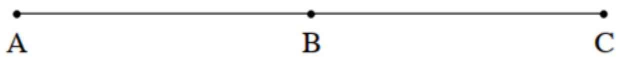
פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ו, 2026, שאלון 35581:

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. היישובים A, B ו־ C נמצאים על ישר אחד. היישוב B נמצא באמצע הקטע AC (ראו סרטוט).



הולך רגל יצא בשעה 9:00 מן היישוב B והלך במהירות קבועה ליישוב A.

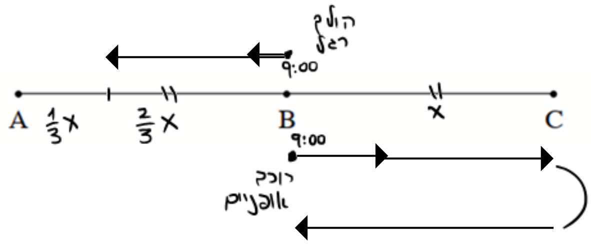
רוכב אופניים יצא בשעה 9:00 מן היישוב B ורכב במהירות קבועה ליישוב C.

כאשר הגיע רוכב האופניים ליישוב C, הוא מייד יצא חזרה ליישוב B באותה המהירות שבה רכב קודם.

כאשר הגיע רוכב האופניים חזרה ליישוב B, עבר הולך הרגל $\frac{2}{3}$ מן המרחק בין היישוב B ליישוב A.

א. מצאו פי כמה גדולה המהירות של רוכב האופניים מן המהירות של הולך הרגל.

	זמן t	מהירות V	דרך S
הולך רגל	$\frac{\frac{2}{3}x}{V_1}$	V_1	$\frac{2}{3}x$
רוכב אופניים	$\frac{2x}{V_2}$	V_2	$2x$



$$\frac{\frac{2}{3}x}{V_1} = \frac{2x}{V_2} \quad /:x\neq0 \qquad \frac{2}{3}V_2 = 2V_1 \quad /:\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = 3$$

מהירות רוכב האופניים גדולה פי 3 ממהירות הולך הרגל.

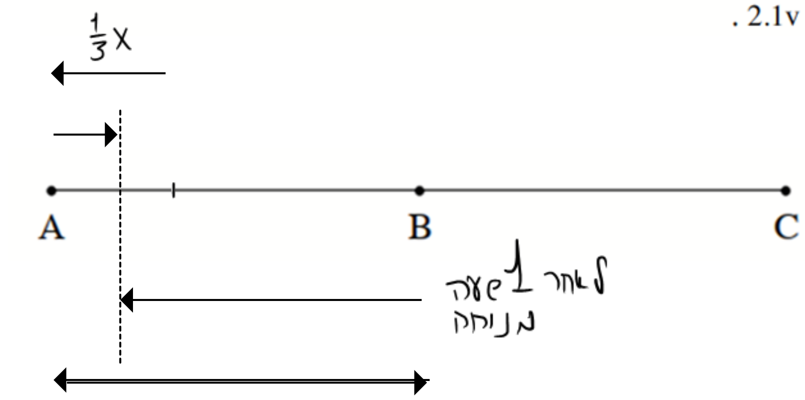
כאשר הגיע רוכב האופניים חזרה ליישוב B, הוא נח במשך שעה, ולאחר מכן יצא ליישוב A באותה המהירות שבה רכב קודם.

כאשר הגיע הולך הרגל ליישוב A הוא מייד יצא חזרה ליישוב B באותה המהירות שבה הלך קודם.

6 דקות לאחר שיצא רוכב האופניים מן היישוב B ליישוב A הוא פגש את הולך הרגל שהיה בדרכו חזרה מן היישוב A.

נסמן ב־ v את המהירות של הולך הרגל.

ב. הראו כי המרחק בין היישוב A ליישוב C הוא 2.1v.



$V_1 = V$ הולך הרגל

$V_2 = 3V$ רוכב האופניים

	t שעות	V קמ"ש	S ק"מ
רוכב אופניים	$\frac{6}{60} = 0.1$	$3V$	$0.3V$
הולך רגל	$1 + \frac{6}{60} = 1.1$	V	$1.1V$

יחד

$$x + \frac{1}{3}x = 0.3V + 1.1V$$

$$1\frac{1}{3}x = 1.4V \quad /:1\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{21}{20}V$$

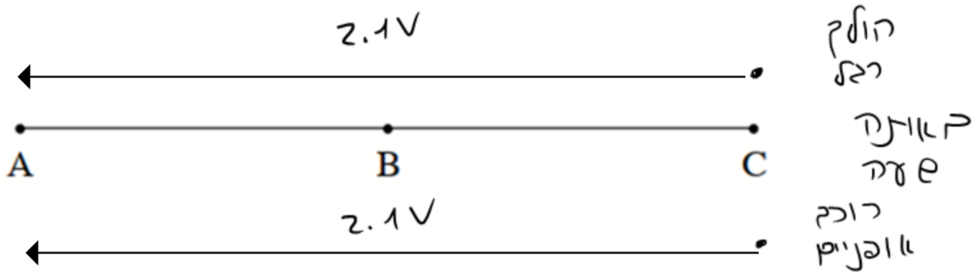
$$AC = 2x = \frac{21}{10}V = \underline{\underline{2.1V}}$$

ביום המוחרת, יצאו באותה השעה רוכב האופניים והולך הרגל מן היישוב C ליישוב A.

רוכב האופניים רכב במהירות קטנה ב־ 1 קמ"ש מן המהירות שלו ביום הקודם, והולך הרגל הלך במהירות גדולה ב־ 2 קמ"ש מן המהירות שלו ביום הקודם.

45 דקות לפני שהגיע הולך הרגל ליישוב A, הגיע ליישוב זה רוכב האופניים.

ג. מצאו את המרחק בין היישוב A ליישוב C.



S	v	t	
$2.1V$	$V+2$	$\frac{2.1V}{V+2}$	הולך רגל
$2.1V$	$3V-1$	$\frac{2.1V}{3V-1}$	רוכב אופניים

45 דק' $= \frac{3}{4}$ שעה

$$\frac{2.1V}{V+2}^{/4(3V-1)} = \frac{2.1V}{3V-1}^{/4(V+2)} + \frac{3}{4}^{/(V+2)(3V-1)} \quad \Big/ \cdot 4(V+2)(3V-1)$$

$$8.4V(3V-1) = 8.4V(V+2) + 3(V+2)(3V-1)$$

$$25.2V^2 - 8.4V = 8.4V^2 + 16.8V + 3(3V^2+5V-2)$$

$$16.8V^2 - 25.2V = 9V^2 + 15V - 6$$

$$7.8V^2 - 40.2V + 6 = 0$$

$\underline{\underline{V=5}}$, $V=\frac{2}{13}$ פסול

עבור $V=\frac{2}{13}$ מהירות רוכב האופניים שלילית

$AC = 2.1V \Rightarrow \boxed{AC = 10.5 \text{ ק"מ}}$

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא q.

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא $2q$.

c_n היא סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.

א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.

נתון: $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$, $a_1 = b_1$.

ב. מצאו את הערך של q.

