



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשפ"ו, 2026, שאלון 35571, מועד ב', גרסה 05:
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"





פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון כי השוויון $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{b}$ מתקיים בעבור $n = 2$.

b הוא פרמטר שונה מ-0.

(1) מצאו את הערך של b.

(2) הציבו $b = 4$ והוכיחו באינדוקציית מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.

פתרון:

1. (1) נציב $n = 2$ בשוויון הנתיב:

$$1^3 + 2^3 = \frac{2^2(2+1)^2}{b}$$

$$9 = \frac{4 \cdot 9}{b}$$

$$\boxed{b = 4}$$

(2) נניח כי לכל n מתקיים, נבדוק:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

נבדוק - נבדוק שהשוויון מתקיים עבור $n = 1$:

$$1^3 = 1$$

נראה:

$$\frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

נראה:

הוכחנו שהשוויון מתקיים עבור $n = 1$.





שלב ד' - נניח שהעולה נכון עבור $k = h$ לבחן
כשהוא:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}$$

שלב ה' - נוכיח שהעולה נכון עבור $k = h+1$.
3.:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

נשתמש בהנחה האינדוקציה ונוכיח כי:

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

נפיש ונרדד מצד אחד. נוביל $(k+1)^2$ נורדד משני הצדדים:

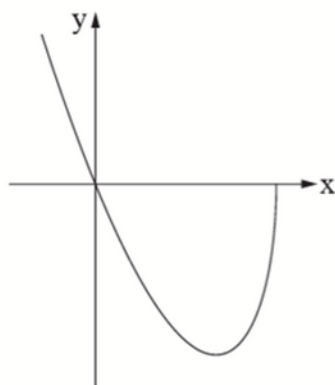
$$(k+1)^2 \cdot \left[\frac{k^2}{4} + k + 1 \right] = (k+1)^2 \cdot \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right]$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

היבט א' - האם יש להניח שהעולה נכון, נראה שהיא אכן נכונה עבור $k = h+1$.

סיכום: בדיוק שהלכנו נכון עבור $k = h$.

הצדד הימני של המשוואה נכון עבור $k = h$ לבחן כשהוא, הימני של המשוואה נכון עבור $k = h+1$, וכן הימני של המשוואה נכון עבור $k = h+2$.



ב. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \leq 6$.

אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $f(x) = x\sqrt{6-x}$

II. $f(x) = -x\sqrt{6-x}$

III. $f(x) = x\sqrt{x-6}$

IV. $f(x) = -x\sqrt{x-6}$

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = (f(x))^2$ המוגדרת בתחום $x \leq 6$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

פתרון:

(1) מחים ההגדרה של III ועל IV הוא $x \leq 6$, ולכן
הם לא מתאימים.

הביטוי I הוא חיובי עבור $x < 6$, ולכן לא
מתאים.

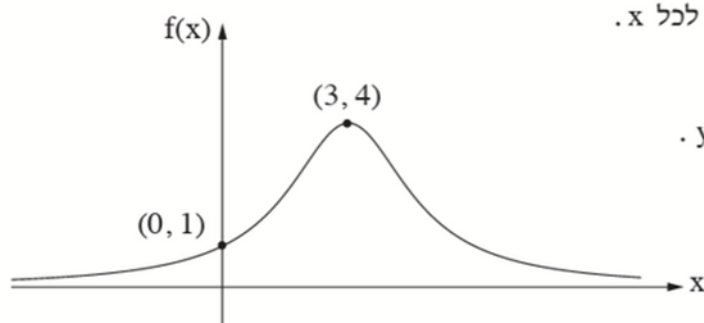
לכן, שהביטוי שמייצג את הפונקציה $f(x)$
הוא הביטוי II.

$$S = \int_0^6 g(x) dx = \int_0^6 (f(x))^2 dx = \int_0^6 x^2(6-x) dx \quad (2)$$

$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx = \left[2x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^6$$

$$S = \left[2 \cdot 6^3 - \frac{6^4}{4} \right] - [0] = \boxed{108}$$





ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y = 0$.

שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$

ושיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$

עם ציר ה- y מוצגים בסרטוט.

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 2}$$

(1) כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

פתרון:

(1) לפי הגרף הנתון של $f(x)$ יש עת' נקודת

בהן $y = 2$, כלומר לא שווה $2 = 0$ לא

יש עת' פתרון.

מכיון שאפיקה $f(x)$ יש עת' אסימפטוטה

אנכית.

