פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ו, 2026, שאלון 35571, גרסה 05:

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

נבדוק אי הטענה עבור $n=1$:

$$\frac{1^2}{1\cdot3}\stackrel{?}{=}\frac{1(1+1)}{2(2\cdot1+1)}$$

$$\frac{1}{3}\stackrel{\checkmark}{=}\frac{1}{3}$$

נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (לגבי k):

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\underbrace{\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}}_{\text{לפי ההנחה}}+\frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2(k+1)+1)}$$

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \quad / :(k+1)\neq0$$

$$\frac{k}{2(2k+1)}^{\,2k+3}+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)}^{\,2}=\frac{k+2}{2(2k+3)}^{\,2k+1} \quad / \cdot 2(2k+1)(2k+3)$$

$$k(2k+3)+2(k+1)=(k+2)(2k+1)$$

$$2k^2+3k+2k+2=2k^2+k+4k+2$$

$$2k^2+5k+2=2k^2+5k+2$$

$$0=0$$

על פי אקסיומת האינדוקציה הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. ליונתן יש בספרייה שבחדרו ספרים משני סוגים: ספרי קומיקס וספרי עיון.

60% מן הספרים הם ספרי קומיקס והשאר ספרי עיון.

70% מן הספרים הם בעברית והשאר באנגלית.

לפניכם שתי טענות I–II. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעותיכם.

I. ליונתן אין ספרי קומיקס בעברית.

II. ההסתברות לבחור באקראי ספר בעברית מבין ספרי הקומיקס גדולה מן ההסתברות לבחור באקראי ספר קומיקס מבין הספרים שבעברית.

I. **לא נכונה**

כי אם 60% מהספרים הם ספרי קומיקס באנגלית ויש רק 30% ספרים באנגלית

$P($קומיקס $\cap$ אנגלית$) > P($אנגלית$)$

	A ספרי קומיקס	$\bar{A}$ ספרי עיון	
B בעברית	0 נניח		0.7
$\bar{B}$ באנגלית	0.6		0.3
	0.6	0.4	1

II. **כן נכונה**

	A ספרי קומיקס	$\bar{A}$ ספרי עיון	
B בעברית	P נניח		0.7
$\bar{B}$ באנגלית			0.3
	0.6	0.4	1

$P($בעברית $|$ קומיקס$) = \frac{P}{0.6}$

$P($קומיקס $|$ בעברית$) = \frac{P}{0.7}$

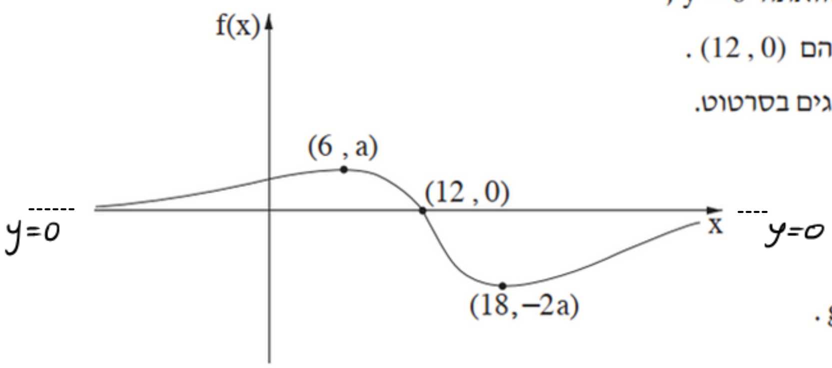
אז

$\frac{P}{0.6} > \frac{P}{0.7}$

$\frac{P}{0.6} \approx 1.67P$

$\frac{P}{0.7} \approx 1.43P$

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.
לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת בלבד, שמשוואתה $y=0$,
ונקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה־ x, ששיעוריה הם $(12\,,0)$.
שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מוצגים בסרטוט.
a הוא פרמטר גדול מ־ 1.



נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{1}{(f(x))^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי לישר $y=\dfrac{a}{27}$ ולגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק 3 נקודות משותפות.

(3) מצאו את הערך של a.

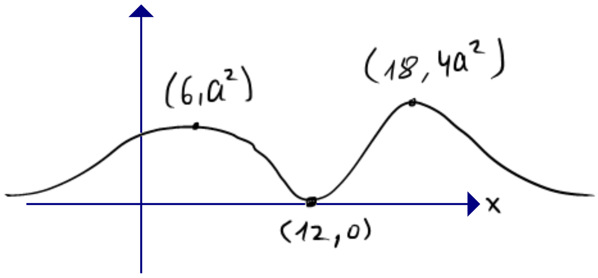
ג (1).

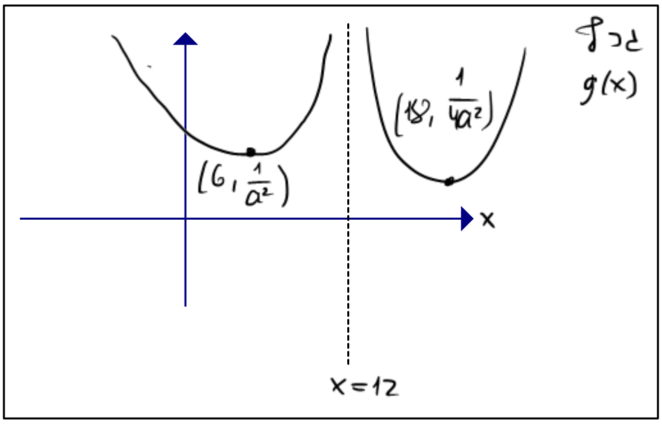
$f(x) \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 12}$

ג (2).

$$\lim_{f(x)\to 0^{\pm}} g(x) = +\infty$$

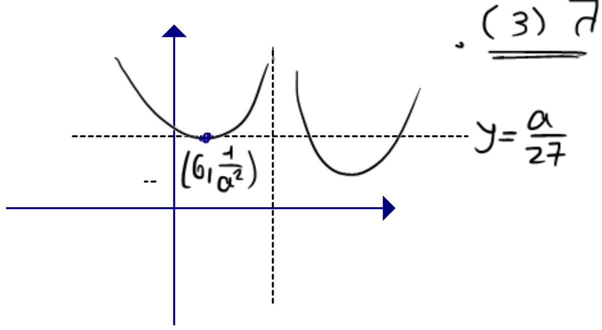
$y=(f(x))^2$





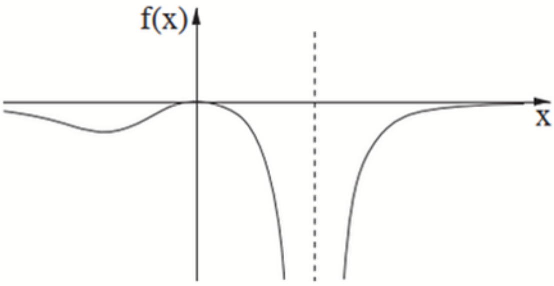
$$g'(x) = \frac{-2\cdot f'(x)}{(f(x))^3}$$

ג (3).



$$y_{min} = \frac{1}{a^2} = \frac{a}{27}$$

$a^3 = 27 \quad \boxed{a=3}$



ד. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)=\dfrac{-30x^2}{(x^3-8)^2}$,
המוגדרת בתחום $x \neq 2$.

בסרטוט מוצגות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך
עם ציר ה־ x של גרף הפונקצייה $f(x)$.

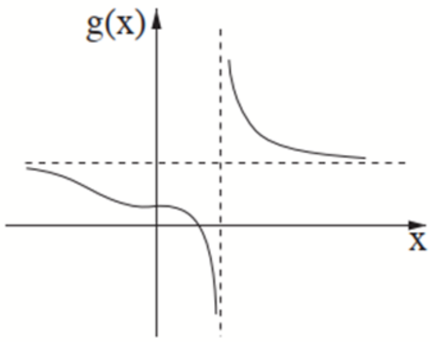
$g(x)$ היא פונקצייה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x)=f(x)$.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 2$.