ג. **(1)** האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

(2) האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.

נסמן ב־ S_1 את סכום הסדרה a_n, ב־ S_2 את סכום הסדרה b_n וב־ S_3 את סכום הסדרה c_n.

נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

ד. מצאו את הערך של a_1.

א'.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \cdot 2q = 2q^2$$

$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = 2q^2}$$

ב'.

$a_1 = b_1$, $c_2 = \frac{1}{8}(a_1)^2$ $\quad a_2 = a_1 q \quad b_2 = b_1 \cdot 2q$

$$c_2 = a_2 \cdot b_2 = a_1 q \cdot b_1 \cdot 2q = 2q^2 \cdot a_1^2 = \frac{1}{8} \cdot a_1^2 \quad \Big\backslash : a_1^2 \neq 0$$

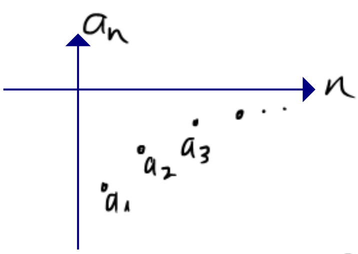
(כי a_n עולה)

$q^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{4}}$, $q = -\frac{1}{4}$ פסול

$q > 0$ כי a_n עולה

ג(1).

a_n סדרה הנדסית עולה ומתכנסת (כי $|q|<1$)



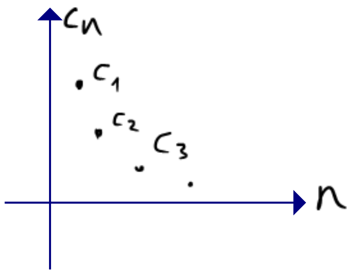
לכן $\boxed{a_1 \text{ שלילי}}$

ד (2). גם b_n מתכנסת ועולה ולכן $b_1<0$

$c_1=a_1b_1>0$

מנת $c_n = 2q^2 < 1$

c_n מתכנסת גם כן



$\boxed{c_n \text{ יורדת}}$

נסמן ב- S_1 את סכום הסדרה a_n, ב- S_2 את סכום הסדרה b_n וב- S_3 את סכום הסדרה c_n.

נתון: $S_1+S_2+S_3=434$.

ד. מצאו את הערך של a_1.

$$S_1=\frac{a_1}{1-q}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{a_1}{\frac{3}{4}}=\frac{4a_1}{3}$$

$$S_2=\frac{b_1}{1-2q}=\frac{a_1}{1-2q}=\frac{a_1}{1-2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{a_1}{\frac{1}{2}}=2a_1$$

$$S_3=\frac{c_1}{1-2q^2}=\frac{a_1b_1}{1-2\cdot\frac{1}{16}}=\frac{a_1^2}{1-\frac{1}{8}}=\frac{a_1^2}{\frac{7}{8}}=\frac{8a_1^2}{7}$$

$$\frac{4a_1}{3}+2a_1+\frac{8}{7}a_1^2=434$$

$$\frac{8}{7}a_1^2+3\tfrac{1}{3}a_1=434 \Rightarrow a_1=\frac{217}{12}$$

פסול לפי
סעיף ג(1)

$\boxed{a_1=-21}$

3. בשק א' ובשק ב' יש כדורים משני סוגים: כדורים רכים וכדורים קשים.

בשק א' יש 10 כדורים, מתוכם 4 כדורים רכים והשאר קשים.

בשק ב' יש 12 כדורים, מתוכם x כדורים רכים והשאר קשים.

גלית בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

נתון כי ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{41}{200}$.

א. מצאו את הערך של x.

ב. ידוע שגלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים מִשק א'?

גלית מבצעת את התהליך המתואר לפניכם 4 פעמים:

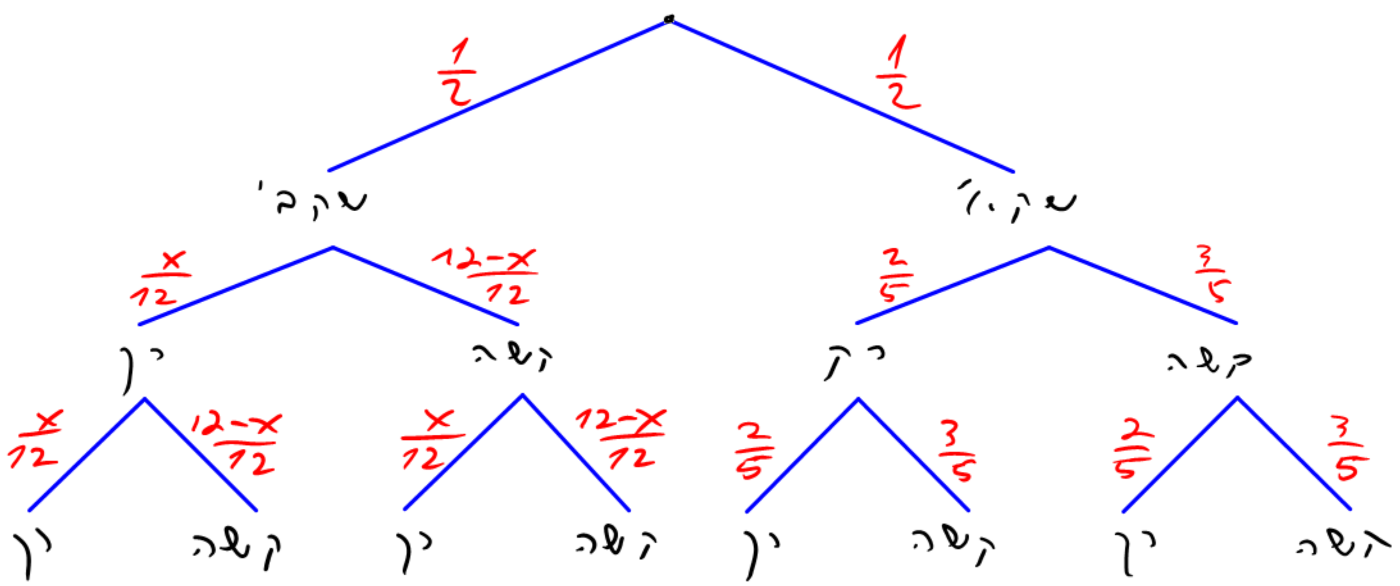
היא בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

ג. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים?

ד. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים ובשתיים מן הפעמים רק כדורים רכים?

