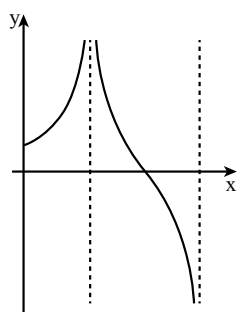
13. א. (1) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ או $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

(2) $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

(3) $(0;0)$ מינימום,

$(\frac{\pi}{2};-1)$ מקסימום.

ג. 1.

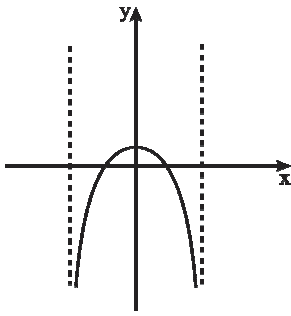


14. א. $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ (1) . ב. $x = \frac{\pi}{2}$ (2) .

(3) $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

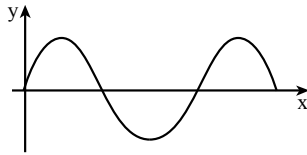
(4) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ מקסימום.

ג. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.2854$.

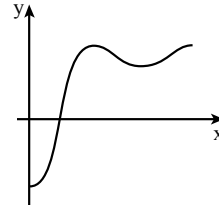


15. א. $(0; b)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{3}; -3\frac{1}{2}b\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{2}; -3b\right)$ מינימום, $\left(\frac{2}{3}\pi; -3\frac{1}{2}b\right)$ מקסימום.

ג.



ב.



ד. (1) 0 . (2) S .

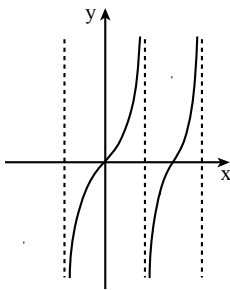
16. א. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (1) .

(2) $(\pi k; 0)$.

(3) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

(4) $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

ג. $a = \frac{\pi}{4}$.

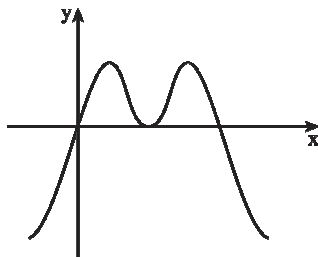


17. א. $S_1 = \pi^2 + 8$. ב. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 - 8$. ג. $f(x) = -8\cos x + 8x - 4\pi$.

18. א. (1) $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $(\pi; 0)$.

(2) $\left(\frac{3\pi}{2}; -4\right)$ מינימום, $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ מקסימום,

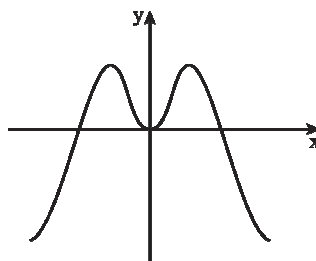
$\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ מקסימום, $\left(-\frac{\pi}{2}; -4\right)$ מינימום.



ב. (1) $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. (2)

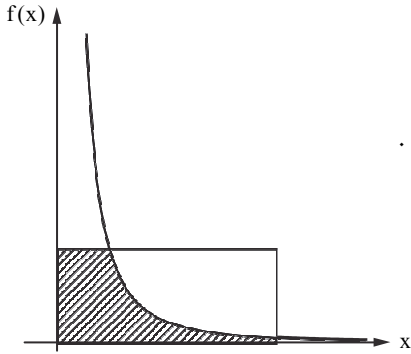
(3) הוכחה.

ג. גרף II.



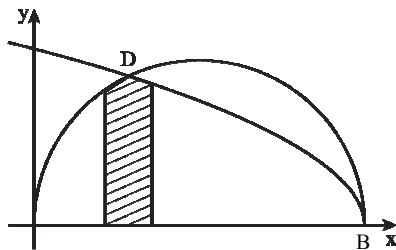
בעיות קיצון עם אינטגרלים

1. בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$ בתחום $x > 0$, ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון. נתון: שטח המלבן הוא 4. נסמן ב- a את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- x . נתון: $a \geq \frac{1}{4}$. א. הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הצירים, על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$ (השטח המקווקו בציור). ב. עבור איזה ערך של a , השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?



2. ישר משיק לפרבולה $y = x^2$ בנקודה שבה $0 < x < 1$. המשיק יוצר משולש עם ציר ה- x ועם הישר $x = 1$. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש הנוצר באופן שתואר.

3. בציור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x}$ ו- $g(x) = \sqrt{14 - 2x}$. גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה B , ואת גרף הפונקציה $g(x)$ הוא חותך בנקודות B ו- D , כמתואר בציור. א. (1) מצאו את תחומי ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. (2) מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות B ו- D .



- א. הוא פרמטר המקיים $1 \leq a \leq 2$. השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי האנכים $x = a$ ו- $x = a + 1$ ועל ידי ציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x . ב. (1) חשבו את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי. (2) מצאו את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המינימלי. אם צריך, השאירו בתשובותיכם שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובות:

1. א. $S = \frac{4\sqrt{a}-1}{a}$. ב. $a = \frac{1}{4}$. 2. $\frac{8}{27}$. 3. א. (1) $f(x) : 0 \leq x \leq 7$, $g(x) : x \leq 7$. (2) $x_B = 7$, $x_D = 2$. ב. (1) $a = 1.63$. (2) $a = 1$.

אינדוקציה מתמטית

אינדוקציה מתמטית היא שיטת הוכחה במתמטיקה שבעזרתה ניתן להוכיח נכונות של טענות, שבהן ערכי המשתנה הם מספרים טבעיים. אנו מכירים מהעבר שיטות של הוכחה ישירה והוכחה על דרך השלילה. נוסיף לארגז הכלים עוד שיטת הוכחה.

כאשר נרצה להוכיח נכונות של טענה עבור כל n טבעי, ונתקשה להוכיח אותה ישירות, נוכל להיעזר בשיטת האינדוקציה המתמטית.

כדי להסביר את משמעות המושג אינדוקציה מתמטית נתבונן בטענה הבאה:

הביטוי $n^3 + 8n$ מתחלק ב-3 ללא שארית עבור כל n טבעי.

משמעות הטענה היא שעבור כל n טבעי שנציב בביטוי $n^3 + 8n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) נקבל מספר שמתחלק ב-3 ללא שארית.

כדי לבדוק האם הטענה נכונה עבור $n=1$, נציב $n=1$ בביטוי $n^3 + 8n$. נקבל: $1^3 + 8 \cdot 1$, כלומר 9. קיבלנו מספר שמתחלק ב-3 ללא שארית, לכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

כדי לבדוק האם הטענה נכונה עבור $n=2$, נציב $n=2$ בביטוי $n^3 + 8n$. נקבל: $2^3 + 8 \cdot 2$, כלומר 24. שוב קיבלנו מספר שמתחלק ב-3 ללא שארית ולכן גם עבור $n=2$ הטענה נכונה.

נעבור לבדוק האם הטענה נכונה עבור $n=3$. נציב ונקבל: $3^3 + 8 \cdot 3$, כלומר 51. שוב קיבלנו מספר שמתחלק ב-3 ללא שארית, לכן גם עבור $n=3$ הטענה נכונה. ניתן כמובן להמשיך ולבצע הצבות נוספות ($n = 4, 5, 6, 7, \dots$).

ואולם, לא משנה כמה ערכים נציב במקום n ,

זה עדיין לא מוכיח שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

במקרים כאלה, בהם נרצה להוכיח נכונות של טענה עבור כל n טבעי, נוכל להיעזר בשיטת האינדוקציה המתמטית.

על פי שיטת הוכחה זו, **אם טענה מתייחסת למספרים טבעיים, אז כדי להוכיח**

שהטענה נכונה עבור כל n טבעי, היא צריכה לקיים את שתי התכונות הבאות:

(1) הטענה צריכה להיות נכונה עבור $n=1$. זה "בסיס האינדוקציה".

(2) בהנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k הוא מספר טבעי כלשהו) נובע שהטענה נכונה

עבור $n=k+1$ (המספר העוקב לו). זה נקרא "צעד האינדוקציה".

על פי עקרון האינדוקציה, אם הטענה מקיימת את שתי התכונות הנ"ל,

נובע שהיא נכונה עבור כל n טבעי.

הסבר:

על פי תכונה (1) הטענה נכונה עבור $n=1$.

על פי תכונה (2), אם הטענה נכונה עבור $n=k$, נובע שהיא נכונה עבור $n=k+1$.

מאחר והטענה נכונה עבור $n=1$, נובע שהיא נכונה עבור $n=1+1$, כלומר עבור $n=2$.

כעת אנו יודעים שהטענה נכונה עבור $n=2$, ולכן בשילוב תכונה (2)

נובע שהטענה נכונה עבור $n=2+1$, כלומר עבור $n=3$.

באותה דרך, כעת אנו יודעים שהטענה נכונה עבור $n=3$,

לכן בשילוב תכונה (2) נובע שהטענה נכונה עבור $n=3+1$, כלומר עבור $n=4$.

אם נמשיך בדרך זו נקבל שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי נפעל לפי השלבים הבאים :

שלב א' – בדיקה :

נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$, כלומר נציב 1 במקום n ונראה שהטענה נכונה.

שלב זה נקרא "בסיס האינדוקציה".

הבדיקה מהווה חלק מהותי מההוכחה השלמה באינדוקציה.

שלב ב' –

על סמך ההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$, נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

שלב זה נקרא "צעד האינדוקציה" והוא כולל שני חלקים.

החלק הראשון נקרא הנחת האינדוקציה :

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי $n=k$.

בשלב זה נרשום את הטענה כאשר במקום n נציב k .

החלק השני נקרא הוכחה : נרשום את מה שצריך להוכיח עבור $n=k+1$.

בשלב זה נרשום את הטענה כאשר במקום n נציב $k+1$.

את ההוכחה שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

נבצע על סמך ההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$.

לאחר השלבים הנ"ל נרשום את המשפט המסכם הבא :

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=1$.

הראנו שמההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי, נובע שהיא נכונה עבור $n=k+1$,

ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הערה : במקום להניח עבור k טבעי כלשהו ולהוכיח עבור $k+1$,

ניתן להניח עבור n טבעי ולהוכיח עבור $n+1$.

אינדוקציות – הוכחת תכונות התחלקות

המקרה הראשון בו נראה שימוש באינדוקציה מתמטית הוא מקרה בו נרצה להוכיח בשיטת האינדוקציה שביטוי מסוים מתחלק במספר טבעי ללא שארית. לדוגמה:

להוכיח באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $n^3 - 7n$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

השלבים להוכחה באינדוקציה של התחלקות כזו הם:

שלב א' – בדיקה: נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב ב' – על סמך ההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$, נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$. שלב זה נקרא "צעד האינדוקציה".

שימו לב!

בחלק מהשאלות אפשר להיעזר בתכונות הבאות של מספרים טבעיים:

- (1) מספר זוגי מתחלק ב-2 ללא שארית.
- (2) סכום או הפרש של שני מספרים שלמים הוא מספר שלם.
- סכום או הפרש של שני מספרים זוגיים הוא מספר זוגי.
- סכום או הפרש של שני מספרים אי-זוגיים הוא מספר זוגי.
- סכום או הפרש של שני מספרים שאחד מהם זוגי והשני אי-זוגי הוא מספר אי-זוגי.
- (3) מכפלה של מספרים שלמים שאחד הגורמים שלה הוא מספר שלם a ($a > 1$) תמיד מתחלקת ב- a ללא שארית. למשל המכפלה $3 \cdot 4 \cdot 7$ מתחלקת ב-3 ללא שארית.
- (4) מכפלה של מספרים שלמים שאחד הגורמים שלה מתחלק ב- a ללא שארית מתחלקת אף היא ב- a ללא שארית.
- (5) מכפלה של מספרים שלמים שאחד הגורמים שלה מתחלק ב- a ללא שארית וגורם אחר שלה מתחלק ב- b ללא שארית מתחלקת תמיד ב- $a \cdot b$ ללא שארית.
- לדוגמה: אם מספר ראשון מתחלק ב-4 ללא שארית ומספר שני מתחלק ב-7 ללא שארית, אז מכפלתם מתחלקת ב- $4 \cdot 7$ ללא שארית, כלומר מתחלקת ב-28 ללא שארית.
- (6) אם a מספר שלם, אז עבור כל n טבעי הביטוי a^n מתחלק ב- a ללא שארית. לדוגמה: הביטוי 3^n מתחלק ב-3 ללא שארית עבור כל n טבעי.
- (7) אם ביטוי מתחלק ב- p ללא שארית (p שלם), אז הוא מתחלק ללא שארית גם במספרים שהם מחלקים שלמים של p .
- למשל, הביטוי 12^n מתחלק ב-12 ללא שארית עבור כל n טבעי ולכן הוא מתחלק ללא שארית גם במספרים 2, 3, 4 ו-6 שהם מחלקים שלמים של המספר 12.
- (8) אם כל אחד משני מספרים מתחלק ב- p ללא שארית, אז גם הסכום של שני המספרים מתחלק ב- p ללא שארית וגם ההפרש בין שני המספרים מתחלק ב- p ללא שארית.
- (9) מכפלה של שני מספרים טבעיים עוקבים מתחלקת תמיד ב-2 ללא שארית. הסיבה לכך היא שאחד מהם הוא זוגי והשני הוא אי-זוגי, לכן מכפלתם זוגית ומכאן שהיא מתחלקת ב-2 ללא שארית.
- כך למשל, אם n טבעי, אז הביטוי $n(n+1)$ הוא מכפלה של שני מספרים טבעיים עוקבים ולכן הוא מתחלק ב-2 ללא שארית.

(10) מכפלה של שלושה מספרים טבעיים עוקבים מתחלקת תמיד ב-6 ללא שארית.
 כך למשל, עבור כל n טבעי הביטוי $n(n+1)(n+2)$ הוא מכפלה של שלושה מספרים טבעיים עוקבים ולכן הוא מתחלק ב-6 ללא שארית.
 הסיבה לכך היא שלפחות אחד המספרים מתחלק ב-2 ללא שארית, ואחד המספרים מתחלק ב-3 ללא שארית,
 לכן המכפלה מתחלקת ב- $2 \cdot 3$ ללא שארית, כלומר מתחלקת ב-6 ללא שארית.
 (11) מכפלה של שני מספרים זוגיים כלשהם מתחלקת ב-4 ללא שארית.
 הסיבה לכך היא שכל אחד מהמספרים מתחלק ב-2 ללא שארית, לכן מכפלתם מתחלקת ב- $2 \cdot 2$ ללא שארית, כלומר מתחלקת ב-4 ללא שארית.
 (הערה: נובע כמובן שגם ריבוע של מספר זוגי מתחלק ב-4 ללא שארית).
 כמו כן, מכפלה של שני מספרים זוגיים **עוקבים** מתחלקת תמיד ב-8 ללא שארית.
 הסיבה לכך היא שאחד מהם מתחלק ב-2 ללא שארית, האחר מתחלק ב-4 ללא שארית, לכן מכפלתם מתחלקת תמיד ב- $2 \cdot 4$ ללא שארית, כלומר מתחלקת ב-8 ללא שארית.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה (או בדרך אחרת), שעבור כל n טבעי הביטוי $n^2 + 5n$ מתחלק ב-2 ללא שארית.

פתרון:

כדי להוכיח שעבור כל n טבעי הביטוי $n^2 + 5n$ מתחלק ב-2 ללא שארית, נוכיח שהביטוי $\frac{n^2 + 5n}{2}$ הוא מספר שלם.

הערה: המונה הוא כמובן מספר שלם.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

נציב $n=1$ בביטוי $\frac{n^2 + 5n}{2}$. נקבל: $\frac{1^2 + 5 \cdot 1}{2}$, כלומר $\frac{6}{2}$, ומכאן 3.

קיבלנו מספר שלם ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{k^2 + 5k}{2}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{(k+1)^2 + 5(k+1)}{2}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח את הביטוי שקיבלנו עבור $n=k+1$: $\frac{k^2 + 2k + 1 + 5k + 5}{2}$.

לפי ההנחה הביטוי $\frac{k^2 + 5k}{2}$ הוא מספר שלם.

כדי להיעזר בהנחה, **לא נכנס איברים זוגיים** בביטוי שקיבלנו בהוכחה,

אלא נפצל אותו לשני חלקים, שאחד מהם שווה לביטוי שבהנחת האינדוקציה.

נקבל: $\frac{k^2 + 2k + 1 + 5k + 5}{2} = \frac{k^2 + 5k}{2} + \frac{2k + 6}{2}$

קיבלנו ביטוי הכולל שני מחוברים. המחובר השמאלי הוא מספר שלם **לפי הנחת**

האינדוקציה. נותר להוכיח שהמחובר הימני הוא מספר שלם.

המחובר הימני שווה ל- $\frac{2k+6}{2} = \frac{2(k+3)}{2} = k+3$, כלומר גם הוא מספר שלם, לכן סכום שני הביטויים הוא מספר שלם.

משפט מסכם: בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=1$.
הראנו שמהנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ נובע שהיא נכונה עבור $n=k+1$,
ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי,
כלומר הביטוי n^2+5n מתחלק ב-2 ללא שארית עבור כל n טבעי.

נוכיח את הטענה בדרך אחרת, ללא אינדוקציה:

נוכיח שהביטוי $\frac{n^2+5n}{2}$ הוא מספר שלם. נוציא גורם משותף: $\frac{n(n+5)}{2}$.

ההפרש בין n ל- $(n+5)$ הוא 5, ולכן אחד הגורמים במונה הוא מספר זוגי, והגורם השני הוא מספר אי-זוגי.

נובע שמכפלתם $n(n+5)$ היא מספר זוגי, ולכן מתחלקת ב-2 ללא שארית.
 הערה: במקרים רבים אפשר להוכיח טענה או לפחות חלק ממנה גם ללא אינדוקציה.

שימו לב!

הבדיקה מהווה חלק מהותי מההוכחה השלמה באינדוקציה, זאת בשונה מפעולת חקר, שם הבדיקה נועדת כדי להבין טוב יותר את הטענה, לתמוך בהשערה, לתת מוטיבציה להוכחה או להפריך אותה.

שני שלבי האינדוקציה (שלב הבסיס ושלב הצעד) אינם תלויים זה בזה.

קיומו של אחד אינו מעיד על קיומו של השני.

אם הוכחנו את אחד השלבים ולא הוכחנו את השלב האחר, לא השלמנו את ההוכחה באינדוקציה, כלומר לא הוכחנו שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי n^3+11n מתחלק ב-6 ללא שארית.

פתרון:

כדי להוכיח שהביטוי n^3+11n מתחלק ב-6 ללא שארית,

נוכיח שהביטוי $\frac{n^3+11n}{6}$ הוא מספר שלם.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

נציב $n=1$ בביטוי $\frac{n^3+11n}{6}$. נקבל: $\frac{1^3+11 \cdot 1}{6}$, כלומר $\frac{12}{6}$ ומכאן 2.

קיבלנו מספר שלם ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{k^3+11k}{6}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{(k+1)^3+11(k+1)}{6}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח את הביטוי שקיבלנו עבור $n=k+1$.

