פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ו, 2026 שאלון 35471, גרסה 05:

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. במשתלת "עץ ופרח" מגדלים צמחים מסוגים שונים.

בשנה מסוימת, אורכי הגבעולים של הצמחים במשתלה התפלגו נורמלית,

והאורך הממוצע של הגבעולים היה 64 ס"מ.

צמחים שאורך הגבעול שלהם קטן מ־ 55 ס"מ נמכרים לחנויות מקומיות.

נתון כי בשנה זו 32.6% מן הצמחים במשתלה נמכרו לחנויות מקומיות.

א. מצאו את סטיית התקן של אורכי הגבעולים בשנה זו.

צמחים שאורך הגבעול שלהם גדול מ־ 80 ס"מ נשלחים לייצוא.

בשנה זו, 9,540 מן הצמחים במשתלה נשלחו לייצוא.

ב. **(1)** מצאו את אחוז הצמחים במשתלה שנשלחו לייצוא.

(2) על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, כמה צמחים לא נשלחו לייצוא ולא נמכרו לחנויות מקומיות?

בשנה שלאחר מכן, אורכי הגבעולים של הצמחים במשתלה התפלגו נורמלית, וסטיית התקן הייתה 25 ס"מ.

גם בשנה זו צמחים שאורך הגבעול שלהם קטן מ־ 55 ס"מ נמכרו לחנויות מקומיות.

בשנה זו גידלו במשתלה 40,000 צמחים סך הכול.

4,000 מן הצמחים נמכרו לחנויות מקומיות.

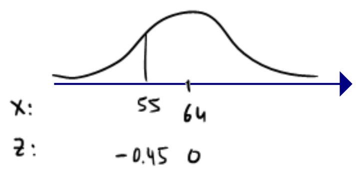
ג. מצאו את האורך הממוצע של גבעולי הצמחים בשנה זו.

א.

נתון: $\bar{X} = 64_{cm}$, $P(X < 55_{cm}) = 32.6\% = 0.326$

$Z = -0.45$

$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} \Rightarrow -0.45 = \frac{55-64}{S}$



$S = \frac{55-64}{-0.45}$ $\boxed{S = 20_{cm}}$

צמחים שאורך הגבעול שלהם גדול מ־ 80 ס"מ נשלחים לייצוא.

בשנה זו, 9,540 מן הצמחים במשתלה נשלחו לייצוא.

ב. **(1)** מצאו את אחוז הצמחים במשתלה שנשלחו לייצוא.

(2) על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, כמה צמחים לא נשלחו לייצוא ולא נמכרו לחנויות מקומיות?

ב (1)

$X = 80cm$

$Z = \frac{80-64}{20} = 0.8$

$P(x < 80cm) = 0.788$ $\quad$ $P(x > 80cm) = 0.212$

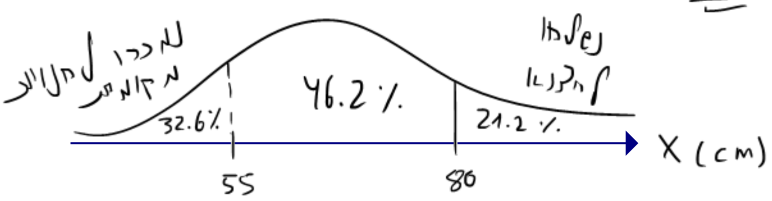
$$\boxed{P(\text{נשלחו לייצוא}) = 21.2\ \%}$$

ב (2)

$0.212 \cdot N = 9540$

סה"כ צמחים $N = 45{,}000$

$P(55 < x < 80) = 0.462$



$N(55 < x < 80) = 0.462 \cdot 45000 = 20{,}790$

$$\boxed{N(\text{לא נשלחו לייצוא ולא נמכרו לחנויות מקומיות}) = 20{,}790}$$

בשנה שלאחר מכן, אורכי הגבעולים של הצמחים במשתלה התפלגו נורמלית, וסטיית התקן הייתה 25 ס"מ.

גם בשנה זו צמחים שאורך הגבעול שלהם קטן מ־ 55 ס"מ נמכרו לחנויות מקומיות.

בשנה זו גידלו במשתלה 40,000 צמחים סך הכול.

4,000 מן הצמחים נמכרו לחנויות מקומיות.

ג. מצאו את האורך הממוצע של גבעולי הצמחים בשנה זו.

$S = 25\ cm$

$P(x < 55cm) = \frac{4000}{40{,}000} = 0.1$

$Z = -1.28$

$Z = \frac{x - \bar{X}}{S}$

$-1.28 = \frac{55 - \bar{X}}{25}$

$-32 = 55 - \bar{X}$

$$\boxed{\bar{X} = 87cm}$$

.2 בחברת שיווק בדקו את הקשר בין ההוצאות על פרסום (המשתנה x) ובין ההכנסות (המשתנה y) של 5 חברות א'–ה' בחודש מסוים. הנתונים מוצגים בטבלה שלפניכם.

החברה	**ההוצאות על פרסום (באלפי שקלים)** המשתנה x	**ההכנסות (באלפי שקלים)** המשתנה y
א'	10	16
ב'	15	17
ג'	20	20
ד'	25	34
ה'	30	68

א. **(1)** חשבו את ממוצע ההוצאות על פרסום של 5 החברות בחודש זה.

(2) חשבו את סטיית התקן של ההוצאות על פרסום של 5 החברות בחודש זה.

בחברת השיווק מצאו כי ממוצע ההכנסות של 5 החברות בחודש זה היה 31 אלף שקלים, וכי סטיית התקן של ההכנסות שלהן הייתה $8\sqrt{6}$ אלף שקלים.

ב. מצאו את מקדם המתאם r .

ג. **(1)** מצאו את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x .

(2) על פי ישר הרגרסיה, מהו הניבוי להכנסות החודשיות בחברה שההוצאות החודשיות שלה על פרסום הן 24 אלף שקלים?

