

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

- א. משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונה אליפסה שמשוואתה קנונית. הנקודה $A(1, 3)$ נמצאת על האליפסה.

שיעורי המוקד הימני של האליפסה הם $(\sqrt{6.4}, 0)$.

א. מצאו את משוואת האליפסה.

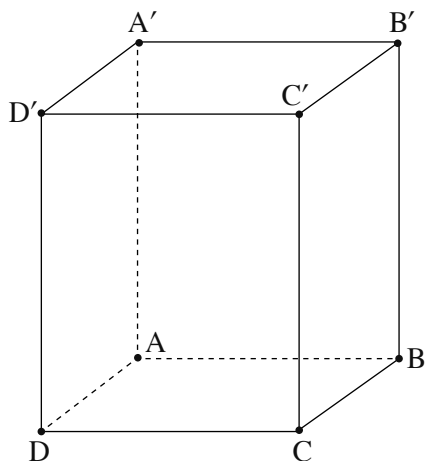
הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה'x'.

דרך הנקודה A העבירו ישר העובר דרך ראשית הצירים, הנקודה O.

הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר AO. הנקודה P היא אמצע הקטע BC.

ב. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P.

ג. מצאו את משוואת המעגל המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם, ומשיק לישר AO בנקודה O.



2. בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

נתון כי משוואת המישור $A'B'C'D'$ היא $x + 4y - 8z - 142 = 0$,

וכי $B(0, 7, 6)$.

א. מצאו את אורך המקצוע BB' .

נתון כי הצגה פרמטרית של הישר AB היא $\underline{x} = (0, 7, 6) + t(0, 2, 1)$.

אורך המקצוע AB הוא $5\sqrt{5}$, ושיעור ה'y' של הקודקוד A הוא שלילי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד A.

ג. מצאו את משוואת המישור $ABB'A'$.

נתונה נקודה $M(k, 1, 3)$, k הוא פרמטר חיובי.

נתון כי גודל הזווית שבין הישר AB ובין הישר AM הוא 60° .

ד. מצאו את הערך של k (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

נתון כי הנקודה M נמצאת על המישור $DCC'D'$.

ה. מצאו את נפח התיבה.

3. א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z - 2i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 2$ הוא פרבולה, ומצאו את משוואתה.

נתון מספר מרוכב $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

נתון מצולע קמור I, שקודקודיו מיוצגים על ידי פתרונות המשוואה $z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta))$, z הוא משתנה מרוכב.

ב. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I.

נתון מצולע II, שקודקודיו מיוצגים על ידי המספרים $w, -w, \frac{1}{w}, -\frac{1}{w}$.

ג. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע II.

נתון כי מצולע II הוא מעוין.

ד. מצאו את הערך של θ .

נתון כי הנקודה המייצגת את w נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ה. מצאו את היחס בין שטח מצולע II ובין שטח מצולע I.

**פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

4. $f'(x)$ הוא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציית המקיימת $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq 0$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x > 0$ ובתחום $x < 0$,

וכי $f'(x) \neq 0$ בכל תחום הגדרתה.

א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{1}{x}$.

ב. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ-1.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{\ln a}$ ו- $x = \frac{1}{\ln(4a)}$ הוא 5.

ד. מצאו את הערך של a .

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{1}{x} \left(a + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x = \frac{1}{e}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ו.

ג. $g(x)$ היא פונקצייה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x) = f(x)$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע שלפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול שנמצאת על ציר ה- x .

ד. מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

בעבור הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ו.

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

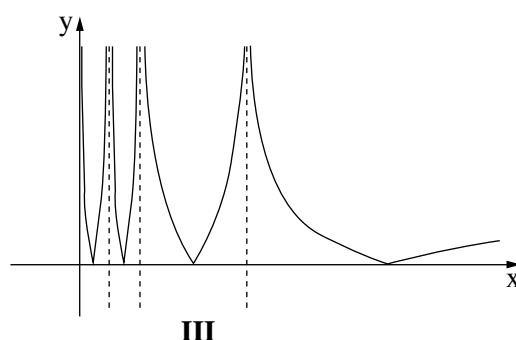
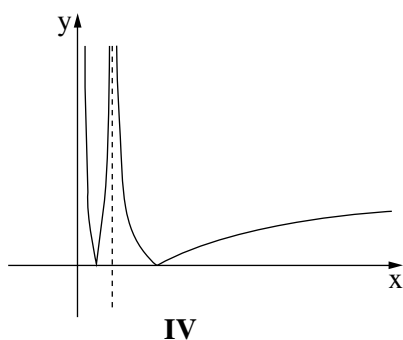
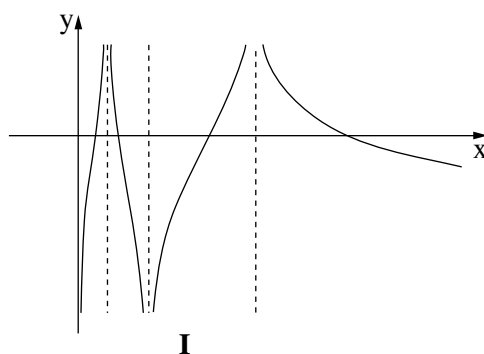
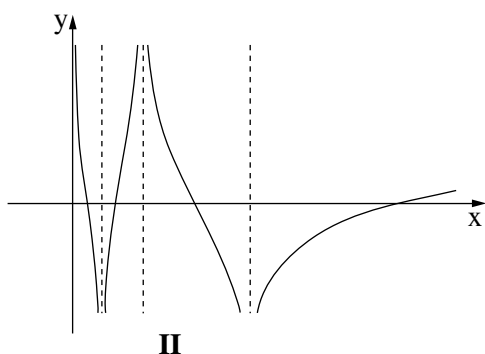
(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \ln |g(x)|$.

ז. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) אחד מן הגרפים IV-I שלפניכם מתאר את הפונקצייה $h(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



בהצלחה!