תשובה: 2

(2) מכיון שהפונקציה $f(x)$ שואפת לאינסוף עבור $x \rightarrow \pm\infty$

הכיטוי $2 - f(x)$ שואף ל-2, ולכן הפונקציה

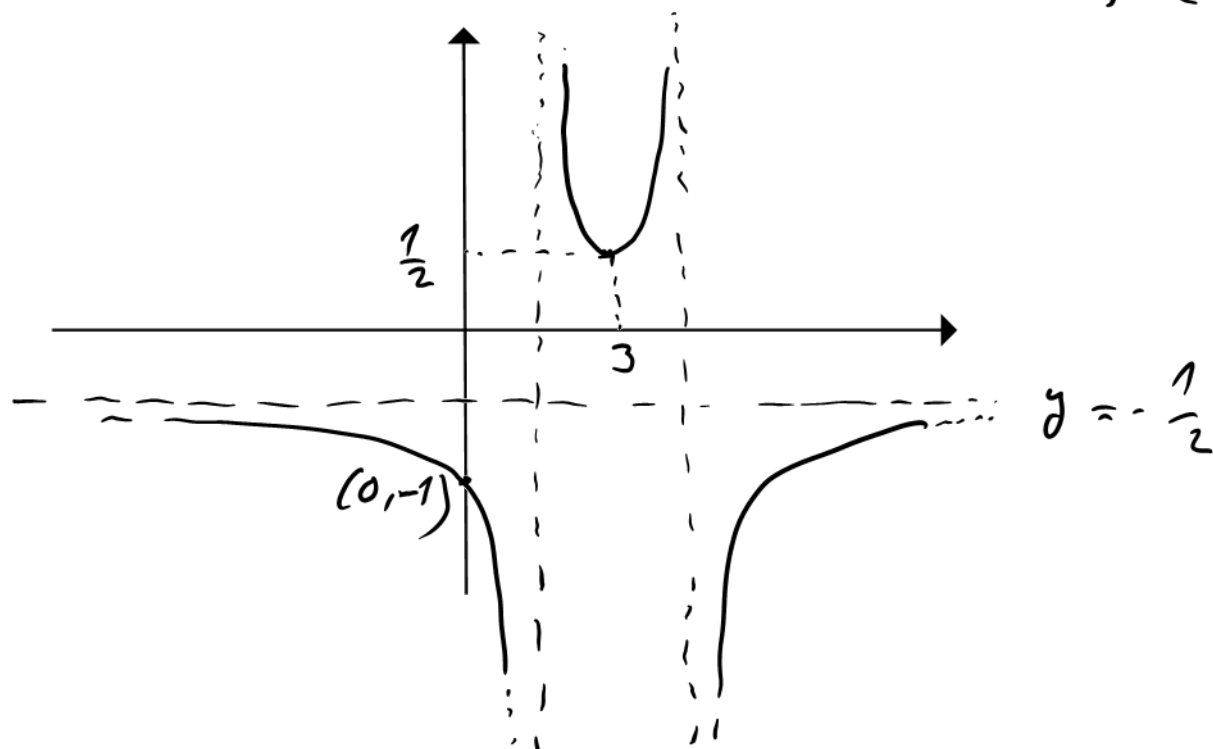
$g(x)$ שואפת ל- $-\frac{1}{2}$.

תשובה: $y = -\frac{1}{2}$





(3) גרף הפונקציה $f(x)$:





7. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle CAB = 90^\circ$).

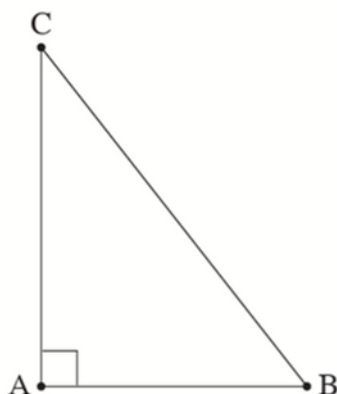
נתון כי אורכי צלעות המשולש הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית.

האיבר הראשון בסדרה שווה לאורך הצלע AB .

נתון: $AB = 1$.

(1) האם ייתכן שהאיבר השני בסדרה שווה לאורך הצלע BC ? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את אורך הצלע BC (בתשובתכם תוכלו להשאיר שורש).



פתרון:

(1) במשולש ישר זווית היתר הוא הצלע הגדולה.

כלומר $AC < BC$.

משפט פיתגורס:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AC = a, BC = a^2$$



$$AC = a, BC = a^2$$



$$1^2 + a^2 = (a^2)^2 \Rightarrow a^4 - a^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

הפתרון החיובי מתאים, כלומר $1^2 = BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ואם כן:

$$BC = a, AC = a^2$$



$$1^2 + (a^2)^2 = a^2 \Rightarrow a^4 - a^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{אין פתרון מממלי}$$



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





נסוה עסעס. השאלה:

(1) הוידר השני לא יכול להיגרע מ/ה באורכו לקרא
BC.

$$BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 \quad (2)$$





2. a_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת שכל איבריה חיוביים ומנתה היא q .

א. לפניכם שלוש טענות III-I. קבעו איזו מן הטענות נכונה ונמקו את קביעתכם.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n היא סדרה אינסופית שאיבריה מקיימים $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה b_n היא הנדסית ומנתה היא q .

נתון כי סכום הסדרה b_n גדול פי 1.96 מסכום הסדרה a_n .

ג. מצאו את הערך של q .

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \frac{b_n}{4 \cdot a_n}$ לכל n טבעי.

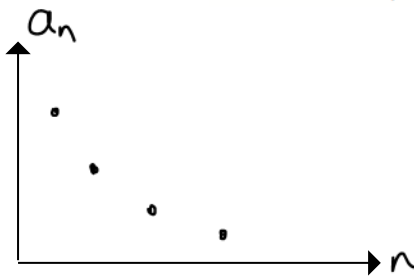
נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 34.79.

ד. (1) הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

(2) מצאו את הערך של k .

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה c_n .

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים. נמקו את תשובתכם.



X $a_n > 0 \quad \forall n \quad a_{n+1} < a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow 0 < q < 1$$

II נכונה

$$b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$$

I

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}}{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}} = \frac{a_{n+1} \cdot (1 + q + q^2)}{a_n \cdot (1 + q + q^2)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall n$$

$$\frac{b_1}{1-q_b} = 1.96 \cdot \frac{a_1}{1-q_a} \quad S_{b_n} = 1.96 \cdot S_{a_n} \quad \text{נניח}$$

$$q_b = q_a = q$$

$$b_1 = 1.96 \cdot a_1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 1.96 \cdot a_1 \quad | : a_1$$

$$q^2 + q - 0.96 = 0$$

$$q = 0.6 \quad q = -1.6$$

לא מתאים
לנניח

$$C_n = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{4 \cdot a_n}$$

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \frac{b_n}{4 \cdot a_n}$ לכל n טבעי.

נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 34.79.

ד. (1) הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

(2) מצאו את הערך של k .

$$C_n = \frac{a_n(1+q+q^2)}{4 \cdot a_n} = \frac{1+q+q^2}{4} = 0.49$$

$$C_n = 0.49 \text{ סדרה קבועה}$$

(1) ✓

$$k \cdot C_n = 0.49 \cdot k = 34.79$$

$$k = 71$$

(2) ✓

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה c_n .

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים. נמקו את תשובתכם.

$$\underbrace{c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{69} - c_{70}}_{=0} + c_{71} = c_{71} = 0.49$$

$$S_k = 0.49$$



3. כדי להתקבל לעבודה בחברה מסוימת על המועמדים לעבור שלושה שלבי קבלה זה אחר זה: מבחן א', מבחן ב' וריאיון אישי.

רק מועמד שעובר את מבחן א' ניגש למבחן ב', ורק מועמד שעובר את מבחן ב' ניגש לריאיון.

מועמד שעובר את כל שלושת השלבים מתקבל לעבודה.

ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א' היא p ($0 < p < 1$).

ההסתברות שמועמד שעבר את מבחן א' יעבור את מבחן ב' גדולה פי 2 מן ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א'.

ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה גדולה פי 3 מן ההסתברות שמועמד יעבור את שני המבחנים ולא יעבור את הריאיון.

א. מצאו את ההסתברות שמועמד שעבר את שני המבחנים יעבור את הריאיון.

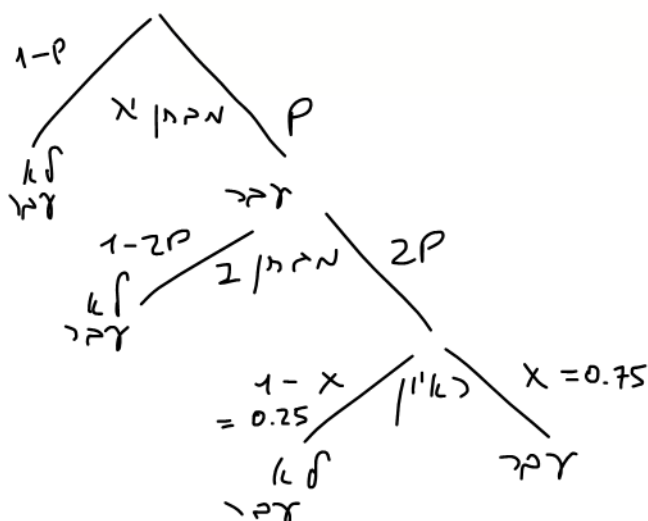
94% מן המועמדים לא מתקבלים לעבודה.

ב. מצאו את הערך של p .

ג. ידוע כי מועמד לא התקבל לעבודה. מהי ההסתברות שמועמד זה עבר את מבחן א'?

מבין כל המועמדים שלא התקבלו לעבודה בוחרים באקראי 5 מועמדים.

ד. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם עברו את מבחן א'?



$$P(\text{passed A and B}) = 2p^2 \cdot x$$

$$P(\text{passed A and not B}) = 2p^2(1-x)$$

$$2p^2 \cdot x = 3 \cdot 2p^2 \cdot (1-x)$$

$$x = 3 - 3x$$

$$4x = 3$$

$$x = 0.75$$

$$P(\text{passed A and B} / \text{not accepted}) = 0.75$$

$$0.94 = 1 - p + p \cdot (1 - 2p) + 2p^2 \cdot 0.25$$

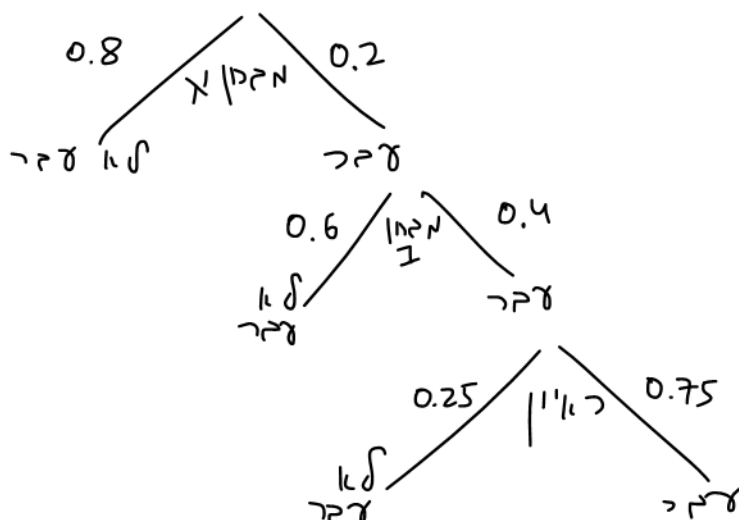
$$0.94 = 1 - p + p - 2p^2 + 0.5p^2$$

$$1.5p^2 = 0.06$$

$$p^2 = 0.04$$

$$p = 0.2$$





א

$$P(\text{Success} / \text{Success}) = \frac{0.2 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4 \times 0.25}{0.94} = \frac{0.14}{0.94} = \frac{7}{47}$$

$n=5$

מבין כל המועמדים שלא התקבלו לעבודה בוחרים באקראי 5 מועמדים.

ד. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם עברו את מבחן א'?