פתרון:

א. נציג את הנתונים בדיאגרמת עץ



ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא: $\frac{41}{200}$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{12}\cdot\frac{x}{12}=\frac{41}{200}\quad /\cdot 2$$

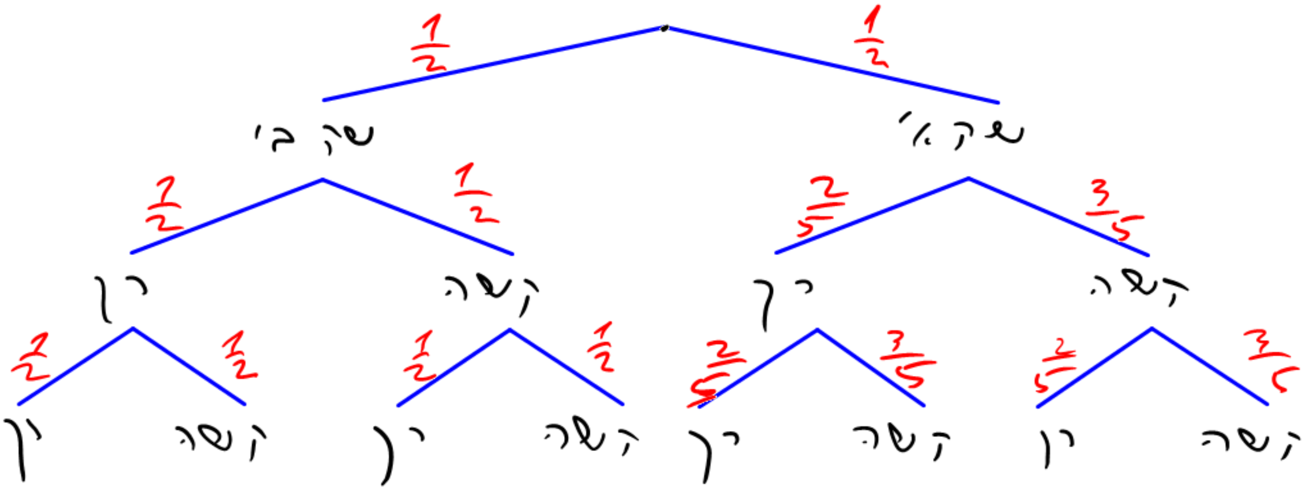
$$\frac{4}{25}+\frac{x^2}{144}=\frac{41}{100}$$

$$\frac{x^2}{144}=\frac{25}{100}\quad /\cdot 144$$

$$x^2=36\quad /\sqrt{\ }$$

$$x=\pm 6 \rightarrow \boxed{x=6}$$

ב. נציב $x=6$ בדיאגרמה:



כעת נחשב את ההסתברות המבוקשת. ע"י הסתברות מותנה:

$$P(\text{שני כדורים מאותו סוג / שני כדורים משק א'})=\frac{P(\text{שני כדורים מ.ו ומסוג משק א'})}{P(\text{שני כדורים מאותו סוג})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{13}{50}}{\frac{51}{100}}=\boxed{\frac{26}{51}}$$

2. נשתמש בנוסחת ברנולי. הפרמטרים הם:

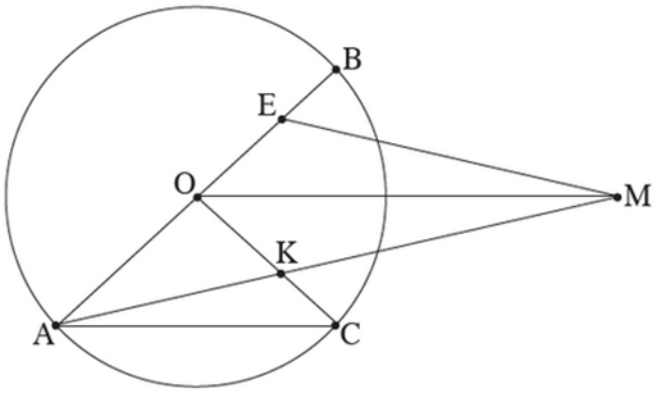
$n=4\ ,\ k=2\ ,\ P=P(\text{שני כדורים השל})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{61}{200}$

$$P_4(2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{61}{200}\right)^2\cdot\left(\frac{139}{200}\right)^2=\boxed{0.2696}$$

3. הסעיף הזה דומה לסעיף ג', רק שבמקום $1-P=\frac{139}{200}$ נציב את ההסתברות שבכל הוצאה פעמיים שני כדורים כחולים:

$P(\text{שני כדורים כחולים})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{41}{200}$

$$\boxed{P=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{61}{200}\right)^2\left(\frac{41}{200}\right)^2=0.023456}$$



.4 בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה C נמצאת על המעגל.

הנקודה M נמצאת מחוץ למעגל

כך שהקטע AM חותך את הקטע CO בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על הקטע BO כך שהמרובע EMKO

הוא דלתון $(MK = ME\ ,\ OK = OE)$.

א. הוכיחו כי $BC \parallel EK$.

ב. הוכיחו כי $OM \parallel AC$.

נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.

ג. מצאו את הערך של $\frac{OM}{AC}$.

נסמן ב־ S את שטח הדלתון EMKO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC.

פתרון:

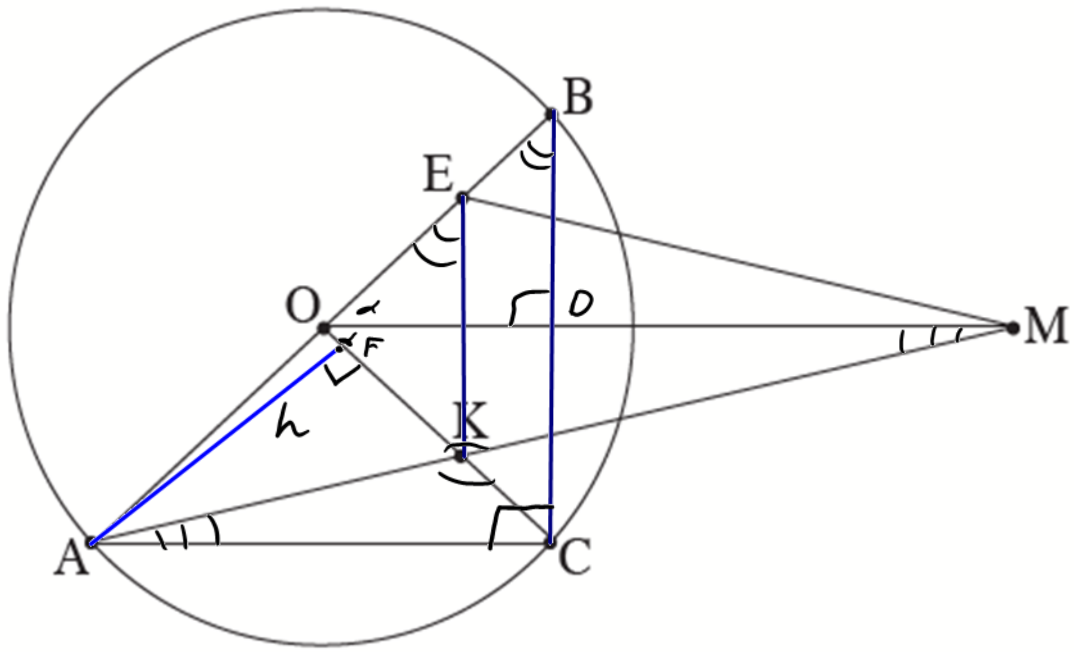
המספר	טענה	נימוק
1	AB קוטר	נתון
2	$MK=ME\ ,\ OK=OE$	נתון (EMKO דלתון)
3	נעביר הקטעים BC, EK	בניית עזר
4	$\sphericalangle BOM = \sphericalangle COM = \alpha$	באלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הדלתון+סימון. לפי 2
5	$\sphericalangle OEK = \sphericalangle OKE = 90-\alpha$	השלמה ל־$180°$ במשולש שווה שוקיים OEK. לפי 4,2