את הביטוי $(k+1)^3$ נפתח לפי הנוסחה: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\text{נקבל: } \frac{(k+1)^3 + 11(k+1)}{6} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11}{6}$$

לפי ההנחה הביטוי $\frac{k^3 + 11k}{6}$ הוא מספר שלם.

כדי להיעזר בהנחה, **לא נכנס איברים דומים** בביטוי שקיבלנו בהוכחה, אלא נפצל אותו לשני חלקים, שאחד מהם שווה לביטוי שבהנחת האינדוקציה.

$$\text{נקבל: } \frac{k^3 + 11k}{6} + \frac{3k^2 + 3k + 12}{6}$$

קיבלנו ביטוי הכולל שני מחוברים. המחובר השמאלי הוא מספר שלם **לפי הנחת האינדוקציה**. נותר להוכיח שהמחובר הימני הוא מספר שלם.

$$\text{נפתח את המחובר הימני ונקבל: } \frac{3k^2 + 3k + 12}{6} = \frac{3(k^2 + k + 4)}{6} = \frac{k^2 + k + 4}{2}$$

קיימות שתי דרכים עיקריות לפיהן ניתן להוכיח שהביטוי $\frac{k^2 + k + 4}{2}$ הוא מספר שלם.

דרך א' – נוכיח באינדוקציה נוספת שהביטוי $\frac{n^2 + n + 4}{2}$ הוא מספר שלם.

שלב א' – בדיקה: נציב $n=1$ בביטוי $\frac{n^2 + n + 4}{2}$. נקבל: $\frac{1^2 + 1 + 4}{2}$, כלומר 3.

קיבלנו מספר שלם, לכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{k^2 + k + 4}{2}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{(k+1)^2 + (k+1) + 4}{2}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח את הביטוי שקיבלנו עבור $n=k+1$: $\frac{k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 4}{2}$.

לפי ההנחה הביטוי $\frac{k^2 + k + 4}{2}$ הוא מספר שלם.

כדי להיעזר בהנחה, **לא נכנס איברים דומים** בביטוי שקיבלנו בהוכחה, אלא נפצל אותו לשני חלקים, שאחד מהם שווה לביטוי שבהנחת

$$\text{האינדוקציה. נקבל: } \frac{k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 4}{2} = \frac{k^2 + k + 4}{2} + \frac{2k + 2}{2}$$

קיבלנו ביטוי הכולל שני מחוברים. המחובר השמאלי הוא מספר שלם **לפי הנחת האינדוקציה**. נותר להוכיח שהמחובר הימני הוא מספר שלם.

$$\text{המחובר הימני שווה ל- } \frac{2k + 2}{2} = \frac{2(k+1)}{2} = k+1$$

כלומר גם הוא מספר שלם, לכן סכום שני הביטויים הוא מספר שלם.

$$\text{דרך ב' – הוכחה ללא אינדוקציה: } \frac{k^2 + k + 4}{2} = \frac{k^2 + k}{2} + \frac{4}{2} = \frac{k^2 + k}{2} + 2$$

קיבלנו סכום של שני ביטויים.

הביטוי הימני הוא מספר שלם. הביטוי השמאלי שווה ל- $\frac{k(k+1)}{2}$.

המונה של הביטוי השמאלי הוא מכפלה של שני מספרים טבעיים עוקבים, לכן הוא בודדאות מתחלק ב-2 ללא שארית, כלומר הביטוי השמאלי גם הוא מספר שלם, ולכן הסכום של שני הביטויים הוא מספר שלם.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=1$. הראנו שמהנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ נובע שהיא נכונה עבור $n=k+1$ ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי, כלומר הביטוי n^3+11n מתחלק ב-6 ללא שארית עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתחלק ללא שארית:

1. $n^2 + n$ ב-2
2. $n^2 + 9n$ ב-2
3. $n^2 - 7n - 40$ ב-2
4. $n^3 + 8n$ ב-3
5. $n^3 - 4n - 12$ ב-3
6. $2n^3 + 3n^2 + n$ ב-6
7. $n^3 - n$ ב-6
8. $n^3 + 5n$ ב-6
9. $n^3 + 6n^2 + 5n - 42$ ב-6
10. $n(n^2 + 11)$ ב-6
11. $n(n^2 + 12n + 17)$ ב-6
12. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ב-9

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $8^n + 13$ מתחלק ב-7 ללא שארית.

פתרון:

נוכיח שהביטוי $\frac{8^n + 13}{7}$ הוא מספר שלם עבור כל n טבעי.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

נציב $n=1$ בביטוי $\frac{8^n + 13}{7}$. נקבל: $\frac{8^1 + 13}{7}$, כלומר 3.

קיבלנו מספר שלם ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{8^k + 13}{7}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{8^{k+1} + 13}{7}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח את הביטוי שקיבלנו עבור $n=k+1$: $\frac{8^{k+1} + 13}{7}$.

בהנחת האינדוקציה מופיע הביטוי 8^k .

כדי להיעזר בהנחת האינדוקציה נפרק את הביטוי $8^{k+1} \cdot 8^k$ ל- $8^k \cdot 8^1$, כלומר $8^k \cdot 8$.

$$\text{נקבל: } \frac{8^{k+1} + 13}{7} = \frac{8^k \cdot 8^1 + 13}{7} = \frac{8 \cdot 8^k + 13}{7}$$

כעת במקום הביטוי $8 \cdot 8^k$ נרשום $8^k + 7 \cdot 8^k$.

$$\text{נקבל: } \frac{8^k + 7 \cdot 8^k + 13}{7} = \frac{8^k + 13}{7} + \frac{7 \cdot 8^k}{7} = \frac{8^k + 13}{7} + 8^k$$

קיבלנו ביטוי הכולל שני מחוברים.

המחובר השמאלי הוא מספר שלם על פי הנחת האינדוקציה.

המחובר הימני (8^k) גם הוא מספר שלם,

ולכן הסכום של שני המחוברים הוא מספר שלם.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n = 1$.

הראנו שמהנחת הטענה נכונה עבור $n = k$ נובע שהיא נכונה עבור $n = k + 1$

ולכן לפי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי,

כלומר הביטוי $8^n + 13$ מתחלק ב- 7 ללא שארית עבור כל n טבעי.

הערה:

בדוגמאות האחרונות, פיצלנו את הביטוי שהתקבל בשלב ההוכחה לשני מחוברים,

ש אחד מהם הוא ביטוי המופיע בהנחת האינדוקציה, שהוא מספר שלם,

והוכחנו שהביטוי שנותר גם הוא מספר שלם.

כעת נכיר מקרים שבהם נפצל את הביטוי שבהוכחה לשני מחוברים שאחד מהם

כולל מספר פעמים את הביטוי המופיע בהנחת האינדוקציה.

נבהיר שאם הביטוי המופיע בהנחת האינדוקציה הוא מספר שלם,

אז כמובן שגם כאשר כופלים אותו במספר שלם מתקבל מספר שלם.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $3^{2n} + 4^{n+1}$ מתחלק ב- 5 ללא שארית.

פתרון:

נוכיח שהביטוי $\frac{3^{2n} + 4^{n+1}}{5}$ הוא מספר שלם עבור כל n טבעי.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$.

נציב $n = 1$ בביטוי $\frac{3^{2n} + 4^{n+1}}{5}$. נקבל: $\frac{3^{2 \cdot 1} + 4^{1+1}}{5}$. לאחר חישוב נקבל 5.

קיבלנו מספר שלם, לכן עבור $n = 1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n = k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{3^{2k} + 4^{k+1}}{5}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{3^{2(k+1)} + 4^{(k+1)+1}}{5}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח את הביטוי שקיבלנו עבור $n = k + 1$: $\frac{3^{2k+2} + 4^{k+1+1}}{5}$.

הערה: במעריך החזקה פתחנו סוגריים, אך לא כינסנו איברים דומים, מאחר שאנחנו מעוניינים להיעזר בהנחת האינדוקציה.

בהנחת האינדוקציה מופיעים הביטויים 3^{2k} ו- 4^{k+1} .

כדי להיעזר בהנחה נפרק את הביטוי 3^{2k+2} ל- $3^{2k} \cdot 3^2$, כלומר $9 \cdot 3^{2k}$.

כמו כן, נפרק את הביטוי 4^{k+1+1} ל- $4^1 \cdot 4^{(k+1)}$, כלומר $4 \cdot 4^{k+1}$.

$$\text{נקבל: } \frac{3^{2k+2} + 4^{k+1+1}}{5} = \frac{3^{2k} \cdot 3^2 + 4^{k+1} \cdot 4^1}{5} = \frac{9 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 4^{k+1}}{5}$$

במקום 3^{2k} נרשום $9 \cdot 3^{2k}$ ו- $4 \cdot 3^{2k}$.

$$\text{נקבל: } \frac{4 \cdot 3^{2k} + 5 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 4^{k+1}}{5} = \frac{4 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 4^{k+1}}{5} + \frac{5 \cdot 3^{2k}}{5} = 4 \cdot \frac{3^{2k} + 4^{k+1}}{5} + 3^{2k}$$

על פי הנחת האינדוקציה הביטוי $\frac{3^{2k} + 4^{k+1}}{5}$ הוא מספר שלם,

לכן המחובר השמאלי השווה ל-4 פעמים $\frac{3^{2k} + 4^{k+1}}{5}$ גם הוא מספר שלם.

המחובר הימני (3^{2k}) הוא מספר שלם, ולכן סכום שני הביטויים הוא מספר שלם.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n = 1$.

הראנו שמהנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$ נובע שהיא נכונה עבור $n = k + 1$

ולכן לפי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי,

כלומר עבור כל n טבעי הביטוי $3^{2n} + 4^{n+1}$ מתחלק ב-5 ללא שארית.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $2 \cdot 7^{n-1} - 2^{2n-1}$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

פתרון:

נוכיח שהביטוי $\frac{2 \cdot 7^{n-1} - 2^{2n-1}}{6}$ הוא מספר שלם עבור כל n טבעי.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$.

נציב $n = 1$ בביטוי $\frac{2 \cdot 7^{n-1} - 2^{2n-1}}{6}$. נקבל: $\frac{2 \cdot 7^0 - 2^1}{6}$, כלומר 0.

קיבלנו מספר שלם, לכן עבור $n = 1$ הטענה נכונה.

הערה: כדי להראות בבדיקה שמתקבל מספר שלם, אין הכרח להראות שהמספר המתקבל הוא חיובי, כלומר המספר המתקבל יכול להיות גם אפס או שלילי.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n = k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{2 \cdot 7^{k-1} - 2^{2k-1}}{6}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{2 \cdot 7^{(k+1)-1} - 2^{2(k+1)-1}}{6}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח את הביטוי שקיבלנו עבור $n = k+1$: $\frac{2 \cdot 7^{k+1-1} - 2^{2k+2-1}}{6}$.

הערה: במעריך החזקה פתחנו סוגריים, אך לא כינסנו איברים דומים, מאחר שאנחנו מעוניינים להיעזר בהנחת האינדוקציה.

בהנחת האינדוקציה מופיעים הביטויים $2 \cdot 7^{k-1}$ ו- 2^{2k-1} .

כדי להיעזר בהנחה נפרק את הביטוי $2 \cdot 7^{k+1-1}$ ל- $2 \cdot 7^{k-1} \cdot 7^1$, כלומר $2 \cdot 7^{k-1} \cdot 7$. את הביטוי 2^{2k+2-1} נפרק ל- $2^{2k-1} \cdot 2^2$, כלומר $2^{2k-1} \cdot 4$.

$$\text{נקבל: } \frac{2 \cdot 7^{(k+1)-1} - 2^{2(k+1)-1}}{6} = \frac{2 \cdot 7^{k-1} \cdot 7 - 2^{2k-1} \cdot 4}{6}$$

במקום: $2 \cdot 7^{k-1} \cdot 7$ נרשום $2 \cdot 7^{k-1} \cdot 3 + 2 \cdot 7^{k-1} \cdot 4$.

$$\text{נקבל: } \frac{2 \cdot 7^{k-1} \cdot 4 + 2 \cdot 7^{k-1} \cdot 3 - 2^{2k-1} \cdot 4}{6} = \frac{2 \cdot 7^{k-1} \cdot 4 - 2^{2k-1} \cdot 4}{6} + \frac{2 \cdot 7^{k-1} \cdot 3}{6}$$

$$= 4 \cdot \frac{2 \cdot 7^{k-1} - 2^{2k-1}}{6} + 7^{k-1}$$

על פי הנחת האינדוקציה הביטוי $\frac{2 \cdot 7^{k-1} - 2^{2k-1}}{6}$ הוא מספר שלם,

לכן המחובר השמאלי השווה ל-4 פעמים $\frac{2 \cdot 7^{k-1} - 2^{2k-1}}{6}$ גם הוא מספר שלם.

המחובר הימני (7^{k-1}) הוא מספר שלם, ולכן סכום שני הביטויים הוא מספר שלם.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n = 1$.

הראנו שמהנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$ נובע שהיא נכונה עבור $n = k+1$

ולכן לפי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתחלק ללא שארית:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 13. $7^n + 5$ ב-6 | 14. $12^n - 45$ ב-11 |
| 15. $3^{2n} + 7$ ב-8 | 16. $5^{5n} - 63$ ב-31 |
| 17. $3^n - 3$ ב-6 | 18. $5^n - 15$ ב-10 |
| 19. $10^n - 4$ ב-6 | 20. $9^n - 2^n$ ב-7 |
| 21. $11^n - 3^n$ ב-8 | 22. $5^{2n} - 7^n$ ב-18 |
| 23. $3^{2n} - 2^{2n}$ ב-5 | 24. $3^{3n} - 2^{4n}$ ב-11 |
| 25. $5^{n+1} + 3$ ב-4 | 26. $2^{3n+1} + 12$ ב-14 |
| 27. $14^{2n+2} - 1$ ב-15 | 28. $2 \cdot 4^n + 1$ ב-3 |
| 29. $7 \cdot 9^n + 17$ ב-8 | 30. $9^n + 9 \cdot 4^n$ ב-5 |
| 31. $8 \cdot 10^n + 13 \cdot 3^n$ ב-7 | 32. $9 \cdot 13^n - 17 \cdot 5^n$ ב-8 |

33. $8^{n+1} - 3^{n+1}$ ב-5 .34 $7 \cdot 3^{2n+1} + 27$ ב-24
35. $2 \cdot 5^n - 2^{n+1}$ ב-6 .36 $3 \cdot 2^{3n} + 14 \cdot 3^{n+1}$ ב-15
37. $2 \cdot 3^{3n} - 2^{4n+1}$ ב-22 .38 $3^{2n+1} + 2^{2n+1}$ ב-5
39. $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ ב-11 .40 $12 \cdot 5^{2n+1} + 8^{n+1}$ ב-68
41. $2^{3n} - 8 \cdot 3^{n-1}$ ב-40 .42 $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ב-133
43. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי שגדול מ-1, הביטוי $5^n + 75$ מתחלק ב-100 ללא שארית.
44. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n שלם שגדול או שווה לאפס, הביטוי $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ מתחלק ב-57 ללא שארית.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $7^{2n} + 9^n + 2$ מתחלק ב-12 ללא שארית.

פתרון:

נוכיח שהביטוי $\frac{7^{2n} + 9^n + 2}{12}$ הוא מספר שלם עבור כל n טבעי.

שלב א' – בדיקה: נציב $n=1$ בביטוי $\frac{7^{2n} + 9^n + 2}{12}$. נקבל: $\frac{7^2 + 9^1 + 2}{12}$, כלומר 5. קיבלנו מספר שלם ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{7^{2k} + 9^k + 2}{12}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{7^{2(k+1)} + 9^{k+1} + 2}{12}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח סוגריים במעריך ונקבל: $\frac{7^{2k+2} + 9^{k+1} + 2}{12}$.

בהנחת האינדוקציה מופיעים הביטויים 7^{2k} ו- 9^k .

כדי להיעזר בהנחה נפרק את הביטוי 7^{2k+2} ל- $49 \cdot 7^{2k}$.

את הביטוי 9^{k+1} נפרק ל- $9^k \cdot 9$, כלומר 9^k .

נקבל: $\frac{7^{2k+2} + 9^{k+1} + 2}{12} = \frac{7^{2k} \cdot 7^2 + 9^k \cdot 9^1 + 2}{12} = \frac{49 \cdot 7^{2k} + 9 \cdot 9^k + 2}{12}$

במקום $49 \cdot 7^{2k}$ נרשום $7^{2k} + 48 \cdot 7^{2k}$, ובמקום $9 \cdot 9^k$ נרשום $9^k + 8 \cdot 9^k$.

נקבל: $\frac{7^{2k} + 48 \cdot 7^{2k} + 9^k + 8 \cdot 9^k + 2}{12} = \frac{7^{2k} + 9^k + 2}{12} + \frac{48 \cdot 7^{2k} + 8 \cdot 9^k}{12}$

המחובר השמאלי הוא מספר שלם על פי הנחת האינדוקציה.

נוכיח שהמחובר הימני הוא מספר שלם.

דרך א' – נפצל את הביטוי לשני מחוברים. נקבל: $\frac{48 \cdot 7^{2k}}{12} + \frac{8 \cdot 9^k}{12}$, כלומר $4 \cdot 7^{2k} + \frac{2 \cdot 9^k}{3}$. המחומר השמאלי $(4 \cdot 7^{2k})$ הוא מספר שלם.

נתבונן במחומר הימני $\frac{2 \cdot 9^k}{3}$. הגורם 9^k שבמונה מתחלק ב-9 ללא שארית,

לכן הוא מתחלק ב-3 ללא שארית ומכאן שהביטוי $\frac{2 \cdot 9^k}{3}$ הוא מספר שלם.

שני המחוברים הם מספרים שלמים, לכן סכומם הוא מספר שלם.

דרך ב' – ניעזר באינדוקציה נוספת ונוכיח שעבור כל n טבעי הביטוי

$$\frac{48 \cdot 7^{2n} + 8 \cdot 9^n}{12}$$

הוא מספר שלם. הפתרון בדרך זו דומה לדוגמאות קודמות.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n = 1$.

הראנו שמהנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$ נובע שהיא נכונה עבור $n = k + 1$

ולכן לפי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $2^{2n-1} + 12n - 5$ מתחלק ב-9 ללא שארית.

פתרון:

נוכיח שהביטוי $\frac{2^{2n-1} + 12n - 5}{9}$ הוא מספר שלם עבור כל n טבעי.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את הטענה עבור $n = 1$.

נקבל: $\frac{2^1 + 12 \cdot 1 - 5}{9}$, כלומר 1. קיבלנו מספר שלם ולכן עבור $n = 1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n = k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{2^{2k-1} + 12k - 5}{9}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{2^{2(k+1)-1} + 12(k+1) - 5}{9}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח סוגריים במעריך ונקבל: $\frac{2^{2k+2-1} + 12k + 12 - 5}{9}$.

