



# פתרון הבחינה

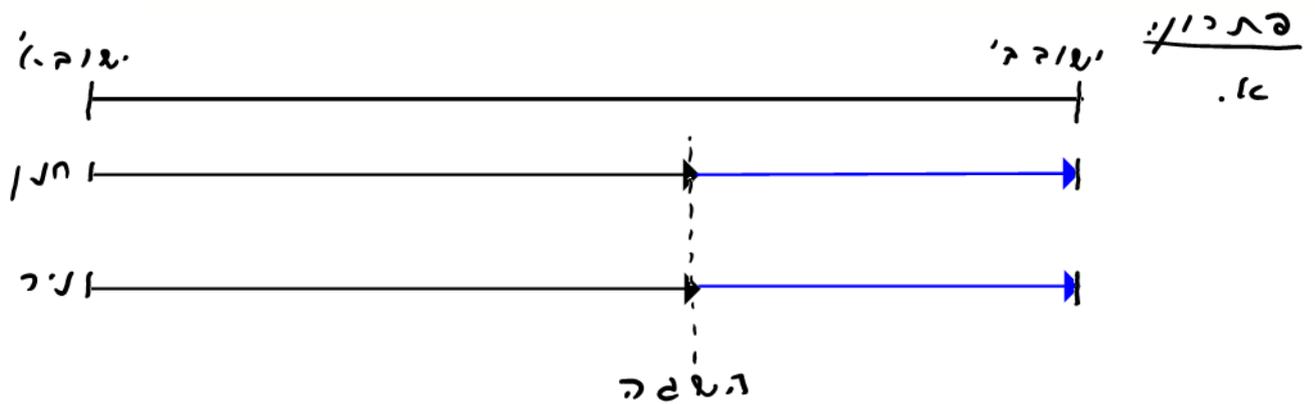
# במתמטיקה

חורף תשפ"ו, 2026, שאלון 35581:  
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"



### פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. חנן וניר הלכו מיישוב א' ליישוב ב' באותו המסלול. חנן יצא בשעה 8:00 והלך כל הדרך במהירות  $v$  קמ"ש. ניר יצא בשעה 8:30 והלך כל הדרך במהירות הגדולה ב-2 קמ"ש ממהירות ההליכה של חנן. חנן וניר נפגשו בדרכם ליישוב ב'. שעה וארבעים דקות לאחר הפגישה הגיע ניר ליישוב ב'.
- א. הראו כי המרחק בין יישוב א' ליישוב ב' הוא  $\frac{1}{4}v^2 + \frac{13}{6}v + \frac{10}{3}$ .
- חנן הגיע ליישוב ב' בשעה 12:00.
- נתון כי המרחק בין יישוב א' ליישוב ב' גדול מ-15 ק"מ.
- ב. מצאו את הערך של  $v$ .
- כאשר הגיע ניר ליישוב ב' הוא מייד יצא חזרה לכיוון יישוב א' באותה המהירות שבה הלך קודם.
- ג. מצאו מה היה המרחק של ניר מיישוב א' בזמן שחנן הגיע ליישוב ב'.



נסדר ילד - הנתיבים בטבלה ונסמן ילד הזיון על זהותה ג-א

התנועה	זמן	מהירות	צורך
חנן על המטה	$\frac{x}{v}$	נתיב $v$	סמיון $x$
ניר על המטה	$\frac{x}{v+2}$	נתיב $v+2$	סמיון $x$
חנן וניר יחד על המטה	$\frac{\frac{5v}{3} + \frac{10}{3}}{v}$	נתיב $v$	$\frac{5v}{3} + \frac{10}{3}$
ניר וניר יחד על המטה	$\frac{5}{3}$	נתיב $v+2$	$\frac{5v}{3} + \frac{10}{3}$



משוואה - שנינו עזר השלמה!

$$\frac{x}{v} = \frac{x}{v+2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 2vx + 4x = 2vx + v^2 + 2v$$

$$x = \frac{v^2}{4} + \frac{v}{2}$$

נחטב את כל הברי:!

$$S = \frac{v^2}{4} + \frac{v}{2} + \frac{5v}{3} + \frac{10}{3} = \frac{v^2}{4} + \frac{3v}{6} + \frac{10v}{6} + \frac{10}{3}$$

$$= \boxed{\frac{v^2}{4} + \frac{13v}{6} + \frac{10}{3}}$$

ה. חנו הליג א. שוב ה' קטנה 12:00  
קטן הכו ש, הליכה א חנו היה 4 שגל!

$$\frac{\frac{v^2}{4} + \frac{13v}{6} + \frac{10}{3}}{v} = 4 \rightarrow \frac{3v^2 + 26v + 40}{12v} = 4$$

$$3v^2 + 26v + 40 = 48v$$

$$3v^2 - 22v + 40 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = 3\frac{1}{3} \\ v_2 = 4 \end{matrix}$$

13 $\frac{1}{3}$  ק"מ  
16 ק"מ

עבור  $v = 3\frac{1}{3}$  נקבל שהזמן היא

עבור  $v = 4$  נקבל שהזמן היא

$$\boxed{v = 4} \text{ ד"ש!}$$

P. נראה שיש לך שאלה נוספות על זה? 00:21:





ני ג'ון 3.5 שנה. להכין הבחינה שלו היתה

$$V + 2 = 6 \text{ ק"ס}$$

$$6 \cdot 3.5 = 21 \text{ ק"ס} \quad \text{זמן הליכה}$$

המרחק בין היישובים הוא 16 ק"מ.