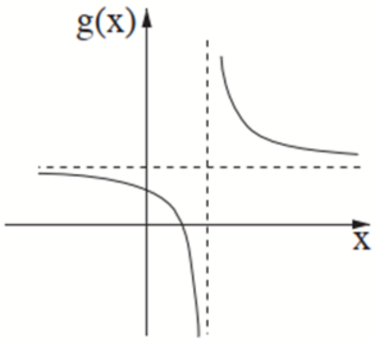
נתון כי גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0\,,0.75)$.

(1) מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

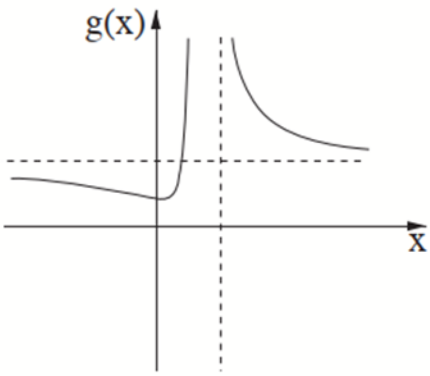
(2) אחד מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.
קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



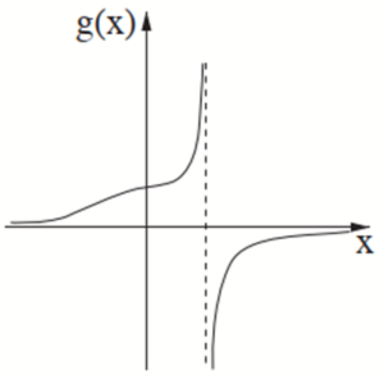
I



II



III



IV

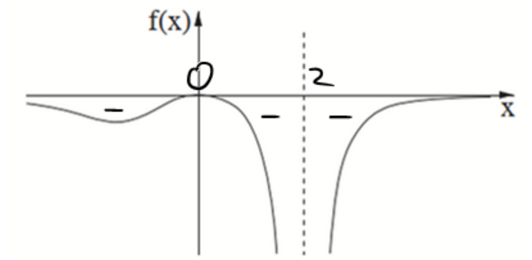
ד (1).

$$g(x) = \int g'(x)dx = \int -30x^2\cdot(x^3-8)^{-2}dx = -10\cdot\int 3x^2\cdot(x^3-8)^{-2}dx$$

$$= -10\cdot\frac{(x^3-8)^{-1}}{-1} = \frac{10}{x^3-8}+C$$

$$g(0)=\frac{10}{-8}+C = 0.75 \Rightarrow C=2$$

$$\boxed{g(x)=\frac{10}{x^3-8}+2}$$



ד (2).

$\boxed{\text{I גרף}}$

גרף שיורד בכל $x\neq 2$
עם נקודה עם שיפוע אפס שאינה נקודת קיצון.

x		0		2	
$g'(x)=f(x)$	(–)	0	(–)	//////	(–)
$g(x)$	↘	↘	↘		↘
		שיפוע אפס לא קיצון			

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא q.

b_n היא סדרה הנדסית אין־סופית עולה שמנתה היא $2q$.

c_n היא סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.

א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.

נתון: $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$, $a_1 = b_1$.

ב. מצאו את הערך של q.

ג. **(1)** האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

(2) האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.

נסמן ב־ S_1 את סכום הסדרה a_n, ב־ S_2 את סכום הסדרה b_n וב־ S_3 את סכום הסדרה c_n.

נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

ד. מצאו את הערך של a_1.

א'.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \cdot 2q = 2q^2$$

$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = 2q^2}$$

ב'.

$a_1 = b_1$, $c_2 = \frac{1}{8}(a_1)^2$ $\quad a_2 = a_1 q \quad b_2 = b_1 \cdot 2q$

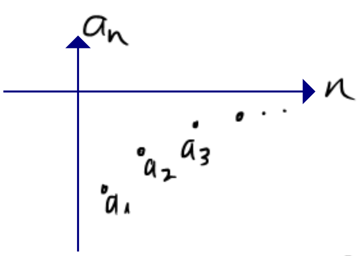
$$c_2 = a_2 \cdot b_2 = a_1 q \cdot b_1 \cdot 2q = 2q^2 \cdot a_1^2 = \frac{1}{8} \cdot a_1^2 \quad \backslash : a_1^2 \neq 0$$ (כי a_n עולה)

$q^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{4}}$, $q = -\frac{1}{4}$ פסול $\quad q > 0$ כי a_n עולה

ג(1).

a_n סדרה הנדסית עולה ומתכנסת (כי $|q| < 1$)

לכן $\boxed{a_1 \text{ שלילי}}$

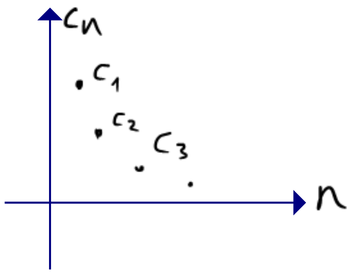


ד (2). גם b_n מתכנסת ועולה וכן $b_1<0$

$c_1 = a_1 b_1 > 0$

מנת $c_n = 2q^2 < 1$

c_n מתכנסת גם כן



$\boxed{c_n \text{ יורדת}}$

נסמן ב־ S_1 את סכום הסדרה a_n, ב־ S_2 את סכום הסדרה b_n וב־ S_3 את סכום הסדרה c_n.

נתון: $S_1+S_2+S_3=434$.

ד. מצאו את הערך של a_1.

$$S_1 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a_1}{\frac{3}{4}} = \frac{4a_1}{3}$$

$$S_2 = \frac{b_1}{1-2q} = \frac{a_1}{1-2q} = \frac{a_1}{1-2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a_1}{\frac{1}{2}} = 2a_1$$

$$S_3 = \frac{c_1}{1-2q^2} = \frac{a_1 b_1}{1-2\cdot\frac{1}{16}} = \frac{a_1^2}{1-\frac{1}{8}} = \frac{a_1^2}{\frac{7}{8}} = \frac{8a_1^2}{7}$$

$$\frac{4a_1}{3} + 2a_1 + \frac{8}{7}a_1^2 = 434$$

$$\frac{8}{7}a_1^2 + 3\tfrac{1}{3}a_1 = 434 \Rightarrow a_1 = \frac{217}{12}$$

פסול לפי סעיף ג(1)

$\boxed{a_1 = -21}$

3. בשק א' ובשק ב' יש כדורים משני סוגים: כדורים רכים וכדורים קשים.

בשק א' יש 10 כדורים, מתוכם 4 כדורים רכים והשאר קשים.

בשק ב' יש 12 כדורים, מתוכם x כדורים רכים והשאר קשים.

גלית בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

נתון כי ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{41}{200}$.

א. מצאו את הערך של x.

ב. ידוע שגלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים מִשק א'?