נימוק	טענה	מספר
רדיוסים במעגל שווים	$OB=OC$	6
השלמה שלו במשולש שווה שוקיים OBC. לפי 6,4	$\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = 90°-\alpha$	7
לפי 7,5	$\sphericalangle OBC \overset{!!}{=} \sphericalangle OEK$	8
אם בין שני ישרים, וישר שלישי שחותך אותם יש שתי זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים.	$BC \parallel EK$ **מ.ש.ל. א'**	9
זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה $90°$. לפי 1	$\sphericalangle ACB = 90°$	10
סימון	נסמן, את נקודת החיתוך של BC ו- OM ב- D	11
האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה. לפי 2, 11	$\sphericalangle BDO = 90°$	12
לפי 12,10	$\sphericalangle ACB \overset{!!}{=} \sphericalangle ODB$	13
אם בין שני ישרים וישר שלישי שחותך אותם יש זוויות מתאימות שוות, אז הם מקבילים	$OM \parallel AC$ **מ.ש.ל. ב'**	14

מספר	טענה	נימוק
15	$\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$	נתון
16	$\frac{OM}{AC} = \frac{OK}{KC} = \frac{KM}{AK}$	משפט תאלס הרחבה ב'. לפי 14
17	$\frac{BC}{EK} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OK} = \frac{5}{3}$	משפט תאלס הרחבה ו'. לפי 9 ו- 15
18	$OK + KC = OC$	חיבור הקטעים
19	$\frac{OK}{KC} = \frac{3}{2}$	חישוב. לפי 17, 18
20	$\frac{OM}{AC} = \frac{OK}{KC} = \boxed{\frac{3}{2}}$ מ.ש.ל. ג'	לפי 16, 19
21	$S_{EMKO} = S$	נתון
22	$OM = OM$	כל קטע שווה לעצמו
23	$\triangle OEM \cong \triangle OKM$	משפט חפיפה 3.3.3. לפי 2, 22
24	$S_{OEM} = S_{OKM} = \frac{1}{2}S$	משולשים חופפים שווים בשטחם. לפי 21, 23

מספר	טענה	נימוק
25	$\measuredangle OKM = \measuredangle AKC$	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
26	$\measuredangle MOK = \measuredangle ACK$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו. לפי 14
27	$\triangle MOK \sim \triangle CAK$	משפט דמיון ז.ז. לפי 25, 26
28	$\frac{S_{ACK}}{S_{MOK}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון. לפי 20, 27
29	$S_{ACK} = \frac{2}{5} \cdot S$	חיסור. לפי 24, 28
30	נוריד גובה AF מ-A ל-OC	בניית עזר
31	$S_{ACK} = \frac{CK \cdot AF}{2}$	נוסחת שטח משולש
32	$S_{AOK} = \frac{OK \cdot AF}{2}$	נוסחת שטח משולש
33	$\frac{S_{AOK}}{S_{ACK}} = \frac{OK}{CK} = \frac{3}{2}$	חישוב. לפי 31, 32
34	$S_{AOK} = \frac{3}{5} S$	חישוב. לפי 29, 33
35	$S_{AOC} = \frac{5}{5} S$	חיבור שטחים. לפי 29, 34
	$\boxed{\text{מ.ש.ל. 3}}$	

שרטוט עם תוספת



5. בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD ($AB \parallel DC$).

נתון כי אורך הבסיס AB שווה לאורך הצלע BC.

נסמן: $AB = BC = k$, $\sphericalangle ACB = \alpha$, $0^o < \alpha < 90^o$.

א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos\alpha$.

נתון: $AD = 1.2k$, $DC = 2k$.

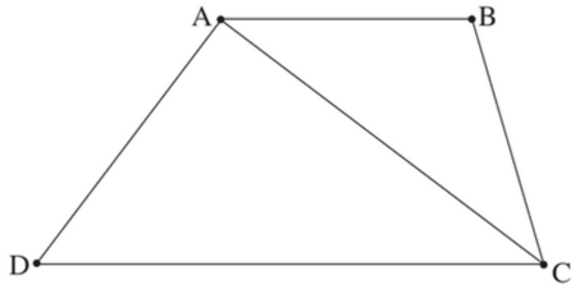
ב. מצאו את הערך של α.

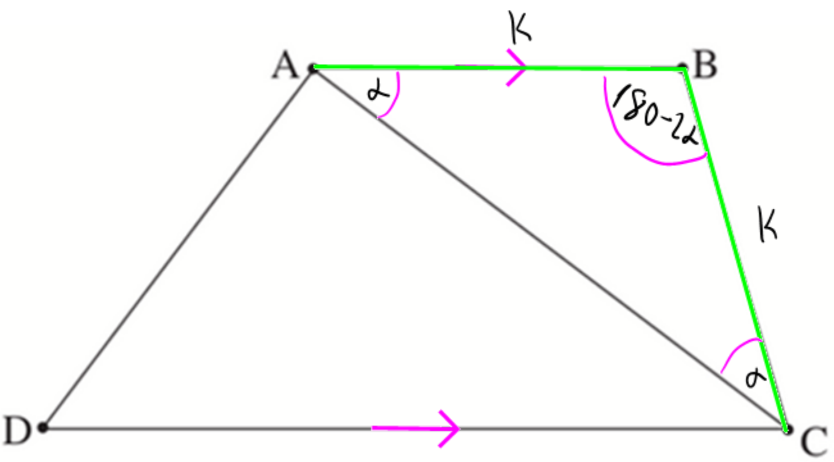
ג. מצאו את גודל הזווית ADC.

המשכי הצלעות DA ו־ CB נחתכים בנקודה E.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש EDC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של k.





א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos\alpha$.

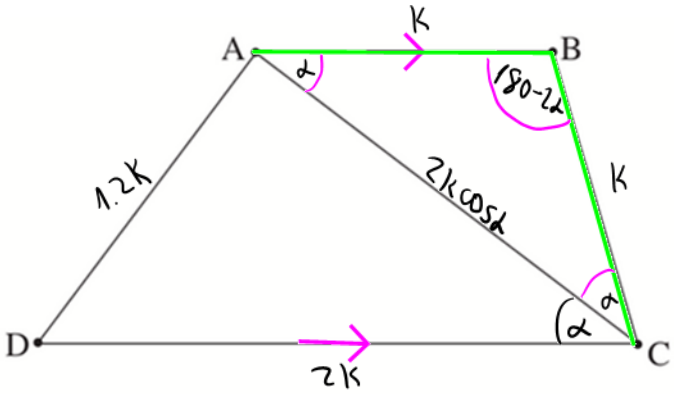
נפעיל את משפט הסינוסים ? ΔABC

$$\frac{AC}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{k}{\sin\alpha} \rightarrow AC = \frac{k\sin(2\alpha)}{\sin\alpha} \rightarrow AC = \frac{k \cdot 2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} =$$

$$\boxed{AC = 2k\cos\alpha}$$

נתון: $AD = 1.2k$, $DC = 2k$.

ב. מצאו את הערך של α .



