

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

- פרק ראשון – אלגברה והסתברות
 - פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
 - פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8, על שאלה אחת לפחות מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. חנן וניר הלכו מיישוב א' ליישוב ב' באותו המסלול. חנן יצא בשעה 8:00 והלך כל הדרך במהירות v קמ"ש. ניר יצא בשעה 8:30 והלך כל הדרך במהירות הגדולה ב-2 קמ"ש ממהירות ההליכה של חנן. חנן וניר נפגשו בדרכם ליישוב ב'. שעה וארבעים דקות לאחר הפגישה הגיע ניר ליישוב ב'.
א. הראו כי המרחק בין יישוב א' ליישוב ב' הוא $\frac{10}{3}v + \frac{13}{6}v^2 + \frac{1}{4}$.
חנן הגיע ליישוב ב' בשעה 12:00.
נתון כי המרחק בין יישוב א' ליישוב ב' גדול מ-15 ק"מ.
ב. מצאו את הערך של v .
כאשר הגיע ניר ליישוב ב' הוא מייד יצא חזרה לכיוון יישוב א' באותה המהירות שבה הלך קודם.
ג. מצאו מה היה המרחק של ניר מיישוב א' בזמן שחנן הגיע ליישוב ב'.

2. נתונה סדרה הנדסית אינ-סופית a_n שכל איבריה שונים מ-0.
מנת הסדרה היא q , $q \neq 1$.
נתונה גם סדרה b_n , שאיבריה מקיימים $b_n = a_1 + n \cdot \left(\frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$, לכל n טבעי.
א. הוכיחו כי הסדרה b_n היא חשבונית וכי הפרש הסדרה הוא $q^2 - q$.
נתון כי הסדרה b_n יורדת ר-חיובי.
ב. קבעו אם הסדרה a_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה שאינה עולה ואינה יורדת. נמקו את קביעתכם.
נתון כי סכום הסדרה a_n הוא 128.
ג. הביעו באמצעות q את a_1 ואת b_1 .
נתון כי סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 441.
ד. מצאו את הערך של q .

3. בשכבה י"א של תיכון עירוני גדול חלק מן התלמידים הם מדריכים בתנועת נוער והשאר אינם מדריכים.

בשכבה זו לחלק מן התלמידים יש רישיון נהיגה ולשאר אין רישיון נהיגה.

חצי מן התלמידים שיש להם רישיון נהיגה הם מדריכים בתנועת נוער.

אחוז התלמידים המדריכים מבין התלמידים שיש להם רישיון שווה לאחוז התלמידים שאין להם רישיון מבין התלמידים המדריכים.

בוחרים באקראי תלמיד מבין תלמידי השכבה.

ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא מדריך או שיש לו רישיון היא 0.45.

א. מצאו כמה אחוזים מן התלמידים בשכבה זו הם מדריכים.

ב. בוחרים באקראי תלמיד מבין התלמידים שאין להם רישיון.

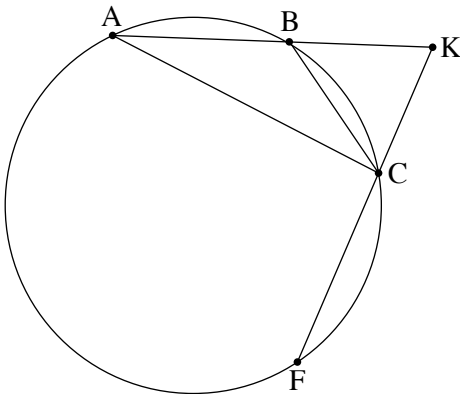
מהי ההסתברות שתלמיד זה הוא מדריך?

בוחרים באקראי 5 תלמידים מבין התלמידים שאין להם רישיון.

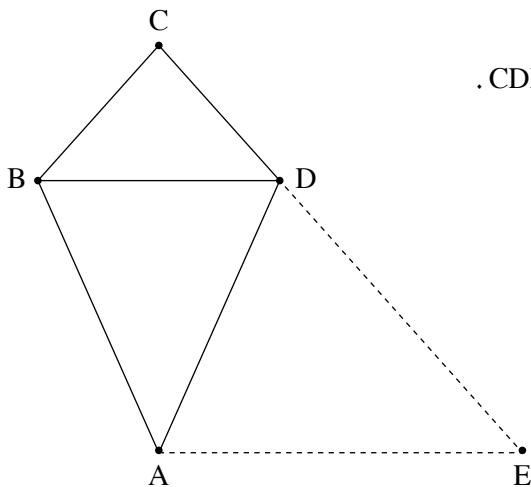
ג. (1) מהי ההסתברות שנבחר יותר ממדריך אחד?

(2) ידוע שנבחר יותר ממדריך אחד. מהי ההסתברות כי מספר המדריכים שנבחרו הוא זוגי?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. בסרטוט שלפניכם משולש קהה זווית ABC החסום במעגל. הנקודה K נמצאת על המשך הצלע AB כך ש- $AB = BK$. המשך הקטע KC חותך את המעגל בנקודה נוספת, בנקודה F. נתון: $\angle BAC = \angle BCA$.
- א. הוכיחו כי AF הוא קוטר במעגל.
- ב. המיתרים AC ו-BF נחתכים בנקודה D. הוכיחו כי המשולש ADK הוא שווה שוקיים.
- ג. (1) הוכיחו כי המרובע BDCK הוא בר חסימה במעגל. (2) הוכיחו כי $\angle DKC = \angle FAC$.
- ד. הוכיחו כי $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.



5. בסרטוט שלפניכם דלתון ABCD ($AB = AD$, $CB = CD$). נתון: $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, $\angle BAD = \angle CDB = 2\alpha$. נסמן: $AB = k$.
- א. הביעו באמצעות k ו- α את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.
- ב. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD גדול פי $\frac{4}{3}$ מרדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB. מצאו את גודל הזווית BAD.
- ג. הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD. דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל ל-BD וחיתך את המשך הצלע CD בנקודה E. נתון כי שטח המשולש AOE הוא 70. מצאו את הערך של k .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6.

נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - kx}}{x^3}$, k הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = -f(x)$.

שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $h(x)$ הוא 1.6.

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו $k = 8$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ו.

ג. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = (f(x))^2$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ-2.

ה. האם ערך הביטוי $\int_a^{a+1} g(x) dx$ שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי $\int_a^{a+1} f(x) dx$? נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 2$ ו- $x = 6$.

7.

נתונה הפונקצייה $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x) + b}$, b הוא פרמטר.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק שתי אסימפטוטות אנכיות.

ד. כתבו שני ערכים אפשריים של b , שאחד מהם חיובי והאחר שלילי.

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך השלילי של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ה-ו.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

8. נתונה הפונקצייה $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$, המוגדרת לכל x .

k הוא פרמטר שונה מ-0.

הנקודה A היא נקודת הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A .

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ב. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה- x החותך אותו בנקודה B , ואנך לציר ה- y החותך אותו בנקודה C .

נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB , וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC .

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו- II הוא מינימלי (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

בהצלחה!