גלית מבצעת את התהליך המתואר לפניכם 4 פעמים:

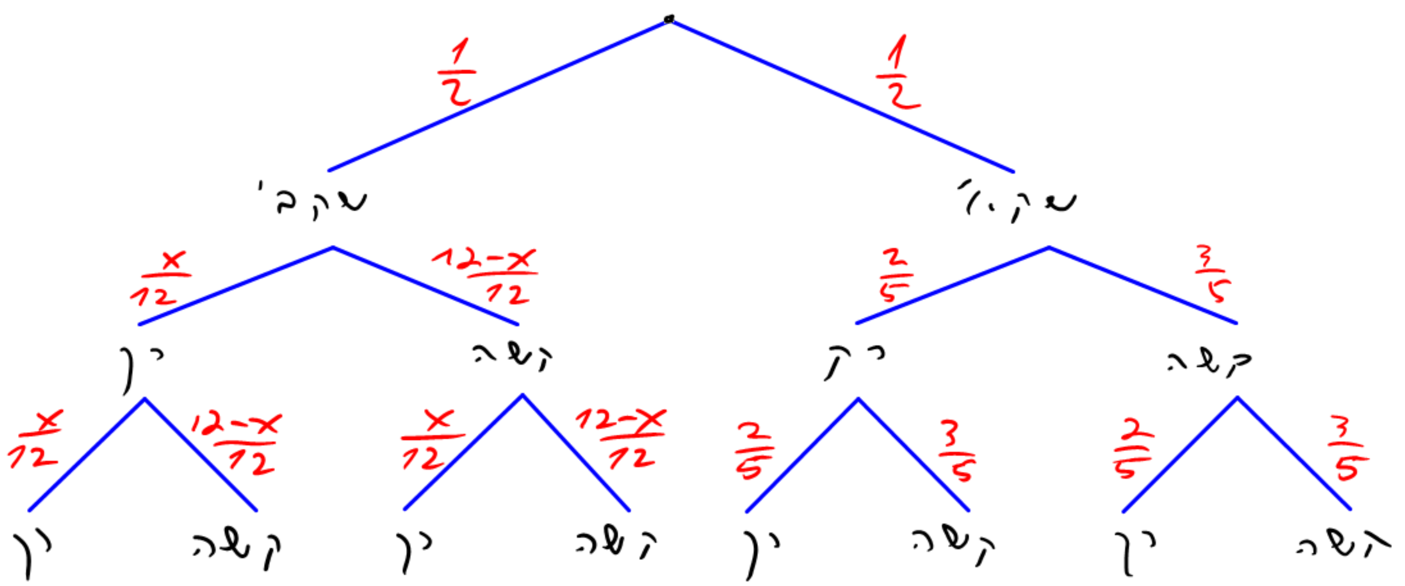
היא בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לַשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

ג. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים?

ד. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים ובשתיים מן הפעמים רק כדורים רכים?

פתרון:

א. נציג את הנתונים בדיאגרמת עץ



ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{41}{200}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{12}\cdot\frac{x}{12}=\frac{41}{200}\quad /\cdot 2$$

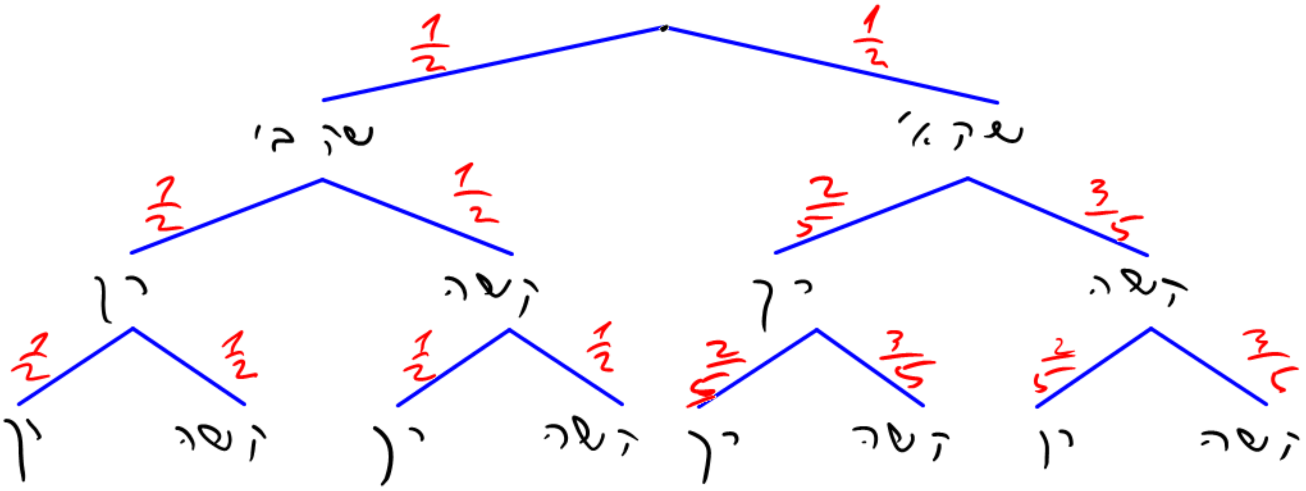
$$\frac{4}{25}+\frac{x^2}{144}=\frac{41}{100}$$

$$\frac{x^2}{144}=\frac{25}{100}\quad /\cdot 144$$

$$x^2=36\quad /\sqrt{\ }$$

$$x=\pm 6 \longrightarrow \boxed{x=6}$$

ב. נציב $x=6$ בדיאגרמה:



כעת נחשב את ההסתברות המבוקשת. לפי הסתברות מותנית:

$$P(\text{שני כדורים משק ג'} \,/\, \text{שני כדורים מאותו סוג})=\frac{P(\text{שני כדורים מאותו סוג ומשק ג'})}{P(\text{שני כדורים מאותו סוג})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{13}{50}}{\frac{61}{100}}=\boxed{\frac{26}{61}}$$

2. נשתמש בנוסחת ברנולי. הפרמטרים הם:

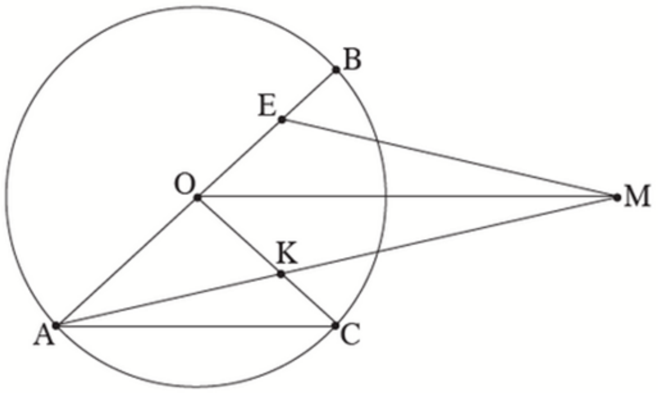
$n=4$, $k=2$, $P=P(\text{שני כדורים השב}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{61}{200}$

$$P_4(2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{61}{200}\right)^2\cdot\left(\frac{139}{200}\right)^2=\boxed{0.2696}$$

3. הסעיף הזה דומה לסעיף ג', רק שבמקום $1-P=\frac{139}{200}$
נגדיר את ההסתברות שבכל הוצאה פעמיים
שני כדורים כחים:

$P(\text{שני כדורים כחים}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{41}{200}$

$$\boxed{P=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{61}{200}\right)^2\cdot\left(\frac{41}{200}\right)^2=0.023456}$$



.4 בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

AB הוא קוטר במעגל.

הנקודה C נמצאת על המעגל.

הנקודה M נמצאת מחוץ למעגל

כך שהקטע AM חותך את הקטע CO בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על הקטע BO כך שהמרובע EMKO

הוא דלתון $(MK = ME\ ,\ OK = OE)$.

א. הוכיחו כי $BC \parallel EK$.

ב. הוכיחו כי $OM \parallel AC$.

נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.

ג. מצאו את הערך של $\frac{OM}{AC}$.

נסמן ב־ S את שטח הדלתון EMKO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC.