יש סימן ♡ ?

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC = \alpha$ מתחלפות שוות

נפעיל את משפט הקוסינוס ב- ΔADC ?

$$AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2 \cdot CA \cdot CD \cdot \cos\alpha$$

$$(1.2k)^2 = (2k\cos\alpha)^2 + (2k)^2 - 2 \cdot 2k \cdot 2k\cos\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$1.44k^2 = 4k^2\cos^2\alpha + 4k^2 - 8k^2\cos^2\alpha \quad / : k^2 \neq 0$$

$$1.44 = 4\cos^2\alpha + 4 - 8\cos^2\alpha$$

$$4\cos^2\alpha = 2.56$$

$$\cos^2\alpha = \frac{2.56}{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

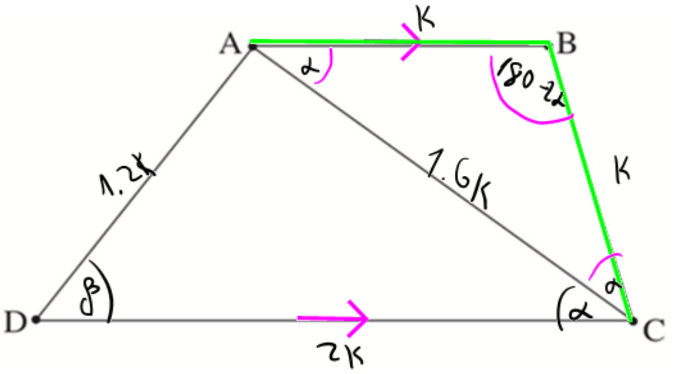
$$\boxed{\alpha = 36.87^\circ}$$

$$\cos\alpha = \frac{-4}{5}$$

$\alpha =$ קהה

(פסל)

ג. מצאו את גודל הזווית ADC.



נסמן את $\sphericalangle ADC=\beta$

נפעיל את משפט הסינוסים ב- ΔADC

$$\frac{1.6k}{\sin(\beta)}=\frac{1.2k}{\sin(\alpha)} \quad | :k\neq 0$$

$$\sin(\beta)=\frac{1.6\sin(\alpha)}{1.2}$$

$$\beta=\boxed{53.13=\sphericalangle ADC}$$

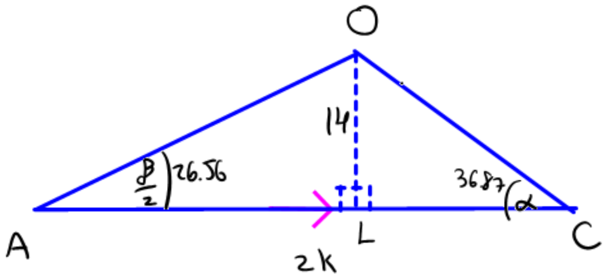
המשכי הצלעות DA ו־ CB נחתכים בנקודה E.

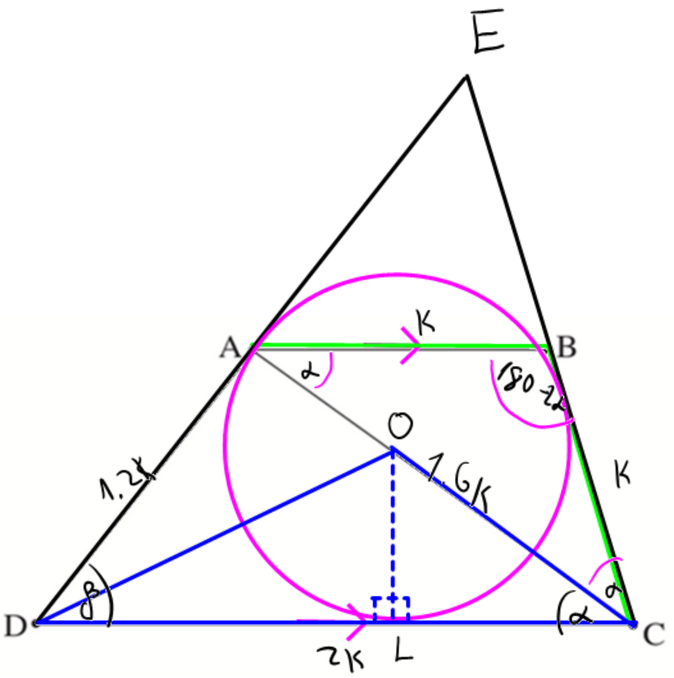
נתון כי האורך של רדיוס המעגל החסום במשולש EDC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של k.

מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות

ΔEDC.. נתבונן ב- ΔODC





נחשב את OC ב- ΔOCL

ולאחר מכן נפעיל משפט הסינוסים ב- ΔOAC

$$\sin\alpha=\frac{14}{OC} \rightarrow OC=\frac{70}{3}$$

$$\frac{2k}{\sin\left(180-\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right)}=\frac{OC}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$K = \frac{OC \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$k = \frac{\frac{70}{3} \sin(63.43)}{2 \sin(26.56)}$$

$$\boxed{k = \frac{70}{3}}$$

ד)

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{(x-3)^2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+0.5$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה־ x .

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו בפונקציה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.

נתונה הפונקציה $h(x)=g(x)\cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

ד. **(1)** רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $-9\leq x\leq 0$.

א(1)

$f(x)=\frac{ax}{(x-3)^2}$, $a>0$

$\boxed{y=0 \quad , \quad x=3}$

$\lim_{x\to 3^\pm} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

א(2)

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$

$u=ax \qquad v=(x-3)^2$

$u'=a \qquad v'=2(x-3)\cdot 1$

$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$

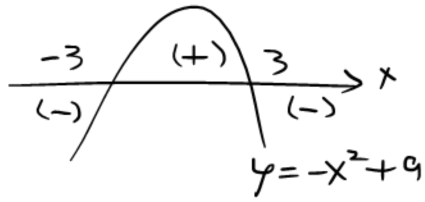
$f'(x)=\frac{a\cdot(x-3)^2-ax\cdot 2(x-3)}{((x-3)^2)^2}=\frac{a(x-3)\cdot[x-3-2x]}{(x-3)^4}$