המרחק שא ניק מישוב כי הוא 5 ק"מ = 16 - 11

מכאן, שהמרחק שא מיישוב א' הוא

$$16 - 5 = \boxed{11 \text{ ק"מ}}$$



2. נתונה סדרה הנדסית אינ-סופית  $a_n$  שכל איבריה שונים מ-0. מנת הסדרה היא  $q, q \neq 1$ .

נתונה גם סדרה  $b_n$ , שאיבריה מקיימים  $b_n = a_1 + n \cdot \left( \frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$  לכל  $n$  טבעי.

א. הוכיחו כי הסדרה  $b_n$  היא חשבונית וכי הפרש הסדרה הוא  $q^2 - q$ .

נתון כי הסדרה  $b_n$  יורדת ר-  $a_1$  חיובי.

ב. קבעו אם הסדרה  $a_n$  היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה שאינה עולה ואינה יורדת. נמקו את קביעתכם.

נתון כי סכום הסדרה  $a_n$  הוא 128.

ג. הביעו באמצעות  $q$  את  $a_1$  ואת  $b_1$ .

נתון כי סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  הוא 441.

ד. מצאו את הערך של  $q$ .

א' הראשית (נשט אל  $b_n$ )

$$b_n = a_1 + n \left( \frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = a_1 + n(q^2 - q)$$

כעת ניבוי אל  $b_{n+1}$  ולאתר מכך (נראה  $b_{n+1} - b_n$ )  
נומן הנכס קבוע.

$$b_{n+1} = a_1 + (n+1)(q^2 - q)$$

$$b_{n+1} - b_n = \cancel{a_1} + (n+1)(q^2 - q) - (\cancel{a_1} + n(q^2 - q)) =$$

$$= (q^2 - q)(n+1 - n) = \boxed{q^2 - q = d_b}$$



נתון כי הסדרה  $b_n$  יורדת ו- $a_1$  חיובי.

ב. קבעו אם הסדרה  $a_n$  היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה שאינה עולה ואינה יורדת.

נמקו את קביעתכם.

(חיון)  $db < 0$

$$q^2 - q < 0$$

$$q(q-1) < 0$$

$q=0$     $q=1$

$$0 < q < 1$$

$a_n$  היא סדרה בעלת איבר ראשון חיובי ולמה בין 0 ל-1? איכן נמצא גסרה חיובי אשר יורד לערך אפס

נתון כי סכום הסדרה  $a_n$  הוא 128.

ג. הביעו באמצעות  $q$  את  $a_1$  ואת  $b_1$ .

$a_n$  היא הנצטר אינסופית מתכנסת.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow 128 = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow a_1 = 128(1-q)$$

$$b_1 = a_1 + 1(q^2 - q) = 128(1-q) + q^2 - q = q^2 - 129q + 128$$

$$b_1 = q^2 - 129q + 128$$



נתון כי סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  הוא 441.

7. מצאו את הערך של  $q$ .

$$b_1 = q^2 - 129q + 128 \quad : \text{I איקו}$$

$$d_b = q^2 - q \quad : \text{הפרש}$$

$$7 \quad : \text{כמות}$$

$$441 = \frac{7(2(q^2 - 129q + 128) + (7-1)(q^2 - q))}{2} \quad | \cdot 2 \quad | : 7$$

$$126 = 2(q^2 - 129q + 128) + 6(q^2 - q) \quad | : 2$$

$$63 = q^2 - 129q + 128 + 3q^2 - 3q$$

$$0 = 4q^2 - 132q + 65$$

$$q = \frac{1}{2} \quad q = \frac{32.5}{100}$$



3. בשכבה י"א של תיכון עירוני גדול חלק מן התלמידים הם מדריכים בתנועת נוער והשאר אינם מדריכים. בשכבה זו לחלק מן התלמידים יש רישיון נהיגה ולשאר אין רישיון נהיגה. חצי מן התלמידים שיש להם רישיון נהיגה הם מדריכים בתנועת נוער. אחוז התלמידים המדריכים מבין התלמידים שיש להם רישיון שווה לאחוז התלמידים שאין להם רישיון מבין התלמידים המדריכים. בוחרים באקראי תלמיד מבין תלמידי השכבה. ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא מדריך או שיש לו רישיון היא 0.45.
- מצאו כמה אחוזים מן התלמידים בשכבה זו הם מדריכים.
  - בוחרים באקראי תלמיד מבין התלמידים שאין להם רישיון. מהי ההסתברות שתלמיד זה הוא מדריך?
  - בוחרים באקראי 5 תלמידים מבין התלמידים שאין להם רישיון.
    - מהי ההסתברות שנבחר יותר ממדריך אחד?
    - ידוע שנבחר יותר ממדריך אחד. מהי ההסתברות כי מספר המדריכים שנבחרו הוא זוגי?