פתרון:

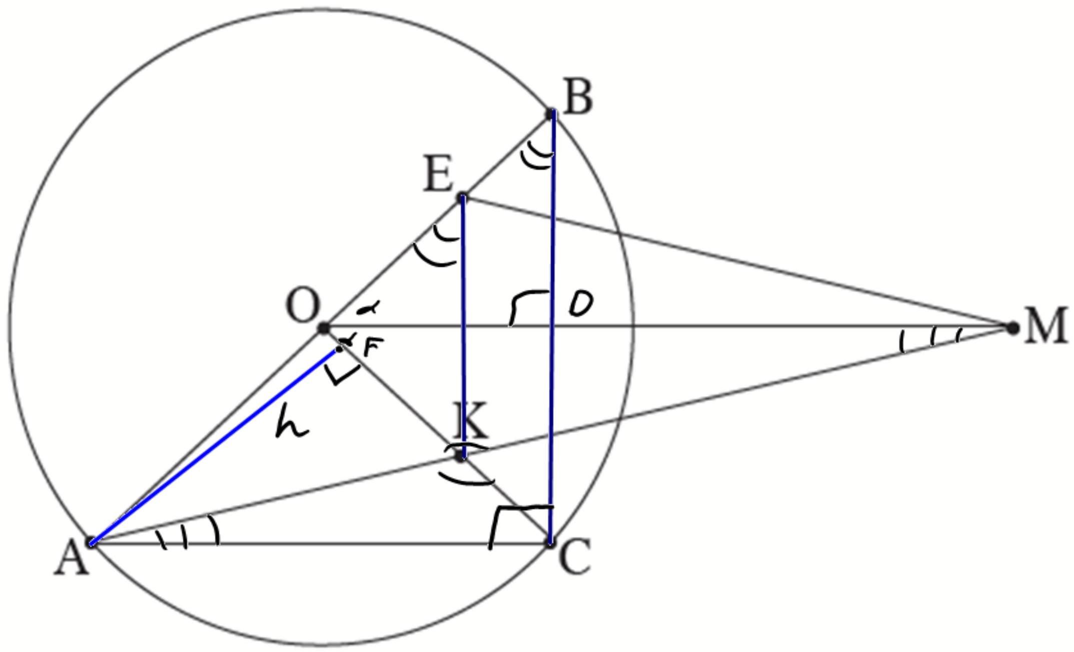
המספר	טענה	נימוק
1	AB קוטר	נתון
2	$MK=ME\ ,\ OK=OE$	נתון (EMKO דלתון)
3	נעביר הקטעים BC, EK	בניית עזר
4	$\sphericalangle BOM = \sphericalangle COM = \alpha$	אלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הדלתון (סימון). לפי 2
5	$\sphericalangle OEK = \sphericalangle OKE = 90-\alpha$	השלמה ל-180° במשולש OEM. לפי 4, 2

מספר	טענה	נימוק
6	$OB=OC$	רדיוסים במעגל שווים
7	$\sphericalangle OBC=\sphericalangle OCB=90^\circ-\alpha$	השלמה של במשולש OBC. לפי 6,4
8	$\sphericalangle OBC=\sphericalangle OEK$	לפי 7,5
9	$BC \parallel EK$	אם בין שני ישרים, וישר שלישי שחותך אותם יש שתי זוויות מתאימות שוות, אז הישרים מקבילים.
	$\boxed{\text{מ.ש.ל. א'}}$	
10	$\sphericalangle ACB=90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה 90°. לפי 1
11	נסמן, את נקודת החיתוך של BC ו- OM ב- D	סימון
12	$\sphericalangle BDO=90^\circ$	האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה. לפי 11,2
13	$\sphericalangle ACB=\sphericalangle ODB$	לפי 12,10
14	$OM \parallel AC$	אם בין שני ישרים וישר שלישי מחותך אותם יש זוויות מתאימות שוות, אז הם מקבילים
	$\boxed{\text{מ.ש.ל. ב'}}$	

מספר	טענה	נימוק
15	$\frac{BC}{EK}=\frac{5}{3}$	נתון
16	$\frac{OM}{AC}=\frac{OK}{KC}=\frac{KM}{AK}$	משפט תאלס הרחבה ב'. לפי 14
17	$\frac{BC}{EK}=\frac{BO}{OE}=\frac{CO}{OK}=\frac{5}{3}$	משפט תאלס הרחבה ו'. לפי 9 ו- 15
18	$OK+KC=OC$	חיבור הקטעים
19	$\frac{OK}{KC}=\frac{3}{2}$	חישוב. לפי 17, 18
20	$\frac{OM}{AC}=\frac{OK}{KC}=\boxed{\frac{3}{2}}$ $\boxed{\text{מ.ש.ל. ג'}}$	לפי 16, 19
21	$S_{EMKO}=S$	נתון
22	$OM=OM$	כל קטע שווה לעצמו
23	$\triangle OEM\cong\triangle OKM$	משפט חפיפה 3.3.3. לפי 2, 22
24	$S_{OEM}=S_{OKM}=\frac{1}{2}S$	משולשים חופפים שווים בשטחם. לפי 21, 23

מספר	טענה	נימוק
25	$\sphericalangle OKM = \sphericalangle AKC$	זוויות קודקודיות שוות זו לזו
26	$\sphericalangle MOK = \sphericalangle ACK$	ז"ל מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו. לפי 14
27	$\triangle MOK \sim \triangle CAK$	משפט דמיון ז.ז. לפי 25, 26
28	$\frac{S_{ACK}}{S_{MOK}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון. לפי 20, 27
29	$S_{ACK} = \frac{2}{5} \cdot S$	חישוב. לפי 24, 28
30	נוריד גובה AF מ-A ל-OC	בניית עזר
31	$S_{ACK} = \frac{CK \cdot AF}{2}$	נוסחת שטח משולש
32	$S_{AOK} = \frac{OK \cdot AF}{2}$	נוסחת שטח משולש
33	$\frac{S_{AOK}}{S_{ACK}} = \frac{OK}{CK} = \frac{3}{2}$	חישוב. לפי 31, 32
34	$S_{AOK} = \frac{3}{5} S$	חישוב. לפי 29, 33
35	$S_{AOC} = \frac{5}{5} S$	חיבור שטחים. לפי 29, 34
	מ.ש.ל. ג'	

שרטוט עם תוספת



5. בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD ‏($AB \parallel DC$).

נתון כי אורך הבסיס AB שווה לאורך הצלע BC.

נסמן: $AB = BC = k$, $\sphericalangle ACB = \alpha$, $0^{o} < \alpha < 90^{o}$.

א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos\alpha$.

נתון: $AD = 1.2k$, $DC = 2k$.

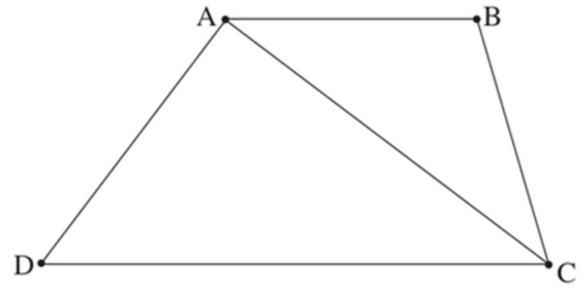
ב. מצאו את הערך של α.

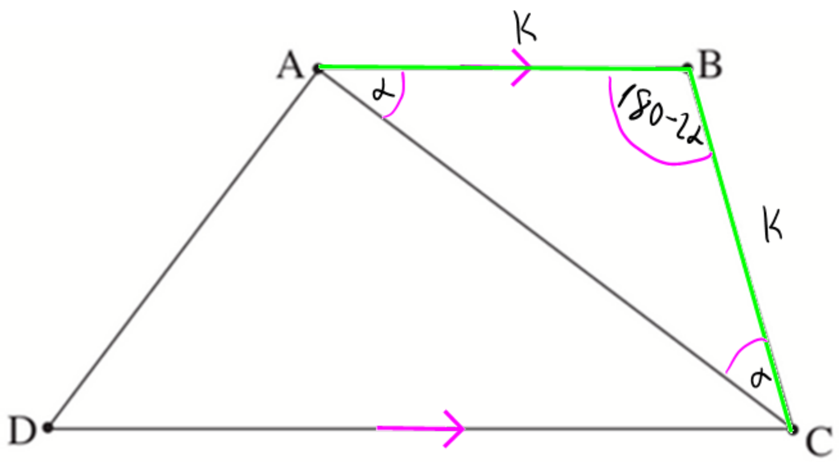
ג. מצאו את גודל הזווית ADC.