$f'(x)=\frac{a(x-3)(-x-3)}{(x-3)^4}=\frac{a\cdot(-x^2+9)}{(x-3)^4}=0$

$-x^2+9=0$

$x=3$ פסול ת"ה $\qquad x=-3$

$$f'(x)=\frac{a(-x^2+9)}{(x-3)^4}=\frac{(+)\cdot(-x^2+9)}{(+)}$$



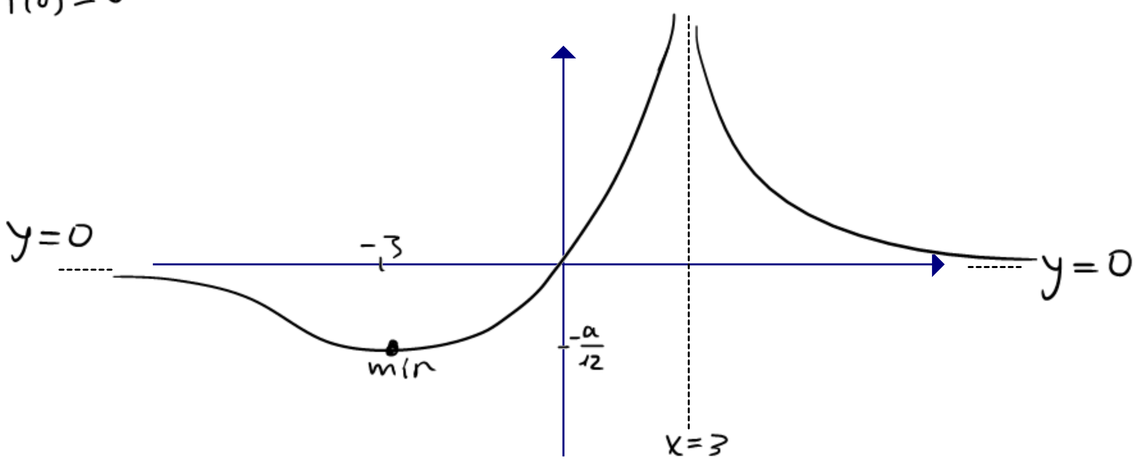
x		-3		3	
f'	(-)	0	(+)	///	(-)
f	↘	min	↗	///	↘

$$f(-3)=\frac{a\cdot(-3)}{(-3-3)^2}=\frac{-3a}{36}=-\frac{a}{12}$$

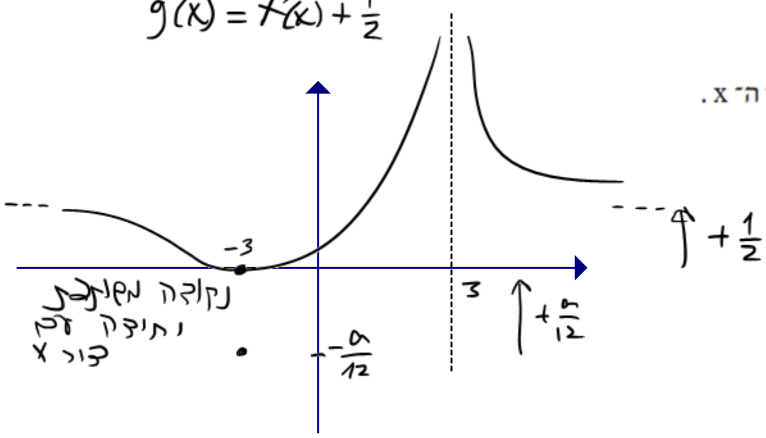
$$\min\left(-3,-\frac{a}{12}\right)$$

$f(0)=0$

ד.



$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}$



נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+0.5$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה־ x.

ג. מצאו את הערך של a.

$$\frac{a}{12}=\frac{1}{2}\qquad \boxed{a=6}$$

ה

$f(x) = \frac{6x}{(x-3)^2}$

הציבו בפונקציה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.

נתונה הפונקצייה $h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x \neq 3$.

ד. **(1)** רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $-9 \le x \le 0$.

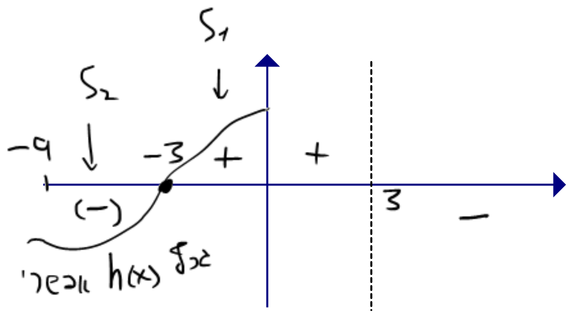
$h(x) = g(x) \cdot g'(x)$

ד(1).

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{חיובית}: -3 < x < 3 \\ \text{שלילית}: x < -3 \ , \ x > 3 \end{array}}$$

x		-3		3	
g	$+$	0	$+$		$+$
g'	$-$	0	$+$		$-$
h	$-$	0	$+$		$-$

ד(2).



$S_1 = \int_{-3}^{0} h(x)dx$

$S_2 = -\int_{-9}^{-3} h(x)dx$

נגדיר

$H(x) = \int h(x)dx = \int g'(x)(g(x))^1 dx = \frac{(g(x))^2}{2} + c = \frac{1}{2}(g(x))^2 + c$

$g(x) = f(x) + 0.5 = \frac{6x}{(x-3)^2} + 0.5$

$H(x) = \frac{(g(x))^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{6x}{(x-3)^2} + 0.5\right)^2$

$H(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{6 \cdot 0}{(0-3)^2} + 0.5\right)^2 = \frac{1}{8}$

$H(-3) = 0 \qquad H(-9) = \frac{1}{128}$

$$S_1 = \frac{1}{2}(g(x))^2 \Big|_{-3}^{0} = H(x)\Big|_{-3}^{0} = H(0) - H(-3) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

$$S_2 = -H(x)\Big|_{-9}^{-3} = H(x)\Big|_{-3}^{-9} = H(-9) - H(-3) = \frac{1}{128} - 0 = \frac{1}{128}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{17}{128} \qquad \boxed{S = \frac{17}{128}}$$

7. נתונה הפונקציה $f(x)=(1+\cos x)\cdot(-1+b\cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

b הוא פרמטר.

נתון: $0<b<1$.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)=f(x)+|f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה־ y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

כידוע $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$. נראה ש: $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=(1+\cos(-x))(-1+b\cos(-x))=(1+\cos x)(-1+b\cos x)=f(x)$$

הפונ' זוגית

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

$$0=(1+\cos x)(-1+b\cos x)$$

$1+\cos x=0$

$\cos x=-1$

$x=\pi+2\pi k$

$x=\pi,-\pi$

$\boxed{(\pi,0)\quad(-\pi,0)}$

$-1+b\cos x=0$

$\cos x=\frac{1}{b}$

נתון ש: $0<b<1$

לכן $\frac{1}{b}>1$

אין פתרון

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b .

נתון ש: $f'(\frac{\pi}{3})=0$. נגזור ונציב.

$u=1+\cos x \qquad u'=-\sin x$

$v=-1+b\cos x \qquad v'=-b\sin x$

$$f'(x)=-\sin x(-1+b\cos x)+-b\sin x(1+\cos x)$$

$$f'(x)=-\sin x\left[-1+b\cos x+b(1+\cos x)\right]$$

$$f'(x)=-\sin x(2b\cos x+b-1)$$

$$0=-\sin(\tfrac{\pi}{3})(2b\cos(\tfrac{\pi}{3})+b-1)$$

$$2b\cdot\frac{1}{2}+b-1=0$$

$$\boxed{b=\frac{1}{2}}$$

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$$f'(x)=-\sin x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\sin x=0 \qquad \cos x=\frac{1}{2}$$

$$x=0+\pi k \qquad x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \qquad x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