3א.

נ"ן:  $P(A/B) = \frac{1}{2}$

I  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$

נ"ן:  $P(A/B) = P(\bar{B}/A)$

$\frac{1}{2} = P(\bar{B}/A)$

II  $\frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2}$

נ"ן:  $P(A \cup B) = 0.45$

III  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.45 = 0.55$

נ"ן:  $P(A) = x$  ונ"ן:  $P(\bar{B} \cap A) = \frac{1}{2}x$

נ"ן:  $P(\bar{B} \cap A) = \frac{1}{2}x$

נ"ן:  $A$  - מדריכים,  $\bar{A}$  - אינם מדריכים  
 $B$  - יש רישיון נהיגה  
 $\bar{B}$  - אין רישיון נהיגה

	$\bar{A}$	$A$	
			$B$
		$\frac{1}{2}x$	$\bar{B}$
1	0.55	$x$	



הסתברות  
3.6  
במידה שמתאם  $x$  בין תכנון  
הטלפון את  $P(A \cap B)$  !  
:  $I$  ק  $P(B)$  ונניח

$$\frac{\frac{1}{2}x}{1 - (0.55 + \frac{1}{2}x)} = \frac{1}{2} \quad 1: \frac{1}{2}$$

$$x = 0.45 - \frac{1}{2}x$$

$$1.5x = 0.45$$

$$x = 0.3$$

30% | נתמאים הם מתכננים

3.2.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.7}$$

$$P(A|B) = \frac{3}{14}$$

4(4) את הטלפון בין תכנון והטלפון:

	$\bar{A}$	$A$	
0.3	0.15	0.15	$B$
0.7	0.55	0.15	$\bar{B}$
1	0.7	0.3	

3.2.2

$$P(\text{הקטן}) = 1 - P_5(1) - P_5(0)$$

$$P(\text{הקטן}) = 1 - \binom{5}{1} \left(\frac{3}{14}\right)^1 \left(\frac{11}{14}\right)^4 - \binom{5}{0} \left(\frac{3}{14}\right)^0 \left(\frac{11}{14}\right)^5 = 0.292$$

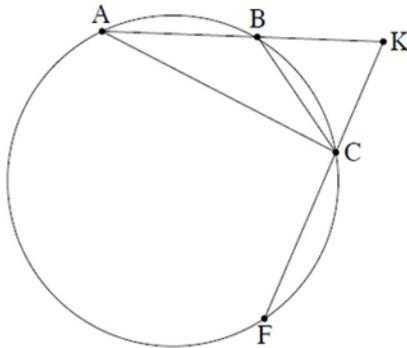
3.2.3

$$P(\text{הקטן} / \text{הקטן}) = \frac{P(\text{הקטן} \cap \text{הקטן})}{P(\text{הקטן})} = \frac{P_5(2) + P_5(4)}{0.292} = \frac{\binom{5}{2} \left(\frac{3}{14}\right)^2 \left(\frac{11}{14}\right)^3 + \binom{5}{4} \left(\frac{3}{14}\right)^4 \left(\frac{11}{14}\right)^1}{0.292}$$

$$P(\text{הקטן} / \text{הקטן}) = \frac{0.2227 + 0.008283}{0.292} = 0.791$$

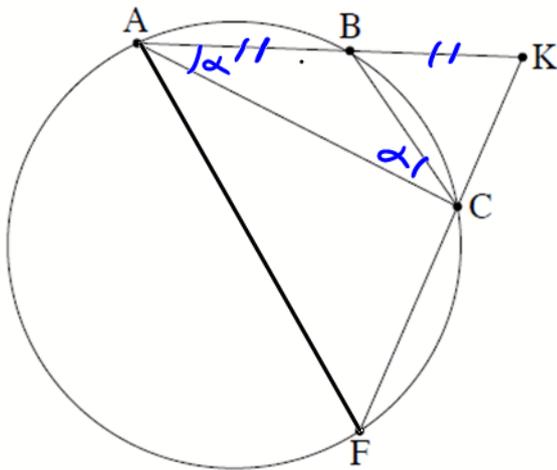


פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. בסרטוט שלפניכם משולש קהה זווית ABC החסום במעגל.  
 הנקודה K נמצאת על המשך הצלע AB כך ש-  $AB = BK$ .  
 המשך הקטע KC חותך את המעגל בנקודה נוספת, בנקודה F.  
 נתון:  $\angle BAC = \angle BCA$ .
- א. הוכיחו כי AF הוא קוטר במעגל.  
 המיתרים AC ו- BF נחתכים בנקודה D.  
 ב. הוכיחו כי המשולש ADK הוא שווה שוקיים.  
 ג. (1) הוכיחו כי המרובע BDCK הוא בר חסימה במעגל.  
 (2) הוכיחו כי  $\angle DKC = \angle FAC$ .  
 ד. הוכיחו כי  $AC \cdot AD = KC \cdot AF$ .