כדי להיעזר בהנחה נפרק את הביטוי 2^{2k+2-1} ל- $2^2 \cdot 2^{2k-1}$, כלומר $4 \cdot 2^{2k-1}$.

$$\text{נקבל: } \frac{2^{2(k+1)-1} + 12(k+1) - 5}{9} = \frac{2^{2k+2-1} + 12k + 12 - 5}{9} = \frac{2^{2k-1} \cdot 4 + 12k + 12 - 5}{9}$$

במקום $4 \cdot 2^{2k-1}$ נרשום $3 \cdot 2^{2k-1} + 2^{2k-1}$.

$$\text{נקבל: } \frac{2^{2k-1} + 3 \cdot 2^{2k-1} + 12k + 12 - 5}{9} = \frac{2^{2k-1} + 12k - 5}{9} + \frac{3 \cdot 2^{2k-1} + 12}{9}$$

המחומר השמאלי הוא מספר שלם על פי הנחת האינדוקציה.

נותר להוכיח שהמחומר הימני הוא מספר שלם.

במונה של המחומר הימני נוציא 3 גורם משותף. נקבל: $\frac{3(2^{2k-1} + 4)}{9}$, כלומר $\frac{2^{2k-1} + 4}{3}$.

כדי להוכיח שהביטוי $\frac{2^{2k-1} + 4}{3}$ הוא מספר שלם ניעזר באינדוקציה נוספת.

נוכיח באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $\frac{2^{2n-1}+4}{3}$ הוא מספר שלם.

שלב א' – בדיקה: נציב $n=1$. נקבל: $\frac{2^{2-1}+4}{3}$, כלומר $\frac{2+4}{3}$ ומכאן 2. קיבלנו מספר שלם ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{2^{2k-1}+4}{3}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{2^{2(k+1)-1}+4}{3}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח את הביטוי שהתקבל בהוכחה של האינדוקציה הנוספת.

את הביטוי $2^{2(k+1)-1}$ נפתח ל- 2^{2k+2-1} , כלומר $2^2 \cdot 2^{2k-1}$ ומכאן $4 \cdot 2^{2k-1}$.

נקבל: $\frac{2^{2k+2-1}+4}{3} = \frac{2^{2k-1} \cdot 4 + 4}{3}$.

במקום $4 \cdot 2^{2k-1}$ נרשום $2^{2k-1} + 3 \cdot 2^{2k-1}$.

נקבל: $\frac{2^{2k-1} + 3 \cdot 2^{2k-1} + 4}{3} = \frac{2^{2k-1} + 4}{3} + \frac{3 \cdot 2^{2k-1}}{3} = \frac{2^{2k-1} + 4}{3} + 2^{2k-1}$.

המחובר השמאלי הוא מספר שלם על פי הנחת האינדוקציה הנוספת.

המחובר הימני (2^{2k-1}) גם הוא מספר שלם, לכן סכום שני המחוברים הוא מספר שלם.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=1$.

הראנו שמהנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ נובע שהיא נכונה עבור $n=k+1$

ולכן לפי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתחלק ללא שארית:

$$45. \quad 5^n + 4^n + 7 \quad \text{ב-} 4 \quad 46. \quad 7^n + 3^n - 10 \quad \text{ב-} 12$$

$$47. \quad 4 \cdot 7^n + 3^{2n+1} + 17 \quad \text{ב-} 24 \quad 48. \quad 7^{6n-2} + 9^{3n-1} + 2 \quad \text{ב-} 12$$

$$49. \quad 11^n - 2 \cdot 7^n + 3^n \quad \text{ב-} 32 \quad 50. \quad 3^{2n-1} - 2 \cdot 15^{n-1} + 3 \quad \text{ב-} 4$$

$$51. \quad 12^n + 10^n - 3^n + 17 \quad \text{ב-} 18 \quad 52. \quad 2^{3n} + 2^{2n} - 5^n + 2 \quad \text{ב-} 3$$

$$53. \quad 10^n + 9^n - 3^n - 2^n \quad \text{ב-} 14 \quad 54. \quad 11^n + 9^n + 4 \cdot 6^n + 4^{n+1} \quad \text{ב-} 10$$

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתחלק ללא שארית:

$$55. \quad 3^n + 2n - 1 \quad \text{ב-} 4 \quad 56. \quad 6^n - 30n + 24 \quad \text{ב-} 25$$

$$57. \quad 9^{n+1} - 8n - 9 \quad \text{ב-} 64 \quad 58. \quad 3^{n+1} - 6n - 15 \quad \text{ב-} 12$$

$$59. \quad 2 \cdot 4^n - 9n + 1 \quad \text{ב-} 3 \quad 60. \quad 10^{2n} - 18n + 26 \quad \text{ב-} 54$$

$$61. \quad 3^{4n+1} + 80n - 3 \quad \text{ב-} 64 \quad 62. \quad 7^{2n-1} - 48n + 41 \quad \text{ב-} 288$$

הערות:

א. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי **אי-זוגי** נפעל באופן הבא:

(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$.

(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (הוא מספר טבעי אי-זוגי כלשהו)

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.

ב. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי **זוגי** נפעל באופן הבא:

(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=2$.

(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (הוא מספר טבעי זוגי כלשהו)

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי זוגי הביטוי $3 \cdot 7^n - 3^{n+1}$ מתחלק ב-120 ללא שארית.

פתרון:

נוכיח כי הביטוי $\frac{3 \cdot 7^n - 3^{n+1}}{120}$ הוא מספר שלם עבור כל n טבעי זוגי.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$.

נקבל: $\frac{3 \cdot 7^2 - 3^{2+1}}{120}$, כלומר $\frac{120}{120}$ ומכאן 1. קיבלנו מספר שלם, לכן עבור $n=2$ הטענה נכונה.

שלב ב' – צעד האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (הוא מספר טבעי זוגי כלשהו),

כלומר נניח שהביטוי $\frac{3 \cdot 7^k - 3^{k+1}}{120}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$,

כלומר צריך להוכיח שהביטוי $\frac{3 \cdot 7^{(k+2)} - 3^{(k+2)+1}}{120}$ הוא מספר שלם.

נפתח את הביטוי שקיבלנו. בהנחת האינדוקציה מופיעים הביטויים $3 \cdot 7^k$ ו- 3^{k+1} .

כדי להיעזר בהנחה נפרק את הביטוי $3 \cdot 7^{k+2}$ ל- $3 \cdot 7^k \cdot 7^2$,

כלומר $49 \cdot 3 \cdot 7^k$. את הביטוי $3^{(k+2)+1}$ נפרק ל- $3^{k+1} \cdot 3^2$, כלומר $9 \cdot 3^{k+1}$.

נקבל: $\frac{3 \cdot 7^{(k+2)} - 3^{(k+2)+1}}{120} = \frac{3 \cdot 7^k \cdot 7^2 - 3^{k+1} \cdot 3^2}{120} = \frac{3 \cdot 7^k \cdot 49 - 3^{k+1} \cdot 9}{120}$

במקום $49 \cdot 3 \cdot 7^k$ נרשום $40 \cdot 3 \cdot 7^k + 9 \cdot 3 \cdot 7^k$. נקבל:

$$\frac{40 \cdot 3 \cdot 7^k + 9 \cdot 3 \cdot 7^k - 9 \cdot 3^{k+1}}{120} = \frac{40 \cdot 3 \cdot 7^k}{120} + \frac{9 \cdot 3 \cdot 7^k - 9 \cdot 3^{k+1}}{120} = 7^k + 9 \cdot \frac{3 \cdot 7^k - 3^{k+1}}{120}$$

הביטוי $\frac{3 \cdot 7^k - 3^{k+1}}{120}$ הוא מספר שלם לפי הנחת האינדוקציה,

לכן המחובר הימני השווה ל-9 פעמים $\frac{3 \cdot 7^k - 3^{k+1}}{120}$ הוא מספר שלם.

הביטוי השמאלי (7^k) גם הוא מספר שלם, לכן סכום שני הביטויים הוא מספר שלם.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=2$. הראנו שמההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$

(k הוא מספר טבעי זוגי כלשהו) נובע שהיא נכונה עבור $n=k+2$,

ולכן לפי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי זוגי.

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי אי-זוגי מתחלק ללא שארית :

- | | |
|--|--|
| .63 $3^n - 3$ ב-8 | .64 $5^n + 2^n$ ב-7 |
| .65 $2^{3n} + 3^{2n}$ ב-17 | .66 $5 \cdot 3^n - 30 \cdot 4^n$ ב-35 |
| .67 $7^{n+2} + 17 \cdot 3^{n+3}$ ב-10 | .68 $13 \cdot 7^n - 5 \cdot 11^n - 36$ ב-18 |
| .69 $5^{n+1} + 2^{2n+3} - 57$ ב-120 | .70 $n^2 - 1$ ב-8 |
| .71 $3n^2 - 27$ ב-24 | .72 $n^3 + 2n$ ב-3 |
| .73 $n^3 + 11n$ ב-12 | .74 $(n^2 - 1)(n + 3)$ ב-48 |

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי זוגי מתחלק ללא שארית :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| .75 $6^n + 34$ ב-35 | .76 $7^n - 4^n$ ב-33 |
| .77 $5^n - 2^{2n}$ ב-9 | .78 $7^n + 39 \cdot 3^n$ ב-40 |
| .79 $5^{n-1} + 2^{n+2}$ ב-21 | .80 $5 \cdot 3^{n+1} + 2^{2n+3} - 23$ ב-120 |
| .81 $10^n + 8^n - 3^n - 1$ ב-7 | .82 $n^2 + 10n$ ב-8 |
| .83 $n^2 - 2n + 16$ ב-8 | .84 $n^3 + 20n$ ב-48 |

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתחלק ללא שארית :

- | | |
|---|---|
| .85 $3^n \cdot 8^{n+1} - 5 \cdot 15^n$ ב-9 | .86 $2^{2n-1} \cdot 3^n + 4^n \cdot 3^{n+1}$ ב-7 |
| .87 $3^n(7^n - 2^n)$ ב-15 | .88 $2^{n+1}(6^n - 1)$ ב-20 |

הוכיח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתחלק ללא שארית :

- | | |
|--------------------------------------|--|
| .89 $7^n - (-1)^n$ ב-8 | .90 $9^n + (-1)^{n+1}$ ב-10 |
| .91 $8^{2n-1} - 5(-1)^n$ ב-13 | .92 $10^{3n+1} + (-1)^n \cdot 3$ ב-13 |

.93 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי :

- א. השארית המתקבלת כאשר מחלקים את $7^n + 4$ ב-6 היא 5.
 ב. השארית המתקבלת כאשר מחלקים את $11^n + 6^n$ ב-5 היא 2.

.94 הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי זוגי, השארית המתקבלת כאשר מחלקים את $6^n + 10$ ב-35 היא 11.

כשלים באינדוקציות של הוכחת תכונות התחלקות

- 95.** א. הוכיחו: אם עבור n טבעי $10^n - 7$ מתחלק ב-9 ללא שארית, נובע ש- $10^{n+1} - 7$ מתחלק ב-9 ללא שארית.
 ב. האם נובע מהמשפט, שהתבקשתם להוכיח בסעיף א', ש- $10^n - 7$ מתחלק תמיד ב-9 ללא שארית? נמקו את תשובתכם.
 ג. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי $10^n - 7$ מתחלק ב-3 ללא שארית.
- 96.** א. הוכיחו, שאם ל- n טבעי מסוים, $2 \cdot 10^n + 1$ מתחלק ב-9 ללא שארית, אזי גם $2 \cdot 10^{n+1} + 1$ מתחלק ב-9 ללא שארית.
 ב. האם נובע מהמשפט, שהתבקשתם להוכיח בסעיף א', ש- $2 \cdot 10^n + 1$ מתחלק תמיד ב-9 ללא שארית? נמקו את תשובתכם.
 ג. הוכיחו באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי לכל n טבעי השארית בחלוקת $2 \cdot 10^n + 1$ ב-9 היא 3.
- 97.** א. הוכיחו כי אם עבור n טבעי מסוים הביטוי $3^n - 2n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית, אז גם הביטוי $3^{n+1} - 2n - 3$ מתחלק ב-4 ללא שארית.
 ב. האם נובע מהמשפט, שהתבקשתם להוכיח בסעיף א', ש- $3^n - 2n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית? נמקו.
 ג. הוכיחו שעבור כל n טבעי הביטוי $3^n - 2n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית.
- 98.** א. הוכיחו את הטענה:
 אם ל- n טבעי מסוים, הביטוי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית, אזי גם הביטוי $3^{n+2} + 5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.
 ב. האם מן מהטענה שבסעיף א' נובע ש- $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי? נמקו את תשובתכם.
 ג. הוכיחו באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי הביטוי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי.
- בשאלות 99-101 יש להוכיח תכונות התחלקות ללא אינדוקציה.**
- 99.** הוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי:
 א. הביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 ב. הביטוי $n^3 - 3n^2 + 2n$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 ג. הביטוי $n(n+1)(n+2)(n+3)$ מתחלק ב-24 לא שארית.
- 100.** הוכיחו ללא אינדוקציה שלכל n טבעי הביטוי $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}$ מתחלק ב-30 ללא שארית.
- 101.** א. הוכיחו ללא עזרת אינדוקציה כי עבור כל n טבעי שגדול מ-1, הביטוי $2^{n+1} \cdot 10^{n-1} + 4^n \cdot 5^{n-1}$ מתחלק ב-80 ללא שארית.
 ב. הוכיחו ללא עזרת אינדוקציה כי עבור כל n טבעי הביטוי $3^{n-1} \cdot 2^{3n-1} + 3^n \cdot 8^{n-1}$ מתחלק ב-7 ללא שארית.

102. א. הוכיחו שאם בשביל n טבעי מסוים הביטוי $11 \cdot 6^n + 4$ מתחלק ב-5
ללא שארית, אזי גם הביטוי $11 \cdot 6^{n+2} + 4$ מתחלק ב-5 ללא שארית.
ב. קבעו איזו משלוש הטענות הבאות היא נכונה, ונמקו את קביעתכם.
היעזרו בסעיף א'.
(1) הביטוי $11 \cdot 6^n + 4$ מתחלק ב-5 ללא שארית רק עבור כל n אי-זוגי.
(2) הביטוי $11 \cdot 6^n + 4$ מתחלק ב-5 ללא שארית רק עבור כל n זוגי.
(3) הביטוי $11 \cdot 6^n + 4$ מתחלק ב-5 ללא שארית עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי:

103. $5^n - 3$ אינו מתחלק ב-4. 104. $9^n + 4^n$ אינו מתחלק ב-5.
105. $10^n - 4^n + 5$ אינו מתחלק ב-6. 106. $n^3 + 5n + 5$ אינו מתחלק ב-6.

תשובות:

95. ב. לא, כיוון שלא בוצעה בדיקה עבור $n=1$. 96. ב. לא, כיוון שלא בוצעה בדיקה עבור $n=1$.
97. ב. לא, כיוון שלא בוצעה בדיקה עבור $n=1$.
98. ב. לא, כיוון שלא בוצעה בדיקה עבור $n=1$. 102. ב. טענה 3.

הוכחת התחלקות כאשר נתון איבר כללי של סדרה

107. a_n מסמן את האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית $3, 5, 7, \dots$.
הוכיחו כי עבור כל n טבעי: $12 \cdot 5^{a_n} + 8^{n+1}$ מתחלק ב-68 ללא שארית.
108. a_n מסמן את האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית $7, 13, 19, \dots$.
 b_n מסמן את האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית $4, 6, 8, \dots$.
הוכיחו כי עבור כל n טבעי: $2^{a_n} + 3^{b_n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית.
109. סדרה מקיימת לכל n טבעי: $a_n = 5 \cdot 7^n - 11$.
הוכיחו כי כל איברי הסדרה מתחלקים ב-6 ללא שארית.
110. סדרה מקיימת לכל n טבעי: $a_n = n^3 - 4n$.
הוכיחו באינדוקציה שכל איברי הסדרה מתחלקים ב-3 ללא שארית.
111. סדרה מקיימת לכל n טבעי: $a_n = n^2 - 9$.
הוכיחו באינדוקציה כי כל איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים מתחלקים ב-8 ללא שארית.
112. סדרה מקיימת לכל n טבעי: $a_n = 2^{n+1} + 5^{n+1}$.
הוכיחו באינדוקציה כי כל איברי הסדרה הנמצאים במקומות הזוגיים מתחלקים ב-7 ללא שארית.
113. נתונה הסדרה ההנדסית $5, 25, 125, \dots$.
הוכיחו שכל איבר בסדרה משאיר שארית 1 כאשר מחלקים אותו ב-4.

דוגמה:

a ו-b הם מספרים שלמים.

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a-b)$ ללא שארית.

פתרון:

נוכיח שהביטוי $\frac{a^n - b^n}{a-b}$ הוא מספר שלם עבור כל n טבעי.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

נקבל: $\frac{a^1 - b^1}{a-b}$, כלומר 1. קיבלנו מספר שלם ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{a^k - b^k}{a-b}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: את הביטוי a^{k+1} נפרק ל- $a^k \cdot a^1$, כלומר $a \cdot a^k$.

את הביטוי b^{k+1} נפרק ל- $b^k \cdot b^1$, כלומר $b \cdot b^k$.

נקבל: $\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} = \frac{a \cdot a^k - b \cdot b^k}{a-b}$. במקום $a \cdot a^k$ נרשום $b \cdot a^k + (a-b) \cdot a^k$.

נקבל: $\frac{b \cdot a^k + (a-b) \cdot a^k - b \cdot b^k}{a-b} = \frac{(a-b)a^k}{a-b} + \frac{b(a^k - b^k)}{a-b} = a^k + b \cdot \frac{a^k - b^k}{a-b}$.

הביטוי $\frac{a^k - b^k}{a-b}$ הוא מספר שלם לפי הנחת האינדוקציה,

לכן הביטוי הימני השווה ל- b פעמים $\frac{a^k - b^k}{a-b}$ גם הוא מספר שלם.

הביטוי השמאלי (a^k) גם הוא מספר שלם, לכן סכום שני הביטויים הוא מספר שלם.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=1$.

הראנו שמהנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ נובע שהיא נכונה עבור $n=k+1$

ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

a ו-b הם מספרים טבעיים.

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתחלק ללא שארית:

$$114. \quad a^n - b^n \quad \text{ב-} (a-b) \quad 115. \quad a^{2n-1} + b^{2n-1} \quad \text{ב-} (a+b)$$

$$116. \quad a^{2n} - b^{2n} \quad \text{ב-} (a^2 - b^2)$$

דוגמה:

- א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $9^n - 2^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית.
ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו (ללא מחשבון) שהביטוי $3^{12} - 8^2$ מתחלק ב-7 ללא שארית.

פתרון:

- א. ההוכחה של סעיף זה דומה להוכחות שראינו בדוגמאות קודמות.
ב. כדי להיעזר בסעיף א' עלינו לקבל ביטוי המתאים לתבנית $9^n - 2^n$, כלומר מעריך החזקה של 9 צריך להיות שווה למעריך החזקה של 2. נפתח את הביטוי $3^{12} - 8^2$ ונקבל: $3^{12} - 8^2 = (3^2)^6 - (2^3)^2 = 9^6 - 2^6$. בסעיף א' ראינו כי $9^n - 2^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית עבור כל n טבעי. נציב $n=6$ בטענה זו. נקבל ש- $9^6 - 2^6$ מתחלק ב-7 ללא שארית, ומכאן ש- $3^{12} - 8^2$ מתחלק ב-7 ללא שארית.

117. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $11^n - 3^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית.
ב. הוכיחו על פי סעיף א' בלבד ש- $11^8 - 9^4$ מתחלק ב-8 ללא שארית.
118. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ מתחלק ב-11 ללא שארית.
ב. הוכיחו לפי סעיף א' ש- $2^{13} + 3^6$ מתחלק ב-11 ללא שארית.
ג. הוכיחו לפי סעיף א' ש- $2 \cdot 8^2 + 9^2$ מתחלק ב-11 ללא שארית.
119. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $7^{2n+2} - 3^{2n+2}$ מתחלק ב-40 ללא שארית.
ב. הוכיחו (ללא מחשבון) ש- $98 \cdot 7^8 - 2 \cdot 3^{10}$ מתחלק ב-80 ללא שארית.
120. א. ו- a הם מספרים טבעיים. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a-b)$ ללא שארית.
ב. הוכיחו בהסתמך על סעיף א' את הטענות הבאות:
1. $7^n - 2^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית.
2. $5^{2n} - 5^n$ מתחלק ב-20 ללא שארית.
3. $2 \cdot 9^n - 2^{n+1}$ מתחלק ב-14 ללא שארית.
4. $2 \cdot 3^{2n} - 8 \cdot 4^{n-1}$ מתחלק ב-10 ללא שארית.
5. $3 \cdot 6^{2n-1} - 2^{3n-1}$ מתחלק ב-14 ללא שארית.
6. $7^n + (-1)^{n+1}$ מתחלק ב-8 ללא שארית.
ג. היעזרו בסעיף א' והוכיחו ש- $3^{64} - 256^4$ מתחלק ב-77 ללא שארית.
121. א. ו- a הם מספרים טבעיים.
הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי זוגי, הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a^2 - b^2)$ ללא שארית.
ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו כי $3^{12} - 25^3$ מתחלק ב-56 ללא שארית.
ג. היעזרו בסעיף א' והוכיחו כי $9^8 - 2^{16}$ מתחלק ב-6305 ללא שארית.

122. א. a ו- b הם מספרים טבעיים.
 הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי אי-זוגי, הביטוי $a^n + b^n$ מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית.
 ב. הוכיחו בהסתמך על סעיף א': (1) $8^9 + 1$ מתחלק ב-9 ללא שארית.
 (2) $2^{55} + 1$ מתחלק ב-33 ללא שארית
 (3) $3^{57} + 2^{57}$ מתחלק ב-35 ללא שארית.
123. א. הוכיחו כי עבור כל n טבעי הביטוי $2^{4n} - 1$ מתחלק ב-15 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $2^{4n} + 44$ מתחלק ב-15 ללא שארית.
124. א. הוכיחו כי עבור כל n טבעי הביטוי $5^n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' בלבד והוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $5^{n+1} + 3$ מתחלק ב-4 ללא שארית.
125. א. הוכיחו כי עבור כל n טבעי הביטוי $3^n + 2n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי, הביטוי $3^{n+1} + 6n + 9$ מתחלק ב-12 ללא שארית.
126. א. הוכיחו שעבור כל n טבעי הביטוי $7^n + 4^n - 11$ מתחלק ב-18 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' בלבד והוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי, הביטוי $5 \cdot 7^n + 2^{2n+1} + 8$ מתחלק ב-3 ללא שארית.
127. א. הוכיחו שעבור כל n טבעי הביטוי $5^n + 3$ מתחלק ב-4 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי, הביטוי $5^{2n} + 6 \cdot 5^n + 9$ מתחלק ב-16 ללא שארית.
128. הוכיחו ללא עזרת אינדוקציה שעבור כל n טבעי:
 א. הביטוי $3^n - 1$ מתחלק ב-2 ללא שארית.
 ב. הביטוי $3^{2n} - 3^n$ מתחלק ב-6 ללא שארית. היעזרו בסעיף א'.
 ג. הביטוי $9^n - 2 \cdot 27^n + 9^n$ מתחלק ב-36 ללא שארית. היעזרו בסעיף ב'.
129. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי:
 (1) הביטוי $x = 7^{n+2} + 5$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 (2) הביטוי $y = 5^n - 15$ מתחלק ב-10 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו כי הביטוי $5x - 3y$ מתחלק ב-30 ללא שארית.

130. א. הוכיחו כי עבור כל n טבעי הביטוי $n^2 + n$ מתחלק ב-2 ללא שארית.
 ב. a ו- b הם מספרים טבעיים.
 הוכיחו בהסתמך על סעיף א': אם הביטוי $a^2 + b^2$ מתחלק ב-2 ללא שארית,
 הרי גם הביטוי $a + b$ מתחלק ב-2 ללא שארית.

131. א. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 ב. a , b ו- c הם מספרים טבעיים.
 הוכיחו בהסתמך על סעיף א' את המשפט הבא:
 אם $a + b + c$ מתחלק ב-6 ללא שארית, הרי גם $a^3 + b^3 + c^3$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

132. א. הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי השארית המתקבלת כאשר מחלקים את הביטוי $9^n + k$
 (k מספר טבעי) ב-8 היא $k+1$.
 ב. נתון כי כאשר מחלקים את הביטוי $9^6 + k$ ב-8 מקבלים מספר שלם a ושארית $k+1$.
 מצאו את הערך של a .

133. א. הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי הביטוי $4^n + 5$ מתחלק ב-3 ללא שארית.
 ב. האם קיים n טבעי עבורו $4^n + 5$ מתחלק ב-6 ללא שארית? נמקו.

תשובות: 132. ב. 66430. 133. ב. לא.

אינדוקציות – הוכחת שוויונות (אישור זהויות)

נראה שימוש באינדוקציה מתמטית כאשר נרצה להוכיח נכונות של שוויון עבור כל n טבעי.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים השוויון:

$$2+5+8+11+ \dots +(3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

פתרון:

נתבונן תחילה באגף שמאל של השוויון: $2+5+8+11+ \dots +(3n-1)$.
באגף זה יש סכום של איברים. האיבר הראשון הוא 2, האיבר שני הוא 5, האיבר השלישי הוא 8 וכו'. האיבר האחרון באגף זה הוא $(3n-1)$.
ניתן לראות שה"חוקיות" באגף שמאל היא שכל איבר גדול ב-3 מקודמו.
האיבר האחרון באגף זה הוא $(3n-1)$, כלומר תלוי בערך של n .
עלינו להוכיח שעבור כל n טבעי סכום האיברים שבאגף שמאל שווה לביטוי $\frac{n(3n+1)}{2}$ המופיע באגף ימין.

שימו לב! ההוכחה באינדוקציה אינה עוזרת למצוא את הנוסחה שבאגף ימין, אלא רק מוכיחה שהנוסחה נכונה.

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות השוויון עבור $n=1$, כלומר נראה שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה.

נתבונן באגף שמאל: $2+5+8+11+ \dots +(3n-1)$
האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל-2.
האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n-1)$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n=1$, נציב $n=1$ בביטוי $(3n-1)$. נקבל: $(3 \cdot 1 - 1)$, כלומר 2.
קיבלנו שעבור $n=1$ האיבר האחרון באגף שמאל הוא 2.
ראינו שהאיבר הראשון הוא 2, ולכן עבור $n=1$ אגף שמאל שווה כולו ל-2.
נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n(3n+1)}{2}$. גם כאן נציב $n=1$. נקבל: $\frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2}$, כלומר 2.
קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל-2) ומכאן שעבור $n=1$ הנוסחה הנכונה.

נבדוק את נכונות השוויון עבור $n=2$, כלומר נראה שעבור $n=2$ שני האגפים שווים זה לזה. לא חייבים לבצע בדיקה זו. נעשה זאת כעת כדי לחזק את הבנת שלב הבדיקה.
האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n-1)$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n=2$, נציב $n=2$ בביטוי $(3n-1)$. נקבל: $(3 \cdot 2 - 1)$, כלומר 5, כלומר עבור $n=2$ האיבר האחרון באגף שמאל הוא 5. ראינו שהאיבר הראשון באגף שמאל הוא 2, לכן עבור $n=2$ אגף שמאל שווה ל- $2+5$, כלומר 7.
נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n(3n+1)}{2}$. גם כאן נציב $n=2$. נקבל: $\frac{2(3 \cdot 2 + 1)}{2}$, כלומר 7.
קיבלנו שעבור $n=2$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל-7) ומכאן שעבור $n=2$ השוויון נכון.

הערה: ניתן להמשיך ולבצע הצבות נוספות ($n = 3, 4, 5, 6, \dots$).
ואולם, לא משנה כמה ערכים נציב במקום n ,
זה עדיין לא מוכיח שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

שלב ב' – צעד האינדוקציה.

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי $n = k$,

$$\text{כלומר נניח שמתקיים: } 2+5+8+11+\dots+(3k-1)=\frac{k(3k+1)}{2}$$

בהסתמך על ההנחה נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k+1$.

כדי לרשום את מה שצריך להוכיח, נציב בנוסחה $(k+1)$ במקום n .

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n-1)$. נציב $(k+1)$ במקום n .

נקבל: $(3(k+1)-1)$, כלומר $(3k+3-1)$, ומכאן $(3k+2)$.

אגף ימין של הנוסחה הוא $\frac{n(3n+1)}{2}$. נציב $(k+1)$ במקום n .

$$\text{נקבל: } \frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2}, \text{ כלומר } \frac{(k+1)(3k+4)}{2}.$$

$$\text{נקבל שצריך להוכיח: } 2+5+8+\dots+(3k+2)=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

כדי להיעזר בהנחה נתבונן באגף שמאל של ההוכחה ונרשום את האיברים הנמצאים

לפני $(3k+2)$ עד שנגיע לאיבר $(3k-1)$ שהוא האיבר האחרון בהנחה.

כל איבר באגף שמאל גדול ב-3 מקודמו, לכן כדי לקבל את האיבר שלפני $(3k+2)$

נחסר 3 מ- $(3k+2)$. נקבל $3-(3k+2)$, כלומר $(3k-1)$, שהוא האיבר האחרון בהנחה.

$$\text{נקבל שצריך להוכיח: } 2+5+8+\dots+(3k-1)+(3k+2)=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

לפי הנחת האינדוקציה ניתן להחליף את הסכום $2+5+8+\dots+(3k-1)$ שבאגף שמאל

$$\text{בביטוי } \frac{k(3k+1)}{2}.$$

$$\text{נקבל שצריך להוכיח: } \underbrace{2+5+8+\dots+(3k-1)}_{\frac{k(3k+1)}{2}}+(3k+2)=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

$$\text{שווה } \frac{k(3k+1)}{2} \text{ לפי ההנחה}$$

ניעזר בהנחה ונבצע החלפה זו.

$$\text{נקבל שצריך להוכיח: } \frac{k(3k+1)}{2}+(3k+2)=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

ניתן להוכיח שוויון זה בשתי דרכים:

דרך א': נמצא מכנה משותף ונפתח את שני האגפים.

$$\text{נקבל שנותר להוכיח: } \frac{k(3k+1)+2(3k+2)}{2}=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

המכנה זהה בשני האגפים. מספיק להוכיח שהמונים שווים.

$$\text{נקבל שנותר להוכיח: } 3k^2+7k+4=3k^2+7k+4$$

ניתן לראות ששני האגפים שווים.

דרך ב': נפתח את אגף שמאל ונקבל את אגף ימין.

$$\text{נתבונן באגף שמאל: } \frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2)$$

$$\text{לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים נקבל: } \frac{3k^2 + 7k + 4}{2}$$

בעזרת פירוק הטרינום נקבל במונה $(k+1)(3k+4)$ וזהו בדיוק אגף ימין.

משפט מסכם: בדקנו שהשוויון נכון עבור $n=1$.

הראנו שמההנחה שהשוויון נכון עבור $n=k$ נובע שהוא נכון עבור $n=k+1$, ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהשוויון נכון עבור כל n טבעי.

הערות:

(1) במקום להניח עבור k טבעי ולהוכיח עבור $k+1$,

ניתן להניח עבור n טבעי ולהוכיח עבור $n+1$.

(2) במעבר מ- $n=k$ ל- $n=k+1$ התווסף לאגף שמאל **איבר אחד**, שהוא $(3k+2)$.
על פי תכנית הלימודים, תמיד יתווסף רק איבר אחד.

(3) בדוגמה זו באגף שמאל הסדרה היא סדרה חשבונית $(1, 4, 7, \dots, (3n-1))$, ולכן ניתן לחשב את הסכום שבאגף שמאל כסכום של סדרה חשבונית. זוהי דוגמה לשימוש בדרך אחרת להוכחת נכונות נוסחת הסכום, ללא אינדוקציה.

שימו לב!

שני שלבי האינדוקציה (שלב הבסיס ושלב הצעד) אינם תלויים זה בזה.

קיומו של אחד אינו מעיד על קיומו של השני.

אם הוכחנו את אחד השלבים ולא הוכחנו את השלב האחר, לא השלמנו את ההוכחה באינדוקציה, כלומר לא הוכחנו שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

תרגילים

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$1. \quad 1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \quad 1+3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2$$

$$3. \quad 6+8+10+12+\dots+(2n+4) = n(n+5)$$

$$4. \quad 3+6+9+\dots+(3n) = \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$5. \quad 2+5+8+\dots+(3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$6. \quad 3+7+11+15+\dots+(4n-1) = n(2n+1)$$

$$7. \quad 12+17+22+27+\dots+(5n+7) = \frac{n(5n+19)}{2}$$

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

פתרון:

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.
נתבונן תחילה באגף שמאל.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- $\frac{1}{1 \cdot 3}$.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

כדי לדעת מהו האיבר האחרון באגף שמאל עבור $n=1$,

נציב $n=1$ בביטוי $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. נקבל: $\frac{1}{1 \cdot 3}$.

נקבל שעבור $n=1$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא $\frac{1}{1 \cdot 3}$ וגם האיבר

האחרון באגף שמאל הוא $\frac{1}{1 \cdot 3}$, לכן עבור $n=1$ אגף שמאל כולל איבר

אחד בלבד שהוא $\frac{1}{1 \cdot 3}$ ומכאן שעבור $n=1$ אגף שמאל כולו שווה ל- $\frac{1}{3}$.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n}{2n+1}$. גם כאן נציב $n=1$.

נקבל: $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$, כלומר $\frac{1}{3}$. קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים

זה לזה (כל אחד מהם שווה ל- $\frac{1}{3}$) ומכאן שעבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

בהסתמך על ההנחה צריך להוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

הערה: על פי החוקיות שבאגף שמאל כל איבר הוא למעשה שבר.

המונה של השבר קבוע ושווה ל-1. המכנה של השבר הוא מכפלה.

המספרים שבצד שמאל של מכפלה זו הם: $1, 3, 5, \dots$

כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב-2 מקודמו.

המספרים שבצד ימין של המכפלה זו הם: $3, 5, 7, \dots$

כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב-2 מקודמו.

כמו כן, כל סוגריים מומלץ לקחת הצידה, להציב בהם $n=k+1$,

להחזיר אותם באותה תבנית עם סוגריים, ולוודא שהחוקיות נשמרה.

לדוגמה: בגורם $(2n-1)$ נקבל: $(2(k+1)-1) = (2k+1)$

בגורם $(2n+1)$ נקבל: $(2(k+1)+1) = (2k+3)$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \quad \text{נקבל שצריך להוכיח:}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום:

$$\frac{k}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right)$$

$$\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \quad \text{נקבל שצריך להוכיח:}$$

נוכיח את הזהות על פי אחת הדרכים שהראינו בדוגמה הקודמת.

על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad .8$$

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \dots + n(n+2) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7) \quad .9$$

$$3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + \dots + (n+2)(n+7) = \frac{1}{3}n(n+7)(n+8) \quad .10$$

$$\frac{1 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 5}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2} + \dots + \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(n+1)(n+5)}{6} \quad .11$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 13 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2 \quad .12$$

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + \dots + (2n-1)(3n-1) = \frac{1}{2}n(4n^2 + n - 1) \quad .13$$

$$2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 11 \cdot 9 + \dots + (3n-1)(n+5) = \frac{n(2n^2 + 17n + 5)}{2} \quad .14$$

$$2 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + \dots + 2n(n+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{3} \quad .15$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .16$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \quad .17$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 \quad .18$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2[n(n+1)]^2 \quad .19$$

$$(1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + \dots + (n^2 + n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad .20$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad .21$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n}{5}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \quad .22$$

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad .23$$

$$\frac{5}{5 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 7} + \frac{5}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{5}{(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5} \quad .24$$

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1} \quad .25$$

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1} \quad .26$$

$$\frac{3}{1 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{3}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{3n}{2n+1} \quad .27$$

$$\frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{5}{6} - \frac{2n+5}{(n+2)(n+3)} \quad .28$$

$$\frac{3 \cdot 1^2 + 1}{2 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 2^2 + 2}{5 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 3^2 + 3}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{3n^2 + n}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n(n+1)}{3n+2} \quad .29$$

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} \quad .30$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)} \quad .31$$

אינדוקציות שבהן החוקיות לא ברורה

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$4 + 14 + 30 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$$

פתרון:

בשונה מהאינדוקציות שפתרנו עד עתה, במקרה זה ניתן לראות שהחוקיות שבאגף שמאל אינה ברורה, מאחר והאיבר האחרון שבאגף שמאל נתון כמכפלה, ואילו האיברים הראשונים שבאגף שמאל אינם נתונים כמכפלה. כפי שנראה, גם אם לא נבין את החוקיות באופן מלא, לא תיווצר בעיה בשלב ההוכחה, שכן על פי תכנית הלימודים, במעבר מ- $n = k$ ל- $n = k+1$, מתווסף לאגף שמאל תמיד איבר אחד.

כדי לזהות את החוקיות באגף שמאל, נתבונן באיבר האחרון באגף זה שהוא המכפלה $n(3n+1)$ ונציב בו $n=1$, $n=2$, ו- $n=3$.

בעזרת הצבה זו נציג כמכפלה גם את האיברים הראשונים באגף שמאל.

נציב $n=1$. נקבל: $1(3 \cdot 1 + 1)$, כלומר $1 \cdot 4$.

המכפלה $1 \cdot 4$ שווה ל-4 שהוא האיבר הראשון באגף שמאל.

נציב $n=2$. נקבל: $2(3 \cdot 2 + 1)$, כלומר $2 \cdot 7$.

המכפלה $2 \cdot 7$ שווה ל-14 שהוא האיבר השני באגף שמאל.

נציב $n=3$. נקבל: $3(3 \cdot 3 + 1)$, כלומר $3 \cdot 10$.

המכפלה $3 \cdot 10$ שווה ל-30 שהוא האיבר השלישי באגף שמאל.

למעשה עלינו להוכיח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$$

כעת החוקיות באגף שמאל ברורה.