המשכי הצלעות DA ו־ CB נחתכים בנקודה E.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש EDC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של k.





א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos\alpha$.

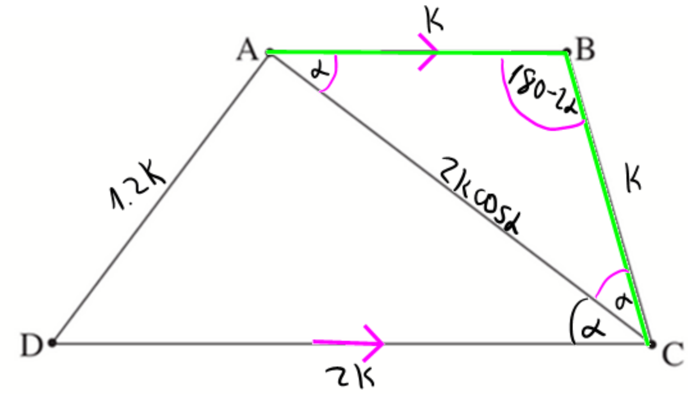
נפעיל את משפט הסינוסים ב: ΔABC

$$\frac{AC}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{k}{\sin\alpha} \rightarrow AC = \frac{k\sin(2\alpha)}{\sin\alpha} \rightarrow AC = \frac{k \cdot 2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} =$$

$$\boxed{AC = 2k\cos\alpha}$$

נתון: $AD = 1.2k$, $DC = 2k$.

ב. מצאו את הערך של α .



יש לשים ♡ ש:

$\measuredangle BAC = \measuredangle ACD = \alpha$ מתחלפות שוות

נפעיל את משפט הקוסינוסים ב: ΔADC

$$AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2 \cdot CA \cdot CD \cdot \cos\alpha$$

$$(1.2k)^2 = (2k\cos\alpha)^2 + (2k)^2 - 2 \cdot 2k \cdot 2k\cos\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$1.44k^2 = 4k^2\cos^2\alpha + 4k^2 - 8k^2\cos^2\alpha \quad / : k^2 \neq 0$$

$$1.44 = 4\cos^2\alpha + 4 - 8\cos^2\alpha$$

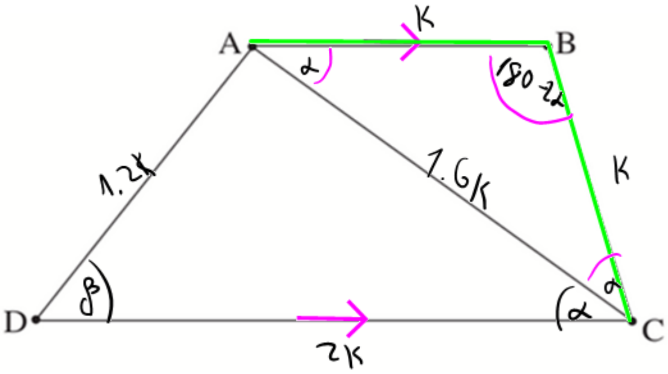
$$4\cos^2\alpha = 2.56$$

$$\cos^2\alpha = \frac{2.56}{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad\qquad \cos\alpha = \frac{-4}{5}$$

$$\boxed{\alpha = 36.87^\circ} \qquad\qquad \alpha = \text{קהה}$$

נפסל



ג. מצאו את גודל הזווית ADC.

נסמן את $\measuredangle ADC=\beta$

נפעיל את משפט הסינוסים ב ΔADC

$$\frac{1.6k}{\sin(\beta)}=\frac{1.2k}{\sin(\alpha)} \quad | :k\neq 0$$

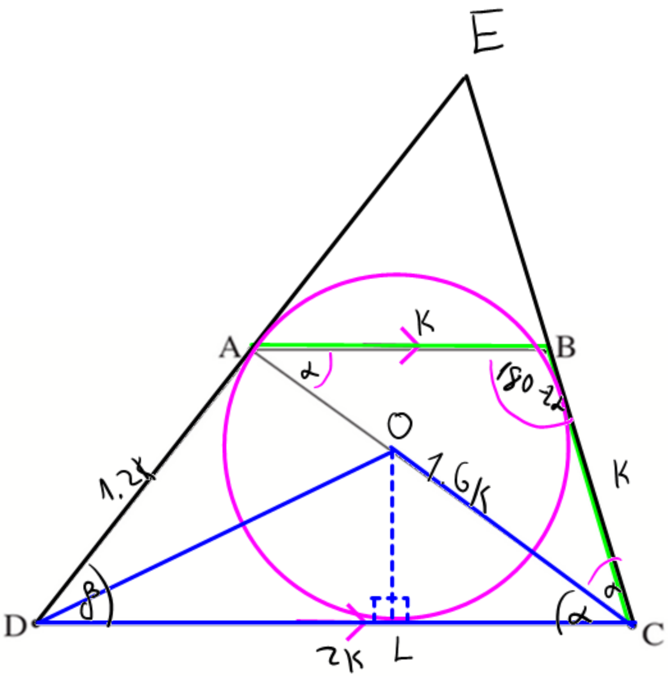
$$\sin(\beta)=\frac{1.6\sin(\alpha)}{1.2}$$

$$\beta=\boxed{53.13=\measuredangle ADC}$$

המשכי הצלעות DA ו־ CB נחתכים בנקודה E.

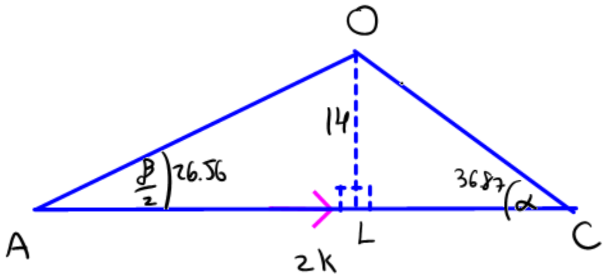
נתון כי האורך של רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש EDC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של k.



מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות

ΔEDC.. נתבונן ב ΔODC



נחשב את OC ב ΔOCL

לאחר מכן נעזר במשפט הסינוסים ב ΔOAC

$$\sin\alpha=\frac{14}{OC} \rightarrow OC=\frac{70}{3}$$

$$\frac{2k}{\sin\left(180-\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right)}=\frac{OC}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$K = \frac{OC \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$k = \frac{\frac{70}{3} \sin(63.43)}{2 \sin(26.56)}$$

$$\boxed{k = \frac{70}{3}}$$

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{(x-3)^2}$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. ענו על התת־סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+0.5$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה־ x .

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו בפונקציה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.

נתונה הפונקציה $h(x)=g(x)\cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

ד. (1) רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $-9\leq x\leq 0$.