פתרון:



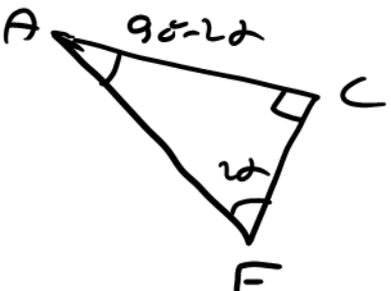
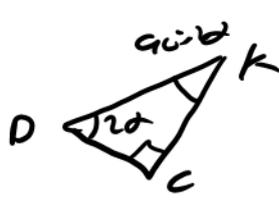
א. נוסיף את הנגזרים  
 אשרטוט נגזרים  
 את המיתר AF  
 נכחן  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$

נתונים	טענה	המסבר
נתון	$AB = BK$	①
נתון	F על המשך KC	②
נתון + סימון	$\angle BAC = \angle BCA = \alpha$	③
קניית עסק	נגזרו מיתר AF	④



נימוק	לשמה	המספר
<p>אזל זאליה שורה במשולש מונחה כאן שווה. אפי. 3</p>	<p><math>AB = BC</math></p>	<p>5</p>
<p>כאן המשקל. אפי. 1, 5</p>	<p><math>AB = BC = BK</math></p>	<p>6</p>
<p>אם במשולש התיכון אצלך שורה למחציתה, אזי המשולש ישר זווית והצלע היא היתר. אפי. 6</p>	<p><math>\angle ACK = 90^\circ</math></p>	<p>7</p>
<p>סכום זווית למחצית 180. אפי. 2, 7. אזל זאליה היקפית ישרה במקרה מונה היתר</p>	<p><math>\angle ACF = 90^\circ</math>  AF היתר משולש.</p>	<p>8  9</p>
<p>בניית עפר (עוטות בסוף הגיוראה)</p>	<p>נעדיה היתר BF ונסגן אר 0</p>	<p>10</p>
<p>בניית עפר</p>	<p>נעדיה היתר BK</p>	<p>11</p>
<p>השאלה 180 במשולש ACK. אפי. 3, 7</p>	<p><math>\angle AKC = 90^\circ - \alpha</math></p>	<p>12</p>
<p>זווית היקפית הנעזרת על איות העל, שווה. אפי. 3.</p>	<p><math>\angle BFK = \angle BAC = \alpha</math></p>	<p>13</p>
<p>השאלה 180 במשולש</p>	<p><math>\angle KBF = 90^\circ</math></p>	<p>14</p>
<p>משולש שבנו דווקא אצלך היתר תיכון היתר שווה שוקיים. אפי. 1, 14</p>	<p>משולש ADK שווה שוקיים משולש.</p>	<p>15</p>



נימוך	לשונך	המספר
<p>חישוב. אפי 7, 14                      מרובע בקו שני שלילי נמצא                      לסכומן שני הני הרי חסיה                      במעט. אפי 16</p>	<p><math>\angle KAD + \angle KCD = \alpha</math>                      מרובע <math>BCDK</math>                      בר חסיה במעט                      מעט ב' (1)</p>	<p>(16)                      (17)</p>
<p>אפי 25                      אפי 3, 5, זווית בסיס במעט                      שווה טוה"ק עלול.                      חיסור שלילי. אפי 2, 7, 15                      מ"ל ליתריק עלוים במעט מנוחה                      שלילי הקווית מול. אפי 3, 5                      הטלה שני במעט <math>AFB</math>. אפי 14, 21                      חיסור שלילי. אפי 2, 22                      אפי 20, 23</p>	<p><math>AD = KD</math>  <math>\angle KAD = \angle KAD = \alpha</math>  <math>\angle DKC = 95 - 2\alpha</math>  <math>\angle AFB = \alpha</math>  <math>\angle FAB = 95 - \alpha</math>  <math>\angle FAC = 95 - 2\alpha</math>  <math>\angle FAC = \angle DKC</math>                      מעט ב' 2</p>	<p>(18)                      (19)                      (20)                      (21)                      (22)                      (23)                      (24)</p>
 	<p>מתקון, במעט <math>ACF</math>.  <math>\frac{AC}{AF} = \cos(95 - 2\alpha)</math>                      מתקון במעט <math>KCD</math>.  <math>\frac{KC}{KD} = \cos(95 - 2\alpha)</math>  <math>\Downarrow</math></p>	<p>(25)</p>



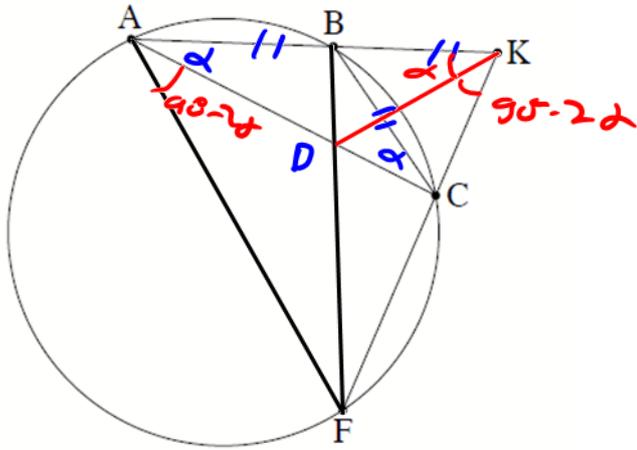
$$\frac{AC}{AF} = \frac{KC}{KD}$$

היטניים גלויים, ולכן

העברנו בסעיף כי כן  $KD = AD$  ולכן:

$$\frac{AC}{AF} = \frac{KC}{AD} \Rightarrow \boxed{AC \cdot AD = KC \cdot AF}$$

נ.ש.ל. 3





5. בסרטוט שלפניכם דלתון  $ABCD$  ( $AB = AD, CB = CD$ ).