ניתן להוכיח את הטענה בדומה לכל האינדוקציות הקודמות שראינו.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$6 + 14 + 24 + 36 + \dots + n(n+5) = \frac{n(n+1)(n+8)}{3} \quad .32$$

$$10 + 18 + 28 + \dots + (n+1)(n+4) = \frac{n(n+4)(n+5)}{3} \quad .33$$

$$18 + 64 + 130 + 216 + \dots + (2n+4)(5n-2) = \frac{n(10n^2 + 39n + 5)}{3} \quad .34$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4} \quad .35$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \quad .36$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \quad .37$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots + \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \quad .38$$

$$4+8+14+22+\dots+(n^2+n+2)=\frac{n(n^2+3n+8)}{3} \quad .39$$

$$0+20+52+96+\dots+(6n^2+2n-8)=2n(n-1)(n+3) \quad .40$$

אינדוקציות עם חזקות

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

פתרון:

שלב א' – שלב בסיס האינדוקציה.

בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$. נתבונן באגף שמאל.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- $1 \cdot 2^1$.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $n \cdot 2^n$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון

עבור $n=1$, נציב $n=1$ בביטוי $n \cdot 2^n$. נקבל: $1 \cdot 2^1$.

נקבל שעבור $n=1$ האיבר האחרון באגף שמאל הוא $1 \cdot 2^1$, כלומר 2.

ראינו שהאיבר הראשון באגף שמאל הוא $1 \cdot 2^1$, כלומר 2.

ולכן עבור $n=1$ אגף שמאל כולל איבר אחד שהוא $1 \cdot 2^1$,

ומכאן שעבור $n=1$ אגף שמאל שווה ל- $1 \cdot 2^1$, כלומר 2.

נעבור להתבונן באגף ימין: $2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$. גם כאן נציב $n=1$.

נקבל: $2 + (1-1) \cdot 2^{1+1} = 2$, כלומר 2. קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה

(כל אחד מהם שווה ל-2) ומכאן שעבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב צעד האינדוקציה.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$.

הנחת האינדוקציה: $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k = 2 + (k-1) \cdot 2^{k+1}$

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר **צריך להוכיח:** $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (k+1) \cdot 2^{k+1} = 2 + k \cdot 2^{k+2}$

כדי לרשום באגף שמאל את האיברים הנמצאים לפני האיבר האחרון

של ההוכחה שהוא $(k+1) \cdot 2^{k+1}$ נבחן את החוקיות באגף זה.

הערה: כפי שכבר הדגשנו, בתכנית החדשה, יתווסף להנחה תמיד רק איבר אחד,

ולכן נוכל לדעת, גם מבלי להבין את החוקיות, שהאיבר הנמצא לפני האיבר האחרון

של ההוכחה, הוא האיבר האחרון של הנחת האינדוקציה.

באגף שמאל כל איבר הוא מכפלה בין שני מספרים.
המספרים שבצד שמאל של המכפלה הם $1, 2, 3, \dots$
כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב-1 מקודמו.
המספרים שבצד ימין של המכפלה הם: $2^1, 2^2, 2^3, \dots$ כך שכל מספר הוא חזקה
שהבסיס שלה קבוע ושווה ל-2 והמעריך שלה גדול ב-1 מהמעריך של החזקה שלפניה.
האיבר האחרון באגף שמאל של ההוכחה הוא $(k+1) \cdot 2^{k+1}$,
לכן האיבר שלפניו הוא $(k+1-1) \cdot 2^{k+1-1}$, כלומר $k \cdot 2^k$.
זהו גם האיבר האחרון באגף שמאל של ההנחה. נקבל שצריך להוכיח:
 $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1} = 2 + k \cdot 2^{k+2}$
לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום: $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k$
בביטוי $2 + (k-1) \cdot 2^{k+1}$.
נקבל שצריך להוכיח: $2 + (k-1) \cdot 2^{k+1} + (k+1) \cdot 2^{k+1} = 2 + k \cdot 2^{k+2}$
נחסר 2 משני האגפים. כמו כן, את הביטוי 2^{k+2} ניתן לפרק בשתי צורות בעזרת
חוק החזקות: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$: $2^{k+2} = 2^k \cdot 2^2$ או $2^{k+2} = 2^{k+1} \cdot 2^1$.
נקבל שנותר להוכיח: $(k-1) \cdot 2^k \cdot 2^1 + (k+1) \cdot 2^k \cdot 2 = k \cdot 2^k \cdot 2^2$
הביטוי 2^k הוא חיובי ומופיע בכל המחוברים.
נקבל שנותר להוכיח: $2(k-1) + 2(k+1) = 4k$, כלומר: $4k = 4k$.
ניתן לראות ששני האגפים שווים.
הטענה מקיימת את בסיס האינדוקציה ואת צעד האינדוקציה,
ולכן על פי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad .41$$

$$3 + 9 + 27 + \dots + 3^n = 1.5(3^n - 1) \quad .42$$

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots + \frac{4}{5^n} = 1 - \frac{1}{5^n} \quad .43$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad .44$$

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n \quad .45$$

$$1 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^4 + \dots + (2n-1)2^n = 6 + (2n-3)2^{n+1} \quad .46$$

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 27 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{1}{4}[(2n-1)3^{n+1} + 3] \quad .47$$

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n \quad .48$$

$$3 + 5 + 9 + 17 + \dots + (2^n + 1) = 2^{n+1} + n - 2 \quad .49$$

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

$$0 + 4 + 16 + 52 + \dots + (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 3^n - 1 - 2n \quad .50$$

$$2 + 8 + 24 + 64 + \dots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1} \quad .51$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad .52$$

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^{n-1}} \quad .53$$

$$1 + \frac{5}{5} + \frac{9}{25} + \dots + \frac{(4n-3)}{5^{n-1}} = \frac{1}{4} \left[10 - \frac{4n+2}{5^{n-1}} \right] \quad .54$$

$$2 + \frac{8}{3} + \frac{26}{9} + \dots + \frac{3^n - 1}{3^{n-1}} = \frac{3^n(2n-1) + 1}{2 \cdot 3^{n-1}} \quad .55$$

$$\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{33}{8} + \dots + \frac{2^{2n-1} + 1}{2^n} = \frac{2^{2n} - 1}{2^n} \quad .56$$

אינדוקציות – הוכחה עבור n טבעי זוגי או אי-זוגי

שימו לב!

א. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי אי-זוגי:

(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$.

(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (הוא מספר טבעי אי-זוגי כלשהו)

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.

ב. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי זוגי:

(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=2$.

(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (הוא מספר טבעי זוגי כלשהו)

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה (או בדרך אחרת) שעבור כל n טבעי זוגי מתקיים:

$$2 + 8 + 14 + 20 + \dots + (3n-4) = \frac{n(3n-2)}{4}$$

פתרון:

שלב א' – בסיס האינדוקציה, כלומר ביצוע בדיקה:

עלינו להוכיח את הטענה עבור כל n טבעי זוגי, לכן בשלב הבדיקה נבדוק את נכונות

הטענה עבור $n=2$. נתחיל מאגף שמאל.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל-2.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n-4)$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n=2$,

נציב בביטוי זה $n=2$. נקבל: $(3 \cdot 2 - 4)$, כלומר 2.

נקבל שעבור $n=2$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא 2 וגם האיבר האחרון באגף שמאל

הוא 2, לכן עבור $n=2$ אגף שמאל כולל רק איבר אחד בלבד השווה ל-2, ומכאן שעבור $n=2$ אגף שמאל כולו שווה ל-2.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n(3n-2)}{4}$. גם כאן נציב $n=2$.

נקבל: $\frac{2 \cdot 4}{4}$, כלומר 2. קיבלנו שעבור $n=2$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל-2) ולכן עבור $n=2$ הטענה נכונה.

שלב ב' – צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי זוגי כלשהו,

$$2+8+14+20+\dots+(3k-4)=\frac{k(3k-2)}{4}$$

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$. נציב $(k+2)$ במקום n ,

$$2+8+14+20+\dots+(3k+2)=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

על פי החוקיות שבאגף שמאל כל איבר גדול ב-6 מקודמו.

האיבר האחרון באגף שמאל של ההוכחה הוא $(3k+2)$,

לכן האיבר שלפניו הוא $(3k+2-6)$, כלומר $(3k-4)$.

זהו למעשה האיבר האחרון באגף שמאל של ההנחה.

$$2+8+14+20+\dots+(3k-4)+(3k+2)=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום: $2+8+14+20+\dots+(3k-4)$

$$\frac{k(3k-2)}{4}+(3k+2)=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

כעת נוכיח בדרך אלגברית ששני האגפים שווים.

נראה זאת באחת הדרכים שהצגנו בדוגמאות הקודמות.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=2$.

הראנו שמהנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (מספר טבעי זוגי)

נובע שהיא נכונה עבור $n=k+2$ ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה

עבור כל n טבעי זוגי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

$$1+5+9+\dots+(2n-1)=\frac{n(n+1)}{2} \quad .57$$

$$1+7+13+19+\dots+(3n-2)=\frac{(n+1)(3n-1)}{4} \quad .58$$

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי זוגי מתקיים:

$$1+5+9+13+\dots+(2n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad .59$$

$$2+8+14+\dots+(3n-4)=\frac{n(3n-2)}{4} \quad .60$$

אינדוקציות עם סימנים מתחלפים

נדון כעת באינדוקציות הכוללות הוכחת שוויונות, שבהן באגף שמאל הסימנים מתחלפים, כלומר האיברים הם חיוביים ושיליים לסירוגין.

במקרים כאלה נקבל חזקות בעלות בסיס שלילי ומעריך אפס או טבעי.

דוגמאות: $(-1)^4$, $(-5)^3$, $(-6)^2$.

נשים לב שכאשר בסיס החזקה הוא שלילי ומעריך החזקה הוא זוגי,

ערך החזקה הוא חיובי. לדוגמה: $(-1)^4$, $(-5)^2$.

לעומת זאת, כאשר בסיס החזקה הוא שלילי ומעריך החזקה הוא אי זוגי,

ערך החזקה הוא שלילי. לדוגמה: $(-1)^3$, $(-4)^5$.

כאשר בסיס החזקה הוא שלילי ומעריך החזקה כולל מספר טבעי n ,

יש לבדוק האם מעריך החזקה הוא זוגי או אי זוגי.

לדוגמה: $(-1)^n$ הוא חיובי כאשר n זוגי.

$(-1)^n$ הוא שלילי כאשר n אי זוגי.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$10 - 14 + 18 - 22 + \dots + (-1)^{n-1}(4n+6) = (-1)^{n-1}(2n+4) + 4$$

הערה: האיברים באגף שמאל הם $10, -14, 18, -22$

המנגנון שקובע את סימני האיברים הוא הביטוי $(-1)^{n-1}$.

כאשר מעריך החזקה הוא זוגי האיבר הוא חיובי,

וכאשר מעריך החזקה הוא אי זוגי האיבר הוא שלילי.

לכל האיברים יש סימן "פלוס" לפנייהם.

הסימנים המתחלפים מתקבלים על פי מעריך החזקה $(-1)^{n-1}$.

(הערה: הערך המוחלט של האיברים הוא סדרה חשבונית שהפרשה 4).

פתרון:

שלב א' – בסיס האינדוקציה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

נתחיל מאגף שמאל: $10 - 14 + 18 - 22 + \dots + (-1)^{n-1}(4n+6)$

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל-10.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(-1)^{n-1}(4n+6)$.

כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n=1$, נציב $n=1$ בביטוי זה.

נקבל: $(-1)^0(4 \cdot 1 + 6) = 10$, כלומר 10.

קיבלנו שעבור $n=1$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא 10 וגם האיבר האחרון הוא 10,

לכן עבור $n=1$ אגף שמאל כולו איבר אחד בלבד השווה ל-10,

ומכאן שעבור $n=1$ אגף שמאל כולו שווה ל-10.

נעבור להתבונן באגף ימין: $(-1)^{n-1}(2n+4) + 4$

גם כאן נציב $n=1$. נקבל $(-1)^{1-1}(2 \cdot 1 + 4) + 4 = 10$, כלומר 10.

קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה (שניהם שווים ל-10)

ומכאן שעבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב צעד האינדוקציה.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$, כלומר שמתקיים:

$$10-14+18-22+\dots+(-1)^{k-1}(4k+6)=(-1)^{k-1}(2k+4)+4$$

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

$$10-14+18-22+\dots+(-1)^k(4k+10)=(-1)^k(2k+6)+4$$

באגף שמאל נרשום את האיבר האחרון של הנחת האינדוקציה.

נקבל שצריך להוכיח:

$$10-14+18-22+\dots+(-1)^{k-1}(4k+6)+(-1)^k(4k+10)=(-1)^k(2k+6)+4$$

לפי הנחת האינדוקציה ניתן להחליף את הסכום:

$$(-1)^{k-1}(2k+4)+4, 10-14+18-22+\dots+(-1)^{k-1}(4k+6)$$

לאחר שנבצע החלפה זו נקבל שצריך להוכיח:

$$(-1)^{k-1}(2k+4)+4+(-1)^k(4k+10)=(-1)^k(2k+6)+4$$

נחסר 4 משני האגפים. נקבל שצריך להוכיח:

$$(-1)^{k-1}(2k+4)+(-1)^k(4k+10)=(-1)^k(2k+6)$$

במקום $(-1)^{k-1}$ נרשום $\frac{(-1)^k}{(-1)^1}$, כלומר $-(-1)^k$.

$$-(-1)^k(2k+4)+(-1)^k(4k+10)=(-1)^k(2k+6)$$

הביטוי $(-1)^k$ שונה מאפס, והוא גורם בכל אחד מהמחוברים.

$$-(2k+4)+(4k+10)=2k+6$$

נצמצם את שני האגפים ב- $(-1)^k$. נקבל שנוותר להוכיח:

$$-2k+6=2k+6$$

לאחר פתיחת סוגריים, נקבל שנוותר להוכיח:

ניתן לראות ששני האגפים שווים זה לזה.

על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$1-2+4-8+\dots+(-2)^{n-1}=\frac{1}{3}[1-(-2)^n] \quad .61$$

$$5-20+80-320+\dots+5(-4)^{n-1}=1-(-4)^n \quad .62$$

$$-3+9-27+81+\dots+(-3)^n=\frac{-3-(-3)^{n+1}}{4} \quad .63$$

$$-3+15-75+375-\dots-3(-5)^{n-1}=\frac{1}{2}[(-5)^n-1] \quad .64$$

$$-\frac{6}{5}+\frac{6}{5^2}-\frac{6}{5^3}+\frac{6}{5^4}+\dots+\frac{6}{(-5)^n}=\left(-\frac{1}{5}\right)^n-1 \quad .65$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad .66$$

$$1-2+3-4+\dots+(-1)^{n+1}\cdot n=\frac{1}{4}[(-1)^{n+1}(2n+1)+1] \quad .67$$

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

$$-2+5-8+11+\dots+(-1)^n(3n-1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^n(6n+1)-1\right] \quad .68$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n+1}\cdot n^2=\frac{(-1)^{n+1}\cdot n(n+1)}{2} \quad .69$$

$$-2\cdot 5+3\cdot 6-4\cdot 7+\dots+(-1)^n(n+1)(n+4)=\frac{1}{4}\left[(-1)^n(2n^2+12n+13)-13\right] \quad .70$$

$$16-26+40-58+\dots+(-1)^{n+1}(2n^2+4n+10)=(-1)^{n+1}(n^2+3n+6)+6 \quad .71$$

$$1+5+5+9+9+\dots+[2n+(-1)^n]=n(n+1)+\frac{(-1)^n}{2}-\frac{1}{2} \quad .72$$

$$\frac{4}{1\cdot 3}-\frac{8}{3\cdot 5}+\frac{12}{5\cdot 7}-\frac{16}{7\cdot 9}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 4n}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \quad .73$$

$$1\cdot (-2)^0+2\cdot (-2)^1+3\cdot (-2)^2+\dots+n(-2)^{n-1}=\frac{1}{9}\left[n(-2)^{n+1}-(n+1)(-2)^n+1\right] \quad .74$$

$$\frac{1}{1}-\frac{4}{2}+\frac{7}{4}-\frac{10}{8}+\dots+\frac{3n-2}{(-2)^{n-1}}=\frac{-2n}{(-2)^n} \quad .75$$

אינדוקציות עם מושג העצרת

נדון באינדוקציות הכוללות את המושג "עצרת של מספר".

המושג n עצרת מסומן על ידי $n!$ ומוגדר (רק למספרים טבעיים) באופן הבא: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

לדוגמה: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, $1! = 1$.

הערה: עבור $n = 0$ מגדירים $0! = 1$.

מההגדרות הנ"ל נובע לדוגמה: $5! = 4! \cdot 5$, $8! = 7! \cdot 8$, $10! = 9! \cdot 10$.

באופן דומה מתקיים: $(n+1)! = n!(n+1)$, $(n+2)! = (n+1)!(n+2)$.

$n! = (n-1)! \cdot n$, $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$.

כאשר נרצה להוכיח זהות עם עצרת, אז בשלב צעד האינדוקציה נפרק את ביטוי העצרת לעצרת הקטנה מבין השתיים.

הערה: השימוש במושג העצרת רלוונטי גם לנוסחת ברנולי בהסתברות.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$3! + \frac{4!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \dots + \frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$$

פתרון:

שלב א' – בסיס האינדוקציה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

נתבונן תחילה באגף שמאל. האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- $3!$.

הערה: על פי החוקיות, האיבר הראשון הוא למעשה $\frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3!$.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$.

נציב $n=1$ בביטוי $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$. נקבל: $\frac{3!}{0!} = 3!$.

עבור $n=1$: אגף שמאל כולו שווה ל- $3!$, כלומר שווה ל- $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

הערה: אפשר לחשב את $3!$ גם באמצעות מחשבון.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$. גם כאן נציב $n=1$.

נקבל: $\frac{4!}{4 \cdot 0!} = 6$, כלומר $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 6$.

הערה: אפשר לחשב את $\frac{4!}{4 \cdot 0!}$ גם באמצעות מחשבון.

שני האגפים שווים זה לזה עבור $n=1$, ומתקיים בסיס האינדוקציה.

שלב ב' – צעד האינדוקציה.