בחודש שלאחר מכן גדלו ההכנסות של כל אחת מן החברות ב־ 15% (ההוצאות על פרסום של כל אחת מן החברות לא השתנו).

ד. לפניכם שלושה היגדים I–III .

קבעו בעבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון. נמקו את קביעותיכם.

I. בחודש שבו גדלו ההכנסות הייתה סטיית התקן של ההכנסות $10\sqrt{6}$.

II. בחודש שבו גדלו ההכנסות, שיפוע ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x – לא השתנה.

III. הנקודה $(20\ ,\ 35.65)$ נמצאת על ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x בחודש שבו גדלו ההכנסות.

א(1).

$$\bar{x} = \frac{10+15+20+25+30}{5} = 20$$

$$\boxed{\bar{x} = 20}$$ אלפי שקלים

א(2).

$$S_x = \sqrt{\frac{(10-20)^2+(15-20)^2+(20-20)^2+(25-20)^2+(30-20)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{10^2+5^2+0+5^2+10^2}{5}}$$

$$\boxed{S_x = 5\sqrt{2} = 7.071}$$ אלפי שקלים

$$S = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2-\bar{x})^2 \cdot f_2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2 \cdot f_n}{N}}$$

בחברת השיווק מצאו כי ממוצע ההכנסות של 5 החברות בחודש זה היה 31 אלף שקלים,
וכי סטיית התקן של ההכנסות שלהן הייתה $8\sqrt{6}$ אלף שקלים.

ב. מצאו את מקדם המתאם r .

ג. **(1)** מצאו את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x .

(2) על פי ישר הרגרסיה, מהו הניבוי להכנסות החודשיות בחברה שההוצאות החודשיות שלה על פרסום הן 24 אלף שקלים?

ב. נתון: $S_y = 8\sqrt{6}$, $\bar{y} = 31$

$$r = \frac{1}{N \cdot S_x \cdot S_y}[(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y}) + \ldots + (x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})]$$

$$r = \frac{1}{5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{6}} \cdot [(-10)(-15)+(-5)(-14)+0+5\cdot3+10\cdot37]$$

$$\boxed{r = 0.873}$$

$\bar{y} = 31$ $\bar{x} = 20$

החברה	ההוצאות על פרסום (באלפי שקלים) המשתנה x	ההכנסות (באלפי שקלים) המשתנה y
א'	10	16
ב'	15	17
ג'	20	20
ד'	25	34
ה'	30	68

ג(1).

$$m = r \cdot \frac{S_y}{S_x} \qquad m = 2.42$$

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}) \qquad y - 31 = 2.42(x - 20)$$

$$\boxed{y = 2.42x - 17.4}$$

ג(2). $x = 24$

$$y = 2.42 \cdot 24 - 17.4 = 40.68$$

$\boxed{40.68}$ אלפי שקלים

בחודש שלאחר מכן גדלו ההכנסות של כל אחת מן החברות ב- 15% (ההוצאות על פרסום של כל אחת מן החברות לא השתנו).

ד. לפניכם שלושה היגדים I–III .

קבעו בעבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון. נמקו את קביעותיכם.

I. בחודש שבו גדלו ההכנסות הייתה סטיית התקן של ההכנסות $10\sqrt{6}$.

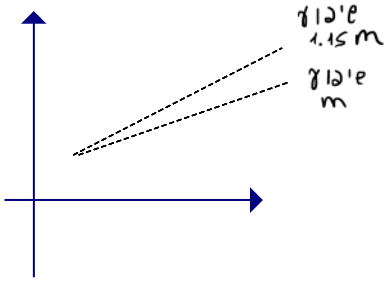
II. בחודש שבו גדלו ההכנסות, שיפוע ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x – לא השתנה.

III. הנקודה (20 , 35.65) נמצאת על ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x בחודש שבו גדלו ההכנסות.

ד. I לא נכון. S_y גדל ב- 15% $S_y = 8\sqrt{6} \cdot 1.15 = 9.2\sqrt{6} \neq 10\sqrt{6}$

S_y חדש $= 9.2\sqrt{6}$

II. לא נכון. ערכי y גדלו פי 1.15 וערכי x נשארים לא השתנו
ולכן השיפוע כן השתנה.



III. נכון. $\bar{y}$ חדש $= 1.15 \cdot 31 = 35.65$

הנקודה (20,35.65) היא נקודת הממוצעים החדשה $(\bar{x}, \bar{y})$
ולכן נמצאת על ישר הרגרסיה החדש.

3. במשק חקלאי מסוים מגדלים שני סוגים של פלפלים: פלפלים גדולים ופלפלים קטנים.

מספר הפלפלים הגדולים גדול פי 4 ממספר הפלפלים הקטנים.

בוחרים באקראי פלפל אחד מבין כל הפלפלים במשק החקלאי.

א. מהי ההסתברות שהפלפל שנבחר הוא פלפל קטן?

הפלפלים הגדולים במשק החקלאי הם אדומים או צהובים,

והפלפלים הקטנים הם אדומים או ירוקים.

0.6 מן הפלפלים הגדולים הם אדומים.

0.75 מן הפלפלים הקטנים הם אדומים.

בוחרים באקראי פלפל אחד מבין כל הפלפלים במשק החקלאי.

ב. מהי ההסתברות שהפלפל שנבחר הוא פלפל גדול צהוב?

ג. **(1)** מהי ההסתברות שהפלפל שנבחר הוא פלפל אדום?

(2) ידוע שנבחר פלפל אדום. מהי ההסתברות שפלפל זה הוא פלפל גדול?

כל הפלפלים במשק החקלאי נשלחים לשני בתי אריזה א' ו־ ב'.

לבית אריזה א' נשלחים כל הפלפלים האדומים, ולבית אריזה ב' נשלחים כל הפלפלים הצהובים וכל הפלפלים הירוקים.