נתון:  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ,  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha$ .

נסמן:  $AB = k$ .

א. הביעו באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $CDB$ .

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $ABD$  גדול פי  $\frac{4}{3}$

מרדיוס המעגל החוסם את המשולש  $CDB$ .

ב. מצאו את גודל הזווית  $BAD$ .

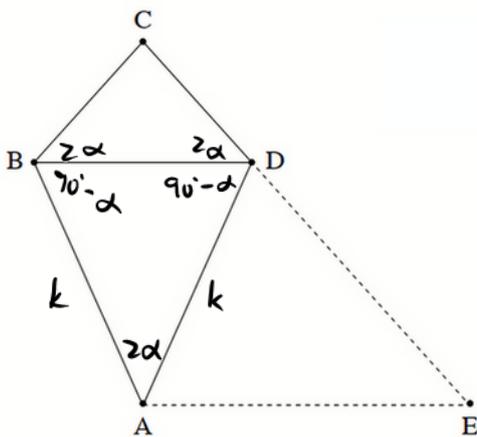
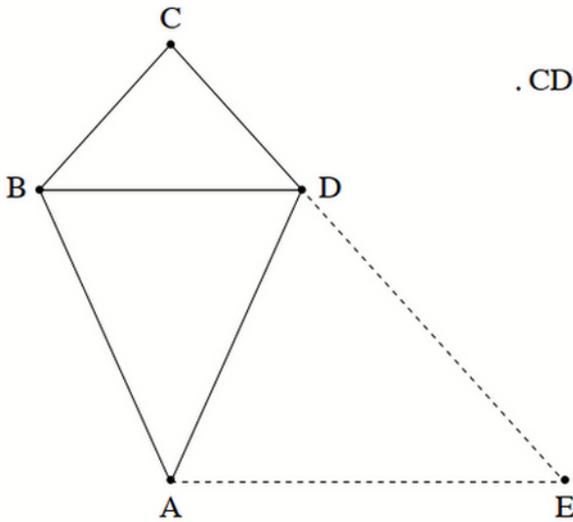
הנקודה  $O$  היא מרכז המעגל החוסם את המשולש  $ABD$ .

דרך הנקודה  $A$  העבירו ישר המקביל ל- $BD$  וחותך את

המשך הצלע  $CD$  בנקודה  $E$ .

נתון כי שטח המשולש  $AOE$  הוא  $70$ .

ג. מצאו את הערך של  $k$ .



נתונים:

$$AB = AD = k$$

$$CB = CD$$

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha$$

$\triangle BAD$ :

$$\sphericalangle B = \sphericalangle D = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

$$\frac{k}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{BD}{\sin 2\alpha}$$

$$= \cos \alpha$$

$$BD = \frac{k \cdot \sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{k \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$BD = 2k \sin \alpha$$

$\triangle BDC$ :  $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 2\alpha$   
אז  $\sphericalangle C = 180^\circ - 4\alpha$

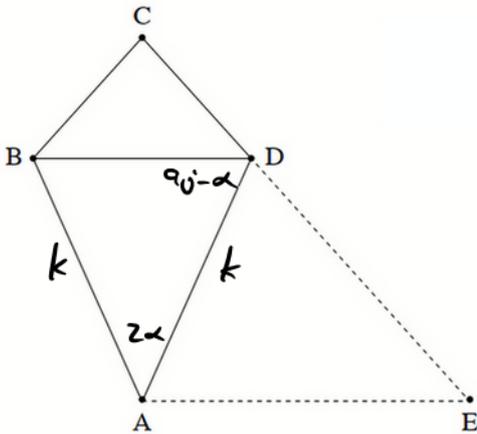
$$\frac{BD}{\sin(180^\circ - 4\alpha)} = 2R$$

$$R = \frac{2k \sin \alpha}{2 \sin 4\alpha}$$

$$R = \frac{k \cdot \sin \alpha}{\sin 4\alpha}$$

רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $BDC$





נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD גדול פי  $\frac{4}{3}$  מרדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.  
ב. מצאו את גודל הזווית BAD.

