

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון שני

#### הוראות

- א. משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.  
פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק –  $3 \times \frac{1}{3} = 100$  נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:  
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.  
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:  
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.  
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.  
יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.  
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

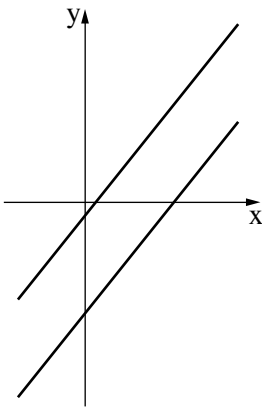
השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

**בהצלחה!**

## השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה –  $33\frac{1}{3}$  נקודות).  
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

### פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים



1. בסרטוט שלפניכם שני ישרים:

$$\text{I. } -4x + 3y + 2 = 0$$

$$\text{II. } -4x + 3y + 27 = 0$$

נתון מעגל שמרכזו נמצא על ישר II. המעגל משיק לישר I ולציר ה- $x$ .

א. (1) מצאו את רדיוס המעגל.

(2) מצאו את שתי האפשרויות למשוואת המעגל.

הנקודות  $M_1$  ו- $M_2$  הן מרכזי המעגלים שמצאתם בסעיף א.

שיעור ה- $x$  של הנקודה  $M_1$  גדול משיעור ה- $x$  של הנקודה  $M_2$ .

המעגל שמרכזו  $M_2$  משיק לציר ה- $x$  בנקודה A.

ב. מצאו את שטח המשולש  $M_1AM_2$ .

הישר  $x = a$  משיק למעגל שמרכזו  $M_1$ .

נתון:  $a > 10.5$ .

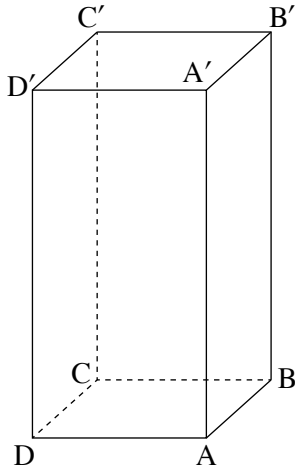
ג. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מן הישר  $x = a$  גדול פי  $\sqrt{\frac{31}{6}}$  ממרחקן מן הנקודה A,

$$\text{הוא אליפסה שמשוואתה } \frac{x^2}{46.5} + \frac{y^2}{37.5} = 1$$

F הוא המוקד השמאלי של האליפסה שמצאתם בסעיף ג.

הנקודה E נמצאת על האליפסה כך ששיעור ה- $y$  שלה שונה מ-0.

ד. האם ייתכן ששטח המשולש FEA גדול משטח המשולש  $M_1AM_2$ ? נמקו את תשובתכם.



2. בסרטוט שלפניכם תיבה  $ABCD A' B' C' D'$ .

נסמן:  $\vec{AA'} = \underline{w}$ ,  $\vec{AB} = \underline{v}$ ,  $\vec{AD} = \underline{u}$ .

הנקודה E היא אמצע המקצוע  $BB'$ .

א. הביעו את  $\vec{EA}$  ו-  $\vec{EC}$  באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו-  $\underline{w}$ .

הנקודה M מקיימת  $\vec{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$ .

ב. הביעו את  $\vec{EM}$  באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו-  $\underline{w}$ .

נתון:  $\vec{EM} = a \cdot \vec{EA} + b \cdot \vec{EC}$ .

a ו- b הם פרמטרים.

ג. (1) מצאו את הערך של a ואת הערך של b.

(2) האם הנקודה M נמצאת במישור AEC? נמקו את תשובתכם.

נתון כי  $|\underline{w}| = 4$  והווקטור  $\vec{BM}$  מאונך למישור AEC.

ד. מצאו את הערך של  $|\underline{u}|$  ואת הערך של  $|\underline{v}|$ .

ה. חשבו את המרחק בין הנקודה B ובין המישור AEC.

3. נתונה המשוואה  $z^3 = -64$ .

$z$  הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha)$$

$$50^\circ < \alpha < 130^\circ$$

שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים  $w_1$  ו- $w_2$  נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך ראשית הצירים  $O$  במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של  $\alpha$ .

נתון כי  $w_1$  הוא אחד מן הפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של  $\alpha$  ואת הערך של  $r$ .

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים:  $w_3 = 4 \cdot i$ ,  $w_4 = \frac{8}{i}$ .

ABCD הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר  $w_1$ , הקודקוד B מיוצג על ידי המספר  $w_3$ ,

הקודקוד C מיוצג על ידי המספר  $w_2$ , והקודקוד D מיוצג על ידי המספר  $w_4$ .

ד. הראו כי שטח המרובע ABCD הוא 36.

הוא מספר מרוכב. הנקודה E, שמיוצגת על ידי המספר  $u$ , נמצאת ברביע הראשון על חוצה הזווית BOA.

נתון כי  $|\bar{u} + \frac{1}{u}| = 5.2 \cdot (\cos 285^\circ + i \cdot \sin 285^\circ)$ ,  $|u| > 1$ .

ה. מצאו את המספר המרוכב  $u$ .

## פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה  $f(x) = x^n \cdot (3 - \ln x)$ , המוגדרת בתחום  $x > 0$ .

$n$  הוא פרמטר טבעי.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 2.

ב. מצאו את הערך של  $n$ .

הציבו  $n = 1$  בפונקצייה  $f(x)$ , וענו על הסעיפים ג-ו.

ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $g(x)$ .

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה  $g(x)$ .

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$ .

$a$  הוא פרמטר,  $1 < a < 3$ .

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = e$  ו- $x = e^a$  הוא  $\ln 10$ .

ו. מצאו את הערך של  $a$ .

5. נתונה הפונקצייה  $f(x) = 4e^x - x + 9 \cdot \ln(4 - e^x)$ .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ב. הראו כי  $f'(x) = \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$ .

ג. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$  המקביל לציר ה- $x$ .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

(2) לפונקצייה  $f(x)$  יש נקודת פיתול אחת בלבד. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $x < \ln 4$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = f(x) + ax$ , שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

$a$  הוא פרמטר.

ו. היעזרו בגרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , ומצאו בעבור אילו ערכים של  $a$  יש לפונקצייה  $g(x)$  שתי נקודות קיצון.

נמקו את תשובתכם.

### בהצלחה!