ד. האם אחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה א' גדול או קטן מאחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה ב'? נמקו את תשובתכם.

3. א.

נסמן את מספר הפלפלים הקטנים: x

ולכן מספר הפלפלים הגדולים גדול פי 4: $4x$

סה"כ כמות הפלפלים: $4x+x=5x$

ההסתברות לבחור פלפל קטן: $P(\text{קטן})=\frac{x}{5x}=\frac{1}{5}$

ב.

0.6 מהגדולים הם אדומים: $0.6\cdot 4x = 2.4x$

גדולים ואדומים $= 2.4x$

גדולים וזהובים $= 4x-2.4x=1.6x$

0.75 מהקטנים הם אדומים: $0.75\cdot x$

קטנים ואדומים: $0.75x$

קטנים וירוקים: $0.25x$

ההסתברות לבחור פלפל גדול וזהוב:

$$P(\text{גדול וזהוב}) = \frac{1.6x}{5x} = \frac{8}{25} = 0.32$$

ג. (1) ההסתברות לבחור פלפל אדום:

$$P(\text{אדום}) = \frac{0.75x + 2.4x}{5x} = \frac{63}{100} = 0.63$$

(2) ההסתברות לבחור פלפל אדום וגדול:

$$P(\text{אדום וגדול}) = \frac{2.4x}{5x} = 0.48$$

ההסתברות לבחור פלפל גדול בהינתן שנבחר פלפל אדום:

$$P\left(\text{אדום וגדול} / \text{אדום}\right) = \frac{P(\text{גדול ואדום})}{P(\text{אדום})} = \frac{0.48}{0.63} = \frac{16}{21} = 0.762$$

גדולים ואדומים $= 2.4X$

גדולים וצהובים $= 1.6X$

קטנים ואדומים: $0.75X$

קטנים וירוקים: $0.25X$

3. נבדוק את כמות הפלפלים האדומים (בית אריזה א'):

$$2.4X+0.75X=3.15X$$

אחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה א':

$$\frac{2.4X}{3.15X}=\frac{16}{21}=0.762=76.2\%$$

נבדוק את כמות הפלפלים הצהובים והירוקים (בית אריזה ב'):

$$1.6X+0.25X=1.85X$$

אחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה ב':

$$\frac{1.6X}{1.85X}=\frac{32}{37}=0.865=86.5\%$$

אחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה א' קטן מאחוז הפלפלים הגדולים בבית אריזה ב'

$$86.5\%>76.2\%$$

פרק שני – גאומטרייה

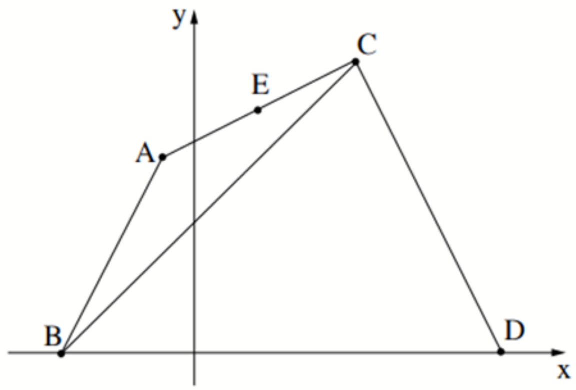
4. בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC).
הקודקוד B נמצא על החלק השלילי של ציר ה־x.
הנקודה D נמצאת על ציר ה־x כך ש־CD מאונך ל־AC.
נתון כי הנקודה E(4 , 15) היא אמצע הצלע AC,
וכי משוואת הישר CD היא $y = -2x + 38$.

א. **(1)** מצאו את משוואת הישר AC.
(2) מצאו את שיעורי הקודקוד C.

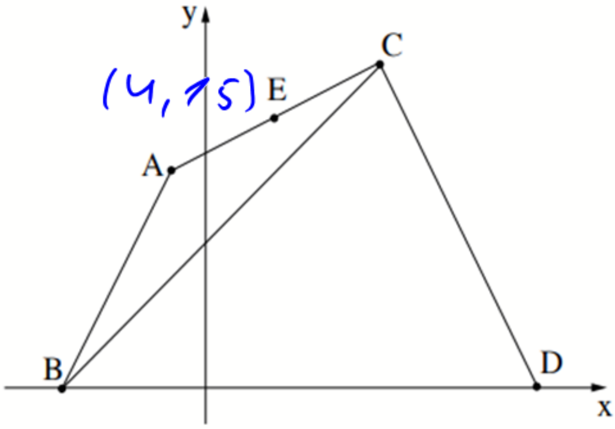
ב. **(1)** מצאו את אורך הצלע AB.
(2) מצאו את שיעורי הקודקוד B.

ג. מצאו את גודל הזווית ABD ואת גודל הזווית CBD.

ד. חשבו את שטח המשולש ABC.



פתרון:



א(1) AC מאונך ל- CD
ולכן מכפלת השיפועים
שלהם היא 1-:

$$m_{AC}\cdot m_{CD}=-1$$

$$m_{AC}\cdot(-2)=-1$$

$$m_{AC}=\frac{1}{2}$$

נציב בנוסחת הישר את השיפוע ואת הנקודה E:

$$y-15=\frac{1}{2}(x-4) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x+13}$$

ב. נמצא את נקודת החיתוך של הישרים CD
ו- AC, והיא הנקודה C:

$$\begin{cases} y=-2x+38 \\ y=\frac{1}{2}x+13 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x+13=-2x+38$$

$$2.5x=25 \quad /:2.5$$

$$x=10$$

$$\downarrow$$

$$y=-2\cdot 10+38=18$$

$$\boxed{C(10,18)}$$

ב. נמצא את קדקוד A בעזרת נוסחת
אמצע הקטע:

$$\begin{cases} x_E=\frac{x_A+x_C}{2} \\ y_E=\frac{y_E+y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=\frac{x_A+10}{2} \\ 15=\frac{y_A+18}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_A=-2 \\ y_A=12 \end{matrix} \Rightarrow A(-2,12)$$