$$\Delta ABD: \frac{k}{\sin(90-\alpha)} = 2R_{ABD}$$

$$R_{ABD} = \frac{k}{2\cos\alpha}$$

$$R_{ABD} = \frac{4}{3} \cdot R_{CDB}$$

$$\frac{k}{2\cos\alpha} = \frac{4}{3} \cdot \frac{k \sin\alpha}{\sin 4\alpha} \quad | : k$$

$$3 \cdot \sin 4\alpha = 4 \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$3 \cdot 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 4 \sin 2\alpha \quad | : 2$$

$$3 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha \cdot (3 \cos 2\alpha - 2) = 0$$

$$0 < \alpha < 45^\circ$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$3 \cos 2\alpha = 2$$

$$2\alpha = 0$$

$$2\alpha = 180^\circ$$

$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$2\alpha = 48.19^\circ$$

$$\angle BAD = 48.19^\circ$$

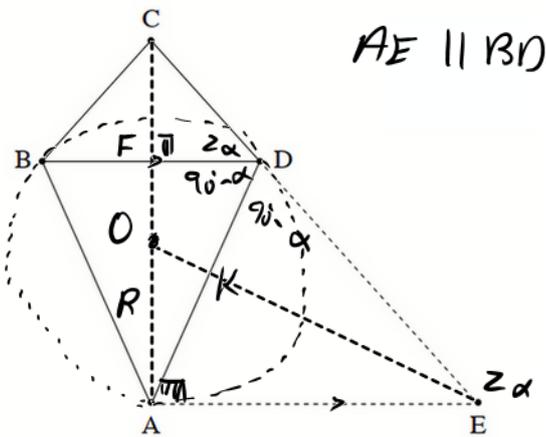
$$\uparrow$$

$$\uparrow$$

$$\alpha = 24.1^\circ$$



הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD.  
דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל ל-BD וחותך את  
המשך הצלע CD בנקודה E.  
נתון כי שטח המשולש AOE הוא 70.  
ג. מצאו את הערך של k.



$$AE \parallel BD$$

$$\angle ADE = 180 - 2\alpha - (90 - \alpha) = 90 - \alpha$$

השנייה שווה שנייה

$$\angle AED = \angle BDC = 2\alpha$$

שנייה שנייה שווה שנייה שנייה

$$\triangle ADE: \frac{k}{\sin 2\alpha} = \frac{AE}{\sin(90 - \alpha)} \Rightarrow AE = \frac{k \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{k}{2 \sin \alpha}$$

נסמן F ממש אל כיוון הקטע

$$\angle CFD = 90^\circ$$

ואיכסני הקטעין מאונכים זה לזה

$$\angle OAE = \angle CFD = 90^\circ$$

שנייה שנייה שווה שנייה שנייה

$$S_{AOE} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{k}{2 \sin \alpha} = \frac{k^2}{4 \sin 2\alpha} = 70$$

$$k = \sqrt{70 \cdot 4 \sin 2\alpha}$$

$$2\alpha = 48.19^\circ$$

$$k = 14.45$$



6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - kx}}{x^3}$  , הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות  $k$  את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $h(x) = -f(x)$ .

שיעור ה- $x$  של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם גרף הפונקצייה  $h(x)$  הוא 1.6.

ב. מצאו את הערך של  $k$ .

הציבו  $k = 8$  בפונקצייה  $f(x)$ , וענו על הסעיפים ג-ו.

ג. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = (f(x))^2$  שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$ .

הוא פרמטר גדול מ-2.

ה. האם ערך הביטוי  $\int_a^{a+1} g(x) dx$  שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי  $\int_a^{a+1} f(x) dx$ ? נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = 2$  ו- $x = 6$ .

$$f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - kx}}{x^3} \quad x. \text{ תחום ההגדרה } k > 0 \text{ פנימי חיובי}$$

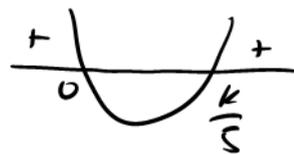
$$5x^2 - kx = 0$$

$$x(5x - k) = 0$$

$$x = 0 \quad 5x = k$$

$$x = \frac{k}{5}$$

$$5x^2 - kx \geq 0$$



$$x \leq 0, x \geq \frac{k}{5}$$

$$x^3 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq \frac{k}{5}, x < 0}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}$$



7.  $h(x) = -f(x)$  ונין  $h(1.6) = f(1.6)$

בנקודה המאונכת  $x=1.6$   $f(x) = -f(x)$

$$2f(x) = 0 \Rightarrow f(1.6) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{5 \cdot 1.6^2 - 8 \cdot 1.6}}{2 \cdot 1.6^3} = 0$$

$$12.8 - 1.6k = 0$$

$$k = 8$$

$$\frac{k}{5} = 1.6$$

7(1) אסימטוטה  $f(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - 8x}}{x^3}$ ,  $x < 0$ ,  $x \geq 1.6$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$x=0$  אסימטוטה אנכית  
 $y=0$  אסימטוטה אופקית

