

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
- פרק ראשון – אלגברה והסתברות
 - פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
 - פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
- יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

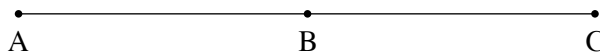
בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8, על שאלה אחת לפחות מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. היישובים A, B ו-C נמצאים על ישר אחד. היישוב B נמצא באמצע הקטע AC (ראו סרטוט).

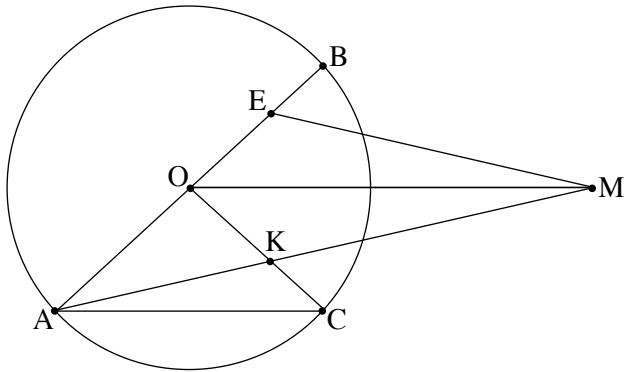


- הולך רגל יצא בשעה 9:00 מן היישוב B והלך במהירות קבועה ליישוב A.
רוכב אופניים יצא בשעה 9:00 מן היישוב B ורכב במהירות קבועה ליישוב C.
כאשר הגיע הרכב האופניים ליישוב C, הוא מייד יצא חזרה ליישוב B באותה המהירות שבה רכב קודם.
כאשר הגיע הרכב האופניים חזרה ליישוב B, עבר הולך הרגל $\frac{2}{3}$ מן המרחק בין היישוב B ליישוב A.
א. מצאו פי כמה גדולה המהירות של הרכב האופניים מן המהירות של הולך הרגל.
כאשר הגיע הרכב האופניים חזרה ליישוב B, הוא נח במשך שעה, ולאחר מכן יצא ליישוב A באותה המהירות שבה רכב קודם.
כאשר הגיע הולך הרגל ליישוב A הוא מייד יצא חזרה ליישוב B באותה המהירות שבה הלך קודם.
6 דקות לאחר שיצא הרכב האופניים מן היישוב B ליישוב A הוא פגש את הולך הרגל שהיה בדרכו חזרה מן היישוב A.
נסמן ב- v את המהירות של הולך הרגל.
ב. הראו כי המרחק בין היישוב A ליישוב C הוא $2.1v$.
ביום המוחרת, יצאו באותה השעה הרכב האופניים והולך הרגל מן היישוב C ליישוב A.
רוכב האופניים רכב במהירות קטנה ב-1 קמ"ש מן המהירות שלו ביום הקודם, והולך הרגל במהירות גדולה ב-2 קמ"ש מן המהירות שלו ביום הקודם.
45 דקות לפני שהגיע הולך הרגל ליישוב A, הגיע ליישוב זה הרכב האופניים.
ג. מצאו את המרחק בין היישוב A ליישוב C.

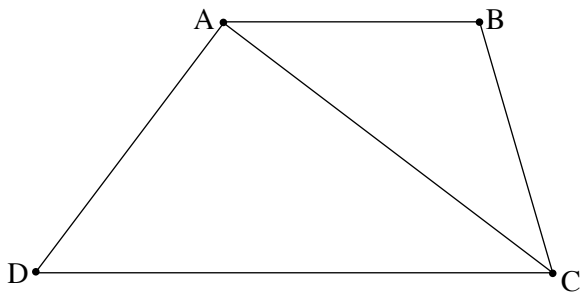
2. a_n היא סדרה הנדסית אינסופית עולה שמנתה היא q .
 b_n היא סדרה הנדסית אינסופית עולה שמנתה היא $2q$.
 c_n היא סדרה אינסופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.
 א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.
 נתון: $a_1 = b_1$, $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$.
 ב. מצאו את הערך של q .
 ג. (1) האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.
 (2) האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.
 נסמן ב- S_1 את סכום הסדרה a_n , ב- S_2 את סכום הסדרה b_n וב- S_3 את סכום הסדרה c_n .
 נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.
 ד. מצאו את הערך של a_1 .

3. בשק א' ובשק ב' יש כדורים משני סוגים: כדורים רכים וכדורים קשים.
 בשק א' יש 10 כדורים, מתוכם 4 כדורים רכים והשאר קשים.
 בשק ב' יש 12 כדורים, מתוכם x כדורים רכים והשאר קשים.
 גלית בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).
 נתון כי ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{41}{200}$.
 א. מצאו את הערך של x .
 ב. ידוע שגלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים משק א'?
 גלית מבצעת את התהליך המתואר לפניכם 4 פעמים:
 היא בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).
 ג. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים?
 ד. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים ובשתיים מן הפעמים רק כדורים רכים?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



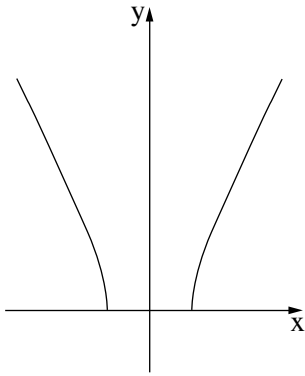
4. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O .
 AB הוא קוטר במעגל.
 הנקודה C נמצאת על המעגל.
 הנקודה M נמצאת מחוץ למעגל
 כך שהקטע AM חותך את הקטע CO בנקודה K .
 הנקודה E נמצאת על הקטע BO כך שהמרובע EMKO הוא דלתון ($MK = ME, OK = OE$).
 א. הוכיחו כי $BC \parallel EK$.
 ב. הוכיחו כי $OM \parallel AC$.
 נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.
 ג. מצאו את הערך של $\frac{OM}{AC}$.
 נסמן ב־ S את שטח הדלתון EMKO .
 ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC .



5. בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD שלפניכם ($AB \parallel DC$).
 נתון כי אורך הבסיס AB שווה לאורך הצלע BC .
 נסמן: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\sphericalangle ACB = \alpha$, $AB = BC = k$.
 א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos \alpha$.
 נתון: $DC = 2k$, $AD = 1.2k$.
 ב. מצאו את הערך של α .
 ג. מצאו את גודל הזווית ADC .
 המשכי הצלעות DA ו־ CB נחתכים בנקודה E .
 נתון כי האורך של רדיוס המעגל החסום במשולש EDC הוא 14 .
 ד. מצאו את הערך של k .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{ax}{(x-3)^2}$, המוגדרת בתחום $x \neq 3$.
 a הוא פרמטר חיובי.
- א. ענו על התת-סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
 (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) + 0.5$, המוגדרת בתחום $x \neq 3$.
 נתון כי לגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה- x .
 ג. מצאו את הערך של a .
 הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.
 נתונה הפונקצייה $h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x \neq 3$.
 ד. (1) רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.
 (2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-9 \leq x \leq 0$.
7. נתונה הפונקצייה $f(x) = (1 + \cos x) \cdot (-1 + b \cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 b הוא פרמטר.
 נתון: $0 < b < 1$.
- א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.
 ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.
 ג. מצאו את הערך של b .
 הציבו $b = \frac{1}{2}$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.
 ד. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- נתונה הפונקצייה $h(x) = f(x) + |f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקצייה $h(x)$.
 ה. האם שיעור ה- y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

נתון הישר $y = 3x - 3$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־ y וחותך את הישר הנתון בנקודה B.

ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את הישר הנתון בנקודה C.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A.

ג. (1) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־AC הוא מקסימלי.

בהצלחה!