כעת נחשב את אורך קטע AC:

$$d_{AC}=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_A-y_C)^2}$$

$$d_{AC}=\sqrt{(10-(-2))^2+(18-12)^2}=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}$$

$$d_{AB}=d_{AC}=\sqrt{180}$$

אורך הקטע AB הוא $\boxed{\sqrt{180}}$

ב. (2) נסמן $B(x,0)$ כי הנקודה על ציר x
ונציב בנוסחה לאורך קטע AB:

$$d_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$\sqrt{180}=\sqrt{(x-(-2))^2+(0-12)^2} \quad /(\ )^2$$

$$180=(x+2)^2+144$$

$$36=(x+2)^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$6=x+2 \qquad -6=x+2$$

$$x=4 \qquad x=-8$$

נקודה B בצד השלילי של ציר x, ולכן:

$$\boxed{B(-8,0)}$$

d. נשתמש בנוסחה $m=\tan\alpha$

כלומר, שיפוע הישר שווה לטנגנס הזווית שהישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר x.

שיפוע הישר AB:

$$m=\frac{12-0}{-2-(-8)}=2$$

$$\tan\angle ABD=2 \rightarrow \boxed{\angle ABD=63.435^\circ}$$

שיפוע הישר BC:

$$m_{BC}=\frac{18-0}{10-(-8)}=1$$

$$\tan\angle CBD=1 \rightarrow \boxed{\angle CBD=45^\circ}$$

3. נשתמש בנוסחה לשטח משולש:

$$S_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC}{2}$$

כבר חישבנו כי: $AB=AC=\sqrt{180}$

נמצא ז.ו. ה- $\angle BAC$:

$\underline{\Delta ABC}$:

$$\angle ABC=63.435^\circ-45^\circ=18.435^\circ$$

$$\angle ACB=\angle ABC=18.435^\circ$$

$$\angle BAC=180^\circ-2\cdot 18.435^\circ=143.13^\circ$$

נציב בנוסחה השטח:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{180}\cdot\sqrt{180}\cdot\sin 143.13^\circ}{2}=54$$

שטח משולש ABC הוא $\boxed{54}$

5. בסרטוט שלפניכם משולש ABC החסום במעגל.

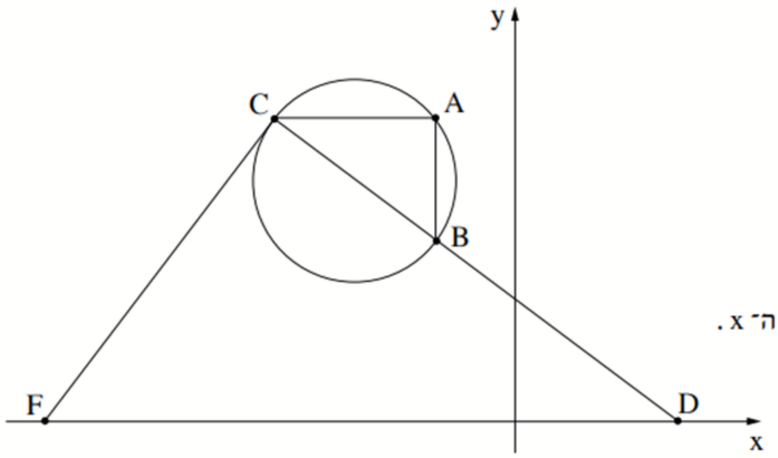
הצלע CB היא קוטר במעגל.

הצלע AB מקבילה לציר ה־ y.

המשך הצלע CB חותך את ציר ה־ x בנקודה D.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל,

החותך את ציר ה־ x בנקודה F.



א. **(1)** הסבירו מדוע הצלע AC מקבילה לציר ה־ x.

(2) הוכיחו כי $\Delta ABC \sim \Delta CFD$.

נתון כי $D(8\,,0)$,

וכי משוואת המשיק CF היא $y = \frac{4}{3}x + 31$.

ב. מצאו את אורך הצלע FD.

ג. **(1)** מצאו את משוואת הצלע CD.

(2) מצאו את אורך הצלע CD.

נתון כי יחס הדמיון בין המשולש ABC ובין המשולש CFD הוא $\frac{8}{25}$.

ד. חשבו את היקף המשולש ABC.

פתרון:

א. (1) BC קוטר (נתון)

$\measuredangle BAC = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה 90°)

$AB \parallel$ ציר y (נתון)

$\Downarrow$

$\boxed{AC \parallel \text{ציר } x}$

(2) AC משיק (נתון)

$\measuredangle DCF = 90^\circ$ (משיק מאונך לרדיוס אל נקודת ההשקה)

$\Downarrow$

$\measuredangle DCF = \measuredangle BAC = 90^\circ$

$AC \parallel$ ציר x (מסעיף ג' (1))

$\Downarrow$

$\measuredangle CDF = \measuredangle BCA$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו)

$\Downarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle CFD$ (משפט דמיון ז.ז)

ב. נתון: $D(8,0)$, משוואת CF: $y=\frac{4}{3}x+31$

נמצא את נקודה F:

$$\frac{4}{3}x+31=0 \rightarrow \frac{4}{3}x=-31 \rightarrow x=-\frac{93}{4}$$

$$F\left(-\frac{93}{4},0\right)$$

כעת:

$$d_{FD}=x_D-x_F=8-\left(-\frac{93}{4}\right)=\frac{125}{4}=31.25$$

תשובה:

$$\boxed{FD=31.25}$$

ג. (1) CD מאונך ל- FD, לכן:

$$m_{CD}\cdot m_{FD}=-1 \rightarrow m_{CD}\cdot\frac{4}{3}=-1 \rightarrow m_{CD}=-\frac{3}{4}$$