7(2) נקודת קיצון

$$u = \sqrt{5x^2 - 8x}$$

$$v = x^3$$

$$u' = \frac{10x - 8}{2\sqrt{5x^2 - 8x}} = \frac{5x - 4}{\sqrt{5x^2 - 8x}}$$

$$v' = 3x^2$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(5x-4) \cdot x^3}{\sqrt{5x^2-8x}} - \frac{3x^2 \cdot \sqrt{5x^2-8x}}{1}}{(x^3)^2} = \frac{x^3(5x-4) - 3x^2(5x^2-8x)}{x^6}$$

$$= \frac{x^2 \cdot [5x^2 - 4x - 15x^2 + 24x]}{x^6 \sqrt{5x^2 - 8x}} = \frac{-10x^2 + 20x}{x^4 \sqrt{5x^2 - 8x}}$$



$$f'(x) = \frac{-10x^2 + 20x}{x^4 \sqrt{5x^2 - 8x}} = 0 \quad -10x^2 + 20x = 0$$

$$10x(-x + 2) = 0$$

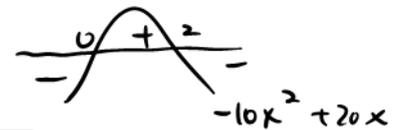
$$x = 0 \quad x = 2$$

$\sqrt{100}$

x		0	1.6	2	
f'	-		קנין	+	-
f	↓		min	max	↓

ok    ok  
שאלה

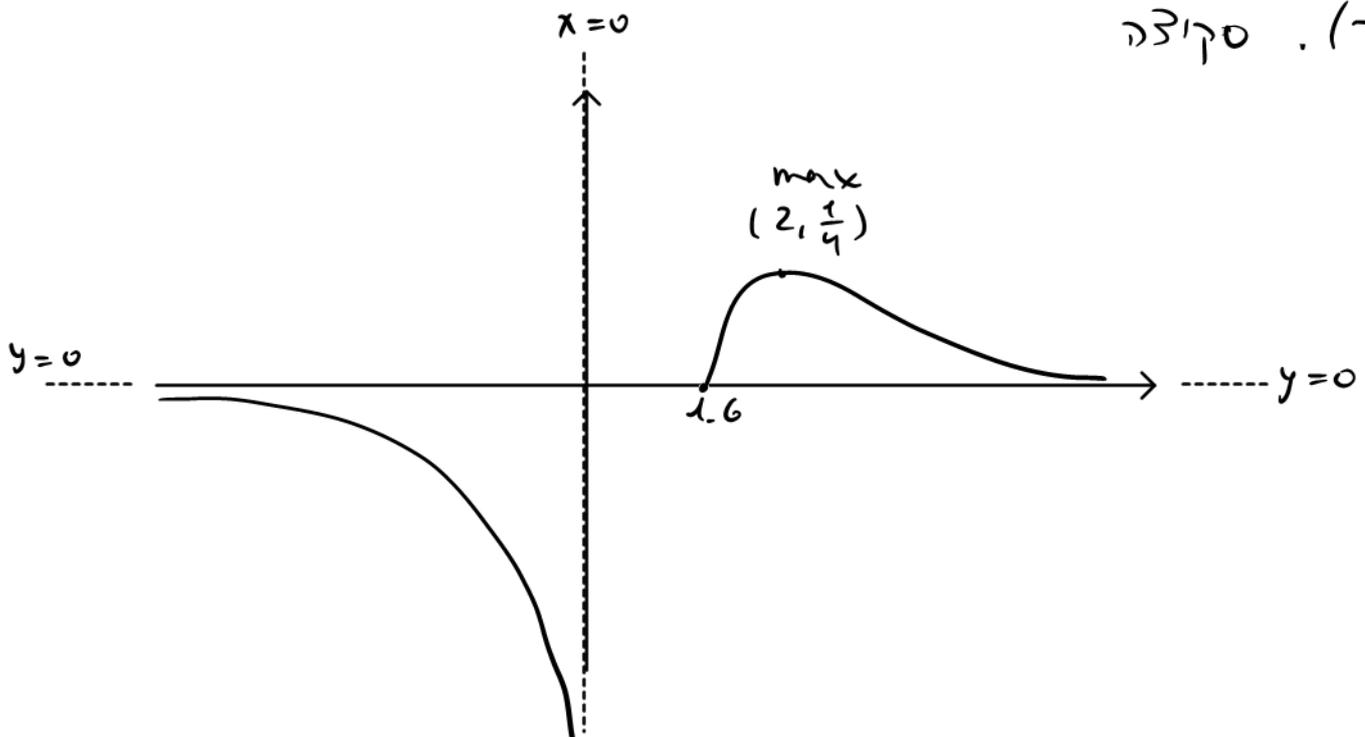
$$f'(x) = \frac{-10x^2 + 20x}{(+)}$$



$$f(3) = \frac{\sqrt{5 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2}}{3^3} = \frac{1}{4}$$