א(1)

$f(x)=\frac{ax}{(x-3)^2}$, $a>0$

$\boxed{y=0 \quad , \quad x=3}$

$\lim\limits_{x\to 3^{\pm}} f(x)=\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

א(2)

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$

$u=ax \qquad v=(x-3)^2$

$u'=a \qquad v'=2(x-3)\cdot 1$

$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$

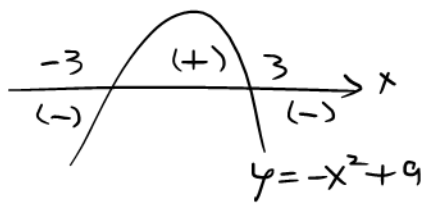
$f'(x)=\frac{a\cdot(x-3)^2-ax\cdot 2(x-3)}{((x-3)^2)^2}=\frac{a(x-3)\cdot[x-3-2x]}{(x-3)^4}$

$f'(x)=\frac{a(x-3)(-x-3)}{(x-3)^4}=\frac{a\cdot(-x^2+9)}{(x-3)^4}=0$

$-x^2+9=0$

$x=3$ פסול ת"ה $\qquad x=-3$

$$f'(x) = \frac{a(-x^2+9)}{(x-3)^4} = \frac{(+)\cdot(-x^2+9)}{(+)}$$



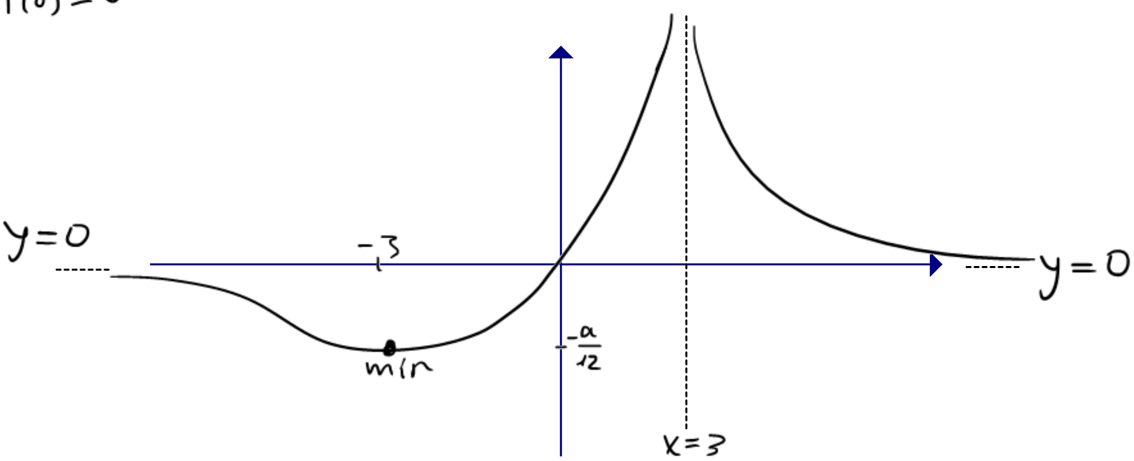
x		-3		3	
f'	(-)	0	(+)	///	(-)
f	↘	min	↗		↘

$$f(-3) = \frac{a\cdot(-3)}{(-3-3)^2} = \frac{-3a}{36} = -\frac{a}{12}$$

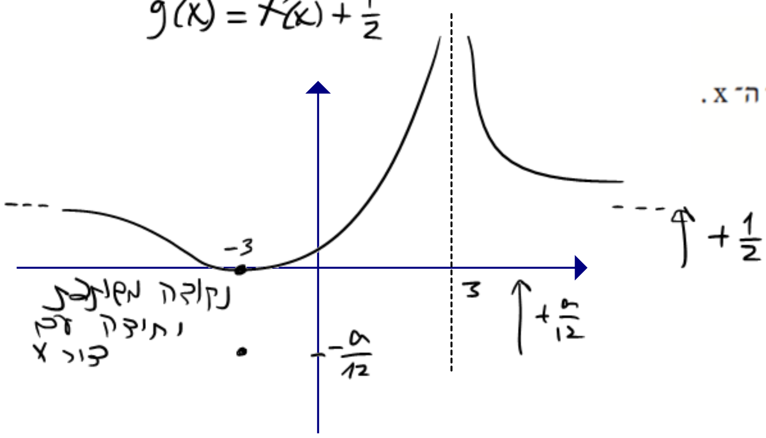
$$\min\left(-3, -\frac{a}{12}\right)$$

$f(0)=0$

ד.



$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$



נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 0.5$, המוגדרת בתחום $x \neq 3$.

נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה־ x .

ג. מצאו את הערך של a .

$$\frac{a}{12} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{a=6}$$

ה

$f(x)=\dfrac{6x}{(x-3)^2}$

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד.

נתונה הפונקצייה $h(x)=g(x)\cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

ד. **(1)** רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי ציר ה־x בתחום $-9\le x\le 0$.

$h(x)=g(x)\cdot g'(x)$

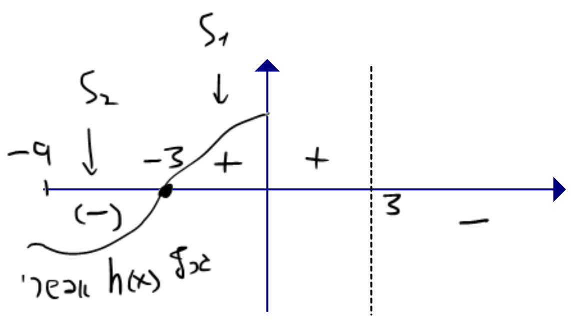
ד(1).

חיוביות: $-3<x<3$

שליליות: $x<-3\ ,\ x>3$

x		-3		3	
g	$+$	0	$+$	///	$+$
g'	$-$	0	$+$	///	$-$
h	$-$	0	$+$	///	$-$

ד(2).



$S_1=\int_{-3}^{0}h(x)dx$

$S_2=-\int_{-9}^{-3}h(x)dx$

נגזר

$H(x)=\int h(x)dx=\int g'(x)(g(x))^1dx=\dfrac{(g(x))^2}{2}+c=\frac{1}{2}(g(x))^2+c$

$g(x)=f(x)+0.5=\dfrac{6x}{(x-3)^2}+0.5$

$H(x)=\dfrac{(g(x))^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\dfrac{6x}{(x-3)^2}+0.5\right)^2$

$H(0)=\frac{1}{2}\left(\dfrac{6\cdot 0}{(0-3)^2}+0.5\right)^2=\frac{1}{8}$

$H(-3)=0 \qquad H(-9)=\frac{1}{128}$

$$S_1 = \frac{1}{2}(g(x))^2 \Big|_{-3}^{0} = H(x)\Big|_{-3}^{0} = H(0) - H(-3) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

$$S_2 = -H(x)\Big|_{-9}^{-3} = H(x)\Big|_{-3}^{-9} = H(-9) - H(-3) = \frac{1}{128} - 0 = \frac{1}{128}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{17}{128} \qquad \boxed{S = \frac{17}{128}}$$

7. נתונה הפונקציה $f(x)=(1+\cos x)\cdot(-1+b\cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

b הוא פרמטר.

נתון: $0<b<1$.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)=f(x)+|f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה־ y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

כידוע $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$. נראה ש: $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=(1+\cos(-x))(-1+b\cos(-x))=(1+\cos x)(-1+b\cos x)=f(x)$$

$\boxed{\text{הפונ' זוגית}}$

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

$$0=(1+\cos x)(-1+b\cos x)$$

$$1+\cos x=0$$
$$\cos x=-1$$
$$x=\pi+2\pi k$$
$$x=\pi,-\pi$$
$$\boxed{(\pi,0)\quad(-\pi,0)}$$

$$-1+b\cos x=0$$
$$\cos x=\frac{1}{b}$$

נתון ש: $0<b<1$

לכן $\frac{1}{b}>1$

אין פתרון

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b .

נתון ש: $f'(\frac{\pi}{3})=0$. נגזור ונציב.

$u=1+\cos x \quad u'=-\sin x$

$v=-1+b\cos x \quad v'=-b\sin x$

$$f'(x)=-\sin x(-1+b\cos x)+-b\sin x(1+\cos x)$$
$$f'(x)=-\sin x\left[-1+b\cos x+b(1+\cos x)\right]$$
$$f'(x)=-\sin x(2b\cos x+b-1)$$
$$0=-\sin(\tfrac{\pi}{3})(2b\cos(\tfrac{\pi}{3})+b-1)$$
$$2b\cdot\frac{1}{2}+b-1=0$$
$$\boxed{b=\frac{1}{2}}$$

הציבו $b=\frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד–ה.