כעת:

$$y-0=-\frac{3}{4}(x-8)$$

$$\boxed{y=-\frac{3}{4}x+6}$$

סע' (2) נמצא את נקודה C:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 31 \\ y = -\frac{3}{4}x + 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3}x + 31 = -\frac{3}{4}x + 6 \quad / \cdot 12$$

$$16x + 372 = -9x + 72$$

$$25x = -300$$

$$x = -12$$

$$\downarrow$$

$$y = 15$$

$$C(-12, 15)$$

כעת לפי נוסחת מרחק בין שתי נקודות:

$$d_{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(8 - (-12))^2 + (0 - 15)^2}$$

$$d_{CD} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$$

$$\boxed{\text{אורך צלע } CD \text{ } 25}$$

3. נמצא את אורך צלע CF:

$$d_{CF} = \sqrt{\left(-12 - \left(-\frac{93}{4}\right)\right)^2 + (15 - 0)^2} = \sqrt{351.5625}$$

$$d_{CF} = 18.75$$

נחשב את היקף משולש CDF:

$$P_{CDF} = CD+DF+CF = 25+31.25+18.75$$

$$P_{CDF} = 75$$

לפי סעיף ו' (2): $\triangle ABC \sim \triangle CFD$

במשולשים דומים, יחס ההיקפים שווה ליחס הצלעות המתאימות.

יחס הדמיון נתון, והוא $\frac{8}{25}$, ולכן

$$P_{ABC} = \frac{8}{25}\cdot P_{CFD} = \frac{8}{25}\cdot 75 = 24$$

$\boxed{\text{היקף משולש ABC } 24}$

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{72-18x}{x^2+9}-1$, המוגדרת לכל x .

א. מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה־ x של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

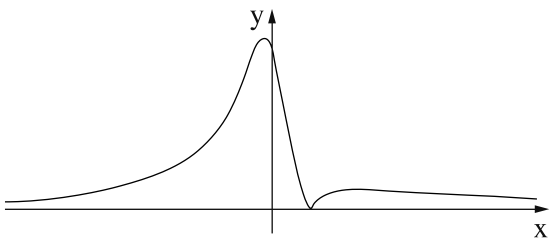
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

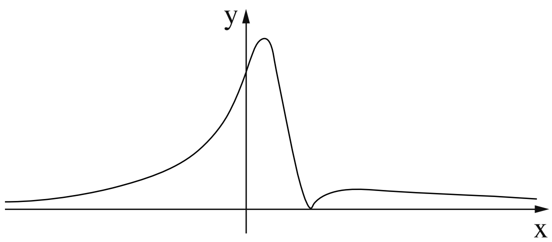
נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|$, המוגדרת לכל x .

ה. **(1)** מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה־ x של הפונקציה $g(x)$.

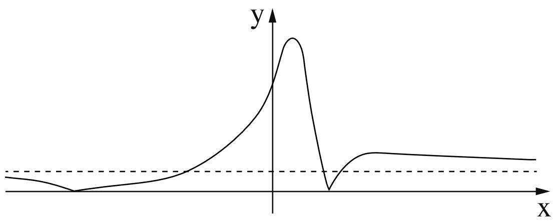
(2) קבעו איזה מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.



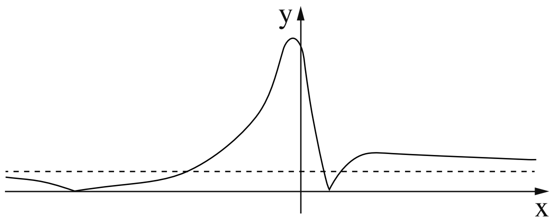
I



II



III



IV

(

6.

$$f(x)=\frac{72-18x}{x^2+9}-1$$

א. משוואת האסימפטוטה האופקית: $y=-1$

כאשר x שואף ל $\pm\infty$ השבר שואף לאפס (החזקה במכנה גדולה יותר)
וערך הפונקציה שואף למחובר -1

ב. נק' חיתוך עם ציר y נציב $x=0$

$$f(0)=\frac{72}{9}-1=7 \rightarrow (0,7)$$

נק' חיתוך עם ציר x נציב $f(x)=0$

$$0=\frac{72-18x}{x^2+9}-1 \quad /+1$$

$$1=\frac{72-18x}{x^2+9} \quad /\cdot(x^2+9)\neq 0$$

$$x^2+9=72-18x \quad /+18x-72$$

$$x^2+18x-63=0$$

נפתור עם נוסחת השורשים: $x_2=-21$ $\quad x_1=3$

ולכן: $(3,0)$ $\quad (-21,0)$

ג. (1) נגזור את הפונק':

$$f'(x)=\frac{-18(x^2+9)-2x(72-18x)}{(x^2+9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-18x^2-162-144x+36x^2}{(x^2+9)^2}=\frac{18x^2-144x-162}{(x^2+9)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{18(x^2-8x-9)}{(x^2+9)^2}}$$