$k: 0, 1, 2, 3, 4, 5$
 P_T

$$P_T = 1 - P_5(0) - P_5(1) \quad \text{I}$$

$$P = P(\text{Success} / \text{Success}) = \frac{7}{47}$$

$$P(T) = 0.1628$$

$$P_5(0) = \binom{5}{0} \left(\frac{7}{47}\right)^0 \left(\frac{40}{47}\right)^5 = 0.4465$$

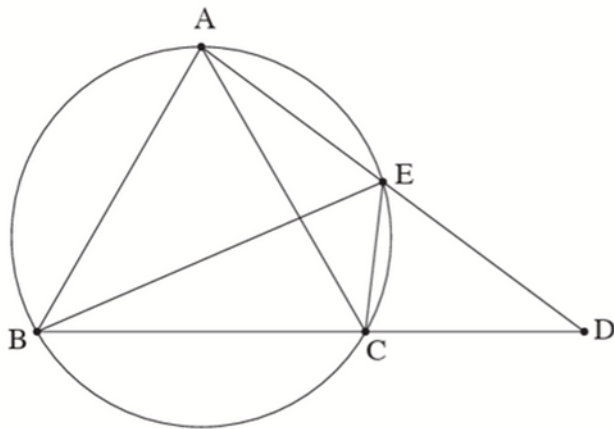
$$P_5(1) = \binom{5}{1} \left(\frac{7}{47}\right)^1 \left(\frac{40}{47}\right)^4 = 0.3907$$

$$P_5(0) + P_5(1) = 0.8372$$





פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל.

הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC, כמתואר בסרטוט.

הקטע AD חותך את המעגל בנקודה E.

א. הוכיחו: $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$.

ב. הוכיחו: $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

ג. הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$.

נתון כי שטח המשולש AEB גדול פי 2.25 משטח המשולש CED.

ד. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABD משטח המשולש CED.

המספר	אגדה	נימוק
①	$\triangle ABC$ שווה צלע	נתון
②	$AB = BC = AC$	לפי 1
③	$\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ$	לפי 1
④	$\angle AEB = \angle ACB = 60^\circ$	זוויות היתריות – הנשענות על אותה קשת
⑤	$\angle BEC = \angle BAC = 60^\circ$	
⑥	$\angle CED = 60^\circ$	השלמה ל-180, זווית נשענת על אותה קשת
⑦	$\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$ ~ ש. ל. ~	לפי 4, 5, 6
⑧	$\angle ABE = \alpha$	סימון (ראו שרטוט) מסל (הפתרון)