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$3! + \frac{4!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \dots + \frac{(k+2)!}{(k-1)!} = \frac{(k+3)!}{4(k-1)!}$$

בהסתמך על ההנחה צריך להוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k+1$:

$$3! + \frac{4!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \dots + \frac{(k+2)!}{(k-1)!} + \frac{(k+3)!}{k!} = \frac{(k+4)!}{4 \cdot k!}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום :

$$\frac{(k+3)!}{4(k-1)!} + 3! + \frac{4!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \dots + \frac{(k+2)!}{(k-1)!}$$

$$\frac{(k+3)!}{4(k-1)!} + \frac{(k+3)!}{k!} = \frac{(k+4)!}{4 \cdot k!} \quad \text{נקבל שצריך להוכיח :}$$

נוכיח את הזהות על פי אחת הדרכים שהראינו בדוגמאות קודמות.

$$\frac{(k+3)!}{4(k-1)!} + \frac{(k+3)!}{k!} = \frac{(k+4)!}{4 \cdot k!} \quad \text{נותר להוכיח :}$$

במכנה : ניעזר בכך שמתקיים : $k! = (k-1)! \cdot k = k \cdot (k-1)!$

$$\frac{(k+3)!}{4(k-1)!} + \frac{(k+3)!}{(k-1)!k} = \frac{(k+4)!}{4 \cdot (k-1)!k} \quad \text{נותר להוכיח :}$$

$$\frac{k(k+3)! + 4(k+3)!}{4(k-1)!k} = \frac{(k+4)!}{4 \cdot (k-1)!k} \quad \text{נותר להוכיח :}$$

המכנים זהים, לכן נותר להוכיח שהמונים זהים.

$$k(k+3)! + 4(k+3)! = (k+4)! \quad \text{נותר להוכיח :}$$

$$(k+4)! = (k+3)!(k+4) \quad \text{באגף ימין ניעזר בפירוק}$$

$$(k+3)! \text{ משותף גורם משותף}$$

$$(k+3)!(k+4) = (k+3)!(k+4) \quad \text{נותר להוכיח :}$$

ניתן להסיק על פי עקרון האינדוקציה כי הטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים :

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad .76$$

$$3! + \frac{4!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \dots + \frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!} \quad .77$$

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad .78$$

$$3 \cdot 2^0 \cdot 1! + 5 \cdot 2^1 \cdot 2! + 7 \cdot 2^2 \cdot 3! + \dots + (2n+1)2^{n-1} \cdot n! = 2^n(n+1)! - 1 \quad .79$$

$$9 \cdot 5 \cdot 1! + 14 \cdot 5^2 \cdot 2! + 19 \cdot 5^3 \cdot 3! + \dots + (5n+4) \cdot 5^n \cdot n! = 5^{n+1}(n+1)! - 5 \quad .80$$

$$\frac{0 \cdot 1!}{2^1} + \frac{1 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^3} + \dots + \frac{(n-1)n!}{2^n} = \frac{(n+1)!}{2^n} - 1 \quad .81$$

$$\frac{2}{1!} - \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n!} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \quad .82$$

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

אינדוקציות שבהן נתונה הנוסחה לאיבר הכללי

דוגמה:

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה: $a_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 1$.

נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n = 6(2^n - 1) - n$.

פתרון:

עלינו להוכיח: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 6(2^n - 1) - n$.

שלב א' – בסיס האינדוקציה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

באגף שמאל: האיבר הראשון באגף שמאל הוא a_1 .

האיבר האחרון באגף שמאל הוא a_n . נציב $n=1$. נקבל a_1 .

נקבל שעבור $n=1$: אגף שמאל כולו שווה ל- a_1 .

נציב $n=1$ בנוסחה $a_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 1$. נקבל: $a_1 = 6 \cdot 2^{1-1} - 1 = 5$.

נציב $n=1$ באגף שמאל $S_n = 6(2^n - 1) - n$. נקבל: $S_1 = 6(2^1 - 1) - 1 = 5$.

סיימנו את שלב בסיס האינדוקציה.

שלב ב' – צעד האינדוקציה.

נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = 6(2^k - 1) - k$$

על סמך ההנחה נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שמתקיים: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} = 6(2^{k+1} - 1) - (k+1)$.

לפי הנחת האינדוקציה ניתן להחליף את הסכום: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$.

שבאגף שמאל בביטוי $6(2^k - 1) - k$.

נותר להוכיח: $6(2^k - 1) - k + a_{k+1} = 6(2^{k+1} - 1) - (k+1)$.

על פי הנוסחה $a_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 1$, נקבל $a_{k+1} = 6 \cdot 2^{k+1-1} - 1$.

נפתח את שני האגפים ונראה שהם שווים.

83. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי הנוסחה: $a_n = n(n+2)$.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

84. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה: $a_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 1$.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 6(2^n - 1) - n$$

אינדוקציות שבהן בבדיקה באגף שמאל מקבלים איבר שאינו האיבר הראשון משמאל

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 11 \cdot 9 + \dots + (3n+5)(n+7) = \frac{(n+2)(2n^2+25n+47)}{2}$$

פתרון:

נתבונן תחילה באגף שמאל: $2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + \dots + (3n+5)(n+7)$.
באגף זה יש סכום של איברים. האיבר הראשון הוא $2 \cdot 6$, האיבר השני הוא $5 \cdot 7$, וכו'.
האיבר האחרון באגף זה הוא $(3n+5)(n+7)$.
ניתן לראות שכל איבר באגף שמאל הוא למעשה מכפלה בין שני מספרים.
המספרים שבצד שמאל של המכפלות הם $2, 5, 8, \dots$ כך שה"חוקיות" ביניהם היא שכל מספר גדול ב-3 מקודמו.
המספרים שבצד ימין של המכפלות הם: $6, 7, 8, \dots$ כך שה"חוקיות" ביניהם היא שכל מספר גדול ב-1 מקודמו.

שלב א' – שלב בסיס האינדוקציה. נבצע בדיקה:

נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$. נתבונן תחילה באגף שמאל.
האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה למכפלה $2 \cdot 6$.
האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n+5)(n+7)$.
נציב $n=1$ בביטוי $(3n+5)(n+7)$. נקבל: $(3 \cdot 1 + 5)(1 + 7)$, כלומר $8 \cdot 8$.
נקבל שעבור $n=1$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא $2 \cdot 6$, האיבר האחרון באגף שמאל הוא $8 \cdot 8$, ומכאן שעבור $n=1$ אגף שמאל כולו שווה ל- $2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 8$, כלומר שווה ל-111.
נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{(n+2)(2n^2+25n+47)}{2}$.

נציב $n=1$. נקבל: $\frac{(1+2)(2 \cdot 1^2 + 25 \cdot 1 + 47)}{2}$, כלומר $\frac{3 \cdot 74}{2}$ ומכאן 111.

קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב צעד האינדוקציה.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$, כלומר שמתקיים:

$$2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + \dots + (3k+5)(k+7) = \frac{(k+2)(2k^2+25k+47)}{2}$$

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

כאן נרשום את הטענה כאשר במקום n נציב $(k+1)$.

האיבר האחרון באגף שמאל של הטענה הוא $(3n+5)(n+7)$.

נציב $(k+1)$ במקום n ונקבל: $((k+1)+7)((3(k+1)+5))$, כלומר $(k+8)(3k+8)$.

אגף ימין של הטענה הוא $\frac{(n+2)(2n^2+25n+47)}{2}$. נציב $(k+1)$ במקום n .

נקבל: $\frac{((k+1)+2)(2(k+1)^2+25(k+1)+47)}{2}$, כלומר $\frac{(k+3)(2k^2+29k+74)}{2}$.

$$2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + \dots + (3k+8)(k+8) = \frac{(k+3)(2k^2 + 29k + 74)}{2} : \text{צריך להוכיח:}$$

כדי להיעזר בהנחה נתבונן באגף שמאל של ההוכחה ונרשום את האיברים הנמצאים לפני האיבר האחרון שהוא $(3k+8)(k+8)$ עד שנגיע לאיבר האחרון באגף שמאל של ההנחה שהוא $(3k+5)(k+7)$.

על פי החוקיות שבאגף שמאל, כדי לקבל את האיבר שלפניו נחסר 3 מהביטוי שבצד שמאל של המכפלה ונחסר 1 מהביטוי שבצד ימין של המכפלה. נקבל: $(3k+8-3)(k+8-1)$, כלומר $(3k+5)(k+7)$. האיבר שקיבלנו הוא האיבר האחרון באגף שמאל של ההנחה.

הבנת החוקיות עוזרת לוודא שפתרנו נכון. נקבל שצריך להוכיח:

$$2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + \dots + (3k+5)(k+7) + (3k+8)(k+8) = \frac{(k+3)(2k^2 + 29k + 74)}{2}$$

על פי ההנחה נחליף את הסכום: $2 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + \dots + (3k+5)(k+7)$

שבאגף שמאל בביטוי $\frac{(k+2)(2k^2 + 25k + 47)}{2}$. נקבל שצריך להוכיח:

$$\frac{(k+2)(2k^2 + 25k + 47)}{2} + (3k+8)(k+8) = \frac{(k+3)(2k^2 + 29k + 74)}{2}$$

באגף שמאל נמצא מכנה משותף 2 ונקבל שנותר להוכיח:

$$\frac{(k+2)(2k^2 + 25k + 47) + 2(3k+8)(k+8)}{2} = \frac{(k+3)(2k^2 + 29k + 74)}{2}$$

המכנה זהה בשני האגפים. לכן נותר להוכיח שהמונים שווים.

לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים בשני האגפים,

$$2k^3 + 35k^2 + 161k + 222 = 2k^3 + 35k^2 + 161k + 222 : \text{נקבל שצריך להוכיח:}$$

ניתן לראות ששני האגפים שווים.

על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$5 + 11 + 17 + \dots + (6n+11) = (n+2)(3n+8) \quad .85$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + \dots + (n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n^2 + 8n + 18)}{3} \quad .86$$

$$\frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 8} + \frac{2}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{n+1}{3n+5} \quad .87$$

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + (n+2) \cdot 5^{n+2} = \frac{5 + (4n+7)5^{n+3}}{16} \quad .88$$

$$-2 + 3 + 2 + 11 + 14 + \dots + [n^2 + 2(-1)^{n+1}] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (-1)^{n+1} - 1 \quad .89$$

$$\frac{2}{3^1 \cdot 1!} + \frac{5}{3^2 \cdot 2!} + \frac{8}{3^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{3n+2}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} = 1 - \frac{1}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} \quad .90$$

כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי

אינדוקציות נוספות שהוכחה אינה עבור כל n טבעי

אם נרצה להוכיח נכונות של טענה עבור כל n טבעי החל מ- n מסוים שגדול מ-1, נבצע את הבדיקה עבור ה- n המסוים ולא עבור $n=1$. לדוגמה: אם נרצה להוכיח שהטענה נכונה עבור n טבעי שגדול או שווה ל-2, נבצע את הבדיקה עבור $n=2$. השלבים האחרים יתבצעו כרגיל.

91. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי שגדול מ-2 מתקיים:

$$7+9+11+\dots+(2n+1)=(n+4)(n-2)$$

92. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי שגדול מ-1 מתקיים:

$$6-12+20-\dots+(-1)^n n(n+1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^n(2n^2+4n+1)+7\right]$$

93. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה: $a_n = n(n+3)$. הוכיחו כי עבור $n \geq 3$ מתקיים:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} = \frac{(n-2)(n-1)(n+3)}{3}$$

דוגמה:

להלן שלושה שוויונות המתייחסים למספרים טבעיים. רק אחד מן השלושה נכון לכל n טבעי. קבעו באיזה שוויון מדובר, והוכיחו אותו באינדוקציה:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + n(n+2)(n+4) = \frac{1}{4}(n+2)(3n+1)(4n+1)$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + n(n+2)(n+4) = \frac{n}{4}(n+1)(n+4)(n+5)$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + n(n+2)(n+4) = \frac{n}{8}(n+1)(n+2)(n+19)$$

פתרון מקוצר:

נבדוק את נכונות כל אחת מהטענות עבור $n=1$. נראה שכולן נכונות, כלומר מקיימות את בסיס האינדוקציה. נבדוק את נכונות הטענות עבור $n=2$. כולן נכונות. נבדוק את נכונות הטענות עבור $n=3$. רק הטענה השנייה נכונה עבור $n=3$ (זו כנראה הטענה הנכונה...). כעת נוכיח באינדוקציה את נכונות הטענה השנייה.

94. להלן שני שוויונות המתייחסים למספרים טבעיים. רק אחד מן השניים נכון לכל n טבעי. קבעו איזה שוויון נכון, והוכיחו אותו באינדוקציה:

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + n(n+1)^2 = \frac{n}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + n(n+1)^2 = \frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$$

95. להלן שלושה שוויונות המתייחסים למספרים טבעיים. רק אחד מן השלושה נכון לכל n טבעי. קבעו איזה שוויון נכון, והוכיחו אותו באינדוקציה:

$$15 + 48 + 105 + \dots + n(n+2)(n+4) = \frac{1}{4}(n+2)(3n+1)(4n+1)$$

$$15 + 48 + 105 + \dots + n(n+2)(n+4) = \frac{n}{4}(n+1)(n+4)(n+5)$$

$$15 + 48 + 105 + \dots + n(n+2)(n+4) = \frac{n}{8}(n+1)(n+2)(n+19)$$

תשובות:

94. השוויון השני נכון. 95. השוויון השני נכון.

כשלים באינדוקציות של הוכחת שוויונות

דוגמה:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{4n+1}{2(2n+1)} \quad \text{נתונה הטענה:}$$

א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n = k$ טבעי כלשהו, אז היא נכונה גם עבור $n = k+1$.
ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

פתרון:

א. נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{4k+1}{2(2k+1)}$$

בהסתמך על ההנחה נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k+1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

על פי החוקיות שבאגף שמאל, נקבל שצריך להוכיח:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום:

$$\frac{4k+1}{2(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

$$\frac{4k+1}{2(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{4k+5}{2(2k+3)} \quad \text{נקבל שצריך להוכיח:}$$

נוכיח את הזהות על פי אחת הדרכים שהראינו בדוגמה הקודמת.

ב. לא ניתן להסיק, מכיוון שלא ביצענו את שלב בסיס האינדוקציה. לא בדקנו את נכונות הטענה עבור $n = 1$.

הערה: גם אם שלב הבדיקה יתקיים (וכאן הוא לא יתקיים) והטענה נכונה עבור כל n טבעי, תשובתנו לסעיף ב' לא תשתנה.

דוגמה:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + n(n+2)(n+4) = \frac{1}{4}(n+2)(3n+1)(4n+1) \quad \text{נתונה הטענה:}$$

- א. הראו שהטענה נכונה עבור $n=1$, ונכונה עבור $n=2$.
 ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

פתרון:

- א. נבצע בדיקה ונראה שהטענה נכונה עבור $n=1$, ועבור $n=2$.
 ב. בסעיף א' ראינו שמתקיים בסיס האינדוקציה.
 מאחר ולא הראינו שמתקיים צעד האינדוקציה, לא ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הערה:

- גם אם שלב הצעד יתקיים (וכאן הוא לא יתקיים) והטענה נכונה עבור כל n טבעי, תשובתנו לסעיף ב' לא תשתנה.

$$.96 \quad \text{נתונה הטענה:} \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{4n+1}{2(2n+1)}$$

- א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו, אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.
 ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

$$.97 \quad \text{נתונה הטענה:} \quad 3 + 5 + 9 + 17 + \dots + (2^n + 1) = 2^{n+1} + n - 2$$

- א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו, אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.
 ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

$$.98 \quad \text{נתונה הטענה:} \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 13 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$$

- א. הראו שהטענה נכונה עבור $n=1$, ונכונה עבור $n=2$.
 ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

$$.99 \quad \text{נתונה הטענה:} \quad \frac{1 \cdot 2^2}{3!} + \frac{2 \cdot 2^3}{4!} + \frac{3 \cdot 2^4}{5!} + \dots + \frac{n \cdot 2^{n+1}}{(n+2)!} = 2 - \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$$

- א. הראו שהטענה נכונה עבור $n=1$, ונכונה עבור $n=2$.
 ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

תשובות:

.96. ב. לא. .97. ב. לא. .98. ב. לא. .99. ב. לא.

אינדוקציות עם שימוש בזהויות טריגונומטריות

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיימות הזהויות הטריגונומטריות הבאות :

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \cdot \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad .100$$

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2\sin \alpha} \quad .101$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \dots + \sin^2 n\alpha = \frac{1}{2} \left[n - \frac{\sin n\alpha \cdot \cos(n+1)\alpha}{\sin \alpha} \right] \quad .102$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha} + \dots + \frac{\sin(2n-1)\alpha}{\sin \alpha} = \left(\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad .103$$

אינדוקציות – שילוב אישור זהויות ותכונות התחלקות

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתחלק ללא שארית :

$$4 - 1 - 5 + 25 - \dots - 5^{2n-1} \quad \text{ב- 4} \quad .104$$

$$6 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) \quad \text{ב- 6} \quad .105$$

.106 א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ב. הוכיחו על פי סעיף א' בלבד שעבור כל n טבעי הביטוי $n(n+1)(2n+1)$ מתחלק ב- 6 ללא שארית.

.107 א. הוכיחו באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים :

$$\frac{0 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $n(n^2-1)$ מתחלק ב- 6 ללא שארית.

.108 א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים :

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 27 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{1}{4} \left[(2n-1)3^{n+1} + 3 \right]$$

ב. הוכיחו שלכל n טבעי הביטוי $(2n-1) \cdot 3^{n+1} + 3$ מתחלק ב- 12 ללא שארית.

אינדוקציות עם חישובים מספריים

דוגמה:

א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

ב. היעזרו בסעיף א' וחשבו את הסכום: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{39 \cdot 41}$

ג. היעזרו בסעיף א' וחשבו את הסכום: $\frac{1}{21 \cdot 23} + \frac{1}{23 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 27} + \dots + \frac{1}{39 \cdot 41}$

ד. מצאו את האיבר האחרון בטור שמשמאל, אם סכום הטור הוא $\frac{36}{73}$.

פתרון:

א. **שלב א' – בדיקה:** נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- $\frac{1}{1 \cdot 3}$.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון

באגף שמאל עבור $n=1$, נציב $n=1$ בביטוי $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. נקבל: $\frac{1}{1 \cdot 3}$.

נקבל שעבור $n=1$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא $\frac{1}{1 \cdot 3}$ וגם האיבר האחרון

באגף שמאל הוא $\frac{1}{1 \cdot 3}$, לכן עבור $n=1$ אגף שמאל כולל איבר אחד בלבד שהוא $\frac{1}{1 \cdot 3}$

ומכאן שעבור $n=1$ אגף שמאל כולו שווה ל- $\frac{1}{3}$.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n}{2n+1}$. גם כאן נציב $n=1$.

נקבל: $\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$. כלומר $\frac{1}{3}$. קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה

(כל אחד מהם שווה ל- $\frac{1}{3}$) ומכאן שעבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

בהסתמך על ההנחה צריך להוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

הערה: על פי החוקיות שבאגף שמאל כל איבר הוא למעשה שבר.

המונה של השבר קבוע ושווה ל-1. המכנה של השבר הוא מכפלה.

המספרים שבצד שמאל של מכפלה זו הם: $1, 3, 5, \dots$

כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב-2 מקודמו.

המספרים שבצד ימין של המכפלה זו הם: $3, 5, 7, \dots$

כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב-2 מקודמו.

כמו כן, כל סוגריים מומלץ לקחת הצידה, להציב בהם $n = k + 1$, להחזיר אותם באותה תבנית עם סוגריים, ולוודא שהחוקיות נשמרה.

$$\begin{aligned} \text{לדוגמה: בגורם } (2n-1) \text{ נקבל: } & (2(k+1)-1) = (2k+1) \\ \text{בגורם } (2n+1) \text{ נקבל: } & (2(k+1)+1) = (2k+3) \end{aligned}$$

$$\text{נקבל שצריך להוכיח: } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום:

$$\frac{k}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right)$$

$$\text{נקבל שצריך להוכיח: } \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

נוכיח את הזהות על פי אחת הדרכים שהראינו בדוגמה הקודמת.