נשווה לאפס נקבל שיעורי ה x בנק' הקיצון:

$$f'(x)=0$$

נוסחת שורשים: $x_2=-1$ $\quad$ $x_1=9$

נציב בפונקציה נקבל שיעורי ה y:

$$f(-1)=\frac{72-18\cdot(-1)}{(-1)^2+9}-1=8 \rightarrow (-1,8)$$

$$f(9)=\frac{72-18\cdot 9}{9^2+9}-1=-2 \rightarrow (9,-2)$$

נציב ערכי ביניים בנגזרת לבדיקת תחומי עלייה/ירידה וסיווג נק' הקיצון:

x	-2	-1	0	9	10
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	max	↘	min	↗

ולכן נק' המקסימום $(-1,8)$

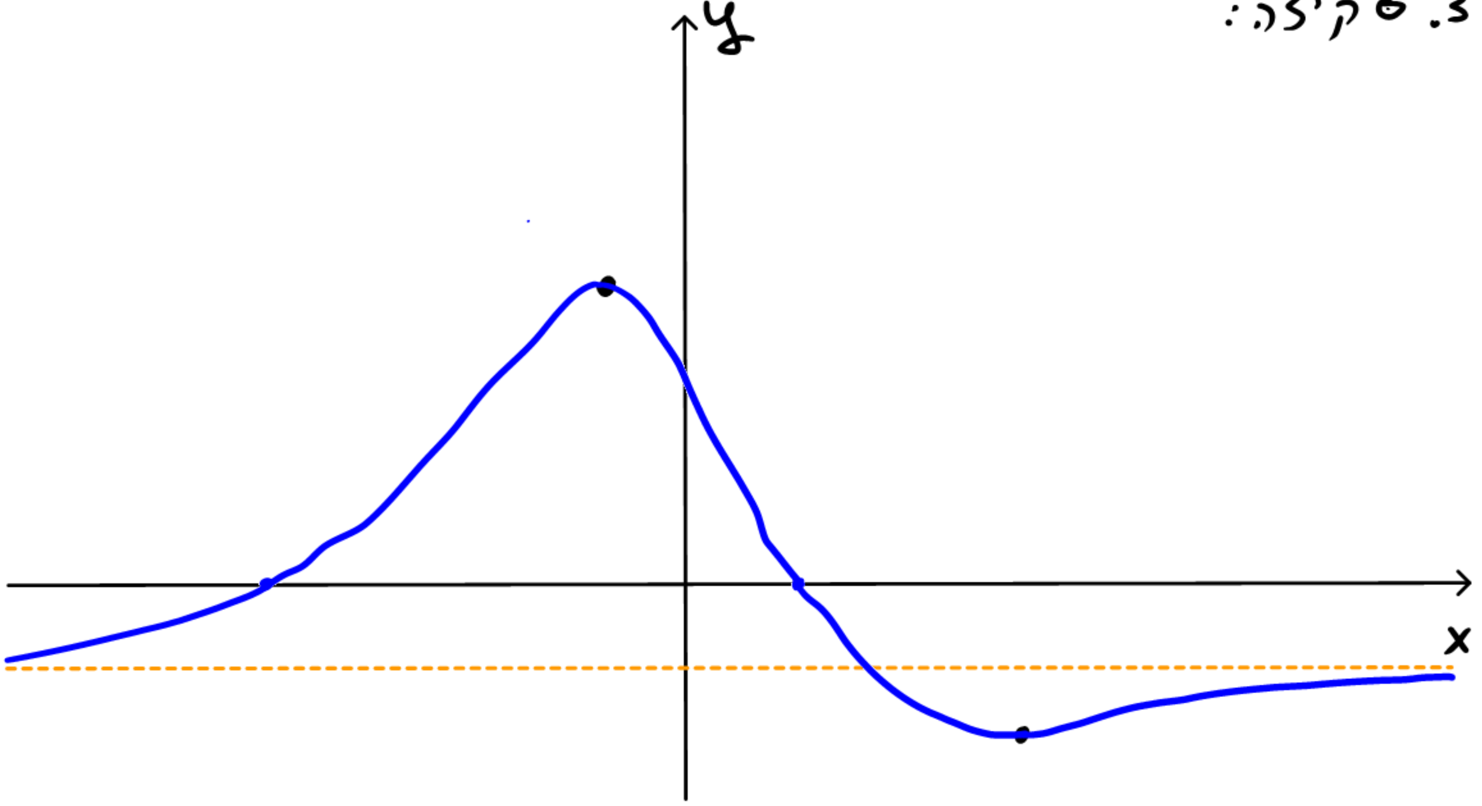
נק' המינימום $(9,-2)$

ג. (2) לפי הטבלה:

תחומי עלייה: $9<x$ או $x<-1$

תחום ירידה: $-1<x<9$

3. סקיצה:



$$g(x) = |f(x)|$$

ה. (1) האסימפטוטה של $g(x)$ היא הישר: $\boxed{y=1}$

$$|-1| = 1$$

(2) הגרף המתאר את $g(x)$ הוא $\boxed{\text{גרף IV}}$.

נימוק: גרפים I ו-II נפסלים עקב אי התאמת האסימפטוטה ונק' חיתוך עם ציר x. גרף III נפסל עקב נק' מקסימום מימין לציר y

7. $f(x)=(a-x)\cdot\sqrt{3x-6}$

א. הביטוי בשורש חייב להיות אי שלילי:
$0\le 3x-6$
$6\le 3x$
$2\le x$

תחום הגדרה: $2\le x$

ב. נציב שיעורי הנק' $(5,9)$ בפונק' ונבודד את הפרמטר a

$f(5)=9$
$(a-5)\cdot\sqrt{3\cdot5-6}=9$
$(a-5)\cdot3=9 \quad /\div3$
$a-5=3 \quad /+5$
$a=8$