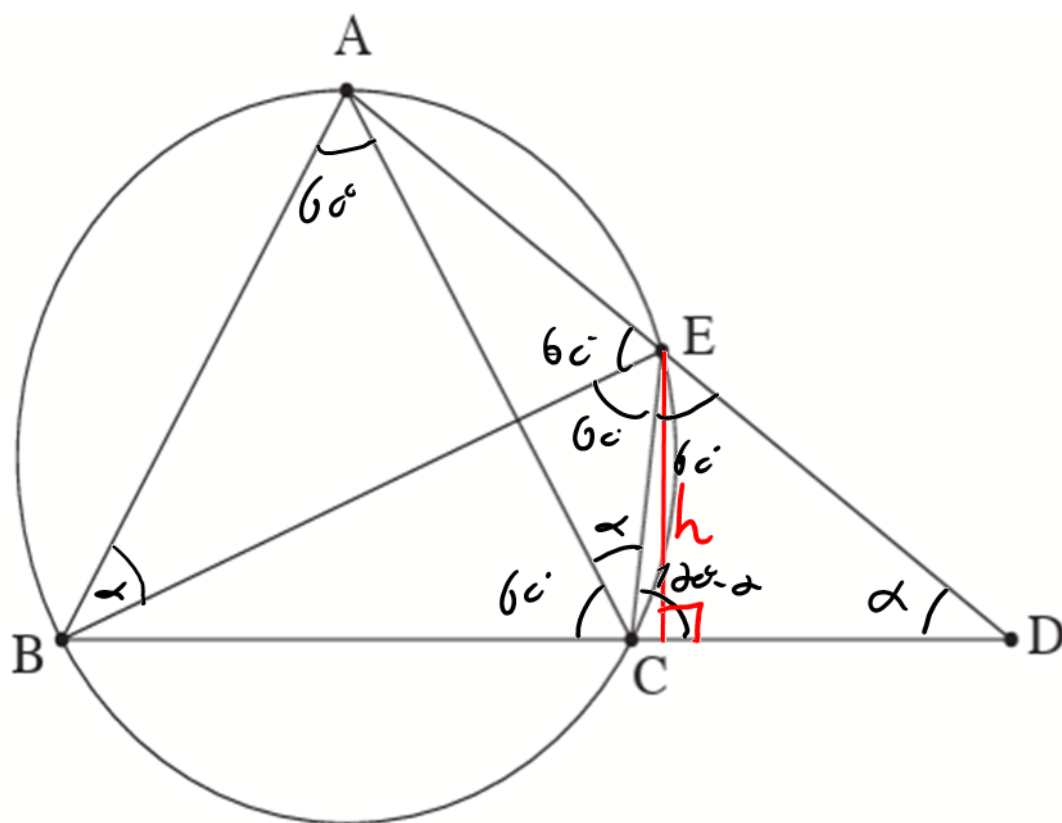


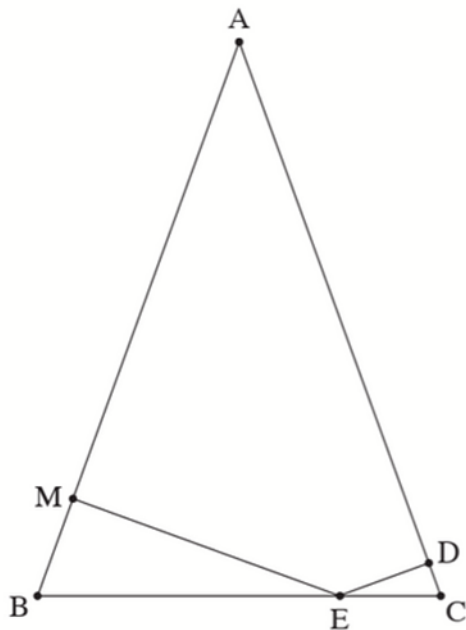
המספר	לסנה	ניחן
9	$\angle ACE = \angle ABE = \alpha$	זווית היקפית הנשענת על יונים דלת שווה.
10	$\angle ACB = 180 - \alpha$	השלימה ל-180, זווית של זווית.
11	$\angle CDE = \alpha$	לפי 9, 3 השלימה ל-180, זווית של זווית.
12	$\angle CDE = \angle ABE$	כאן השתקרה. לפי 9, 11
13	$\triangle AEB \sim \triangle CED$ ל.ע.ל. כי	משפט זנבון S.S. לפי 8, 12
13	$\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$	יחס הזנבון המתקבל במשולשים הזנבונים. לפי 13
14	$\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$ ל.ע.ל. כי	לפי 13, 2
15	$S_{AEB} = 2.25 \cdot S_{ABD}$	נכון
16	$\frac{S_{AEB}}{S_{ABD}} = \left(\frac{AE}{CE}\right)^2$	יחס השטחים של משולשים זנבונים שווה ליחס הזנבון המתקבל. כי יקוץ.
17	$\frac{AE}{CE} = 7.5$	חילוק. לפי 16, 15



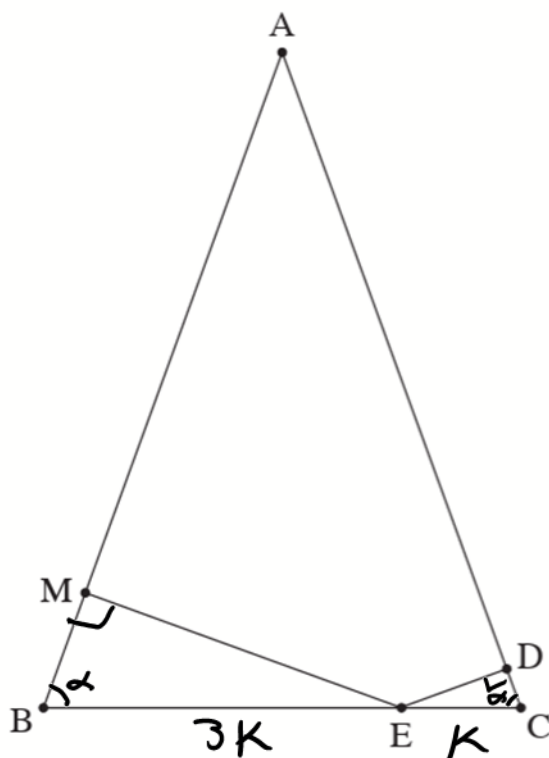
הגסבר	לחנה	נחמד
(18)	$\frac{BC}{CD} = \frac{AE}{CE} = 1.5$	
(19)	$S_{CDE} = \frac{CD \cdot h}{2}$	נוסחת שטח משולש + גובה, שיק יעיל מאוד
	$S_{BCE} = \frac{BC \cdot h}{2}$	אוקה. שיוך 3 - E.
(20)	$S_{BCE} = 1.5 \cdot S_{CDE}$	הישוב. לפי 18, 19
(21)	$S_{ABD} = S_{CDE} + S_{BCE} + S_{ABE}$	חיבור שטחים
(22)	$S_{ABD} = 4.75 \cdot S_{CED}$	הישוב. לפי 15, 20, 21
(23)	$\frac{S_{ABD}}{S_{CED}} = 4.75$ לפי ש. 3	







5. בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$). הנקודה E נמצאת על הבסיס BC כך ש- $BE = 3 \cdot EC$. הנקודה D נמצאת על הצלע AC כך ש- ED מאונק ל- AC . הנקודה M נמצאת על הצלע AB כך ש- EM מאונק ל- AB . נסמן: $\angle ABC = \alpha$, $30^\circ < \alpha < 90^\circ$, $EC = k$.
- א. הביעו באמצעות k ו- α את אורכי הקטעים ME ו- DE .
- ב. מצאו את הערך של α נתון כי סכום שטחי המשולשים CED ו- BEM הוא $1.6k^2$.
- ג. מצאו את הערך של k נתון כי אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED הוא 29.



פתרון:
נניח $AB = AC$

$$\angle ABC = \angle ACB = \alpha$$

$\triangle CED$:

$$\frac{DE}{k} = \sin \alpha$$

$$DE = k \sin \alpha$$

$\triangle BEM$:

$$\frac{ME}{3k} = \sin \alpha$$

$$ME = 3k \sin \alpha$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



$$S_{CED} + S_{BEM} = 1.6K^2 \quad \text{נניח:}$$

$$S_{CED} = \frac{CE \cdot DE \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{2} = \frac{K \cdot K \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{K^2 \sin 2\alpha}{4}$$

$$S_{BEM} = \frac{BE \cdot ME \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{2} = \frac{3K \cdot 3K \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{9K^2 \sin 2\alpha}{4}$$

$$S_{CED} + S_{BEM} = \frac{K^2 \sin 2\alpha}{4} + \frac{9K^2 \sin 2\alpha}{4} = 2.5K^2 \sin 2\alpha$$

$$2.5K^2 \sin 2\alpha = 1.6K^2 \quad | : 2.5K^2 \neq 0$$

↓

$$\sin 2\alpha = 0.64$$

$$2\alpha = 39.79^\circ + 360^\circ \text{ או } 2\alpha = 140.21^\circ + 360^\circ$$

$$\alpha = 19.895^\circ + 180^\circ \text{ או } \alpha = 70.105^\circ + 180^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 70.105^\circ} \quad \text{בתחום הנכון:}$$

ד. משולש ADE הווי ישר זווית ($\angle ADE = 90^\circ$)
כן, AE היא היקף המעגל.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם משולש זה הוא
9, כלומר $AE = 58$.