ד. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$$f'(x) = -\sin x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 + \pi k \qquad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \qquad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

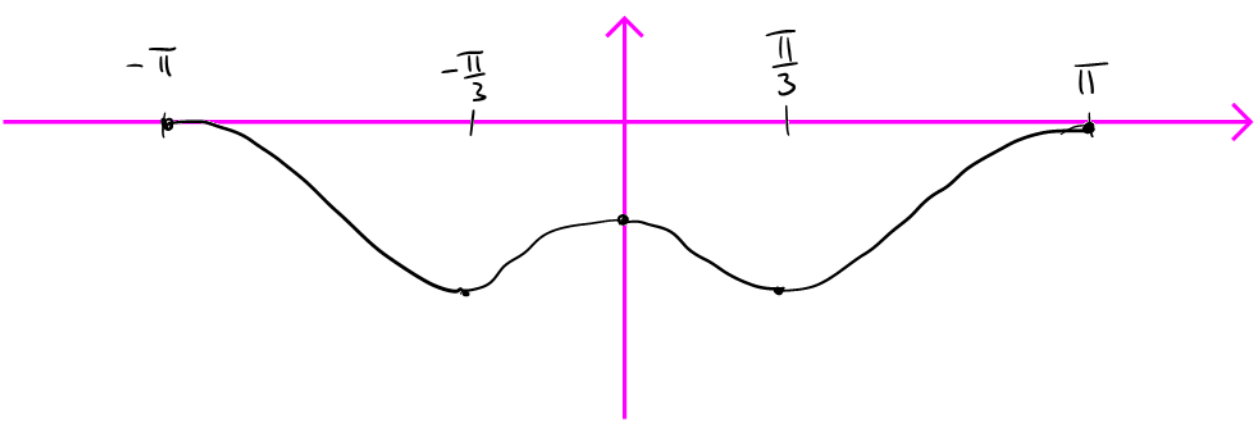
$$x = 0, \pi, -\pi \qquad x = \frac{\pi}{3} \qquad x = -\frac{\pi}{3}$$

		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	
x	$-\pi$	$< x <$	$-\frac{\pi}{3}$	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{\pi}{3}$	$< x <$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	max קצה	↘	min	↗	max	↘	min	↗	max קצה

$$f(\pm\pi) = 0$$
$$f\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{9}{8}$$
$$f(0) = -1$$

$$\boxed{(\pi, 0)\ \text{max קצה},\quad \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{9}{8}\right)\ \text{min},\quad (0,-1)\ \text{max},\quad \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{9}{8}\right)\ \text{min},\quad (-\pi, 0)\ \text{max קצה}}$$

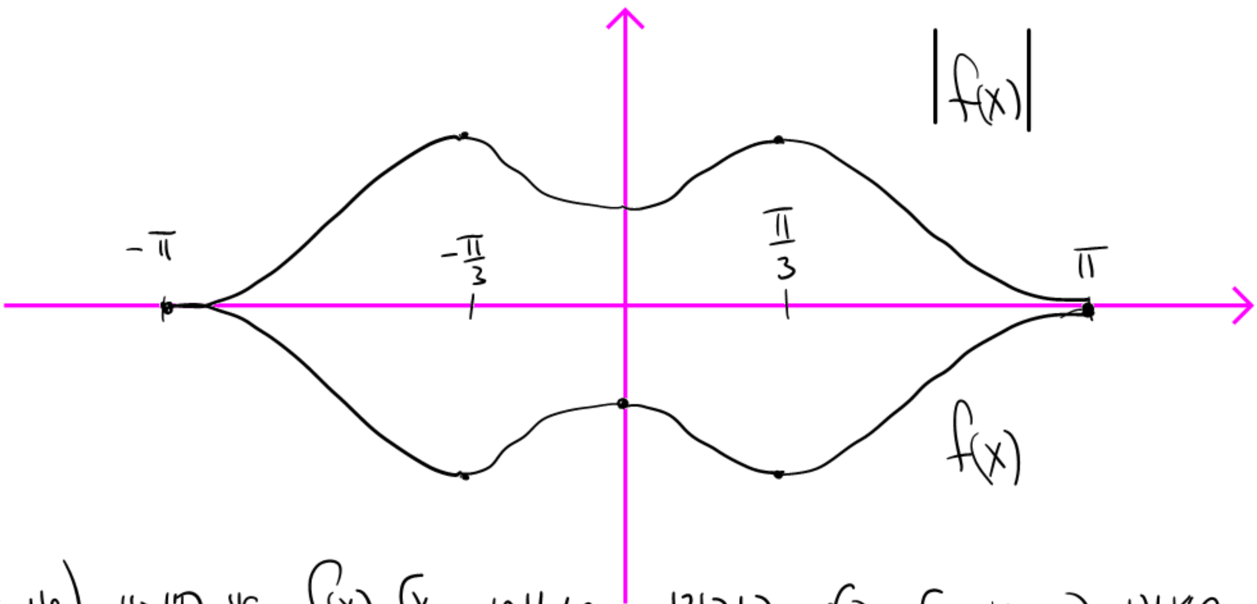
(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



נתונה הפונקציה $h(x) = f(x) + |f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה־ y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.

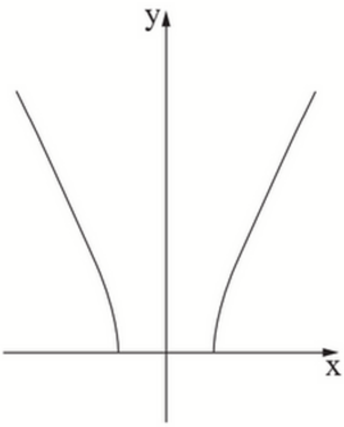


שיעורי ה-y של כל הנקודות שמונחות על f(x) אי-חיוביים (או אפס או שליליים). לכן שיעורי ה-y של כל הנקודות שמונחות על |f(x)| הם אי שליליים. עבור כל ערך x שנבחר שיעורי ה-y של f(x) ושל |f(x)| נגדיים ולכן סכומם אפס.

$\boxed{\text{לסיכום: הפונ' } h(x)=0 \text{ עבור כל } x \text{ בתחום}}$

.8 בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

נתון הישר $y = 3x - 3$.



א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־ y וחותך את הישר הנתון בנקודה B .

ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את הישר הנתון בנקודה C .

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .

ג. **(1)** הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB .

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC .

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־ AC הוא מקסימלי.

פתרון:

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

נתון הישר $y = 3x - 3$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נבדוק: ביטוי מתחת לשורש מספר אי-שלילי: $0 \le x^2 - 1$

נפתור אי-השיוויון הריבועי ב-x:

$0 \le (x+1)(x-1)$

תחום ההגדרה של $f(x)$: $\boxed{x \le -1 \text{ או } 1 \le x}$

המשך בעמוד הבא...

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון.

$f(x) = 2\cdot\sqrt{x^2-1}$, הישר הנתון: $y = 3x - 3$

נשווה בין ערכי ה-y:

$$y = f(x)$$

$$3x-3 = 2\cdot\sqrt{x^2-1}$$

נשים לב כי אגף ימין לא שלילי. ומהשוויון נובע: $0 \le 3x-3 \;/+3$

$3 \le 3x \;/:3$

$1 \le x$

בתחום $1 \le x$ נוכל להעלות את שני האגפים בריבוע (לחילופין, ניתן לבדוק את הפתרונות שמתקבלים בשלב שלפני העלאה בריבוע).

$$(3x-3)^2 = (2\cdot\sqrt{x^2-1})^2$$

$$(3(x-1))^2 = 2^2\cdot(\sqrt{x^2-1})^2$$

$$3^2\cdot(x-1)^2 = 4\cdot(x^2-1)$$

$$9(x-1)^2 = 4(x+1)(x-1)$$

פתרון ראשון אחד למשוואה הוא נקודת חיתוך הישר עם ציר ה-x: $x=1$.