$f(x)=(8-x)\cdot\sqrt{3x-6}$

ג. נציב $f(x)=0$

$(8-x)\cdot\sqrt{3x-6}=0$

$8-x=0$
$x=8$

$\sqrt{3x-6}=0 \quad /(\ )^2$
$3x-6=0$
$x=2$

נק' החיתוך עם ציר x הן: $(8,0)$ $(2,0)$

3. נגזור את הפונקציה:

$$f(x)=(8-x)\cdot\sqrt{3x-6}$$

$$f'(x)=-1\cdot\sqrt{3x-6}+(8-x)\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x-6}}=\frac{3(8-x)}{2\sqrt{3x-6}}-\sqrt{3x-6}$$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל שיעורי ה x בנק' הקיצון:

$$f'(x)=0$$

$$\frac{3(8-x)}{2\sqrt{3x-6}}-\sqrt{3x-6}=0 \qquad /+\sqrt{3x-6}$$

$$\frac{3(8-x)}{2\sqrt{3x-6}}=\sqrt{3x-6} \qquad /\cdot 2\sqrt{3x-6}\neq 0 \quad x\neq 2$$

$$3(8-x)=2(3x-6)$$

$$24-3x=6x-12 \qquad /\begin{matrix}+3x\\+12\end{matrix}$$

$$36=9x \qquad /\div 9$$

$$x=4$$

נציב בפונקציה ונקבל שיעור ה y:

$$f(4)=(8-4)\cdot\sqrt{3\cdot 4-6}=4\sqrt{6}=9.798$$

נק' הקיצון הפנימית: $(4,4\sqrt{6})$

נק' קיצון בקצה תחום ההגדרה: $(2,0)$

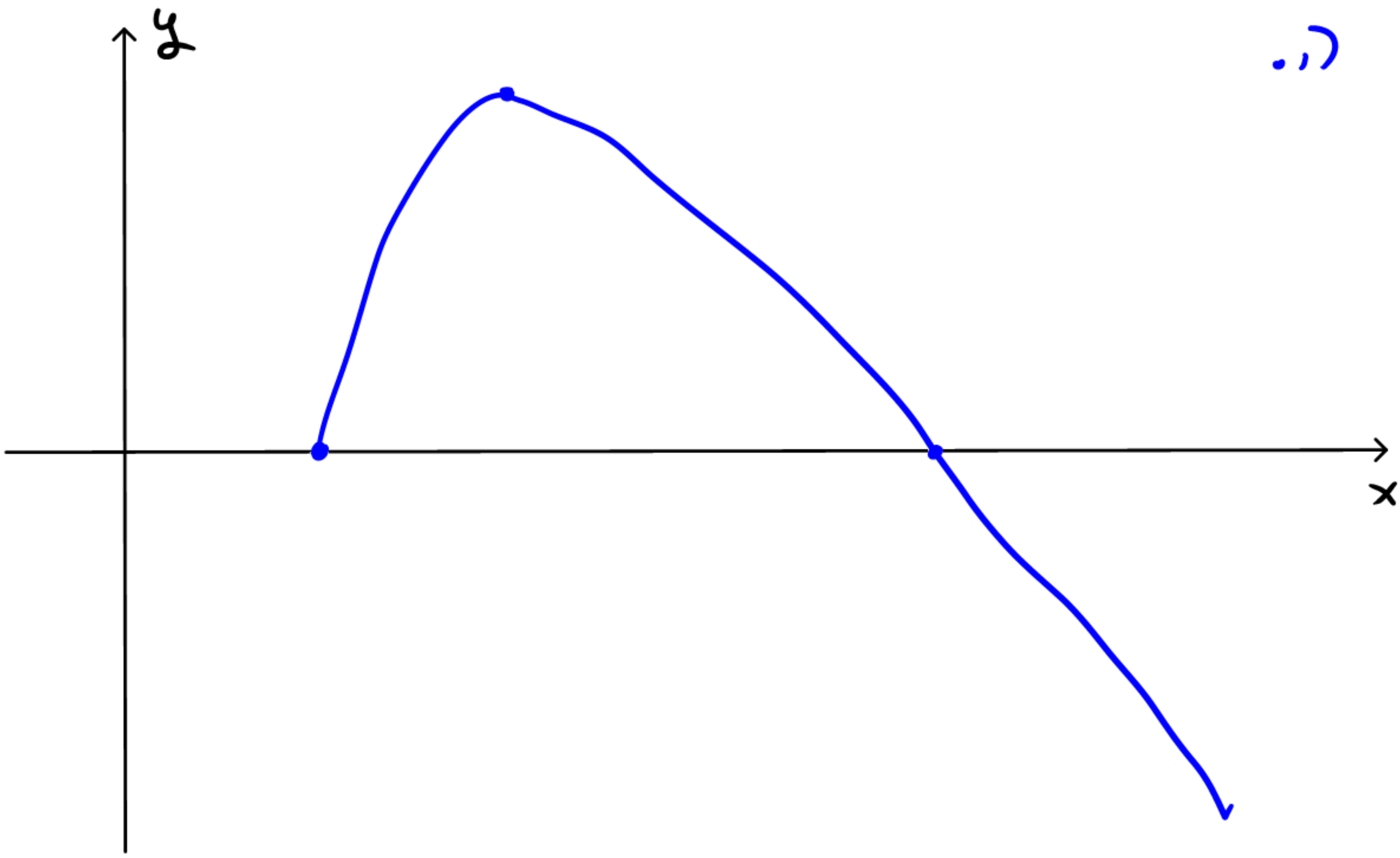
נציב ערכי ביניים בנגזרת לבדיקת תחומי עלייה/ירידה וסיווג נק' הקיצון:

x	2	3	4	5
f'		+	0	−
f	min	↗	max	↘

נק' המקסימום הפנימית: $(4, 4\sqrt{6})$

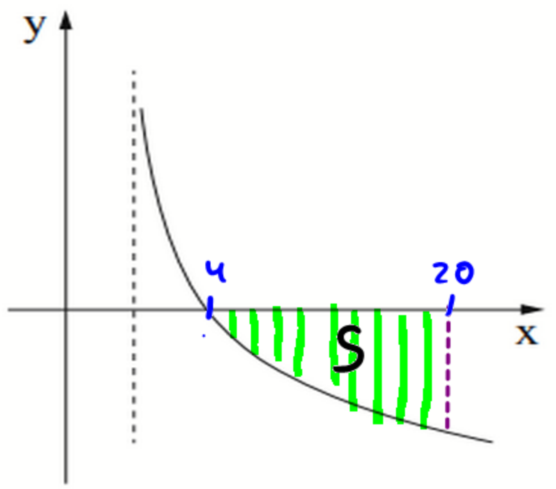
נק' המינימום בקצה התחום: $(2, 0)$

ה.