נביע ל- קדף AD קטן מ-9, ונשתמש
במשפט פיתגורס.

↓



$$\underline{\Delta ABC}: \quad \frac{4K}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

$$AC = \frac{4K \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{4K \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2K}{\cos \alpha} = 5.88K$$

$$\underline{\Delta CED}: \quad \frac{CD}{K} = \cos \alpha \rightarrow CD = K \cos \alpha = 0.34K$$

$$AD = AC - CD = 5.54K \quad \text{חיסור הקטעים:}$$

$$DE = K \sin \alpha = 0.94K$$

משפט פיתגורס במשולש AED:

$$(0.94K)^2 + (5.54K)^2 = 58^2$$

$$0.8836K^2 + 30.6916K^2 = 3364$$

$$31.5752K^2 = 3364$$

$$K^2 = 106.54$$

$$\boxed{K = 10.32}$$



6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{6(x-1)^2}{x^2+a}$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתון כי שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הוא 7.5.

ג. מצאו את הערך של a.

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

$g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ היא פונקצייה המקיימת

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-a \leq x \leq 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + a &= 0 \\ x^2 &= -a < 0 \\ \text{אין פתרון} \end{aligned}$$

נניח: $a > 0$

תחום ההגדרה

$$x \in \mathbb{R}$$

א' (1)

$$f(x) = \frac{6(x^2 - 2x + 1)}{x^2 + a}$$

אסימטות ואופקית $y = 6$

א' (2)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 6$$

$$\begin{aligned} u &= 6(x-1)^2 & v &= x^2 + a \\ u' &= 12 \cdot (x-1) \cdot 1 & v' &= 2x \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{12(x-1) \cdot (x^2+a) - 2x \cdot 6 \cdot (x-1)^2}{(x^2+a)^2} = \frac{12(x-1) \cdot [x^2+a - x(x-1)]}{(x^2+a)^2}$$

ג



$$f'(x) = \frac{12(x-1)(x+a)}{(x^2+a)^2} = \frac{0}{1} \quad 12(x-1)(x+a) = 0$$

$$x=1 \quad x=-a$$

x	-a	1
f'	+	-
f	max	min

$$y = 12(x-1)(x+a)$$

$$f(1) = \frac{6 \cdot (1-1)^2}{1^2+a} = 0$$

$$f(-a) = \frac{6(-a-1)^2}{(-a)^2+a} = \frac{6(a+1)^2}{a(a+1)} = \frac{6(a+1)}{a}$$

$$\max(-a, \frac{6(a+1)}{a})$$

$$\min(1, 0)$$

$$\frac{6(a+1)}{a} = 7.5 \quad \underline{A}$$

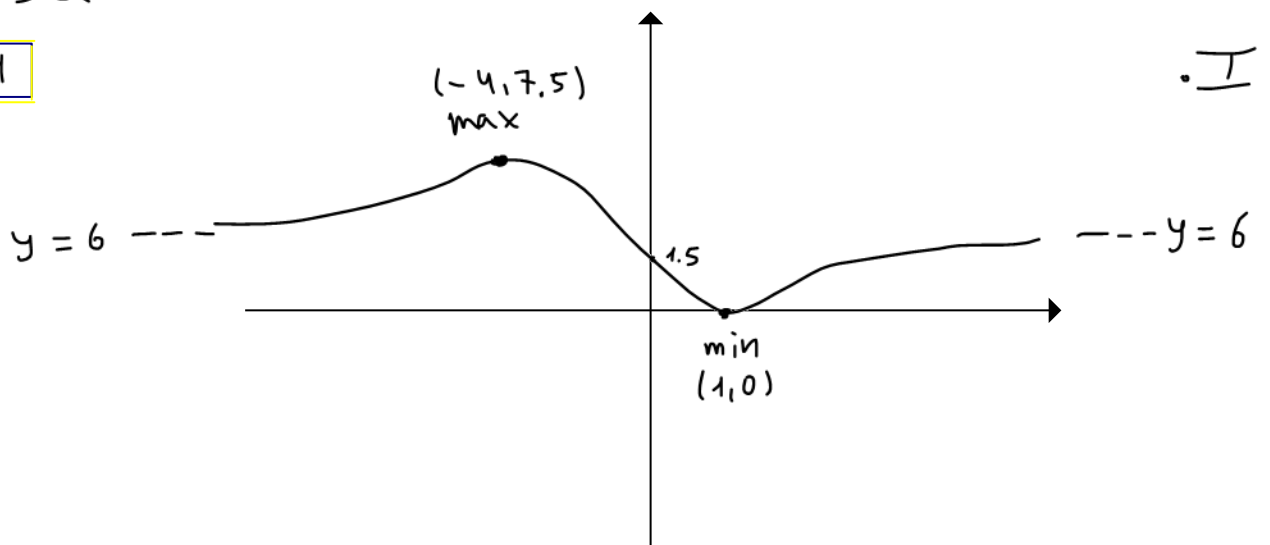
נתון כי שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הוא 7.5.
ג. מצאו את הערך של a .

$$6a+6 = 7.5a$$

$$6 = 1.5a$$

$$\boxed{a=4}$$

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ה.
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.



$$f(0) = 1.5$$



$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

$g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ היא פונקציית המקיימת

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

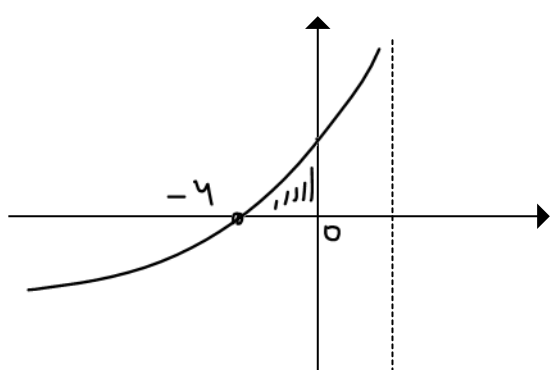
(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-a \leq x \leq 0$.