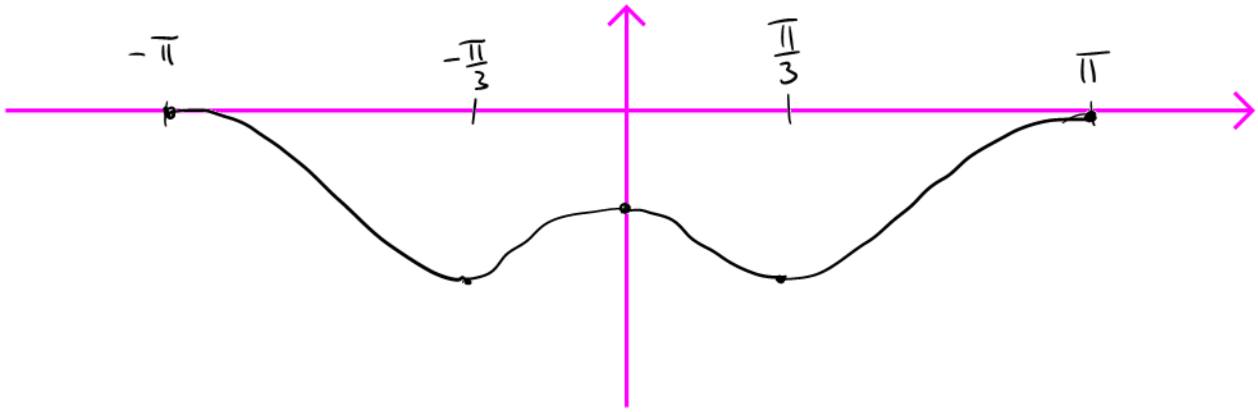
$$x=0,\pi,-\pi \qquad x=\frac{\pi}{3} \qquad x=-\frac{\pi}{3}$$

		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	
x	$-\pi$	$<x<$	$-\frac{\pi}{3}$	$<x<$	0	$<x<$	$\frac{\pi}{3}$	$<x<$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	max קצה	↘	min	↗	max	↘	min	↗	max קצה

$$f(\pm\pi)=0$$
$$f\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{9}{8}$$
$$f(0)=-1$$

$(\pi,0)$,	$\left(\frac{\pi}{3},-\frac{9}{8}\right)$	$(0,-1)$	$\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{9}{8}\right)$	$(-\pi,0)$
max קצה	min	max	min	max קצה

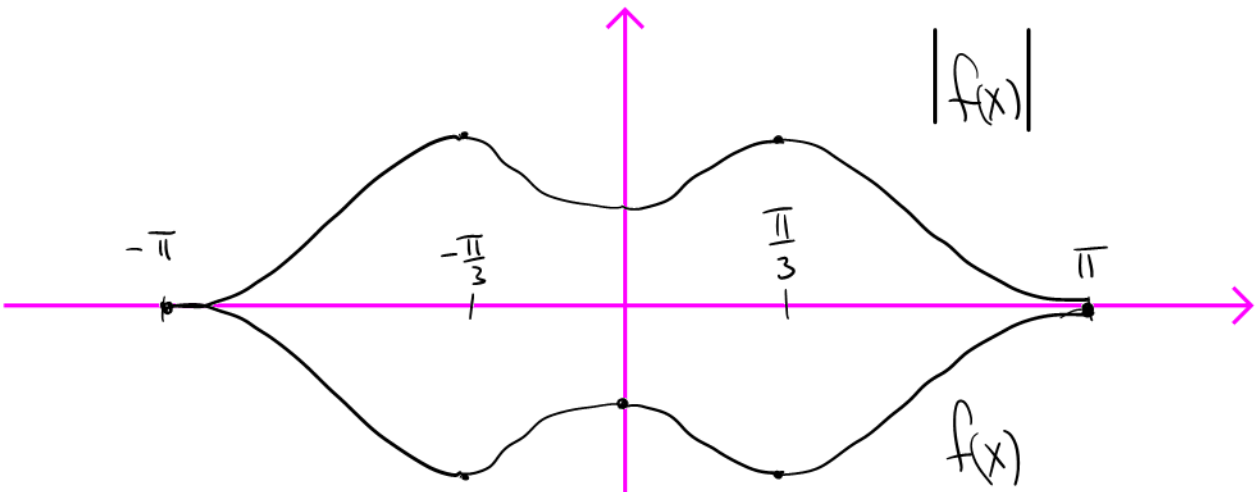
(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.



נתונה הפונקצייה $h(x) = f(x) + |f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

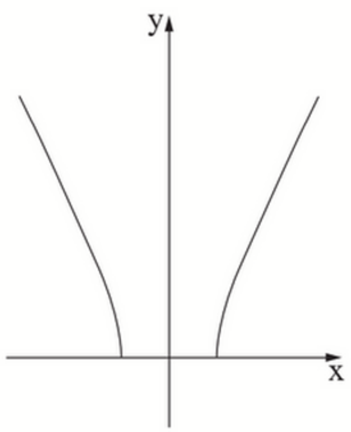
נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקצייה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה־y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.



שיעורי ה-y של כל הנקודות שמונחות על $f(x)$ אי-חיוביים (או אפס או שליליים). לכן שיעורי ה-y של כל הנקודות שמונחות על $|f(x)|$ הם אי שליליים. עבור כל ערך x שנבחר שיעורי ה-y של $f(x)$ ושל $|f(x)|$ נגדיים ולכן סכומם אפס.

$\boxed{\text{לסיכום: הפונ' } h(x)=0 \text{ עבור כל } x \text{ בתחום}}$



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

נתון הישר $y = 3x - 3$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־ y וחותך את הישר הנתון בנקודה B .

ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את הישר הנתון בנקודה C .

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .

ג. **(1)** הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB .

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC .

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־ AC הוא מקסימלי.

פתרון:

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

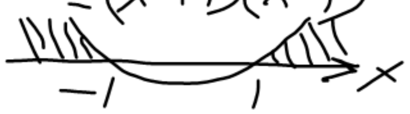
נתון הישר $y = 3x - 3$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נבחין: ביטוי מתחת לשורש מספר אי-שלילי: $0 \le x^2 - 1$

נפתור אי-שוויון ריבועי ב-x:

$0 \le (x+1)(x-1)$



תחום ההגדרה של $f(x)$: $\boxed{x \le -1 \text{ או } 1 \le x}$

המשך בעמוד הבא...

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון.

$f(x)=2\cdot\sqrt{x^2-1}$, הישר הנתון: $y=3x-3$

נשווה בין ערכי ה-y:

$$y=f(x)$$

$$3x-3=2\cdot\sqrt{x^2-1}$$

נשים לב כי אגף ימין לא שלילי. ומהשוויון נובע: $0\le 3x-3 \quad /+3$

$3\le 3x \quad /:3$

$1\le x$

בתחום $1\le x$ נוכל להעלות את שני האגפים בריבוע (לחילופין, ניתן לבדוק את הפתרונות שמתקבלים בשלב שלפני ההעלאה בריבוע).

$$(3x-3)^2=(2\cdot\sqrt{x^2-1})^2$$

$$(3(x-1))^2=2^2\cdot(\sqrt{x^2-1})^2$$

$$3^2\cdot(x-1)^2=4\cdot(x^2-1)$$

$$9(x-1)^2=4(x+1)(x-1)$$

פתרון טריוויאלי אחד למשוואה הוא נקודת חיתוך הישר עם ציר ה-x: $x=1$.