1. (1) הגרף המתאר את הנגזרת $f'(x)$
הוא גרף I. נימוק: רק בגרף זה יש
נק' אחת בה הנגזרת מתאפסת כך שמשמאל
אליה הנגזרת חיובית ומימין לה הנגזרת שלילית.

(2) נחשב את השטח
בעזרת אינטגרל
מסוים



I

$$S=\int_4^{20}\left(0-f'(x)\right)dx=\left[-f(x)\right]_4^{20}=-f(20)-\left(-f(4)\right)=f(4)-f(20)$$

$$=4\sqrt{6}-(8-20)\cdot\sqrt{3\cdot 20-6}=4\sqrt{6}+36\sqrt{6}=40\sqrt{6}$$

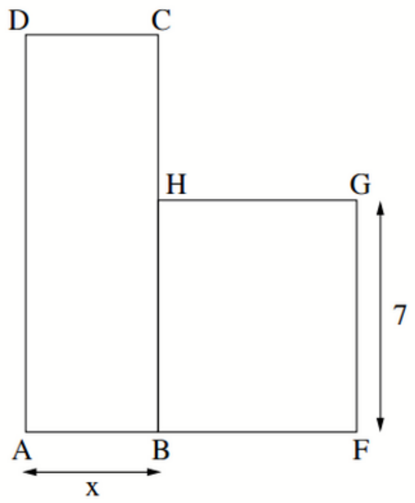
$S=\boxed{40\sqrt{6}}=97.98$ השטח המבוקש הוא

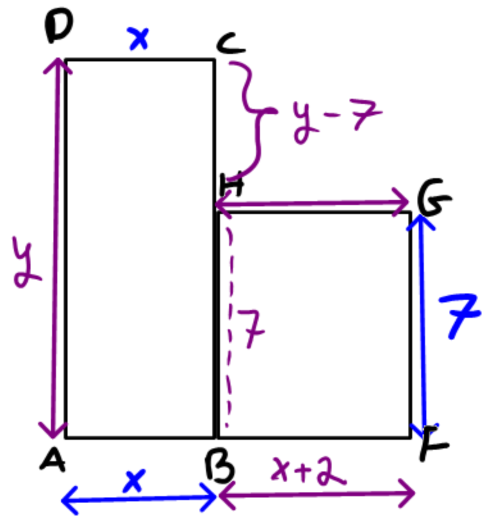
.8 בסרטוט שלפניכם מתוארת גינה ציבורית המחולקת לשני מתחמים.
מתחם ABCD ובו דשא, ומתחם BFGH ובו מתקנים לילדים.
כל אחד מן המתחמים הוא בצורת מלבן.
נסמן ב־ x את אורך הצלע AB .
נתון כי אורך הצלע GF הוא 7 מטרים,
וכי אורך הצלע BF גדול ב־ 2 מטרים מאורך הצלע AB .
את המתחם ABCD הקיפו בגדר שאורכה 32 מטרים.

א. (1) הביעו באמצעות x את אורך הצלע AD .
(2) הביעו באמצעות x את שטח המתחם ABCD .

ב. הביעו באמצעות x את היחס בין שטח המתחם ABCD
ובין שטח המתחם BFGH .

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו היחס בין שטח המתחם ABCD ובין שטח המתחם BFGH הוא מקסימלי.





8. א. (1) נבטא את אורכי
הצלעות בעזרת הנעלמים:
$GF = 7 = BH$
$AB = x = DC$

$BF = AB + 2$
$BF = x + 2 = HG$

נסמן את אורך AD: $BC = AD = y$
ולכן אורך HC יהיה: $HC = BC - HB = y - 7$

נבטא את היקף ABCD, נשווה להיקף הנתון 32 מטרים
ונבודד את y:

היקף הגינה P:

$$P = 32\ m$$

$$P = AB + BC + DC + AD$$

$$2x + 2y = 32$$

$$2y = 32 - 2x$$

$$y = 16 - x$$

$$AD = 16 - x$$

א. (2) שטח המתחם $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = x \cdot y = x(16 - x) = 16x - x^2$$

ב. נמצא שטח המתחם BFGH:

$$S_{BFGH}=BF\cdot GF=(x+2)\cdot 7=7(x+2)=7x+14$$

נמצא את היחס בין השטחים:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BFGH}}=\frac{16x-x^2}{7x+14}$$

ג. נחפש נק' מקסימום בפונק' המבטאת את היחס בין השטחים בעזרת השוואת הנגזרת לאפס:

$$R(x)=\frac{(16-2x)(7x+14)-7(16x-x^2)}{7x+14}$$

$$R'(x)=\frac{\cancel{112x}+224-14x^2-28x-\cancel{112x}+7x^2}{(7x+14)^2}$$

$$R'(x)=\frac{-7x^2-28x+224}{(7x+14)^2}=\frac{-7(x^2+4x-32)}{(7x+14)^2}$$

הנגזרת:

$$R'(x)=\frac{-7(x^2+4x-32)}{(7x+14)^2}$$

נשווה לאפס לקבלת שיעורי ה x בנק' הקיצון:

$$R'(x)=0$$

$$\frac{-7(x^2+4x-32)}{(7x+14)^2}=0$$

נפתור עם נוסחת השורשים

$x_1=4$ $\quad x_2=-8$

נבחר את הפתרון החיובי כיוון ש x מבטא אורך צלע

$x=4$

נוודא שערך זה מתאים לנק' מקסימום ע"י הצבת ערכים לפי הנגזרת:

x	0	4	5
R'	+	0	−
R	↗	max	↘

כלומר, עבור $x=4$ היחס בין שטח ABCD לבין שטח BFGH הוא מקסימלי