$f(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ (1)

x		-4		1	
$f(x)$	+	0	-	0	+
$-f'(x)$	-	0	+	0	-
$(f(x))^2$	+	+	+	0	+
$g(x)$	-	0	+	///	-

(2) חיוביות: $-4 < x < 1$
שליליות: $x < -4$, $x > 1$



(3)
$$S = \int_{-4}^0 \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} dx = \int_{-4}^0 -f'(x) \cdot (f(x))^{-2} dx$$

$$= - \left. \frac{(f(x))^{-1}}{-1} \right|_{-4}^0 = \left. \frac{1}{f(x)} \right|_{-4}^0 = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(-4)}$$

$$= \frac{1}{1.5} - \frac{1}{7.5} = \frac{8}{15}$$

$$S = \frac{8}{15}$$





7. נתונה הפונקצייה $f(x) = (\sin x)^2 \cdot \cos(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$.

a הוא פרמטר שלילי.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בתחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$f(-x) = (\sin(-x))^2 \cdot \cos(2(-x)) = (-\sin x)^2 \cdot \cos(2x) = (\sin x)^2 \cos(2x) = f(x)$$

$$f(-x) = f(x) \quad \text{הוכחה!}$$

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$$f'(x) = \sin 2x \cdot \cos 2x - 2 \sin(2x) \sin^2 x$$

$$f'(x) = \sin 2x (\cos 2x - 2 \sin^2 x)$$

$$f'(x) = \sin 2x (1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x)$$

$$f'(x) = \sin 2x (1 - 4 \sin^2 x) = 0$$

$$u = (\sin x)^2 \quad u' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$v = \cos(2x) \quad v' = -2 \sin(2x)$$



$$\sin 2x = 0$$

$$2x = 0 + \pi k$$

$$x = 0 + \frac{1}{2}\pi k$$

$$x = 0$$

$$1 - 4\sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

אין נתיב
בגומא

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

אין נתיב
בגומא

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	min	max	min	max	min

$$\min \left(-\frac{\pi}{4}, 0 \right)$$

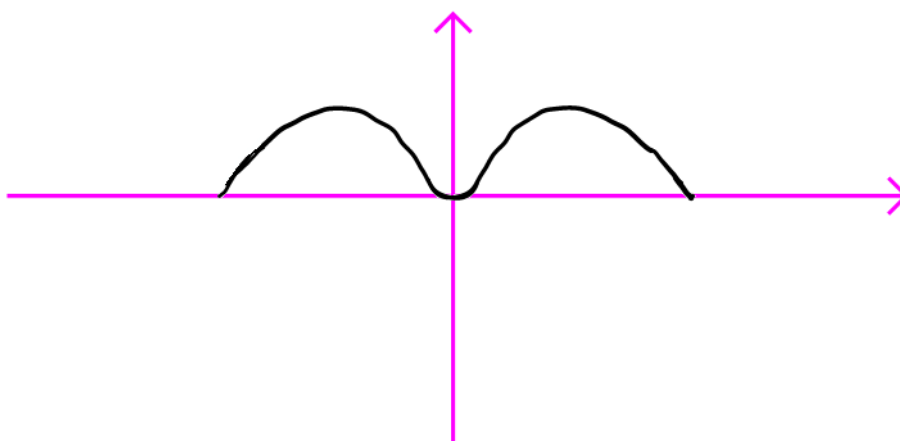
$$\max \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{1}{8} \right)$$

$$\min (0, 0)$$

$$\max \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{8} \right)$$

$$\min \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right)$$

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.





פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

נתונה הפונקצייה $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$

a הוא פרמטר שלילי.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

$$af'(x) \geq 0 \quad | : a < 0$$

$$f'(x) \leq 0$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0, \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}}$$

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

$$g(x) = 0$$

$$a \cdot f'(x) = 0 \quad | : a$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{6}, 0, -\frac{\pi}{6}$$

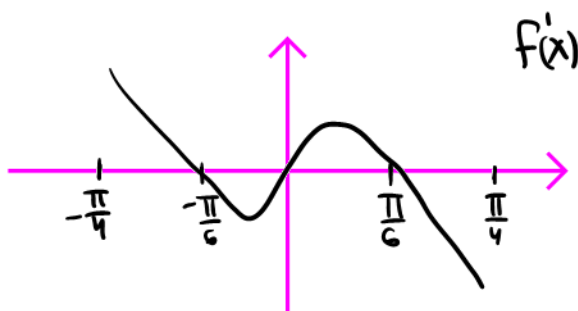
$$\boxed{\left(\frac{\pi}{6}, 0\right), (0, 0), \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)}$$

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בתחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

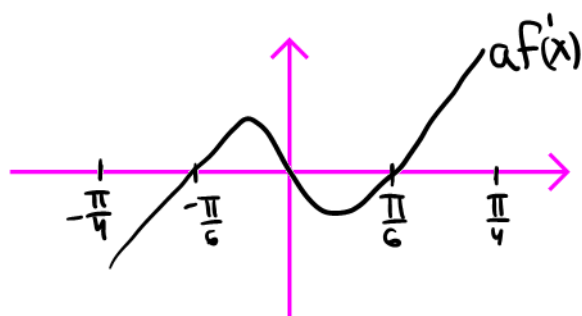
הנתיב מלא על כן ש? (א) יש ש?
נקודות פיתול ולכן? (א) יש ש?
נקודות קיצון.