עבור $x\neq 1$:

$$9(x-1)^2=4(x+1)(x-1) \quad /:(x-1)\neq 0$$

$$9(x-1)=4(x+1)$$

$$9x-9=4x+4 \quad /-4x+9$$

$$5x=13 \quad /:5$$

$$x=2.6$$

נשים לב כי שני הפתרונות בתחום $x\ge 1$.

נציב ~~במשוואה~~ הישר לחישוב שיעור ה-y:

$y(1)=3\cdot 1-3=0$

$y(2.6)=3\cdot 2.6-3=4.8$

שיעורי שתי נקודות חיתוך גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון:

$\boxed{(1,0) \text{ או } (2.6,4.8)}$

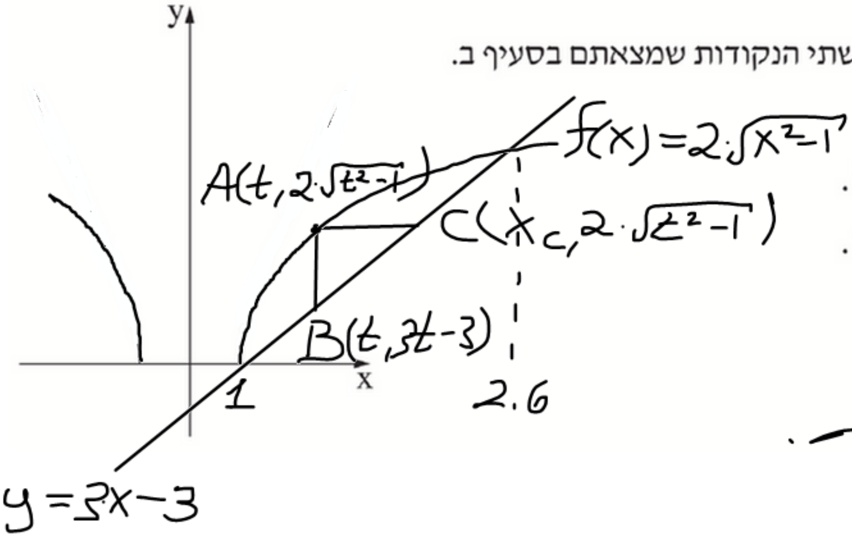
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־ y וחותך את הישר הנתון בנקודה B.

ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את הישר הנתון בנקודה C.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A.



ג. (1) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

נשרטט את הישר הנתון והנקודות.

ניכר מהגרף (וכן ניתן להוכיח,

כי $f(x)$ קעורה כלפי מטה ($\cap$) בכל התחום: $1<x<2.6$

(או להגיד שרק בתחום $1<x<2.6$, הפונקציה מעל הישר).

ולכן הישר בין שתי נקודות החיתוך שמצאנו, נמצא מתחת לגרף $f(x)$.

מהבנייה הנתונה והגרף מתקיים $y_B<y_A$, $x_A<x_C$

("B" נמצאת מתחת ל-"A" ו-"C" נמצאת מימין ל-"A" - ראו שרטוט).

נקבע את שיעורי הנקודות: B: מהבנייה: $x_B=x_A=t$

וכן B על הישר הנתון, לכן $y_B=3\cdot t-3$

$B(t,3t-3)$

מכאן, אורך הקטע AB:

$$\boxed{AB}=y_A-y_B=2\sqrt{t^2-1}-(3t-3)=\boxed{2\sqrt{t^2-1}-3t+3}$$

המשך הפתרון בעמוד הבא..

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

נציב את שיעורי הנקודה C: מרכיבה: $y_C = y_A = 2\cdot\sqrt{t^2-1}$

C על הישר הנתון, לכן $y_C = 3\cdot x_C - 3$ נציב:

$$2\cdot\sqrt{t^2-1} = 3\cdot x_C - 3 \quad /+3$$

$$2\cdot\sqrt{t^2-1}+3 = 3\cdot x_C \quad /:3$$

$$x_C = \frac{2}{3}\sqrt{t^2-1}+1$$

$$C\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^2-1}+1,\ 2\cdot\sqrt{t^2-1}\right)$$

מכאן, אורך הקטע AC:

$$\boxed{AC = x_C - x_A = \frac{2}{3}\sqrt{t^2-1}+1-t}$$

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־ AC הוא מקסימלי.

נגדיר את פונקציית המטרה: סכום אורכי הקטעים AB ו-AC.

נסמן את פונקציית המטרה: $h(t)$.

$$\boxed{h(t)} = AB+AC = \underbrace{2\sqrt{t^2-1}-3t+3}_{AB} + \underbrace{\frac{2}{3}\sqrt{t^2-1}+1-t}_{AC} =$$

$$\boxed{= \frac{8}{3}\sqrt{t^2-1}-4t+4,\quad 1<t<2.6}$$

נגזור את פונקציית המטרה:

$$h'(t) = \frac{8}{3}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}-4 = \frac{8t}{3\sqrt{t^2-1}} - \frac{4\cdot3\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\sqrt{t^2-1}} = \frac{8t-12\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\cdot\sqrt{t^2-1}}$$

המשך בשקף הבא...

$h'(t) = \frac{8t-12\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\cdot\sqrt{t^2-1}}$, $1<t<2.6$

נשווה לאפס על מנת למצוא נקודות קריטיות ("חשודות כקיצון"):

$h'(t)=0$

$$\frac{8t-12\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\cdot\sqrt{t^2-1}}=0 \Rightarrow 8t-12\cdot\sqrt{t^2-1}=0 \overset{+12\cdot\sqrt{t^2-1}}{\Rightarrow} 8t=12\sqrt{t^2-1} \quad /:4$$

$$2t=3\cdot\sqrt{t^2-1}$$

נשים לב כי אגף ימין אי שלילי וגם חיובי בתחום $1<t<2.6$.

כלומר $0<2t$ ו- $0<t$.

נעלה בריבוע:

$$4t^2=9\cdot(t^2-1)$$
$$4t^2=9t^2-9 \quad /+9-4t^2$$
$$9=5t^2 \quad /:5$$
$$t^2=\frac{9}{5}$$
$$0<t=\frac{3}{\sqrt5}=\frac{3\cdot\sqrt5}{5}$$ (ראה הסבר למעלה)

נשים לב כי מכנה הנגזרת $h'(t)=\frac{8t-12\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\cdot\sqrt{t^2-1}}$ חיובי בכל תחום ההגדרה.

נגזור מונה הנגזרת בלבד, נסמן ב- $u(t)$, לבדיקת סימן הנגזרת השנייה בנקודה הנ"ל.

$$u(t)=8t-12\cdot\sqrt{t^2-1} \Rightarrow u'(t)=8-12\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}=8-12\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$u'\left(\frac{3}{\sqrt5}\right)=8-12\cdot\frac{\frac{3}{\sqrt5}}{\sqrt{\frac{9}{5}-1}}=8-12\cdot\frac{\left(\frac{3}{\sqrt5}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)}=-10<0$$

מסקנה: עבור $\boxed{t=\frac{3\sqrt5}{5}\approx1.342}$ סכום אורכי הקטעים AB ו- AC הוא מקסימלי.