עבור $x \ne 1$:

$$9(x-1)^2 = 4(x+1)(x-1) \;/:(x-1)\ne 0$$

$$9(x-1) = 4(x+1)$$

$$9x-9 = 4x+4 \;/-4x+9$$

$$5x = 13 \;/:5$$

$$x = 2.6$$

נשים לב כי שני הפתרונות בתחום $1 \le x$.

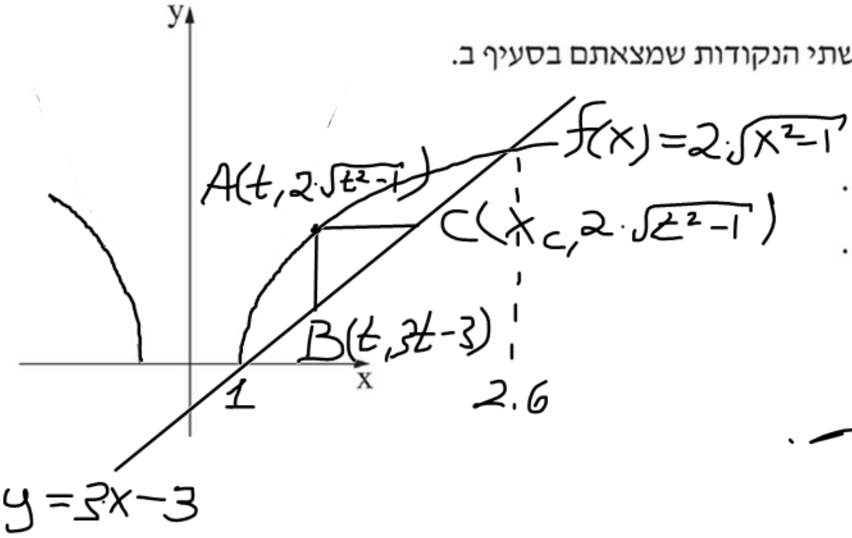
נציב במשוואת הישר לחישוב שיעור ה-y:

$y(1) = 3\cdot1-3 = 0$

$y(2.6) = 3\cdot2.6-3 = 4.8$

שיעורי שתי נקודות חיתוך גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון:

$\boxed{(1,0) \text{ או } (2.6, 4.8)}$



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב.

דרך הנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר המקביל לציר ה־ y וחותך את הישר הנתון בנקודה B.

ישר המקביל לציר ה־ x וחותך את הישר הנתון בנקודה C.

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A.

ג. (1) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

נשרטט את הישר הנתון והנקודות.

ניתן מהגרף [לכן] נוח להוכיח, כי $f(x)$ קעורה כלפי מטה (∩) בפרט בתחום: $1<x<2.6$

(אך להזיז צריך בנייה $1<x<2.6$ בפונקציה ובישר).

ולכן השיפוע בין שתי נקודות החיתוך שמצאנו, נמצא מתחת לגרף $f(x)$.

מהבנייה הנתונה וכל מתקיים $y_B<y_A$, $x_A<x_C$

(B נמצאת מתחת ל-A ו-C נמצאת מימין ל-A - ראו שרטוט).

נציג את שיעורי הנקודות: B: מהבנייה: $x_B=x_A=t$

וכן B על הישר הנתון, לכן $y_B=3t-3$

$B(t,3t-3)$

מכאן, אורך הקטע AB:

$$\boxed{AB}=y_A-y_B=2\sqrt{t^2-1}-(3t-3)=\boxed{2\sqrt{t^2-1}-3t+3}$$

המשך והפתרון בעמוד הבא..

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

נביע את שיעורי הנקודה C: מרכיב y: $y_C = y_A = 2\cdot\sqrt{t^2-1}$

C על הישר הנתון, לכן נציב: $y_C = 3\cdot x_C - 3$

$$2\cdot\sqrt{t^2-1} = 3\cdot x_C - 3 \quad /+3$$

$$2\cdot\sqrt{t^2-1} + 3 = 3\cdot x_C \quad /:3$$

$$x_C = \frac{2}{3}\sqrt{t^2-1} + 1$$

$$C\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^2-1} + 1,\ 2\cdot\sqrt{t^2-1}\right)$$

מכאן, אורך הקטע AC:

$$\boxed{AC = x_C - x_A = \frac{2}{3}\sqrt{t^2-1} + 1 - t}$$

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו־ AC הוא מקסימלי.

נגדיר את פונקציית המטרה: סכום אורכי הקטעים AB ו־AC.

נסמן את פונקציית המטרה: h(t).

$$\boxed{h(t)} = AB + AC = \underbrace{2\sqrt{t^2-1} - 3t + 3}_{AB} + \underbrace{\frac{2}{3}\sqrt{t^2-1} + 1 - t}_{AC} =$$

$$\boxed{= \frac{8}{3}\sqrt{t^2-1} - 4t + 4, \quad 1 < t < 2.6}$$

נגזור את פונקציית המטרה:

$$h'(t) = \frac{8}{3}\cdot\frac{2\cdot t}{2\sqrt{t^2-1}} - 4 = \frac{8t}{3\sqrt{t^2-1}} - \frac{4\cdot 3\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\sqrt{t^2-1}} = \frac{8t - 12\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\cdot\sqrt{t^2-1}}$$

המשך בעמוד הבא...

$h'(t) = \frac{8t-12\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\cdot\sqrt{t^2-1}}$, $1<t<2.6$

נשווה לאפס על מנת למצוא נקודות קריטיות ("חשודות כקיצון"):

$h'(t)=0$

$$\frac{8t-12\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\cdot\sqrt{t^2-1}} = 0 \Rightarrow 8t-12\cdot\sqrt{t^2-1} = 0 \xRightarrow{+12\cdot\sqrt{t^2-1}} 8t = 12\sqrt{t^2-1} \quad /:4$$

$$2t = 3\cdot\sqrt{t^2-1}$$

נשים לב כי אגף ימין לא שלילי וגם חיובי בתחום $1<t<2.6$.

כלומר $0<2t$ ו- $0<t$.

נעלה בריבוע: $4t^2 = 9\cdot(t^2-1)$

$$4t^2 = 9t^2-9 \quad /+9-4t^2$$

$$9 = 5t^2 \quad /:5$$

$$t^2 = \frac{9}{5}$$

$0<t = \frac{3}{\sqrt5} = \frac{3\cdot\sqrt5}{5}$ (ראה הסבר לעיל)

נשים לב כי מכנה הנגזרת $h'(t) = \frac{8t-12\cdot\sqrt{t^2-1}}{3\cdot\sqrt{t^2-1}}$ חיובי בכל תחום ההגדרה.

נגזור מונה נגזרת זו בלבד, נסמן ב-$u(t)$, לבדיקת סימן הנגזרת השנייה בנקודה הנ"ל.

$$u(t) = 8t-12\cdot\sqrt{t^2-1} \Rightarrow u'(t) = 8-12\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}} = 8-12\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$u'\left(\frac{3}{\sqrt5}\right) = 8-12\cdot\frac{\frac{3}{\sqrt5}}{\sqrt{\frac{9}{5}-1}} = 8-12\cdot\frac{\left(\frac{3}{\sqrt5}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)} = -10<0$$

מסקנה: עבור $\boxed{t=\frac{3\sqrt5}{5}\approx 1.342}$ סכום אורכי הקטעים AB ו- AC הוא מקסימלי.