ראשית (שרטט) את $f'(x)$

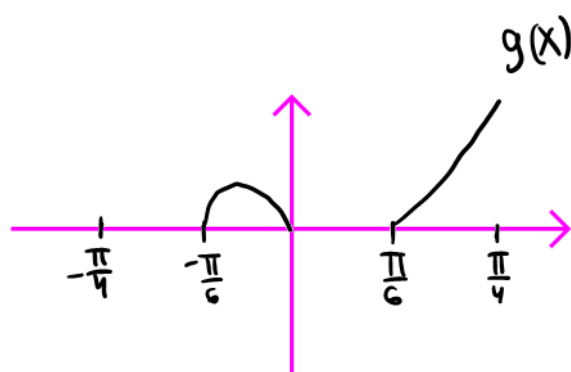


הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה

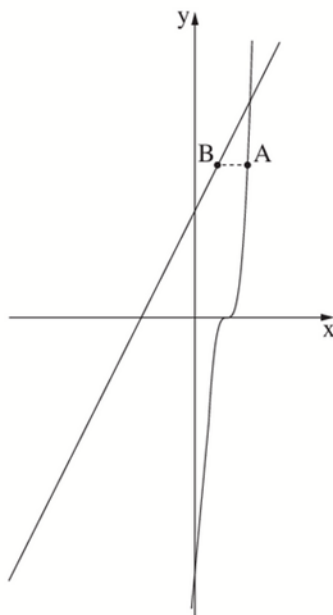




קטע Π נשט אר $af'(x)$
כאשר כופים פון בקבוע שלילי היא
מסמלת סביב ציר x 180° .



אוסיוק נשט אר $g(x)$
כאשר מכצעים בעולר שנים ער
פון, תחומי שפיליון הופכים לאי-הצורה
תחומי עילי וירידה באזורי תיובור נותנים
עלא שינוי מאחר ואק לאצרים טרענ' מסוג
זה רואים שפנצורה צורה סימן.



8. בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקצייה $f(x) = (4x - 2)^3$ והישר $y = 3x + b$.

b הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ כך ששיעור ה־ x שלה

קטן משיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ x .

נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .

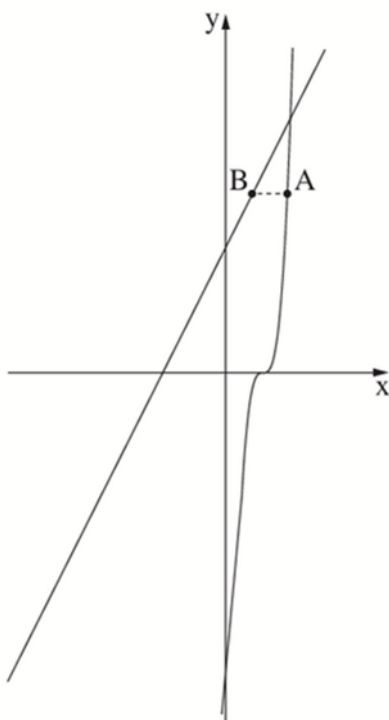
נתון: $0 \leq t \leq 0.7$.

א. הביעו באמצעות b ו־ t את שיעור ה־ x של הנקודה B .

ב. (1) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

(2) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

א. הביעו באמצעות b ו־ t את שיעור ה־ x של הנקודה B .



$$A(t, (4t-2)^3)$$

ע"י ה־ y של A ! B נהיה. (גליל את x_B)

$$(4t-2)^3 = 3x + b$$

$$(4t-2)^3 - b = 3x$$

$$x_B = \frac{(4t-2)^3 - b}{3}$$





ב. (1) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

נקי כונן לטרה שמשמאלה אורך AB , נח קור ונחלל מנימלם למחלל

$$D_{AB}(t) = X_A - X_B = t - \frac{(4t-2)^3 - 6}{3} =$$

$$D'(t) = 1 - \frac{3(4t-2)^2 \cdot 4}{3} = \frac{3 - 12(4t-2)^2}{3} = 0$$

$$3 = 12(4t-2)^2 \rightarrow (4t-2)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow 4t-2 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad 4t-2 = -\frac{1}{2}$$

$$4t = \frac{5}{2} \quad 4t = \frac{3}{2}$$

$$t = \frac{5}{8} \quad t = \frac{3}{8}$$

t	$0 < x < \frac{3}{8}$	$x = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8} < x < \frac{5}{8}$	$x = \frac{5}{8}$	$\frac{5}{8} < x < 0.7$
$D'(t)$	-	0	+	0	-
$D(t)$	max גלג	↓ מינ	↑ מינ	max גלג	↓ מינ

(בחן מ' הא) נקודת המינ המוחלל:

$$D\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{5}{12} + \frac{b}{3} = 0.41 + \frac{b}{3}$$

$$D(0.7) = \frac{397}{750} + \frac{b}{3} = 0.52 + \frac{b}{3}$$

לסיכום: נקודת $t = \frac{3}{8}$ אורך הקטע AB מינימלי

(2) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

(בחן מ' הא) נקודת המקס המוחלל:

$$D(0) = \frac{8}{3} + \frac{b}{3}$$

$$D\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{7}{12} + \frac{b}{3}$$

לסיכום: נקודת $t = 0$ אורך הקטע AB מקסימלי