על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

$$\text{ב. היעזרו בסעיף א' וחשבו את הסכום: } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{39 \cdot 41}$$

פתרון:

הוכחנו בסעיף א' שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

נמצא לאיזה ערך של n האיבר האחרון שבאגף שמאל הוא $\frac{1}{39 \cdot 41}$.

$$\text{עלינו למצוא לאיזה ערך של } n \text{ טבעי מתקיים } \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{39 \cdot 41} \text{ . נקבל } n = 20$$

$$\text{נקבל שמתקיים: } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{39 \cdot 41} = \frac{20}{2 \cdot 20 + 1}$$

ניתן לראות כי הסכום המבוקש שווה ל- $\frac{20}{2 \cdot 20 + 1}$, כלומר $\frac{20}{41}$.

$$\text{ג. היעזרו בסעיף א' וחשבו את הסכום: } \frac{1}{21 \cdot 23} + \frac{1}{23 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 27} + \dots + \frac{1}{39 \cdot 41}$$

פתרון:

$$\text{בסעיף ב' קיבלנו: } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{39 \cdot 41} = \frac{20}{41}$$

ניתן לתאר את הקשר בין הסכום המבוקש לסכום שמצאנו בסעיף ב' באופן הבא:

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 21} + \frac{1}{21 \cdot 23} + \dots + \frac{1}{39 \cdot 41}}_{\text{שווה ל- } \frac{20}{41} \text{ לפי סעיף ב'}}$$

$$\text{אם נחשב את הסכום: } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 21} \text{ ונחסר את תוצאתו מהתוצאה}$$

שקיבלנו בסעיף ב' נקבל את הסכום המבוקש.

$$\text{כדי לחשב את הסכום: } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 21}$$

$$\text{נמצא לאיזה ערך של } n \text{ טבעי האיבר האחרון באגף שמאל הוא } \frac{1}{19 \cdot 21} \text{ . נקבל } n = 10$$

נציב $n=10$ בטענה שהוכחנו בסעיף א'.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 21} = \frac{10}{2 \cdot 10 + 1}$$

הסכום שווה ל- $\frac{10}{2 \cdot 10 + 1}$, כלומר $\frac{10}{21}$.

הסכום המבוקש שווה לסכום $\frac{20}{41}$ שקיבלנו בסעיף ב' פחות הסכום $\frac{10}{21}$.

נקבל: $\frac{20}{41} - \frac{10}{21} = \frac{10}{861}$, כלומר $\frac{10}{861}$ וזהו הסכום המבוקש.

ד. מצאו את האיבר האחרון בטור שמשמאל, אם סכום הטור הוא $\frac{36}{73}$.

פתרון:

סכום הטור מיוצג על ידי הביטוי $\frac{n}{2n+1}$ שבאגף ימין. נשווה ל- $\frac{36}{73}$. נקבל $n=36$.

נציב $n=36$ באיבר האחרון שבאגף שמאל שהוא $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

נקבל: $\frac{1}{(2 \cdot 36 - 1)(2 \cdot 36 + 1)} = \frac{1}{71 \cdot 73}$, כלומר $\frac{1}{5183}$, ומכאן $\frac{1}{5183}$.

דוגמה:

א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. חשבו את הסכום: $7^3 + 8^3 + 9^3 + \dots + 14^3$

ג. מצאו נוסחה לסכום: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + \dots + (2 \cdot n)^3$

ד. מצאו נוסחה לסכום: $(2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \dots + (2 \cdot n)^3$

פתרון:

א. יש להוכיח באינדוקציה: שלב הבסיס ושלב הצעד. בשאלה זו נדלג על ההוכחה.

ב. הוכחנו בסעיף א' שלכל n טבעי מתקיים: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ניעזר בחיסור סכומים.

נחשב את הסכום $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 14^3$, המתקבל על ידי הצבת $n=14$.

ממנו נחסר נחשב את הסכום $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 6^3$, המתקבל על ידי הצבת $n=6$.

התוצאה הסופית היא 10,584.

ג. הסכום שבסעיף ג' מתקבל כאשר מציבים באגף שמאל של סעיף א' $2n$ במקום n .

לכן נוסחת הסכום מתקבלת אף היא באותה דרך,

$$\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} = \frac{4n^2(2n+1)^2}{4} = n^2(2n+1)^2$$

כלומר הסכום הוא:

ד. ניעזר בחוקי חזקות ונקבל:

$$2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + \dots + (2 \cdot n)^3 = (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \dots + (2 \cdot n)^3 =$$

$$2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \text{נוציא גורם משותף:}$$

$$2^3 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$$

נציב על פי ההוכחה באינדוקציה:

דוגמה:

נתון שעבור כל n טבעי מתקיימת הטענה:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{an}{bn+1}$$

א. מצאו את a ואת b .

ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הטענה אכן נכונה.

פתרון:

א. הטענה נכונה עבור כל n טבעי, כלומר נכונה עבור $n=1$, $n=2$, ...

עבור $n=1$ נקבל באגף שמאל $\frac{1}{1 \cdot 3}$, ובאגף ימין $\frac{a \cdot 1}{b \cdot 1 + 1}$.

שני האגפים שווים עבור $n=1$, כלומר $\frac{1}{3} = \frac{a}{b+1}$.

עבור $n=2$ נקבל באגף שמאל $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5}$, ובאגף ימין $\frac{a \cdot 2}{b \cdot 2 + 1}$.

שני האגפים שווים עבור $n=2$, כלומר $\frac{2}{5} = \frac{2a}{2b+1}$.

נפתור מערכת משוואות ונקבל $a=1$, $b=2$.

ב. בשאלה זו נדלג על ההוכחה, מאחר והראינו הוכחות כאלה.

תרגילים

1. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ב. היעזרו בסעיף א' וחשבו את הסכום: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$

2. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

ב. חשבו את הסכום: $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{38 \cdot 41}$

3. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

ב. חשבו את הסכום: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + 20 \cdot 23$

ג. חשבו את הסכום: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + 60 \cdot 63$

ד. היעזרו בסעיפים קודמים, וחשבו את הסכום: $21 \cdot 24 + 22 \cdot 25 + \dots + 60 \cdot 63$

4. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

ב. חשבו את הסכום: $17^2 + 19^2 + 21^2 + \dots + 33^2$

5. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

ב. חשבו את הסכום: $\frac{25}{12^2 \cdot 13^2} + \frac{27}{13^2 \cdot 14^2} + \dots + \frac{57}{28^2 \cdot 29^2}$

6. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + \dots + n(n+7) = \frac{n(n+1)(n+11)}{3}$

ב. חשבו את הסכום: $8 + 18 + 30 + \dots + 170$

ג. חשבו את הסכום: $98 + 120 + \dots + 450$

7. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4}$

ב. חשבו את הסכום: $\frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \dots + \frac{1}{210}$

8. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $9 + 17 + 27 + 39 + \dots + (n^2 + 5n + 3) = \frac{n(n^2 + 9n + 17)}{3}$

ב. חשבו את הסכום: $39 + 53 + 69 + \dots + 1053$

9. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}$$

ב. נתון שהאיבר האחרון בטור שבסעיף א' הוא $\frac{1}{224}$.
חשבו את סכום הטור.

10. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$

ב. נתון שסכום n המחוברים הראשונים של הטור שבסעיף א' הוא $\frac{1}{5}$.
חשבו את המחובר ה- n י בטור.

11. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

ב. מצאו את הערך של n אם נתון: $\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{20}$

12. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

ב. מצאו את הערך של n אם נתון: $8^3 + 9^3 + 10^3 + \dots + n^3 = 7497$

13. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $5 + 7 + 11 + 19 + \dots + (2^n + 3) = 2^{n+1} + 3n - 2$
 ב. חשבו את הסכום: $5 + 7 + 11 + \dots + 1027$.
14. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $6 + 36 + 162 + \dots + 2n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2}$
 ב. חשבו את הסכום: $12 \cdot 729 + \dots + 20 \cdot 59049$.
15. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $-\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \dots + \frac{n^2 - n - 1}{n!} = 1 - \frac{n+1}{n!}$
 ב. חשבו את הסכום: $\frac{41}{7!} + \frac{55}{8!} + \dots + \frac{89}{10!}$.
16. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:
 $12 - 17 + 22 - 27 + \dots + (-1)^{n+1}(5n + 7) = \frac{1}{4} [(-1)^{n+1}(10n + 19) + 19]$
 ב. חשבו את הסכום: $12 - 17 + 22 - 27 + \dots - 67$
 ג. חשבו את הסכום: $-127 + 132 - 137 + \dots + 192$.
17. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:
 $\frac{1}{2} - \frac{7}{6} + \frac{17}{12} - \frac{31}{20} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(2n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n+1}$
 ב. מצאו את האיבר האחרון בטור שמשמאל, אם סכום הטור הוא $-\frac{14}{15}$.
18. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי זוגי מתקיים: $2 + 8 + 14 + \dots + (3n - 4) = \frac{n(3n - 2)}{4}$
 ב. חשבו את הסכום: $2 + 8 + 14 + \dots + 44$
 ג. חשבו את הסכום: $38 + 44 + 50 + \dots + 80$.
19. א. p הוא מספר טבעי. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:
 $1(1+p) + 2(2+p) + 3(3+p) + \dots + n(n+p) = \frac{n(n+1)(2n+1+3p)}{6}$
 ב. מצאו את p אם נתון: $4(4+p) + 5(5+p) + \dots + 20(20+p) = 4488$.
20. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:
 $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1}{(x-1)^2}$
 ב. מצאו נוסחה לסכום: $1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^{n-1}$.

21. נתון הטור: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

הנוסחה $\frac{an}{bn+1}$ מייצגת את סכום n האיברים הראשונים של הטור.
 א. מצאו את a ואת b .
 ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי נוסחת הסכום אכן נכונה.

22. הנוסחה $An^2 - Bn + 1$ מייצגת את האיבר ה- n של הטור: $2, 15, 40, \dots$.
 א. מצאו את A ואת B .

ב. הוכיחו שעבור כל n טבעי מתקיים: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(4n^2 + n - 1)}{2}$

23. א. הוכיחו באינדוקציה: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
 ב. S_n הוא סכום האיברים הראשונים של הטור שבסעיף א'.
 חשבו את n אם נתון: $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{132}$

24. א. הוכיחו באינדוקציה: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 ב. מצאו (באמצעות n) נוסחה לסכום: $5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \dots + 5 \cdot n^2$
 ג. חשבו את הסכום: $\frac{1^2}{6} + \frac{2^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \dots + \frac{13^2}{6}$

25. א. הוכיחו באינדוקציה: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
 ב. מצאו נוסחה לסכום: $(2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \dots + (2 \cdot n)^3$
 ג. חשבו את הסכום: $\left(\frac{8}{7}\right)^3 + \left(\frac{9}{7}\right)^3 + \left(\frac{10}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{22}{7}\right)^3$

26. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ב. חשבו בעזרת סעיף א' את הסכום: $\frac{4}{1 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{4}{15 \cdot 16}$

ג. חשבו בעזרת סעיף א' את הסכום: $\frac{1}{1 \cdot 10} + \frac{1}{2 \cdot 15} + \frac{1}{3 \cdot 20} + \dots + \frac{1}{15 \cdot 80}$

ד. חשבו בעזרת סעיף א' את הסכום: $\frac{1}{5 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 20} + \dots + \frac{1}{75 \cdot 80}$

27. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$2 + 5 \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^2 + \dots + (3n-1) \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4}[(6n-5) \cdot 3^n + 5]$$

ב. היעזרו בסעיף א' ומצאו באמצעות n נוסחה לסכום: $2 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot 3^{n+2} + \dots + (3n-1) \cdot 3^{2n-1}$

28. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ב. מצאו נוסחה לסכום: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2$

ג. מצאו נוסחה לסכום: $(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n)^2$

29. א. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה: $a_n = (-1)^n(4n+6)$

הראו כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה הוא $(-1)^n(2n+4) - 4$

ב. היעזרו בסעיף א' בלבד וחשבו את הסכום: $30 - 34 + 38 - \dots + 62$

תשובות:

1. ב. 2870 . 2. ב. $\frac{13}{82}$. 3. ב. 3500 . ג. 79300 . ד. 75800 . 4. ב. 5865

5. ב. 0.005755 . 6. ב. 770 . ג. 3068 . 7. ב. $\frac{1}{10}$. 8. ב. 11817 . 9. ב. $\frac{329}{480}$

10. ב. $\frac{1}{380}$. 11. ב. $n=19$. 12. ב. $n=13$. 13. ב. 2076 . 14. ב. 1679616

15. ב. 0.00972 . 16. ב. -30 . ג. 35 . 17. ב. $-\frac{391}{210}$. 18. ב. 184 . ג. 472

19. ב. $p=8$. 20. ב. $\frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4}$. 21. א. $a=1$, $b=2$. 22. א. $A=6$, $B=5$

23. ב. $n=10$. 24. ב. $\frac{5n(n+1)(2n+1)}{6}$. ג. 136.5 . 25. ב. $2n^2(n+1)^2$. ג. $\frac{63225}{343}$

26. ב. $3\frac{3}{4}$. ג. $\frac{3}{16}$. ד. $\frac{3}{80}$. 27. ב. $\frac{1}{4} \cdot 3^n \left[(6n-5) \cdot 3^n + 5 \right]$

28. ב. $\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$. ג. $\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$. 29. ב. 46

אינדוקציות עם כלל נסיגה

הוכחת תכונות התחלקות עם כלל נסיגה

דוגמה:

סדרה מוגדרת לכל n טבעי באמצעות הכלל: $a_1 = 18$, $a_{n+1} = a_n + 7^{n+2} + 5$. הוכיחו באינדוקציה שכל איברי הסדרה מתחלקים ב-6 ללא שארית.

פתרון:

נוכיח באינדוקציה כי $\frac{a_n}{6}$ הוא מספר שלם עבור כל n טבעי.

שלב א' – בדיקה: נציב $n=1$. נקבל: $\frac{a_1}{6}$, כלומר $\frac{18}{6}$ ומכאן 3.

קיבלנו מספר שלם ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{a_k}{6}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{a_{k+1}}{6}$ הוא מספר שלם.

הוכחה: נפתח את הביטוי שקיבלנו על פי כלל הנסיגה הנתון.

$$\text{נקבל: } \frac{a_{k+1}}{6} = \frac{a_k + 7^{k+2} + 5}{6} = \frac{a_k}{6} + \frac{7^{k+2} + 5}{6}$$

המחובר השמאלי הוא מספר שלם על פי הנחת האינדוקציה.

כדי להוכיח שהמחובר הימני $\frac{7^{k+2} + 5}{6}$ מספר שלם ניעזר באינדוקציה נוספת,

כלומר נוכיח באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $\frac{7^{n+2} + 5}{6}$ הוא מספר שלם.

שלב א' – בדיקה: נציב $n=1$. נקבל: $\frac{7^3 + 5}{6}$, כלומר 58.

קיבלנו מספר שלם, לכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$,

כלומר נניח שהביטוי $\frac{7^{k+2} + 5}{6}$ הוא מספר שלם.

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,

כלומר נוכיח שהביטוי $\frac{7^{(k+1)+2} + 5}{6}$ הוא מספר שלם.

$$\text{הוכחה: } \frac{7^{(k+1)+2} + 5}{6} = \frac{7^{k+2} \cdot 7 + 5}{6} = \frac{7^{k+2} + 5}{6} + \frac{6 \cdot 7^{k+2}}{6}$$

קיבלנו סכום של שני מחוברים. המחובר השמאלי הוא מספר שלם על פי הנחת

האינדוקציה הנוספת. המחובר הימני שווה ל- 7^{k+2} , לכן גם הוא מספר שלם,

ומכאן שסכום שני המחוברים הוא מספר שלם.

תרגילים

1. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_{n+1} = a_n + n^3 + 5n$, $a_1 = 30$. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי a_n מתחלק ב-6 ללא שארית.
2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי הכלל: $a_{n+1} = a_n + 81^n - 25^n$, $a_1 = 56$. הוכיחו באינדוקציה כי כל איברי הסדרה מתחלקים ב-28 ללא שארית.
3. הוכיחו באינדוקציה: אם $a_2 = 80$, $a_{n+1} = a_n + 2^{3n} - 8 \cdot 3^{n-1}$, אז a_n מתחלק ב-40 ללא שארית.
4. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_1 = 18$. הוכיחו באינדוקציה, שכל איבר בסדרה הנמצא במקום זוגי מתחלק ב-15 ללא שארית.
5. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי: $a_{n+1} = 6a_n - 115$, $a_1 = 70$. הוכיחו: כל איבר בסדרה הנמצא במקום אי-זוגי מתחלק ב-35 ללא שארית.
6. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_{n+1} = 6a_n + 5 \cdot 11^n$, $a_1 = 12$. הוכיחו באינדוקציה כי כאשר מחלקים כל אחד מאיברי הסדרה ב-5 השארית המתקבלת היא 2.
7. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי: $a_{n+1} = a_n + n^2 + 7n + 8$, $a_1 = 17$. הוכיחו באינדוקציה כי כל איברי הסדרה הם אי-זוגיים.
8. א. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי: $a_{n+1} = a_n + 9^{n+1} - 8n - 9$, $a_3 = 768$. הוכיחו באינדוקציה כי כל איברי הסדרה מתחלקים ב-64 ללא שארית.
ב. נתון כי כאשר מחלקים את a_4 ב-64 מקבלים מספר שלם m . הביעו באמצעות m את המספר המתקבל כאשר מחלקים את a_5 ב-64.
9. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_{n+1} = 7a_n - 6$, $a_1 = 8$. מגדירים סדרה נוספת b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 4$. הוכיחו באינדוקציה: b_n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
10. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1$, $a_1 = 1$. מגדירים סדרה נוספת b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n - n$. הוכיחו: כל אחד מאיברי הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ הנמצא במקום אי-זוגי מתחלק ב-24 ללא שארית.

תשובות: 8. ב. $m + 922$.

אינדוקציות עם כלל נסיגה – התלכדות של סדרות

בסעיף זה נוכיח נכונות של נוסחה לאיבר הכללי על פי כלל נסיגה נתון. למעשה, נוכיח שהסדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה **מתלכדת** עם הסדרה המוגדרת על פי האיבר הכללי. כמו כן, נראה בעיות אחרות המשלבות כלל נסיגה והוכחה באינדוקציה.

דוגמה:

סדרה מוגדרת לכל n טבעי באמצעות כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 3a_n + 2$, $a_1 = 4$. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיימת הנוסחה $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 1$.

פתרון:

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הנוסחה עבור $n = 1$.

נציב $n = 1$ בנוסחה $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 1$.

נקבל: $a_1 = 5 \cdot 3^{1-1} - 1$, כלומר $a_1 = 5 \cdot 3^0 - 1$ ומכאן $a_1 = 4$.

על פי הנתון $a_1 = 4$, לכן עבור $n = 1$ הנוסחה ל- a_n נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

נניח שהנוסחה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n = k$, כלומר נניח ש- $a_k = 5 \cdot 3^{k-1} - 1$. בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$,

כלומר עלינו להוכיח שמתקיים $a_{k+1} = 5 \cdot 3^{k-1} \cdot 3 - 1$.

נציב את כלל הנסיגה הנתון שעל פיו מתקיים: $a_{k+1} = 3a_k + 2$.

נקבל שצריך להוכיח: $3a_k + 2 = 5 \cdot 3^{k-1} \cdot 3 - 1$.

על פי הנחת האינדוקציה ניתן להחליף את a_k בביטוי $(5 \cdot 3^{k-1} - 1)$.

נבצע החלפה זו ונקבל שנוותר להוכיח: $3(5 \cdot 3^{k-1} - 1) + 2 = 5 \cdot 3^{k-1} \cdot 3 - 1$.

לאחר פתיחת סוגריים נקבל שצריך להוכיח: $3 \cdot 5 \cdot 3^{k-1} - 3 + 2 = 5 \cdot 3^{k-1} \cdot 3 - 1$.

ניתן לראות ששני האגפים שווים.

בדקנו שהנוסחה ל- a_n נכונה עבור $n = 1$.

הראנו שמהנחה שהנוסחה נכונה עבור $n = k$ נובע שהיא נכונה עבור $n = k + 1$

ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהנוסחה נכונה עבור כל n טבעי.

תרגילים

1. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $a_1 = 1$. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $a_n = n^2$.

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי לפי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + n + 1$, $a_1 = 1$. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים: $a_n = \frac{n^2 + n}{2}$.

3. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1$, $a_2 = 8$. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים: $a_n = n^3$.

4. סדרה מוגדרת לכל n טבעי לפי כלל הנסיגה: $a_3 = 8$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים: $a_n = 2^n$.

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי:

5. אם $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 18n + 3$, אז $a_n = (3n-1)^2$.

6. אם $a_1 = 6$, $a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 13n + 6$, אז $a_n = n^2(n+5)$.

7. אם $a_1 = -2$, $a_{n+1} = 2a_n + 4$, אז $a_n = 2^n - 4$.

8. אם $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n - 2(-1)^n + 3$, אז $a_n = 3n + (-1)^n$.

9. אם $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$, אז $a_n = n$.

10. אם $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot a_n$, אז $a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

11. אם $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$, אז $a_n = n!$.

12. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot t^{2n+1}$ (t מספר טבעי). הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי: $a_n = t^{n^2-1}$.

13. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$$

- א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי: $a_n = 2^n + 1$.
 ב. הוכיחו שעבור כל n טבעי: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2^{n+1} + n - 2$.

14. נתונה סדרה המקיימת לכל n טבעי: $a_n = n(3n-1)$.
 א. מצאו כלל נסיגה לסדרה זו.
 ב. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2(n+1)$.
 ג. חשבו את הסכום: $21 \cdot 62 + 22 \cdot 65 + \dots + 50 \cdot 149$.

15. סדרה מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $a_1 = 6$, $a_{n+1} = 2a_n - n - 2$.

הסדרה b_n מקיימת לכל n טבעי: $b_n = 2^n + n + 3$.

א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים: $a_n = b_n$.

ב. הוכיחו באינדוקציה: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2^{n+1} + \frac{n^2 + 7n - 4}{2}$.

16. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 8n$.

מגדירים סדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ לפי $b_n = a_{n+1} - a_n$.

הוכיחו באינדוקציה: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = a_{n+1}$.

17. סדרה מוגדרת לכל n טבעי לפי: $a_n = n + 5 + b_n$, כאשר $b_n = 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + \dots + 6n$.

א. מצאו נוסחה ל- a_n כפונקציה של n בלבד.

ב. הוכיחו באינדוקציה: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+2} = \frac{(n+2)(2n^2 + 15n + 37)}{2}$.

18. נתונות שתי הגדרות שונות, בעזרת כלל נסיגה, לאותה סדרה:

$$a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 1 - a_n, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

מצאו נוסחה ל- a_n באמצעות n בלבד.

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

19. אם $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, אז $a_n = n + 2$.

20. אם $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, אז $a_n = n^2$.

תשובות:

14. א. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 6n + 2$. ג. 119100. **17.** א. $3n^2 + 4n + 5$. **18.** $a_n = n^2$.

אינדוקציות – שאלות לחזרה

שאלות לחזרה עם אישור זהויות

1. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + \dots + n(n+1)(2n+1) = \frac{(n+1)^4 - (n+1)^2}{2}$$
 ב. נתון שסכום הטור הוא 14196. מהו האיבר האחרון בטור?
2. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{(n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2)}{4}$$
 ב. מצאו את n , אם נתון : $2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = 1974$
3. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים :

$$\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$
 ב. חשבו את הסכום : $-\frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \dots + \frac{35}{306}$
 ג. מצאו את האיבר האחרון בטור שמשמאל, אם סכום הטור הוא $\frac{18}{19}$.
4. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
 ב. a ו- b הם מספרים טבעיים. נתון : $a > b > 1$.
 הוכיחו כי מתקיים : $b(b+1) + (b+1)(b+2) + \dots + a(a+1) = \frac{a^3 + 3a^2 + 2a - b^3 + b}{3}$
5. א. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים :

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+5)} = \frac{5}{12} - \frac{2n+9}{2(n+4)(n+5)}$$
 ב. מצאו את k אם נתון : $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{k(k+2)} = \frac{57}{154}$
6. א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים :

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$$
 ב. t הוא מספר טבעי. מצאו אותו אם נתון :

$$\frac{1}{(4t-1)(4t+3)} + \dots + \frac{1}{39 \cdot 43} = \frac{7}{645}$$

7. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
 ב. היעזרו בסעיף א' ומצאו נוסחה לסכום: $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3$
 ג. היעזרו בסעיף א' ומצאו נוסחה לסכום: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n)^3$
 ד. היעזרו בסעיפים ב' ו-ג' ומצאו נוסחה לסכום: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$

8. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 ב. הביע באמצעות n את הסכום: $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2$
 ג. היעזרו בסעיפים הקודמים ומצאו נוסחה ל- $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$

9. נתון הטור: $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

נסמן ב- S_n את סכום n איברי הטור הראשונים.
 להלן רשומות שלוש נוסחאות ל- S_n :

$$S_n = \frac{n^2 + 12n + 2}{30(n+2)} \quad (3) \quad S_n = \frac{n}{2n+4} \quad (2) \quad S_n = \frac{n+1}{4n+8} \quad (1)$$

הראו כי שתיים מבין שלוש הנוסחאות הללו אינן מייצגות את סכום n איברי הטור הראשונים, והוכיחו באינדוקציה כי הנוסחה שנותרה ל- S_n אכן מייצגת את סכום n איברי הטור הראשונים.

10. א. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{(2-p)!}{p} + \frac{(3-p)!}{p^2} + \frac{(4-p)!}{p^3} + \dots + \frac{(n+1-p)!}{p^n} = \frac{(n+1)!}{p^n} - 1$$

 ב. חשבו בעזרת סעיף א' את הסכום: $\frac{0.5 \cdot 1!}{1.5} + \frac{1.5 \cdot 2!}{1.5^2} + \frac{2.5 \cdot 3!}{1.5^3} + \dots + \frac{9.5 \cdot 10!}{1.5^{10}}$

תשובות:

1. ב. 3900. 2. ב. 8. 3. ב. $-\frac{1}{9}$. ג. $-\frac{37}{342}$.
 4. ב. $k = 20$. 5. ב. $t = 4$.
 6. ב. $2n^2(n+1)^2$. ג. $n^2(2n+1)^2$. ד. $n^2(2n^2-1)$.
 7. ב. $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. ג. $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
 8. 9. (1) ו- (3) אינן מייצגות. 10. ב. 692,217.38.

שאלות לחזרה עם התלכדות של סדרות

11. סדרה מוגדרת לכל n טבעי לפי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 2a_n - 3(-1)^n$, $a_1 = 1$.
הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $a_n = 2^n + (-1)^n$.

12. סדרה מוגדרת לכל n טבעי לפי הכלל: $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$, $a_1 = -1$.
סדרה נוספת $b_1, b_2, b_3, \dots$ מקיימת לכל n טבעי: $b_n = 2^n - n$.
הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים: $b_n = a_n + 2$.

13. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי: $a_{n+1} = a_n + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, $a_1 = 1$.
הסדרה b_n מקיימת לכל n טבעי: $b_n = n^3$.
הוכיחו באינדוקציה: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = a_n$.

14. סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 6$.
א. הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית.
ב. הוכיחו באינדוקציה: $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = 3(2^{n+2} - 2n - 4)$.

שאלות לחזרה עם הוכחת תכונות התחלקות

15. נתונים שלושה מספרים זוגיים עוקבים.
הוכיחו באינדוקציה שסכום החזקות השלישיות של שלושת המספרים מתחלק ב-18 ללא שארית.

16. א. הוכיחו שאם בשביל n טבעי מסוים הביטוי $10^n + 1$ מתחלק ב-11 ללא שארית, אזי גם בשביל $(n+2)$ הביטוי מתחלק ב-11 ללא שארית.
ב. קבעו איזו משתי הטענות 1 או 2 היא נכונה, ונמקו את קביעתכם:
1. הביטוי $10^n + 1$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי זוגי.
2. הביטוי $10^n + 1$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

17. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $5^{n+1} - 4n + 11$ מתחלק ב-16 ללא שארית.
ב. בהסתמך על סעיף א' בלבד הוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $5^{n+2} + 12n + 7$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

18. א. הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי הביטוי $8^n - 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית.
ב. האם קיים n טבעי שעבורו $8^n - 3^n$ מתחלק ב-10 ללא שארית? נמקו.

19. הוכיחו ללא עזרת אינדוקציה שעבור כל n טבעי אי-זוגי :
 א. הביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-24 ללא שארית.
 ב. הביטוי $(n^2 - 1)(n^2 - 9)$ מתחלק ב-384 ללא שארית.
20. א. הוכיחו שלכל n טבעי הביטוי $9^n - 2^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו ללא אינדוקציה, שלכל n טבעי הביטוי $81^n - 2 \cdot 18^n + 4^n$ מתחלק ב-49 ללא שארית.
21. א. הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי זוגי הביטוי $n^2 + 10n$ מתחלק ב-8 ללא שארית.
 ב. a ו- b הם מספרים זוגיים.
 היעזרו בסעיף א' והראו כי אם $a^2 + b^2$ מתחלק ב-8 ללא שארית,
 הרי $5a + 5b$ מתחלק ב-4 ללא שארית.
22. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הסכום $2^{n+3} + 2^{n+4} + 2^{n+5} + \dots + 2^{5n+2}$ מתחלק ב-240 ללא שארית.
 ב. הראו (ללא מחשבון) שהסכום $2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{12}$ מתחלק ב-80 ללא שארית וגם מתחלק ב-60 ללא שארית.
23. הוכיחו כי הביטוי $2^n - 1$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי המתחלק ב-3 ללא שארית.
24. הוכיחו כי הביטוי $3^n + 105 \cdot 2^{n+1}$ מתחלק ב-211 ללא שארית לכל n טבעי המתחלק ב-5 ללא שארית.
25. הוכיחו כי הביטוי $2^n + 5$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי המשאיר שארית 1 כשמחלקים אותו ב-3.
26. א. הוכיחו כי הביטוי $2^n + 22$ מתחלק ב-15 ללא שארית לכל n טבעי המשאיר שארית 3 שמחלקים אותו ב-4.
 ב. הוכיחו, ללא עזרת מחשבון, ש- $2^{11} + 7$ מתחלק ב-15 ללא שארית.
27. הוכיחו כי הביטוי $n^2 + 8n + 16$ מתחלק ב-100 ללא שארית לכל n טבעי המסתיים בספרה 6.
28. א. נתון x מספר ששונה מ-1. הוכיחו שעבור כל n מתקיים: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$
 ב. בעזרת סעיף א' הוכיחו ש- $9^n + 7$ מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי.
29. הוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $(n^2 + 5n + 5)^2 - 1$ מתחלק ב-24 ללא שארית.

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתחלק ללא שארית:

30. $n(7^n - n^2)$ ב-6 31. $1 + (4n-1)5^n$ ב-16

32. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי הביטוי $4n \cdot 5^{n+1} - 21 \cdot 5^n + 21$ מתחלק ב-16 ללא שארית.
ב. הוכיחו לפי סעיף א' ש- $12 \cdot 5^4 - 21 \cdot 5^3$ משאיר שארית 11 כאשר מחלקים אותו ב-16.

33. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_1 = 40$, $a_{n+1} = 6a_n - 170$.
הוכיחו כי כל איברי הסדרה, הנמצאים במקומות הזוגיים, מתחלקים ב-35 ללא שארית.

34. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_1 = 48 \\ a_{n+1} = 5a_n + 4 \end{cases}$$

הוכיחו: כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ($a_1, a_3, \dots$) מתחלקים ב-24 ללא שארית
ואילו כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים ($a_2, a_4, \dots$) אינם מתחלקים ב-24 ללא שארית.

35. נתון הטור ההנדסי: $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{5n-1}$.
א. הביעו באמצעות n את סכום הטור.
ב. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שעבור כל n טבעי סכום הטור מתחלק ב-31 ללא שארית.

36. א. הוכיחו כי עבור כל n טבעי הביטוי $(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n)(5^{n+1} + 7) + 4$ הוא ריבוע של מספר שלם.
ב. הוכיחו שהביטוי שבסעיף א' מתחלק ב-4 ללא שארית.

37. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $\frac{(2n)!}{n!}$ מתחלק בביטוי 2^n ללא שארית.

38. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $p^{n+1} - (p-1)n - p$ מתחלק ב- $(p-1)^2$ ללא שארית. p הוא מספר טבעי.
ב. הוכיחו לפי סעיף א' שהביטוי $p^5 - 5p + 4$ מתחלק ב- $(p-1)$ ללא שארית.

39. א. הוכיחו את הזהות: $2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$.
ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי הביטוי $2^{(2^n)} - 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

40. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי $3^{(2^n)} - 1$ מתחלק ב-8 ללא שארית.

41. א. הוכיחו שלכל a ו- b מתקיים: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $2^{(3^n)} - 1$ מתחלק ב-7 ללא שארית.
42. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $3^{(3^n)} + 1$ מתחלק ב-7 ללא שארית.
43. א ו- b הם מספרים טבעיים.
 הראו כי אם עבור n טבעי כלשהו הביטוי $a^{(2^n)} - b^{(2^n)}$ מתחלק ב-4 ללא שארית, הרי גם עבור $(n+1)$ הביטוי מתחלק ב-4 ללא שארית.
44. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי אי-זוגי הביטוי $(a+b)^n - a^n - b^n$ מתחלק ב- $ab(a+b)$ ללא שארית. (א ו- b הם מספרים טבעיים).
 ב. הוכיחו (ללא עזרת מחשבון) ש- $2^7 - 5^7 - 7^7$ מתחלק ב-70 ללא שארית.
45. א. הוכיחו ללא אינדוקציה שעבור כל n טבעי אי-זוגי הביטוי $n^2 + 2n + 2$ אינו מתחלק ב-8 ללא שארית.
 ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי זוגי הביטוי $n^2 + 2n + 2$ אינו מתחלק ב-8 ללא שארית.
 ג. היעזרו בסעיפים קודמים והוכיחו שעבור כל n טבעי הביטוי $n^2 + 2n + 2$ אינו מתחלק ב-8 ללא שארית.
46. הוכיחו שעבור כל n טבעי $n^3 - 4n + 4$ אינו מתחלק ב-48 ללא שארית.
47. א. הוכיחו כי עבור כל n טבעי, הסכום $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{4n-1}$ מתחלק ב-15 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו שעבור כל n טבעי שמתחלק ב-4 ללא שארית, הסכום $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$ מתחלק ב-15 ללא שארית.
48. א. הוכיחו שעבור כל n טבעי הביטוי $2n^3 + 3n^2 + n$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 ב. נתון: a ו- b הם מספרים טבעיים, הביטוי $a^2 + b^2$ מתחלק ב-2 ללא שארית. הוכיחו: הביטוי $2(a^3 + b^3) + (a+b)$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
49. א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי השארית המתקבלת כאשר מחלקים את $27^n + k$ ב-26 היא $k+1$ (k מספר טבעי שקטן מ-25).
 ב. נתון כי כאשר מחלקים את $27^6 + k$ ב-26 מקבלים מספר שלם b ושארית $k+1$. מצאו את הערך של b .

50. א. הוכיחו שלכל n טבעי $2^{n-1} \cdot 5^n + 2 \cdot 10^{n-1}$ מתחלק ב-7 ללא שארית.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו שעבור כל n טבעי שגדול או שווה ל-2, $2^{n-1} \cdot 5^n + 2 \cdot 10^{n-1}$ מתחלק ב-70 ללא שארית.
 ג. היעזרו בסעיפים קודמים והוכיחו שעבור כל n טבעי שגדול או שווה ל-3, $2^{n-1} \cdot 5^n + 2 \cdot 10^{n-1}$ מתחלק ב-700 ללא שארית.
51. הוכיחו כי הביטוי $2^{(2^n)}$ מסתיים בספרה 6 לכל n טבעי הגדול מ-1.
52. א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי הגדול או שווה ל-2, הביטוי $2^{(2^n)} - 6$ מתחלק ב-10 ללא שארית.
 ב. הוכיחו שלכל n טבעי הגדול או שווה ל-2, הביטוי $2^{(2^{n+1})} - 12 \cdot 2^{(2^n)} + 36$ מתחלק ב-100 ללא שארית.
53. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי: $a_1 = 14$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$.
 הוכיחו באינדוקציה כי a_n מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי המשאיר שארית 1 כשמחלקים אותו ב-3.
54. p הוא מספר טבעי.
 א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הביטוי $n \cdot p^{n+1} - (n+1)p^n + 1$ מתחלק ב- $(p-1)^2$ ללא שארית.
 ב. הוכיחו שהביטוי $3p^4 - 4p^3 + 1$ מתחלק ב- $(p-1)^2$ ללא שארית.
 ג. הוכיחו לפי סעיף א' ש- $3 \cdot 5^4 - 4 \cdot 5^3 - 15$ מתחלק ב-8 ללא שארית.
55. א. p הוא מספר שלם. נתון כי הביטוי $p - 16$ מתחלק ב-21 ללא שארית.
 (1) הוכיחו כי הביטוי $p^4 - 16^4$ מתחלק ב-21 ללא שארית.
 (2) הוכיחו כי הביטוי $p^4 - 16$ מתחלק ב-21 ללא שארית.
 ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי הביטוי $2^{(4^n)} - 16$ מתחלק ב-21 ללא שארית.
 ג. האם ניתן להסיק על סמך ההוכחה שבסעיף ב', כי הביטוי $2^8 - 16$ מתחלק ב-21 ללא שארית? נמקו ללא שימוש במחשבון.
56. א. הוכיחו את הזהות: $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.
 ב. היעזרו בסעיף א' והוכיחו שעבור כל n טבעי הביטוי $n^4 - n^2$ מתחלק ב-12 ללא שארית.
57. א. הוכיחו שעבור כל p מתקיים: $(p+1)^5 = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1$.
 ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל p טבעי הביטוי $p^5 - p$ מתחלק ב-30 ללא שארית.
 ג. נתון p מספר טבעי.
 הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי זוגי הביטוי $p^{2^{n+1}} - p$ מתחלק ב-30 ללא שארית.

תשובות:

16. ב. טענה 2. 18. ב. לא. 35. א. $2^{5n} - 1$. 49. ב. 14900788. 55. ג. לא.