max  $(2, \frac{1}{4})$   
min  $(1.6, 0)$

ה(3) סקיצה

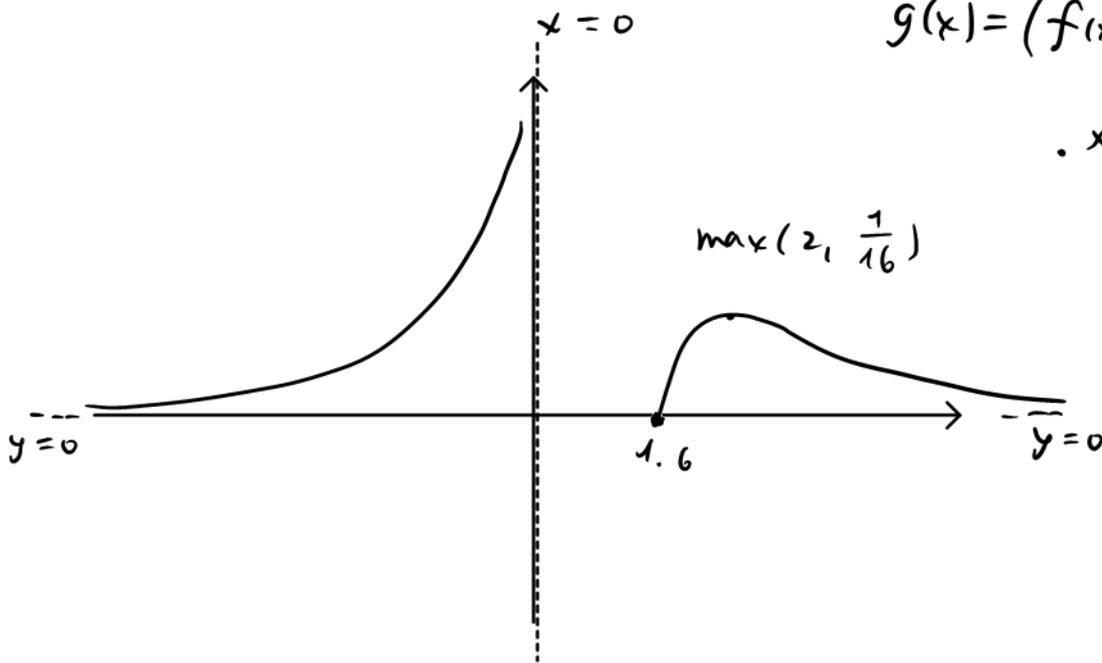




נתונה הפונקצייה  $g(x) = (f(x))^2$  שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .  
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$ .

ד.  $g(x) = (f(x))^2$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) \geq 0$



a הוא פרמטר גדול מ-2.  $a > 2$

ה. האם ערך הביטוי  $\int_a^{a+1} g(x) dx$  שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי  $\int_a^{a+1} f(x) dx$ ? נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $g(x)$ , על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים  $x=2$  ו- $x=6$ .

ה. עבור  $0 < f(x) < 1$  מתקיים  $f(x) < g(x)$ .

לדוגמה  $f(2) < g(2)$  במקומות המקסימום.

עבור  $a > 2$  ו- $0 < f(x) < 1$  מתקיים  $f(x) < g(x)$ .

לכן הביטוי של  $\int_a^{a+1} g(x) dx$  גדול מ- $\int_a^{a+1} f(x) dx$ .

תשובה: קטן



$$g(x) = (f(x))^2 = \left( \frac{\sqrt{5x^2 - 8x}}{x^3} \right)^2 = \frac{5x^2 - 8x}{x^6} \quad .1$$

$$g(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{8}{x^5}$$

$$\int g(x) dx = \int (5 \cdot x^{-4} - 8 \cdot x^{-5}) dx = \frac{5 \cdot x^{-3}}{-3} - 8 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + C$$

$$S = \int_2^6 g(x) dx = \left[ -\frac{5}{3} x^{-3} + 2 \cdot x^{-4} \right] \Big|_2^6 =$$

$$= \left( -\frac{1}{162} \right) - \left( -\frac{1}{12} \right) = \frac{25}{324} = 0.07716$$

$$S = \frac{25}{324} = 0.0772$$



7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$ , המוגדרת בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

א. הוכיחו כי הפונקצייה  $f(x)$  היא זוגית.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = \frac{1}{f(x) + b}$ ,  $b$  הוא פרמטר.

נתון כי לפונקצייה  $g(x)$  יש בדיוק שתי אסימפטוטות אנכיות.

ד. כתבו שני ערכים אפשריים של  $b$ , שאחד מהם חיובי והאחר שלילי.

הציבו בפונקצייה  $g(x)$  את הערך השלילי של  $b$  שמצאתם, וענו על הסעיפים ה-ו.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $g(x)$ .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה  $g(x)$ , וקבעו את סוגן.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$ .

א. נוכיח כי:

$$f(x) = f(-x)$$

$$(\sin x)^2 + \cos x - 1 = (\sin(-x))^2 + \cos(-x) - 1$$

אפי הזכויור:  $\sin(-x) = -\sin x$   
 $\cos(-x) = \cos x$   
:קי

$$(\sin x)^2 + \cos x - 1 = (-\sin x)^2 + \cos x - 1$$

$$(\sin x)^2 + \cos x - 1 = (\sin x)^2 + \cos x - 1$$

נעיר אז לא/טור אגנמא פלחור  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  ופיצג אל

$$f(x) = 1 - (\cos x)^2 + \cos x - 1 \quad \text{אל } f(x) \text{ כן:}$$

$$f(x) = \cos x - (\cos x)^2$$



7.1

$$\cos x - (\cos x)^2 = 0$$

$$\cos x (1 - \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = 2\pi k$$

$$k = -1: x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = 0: x = 0$$

$$k = 0: x = \frac{\pi}{2}$$

נמצא נקודות קיצון:  $-\pi \leq x \leq \pi$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), (0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

7.2

$$f'(x) = -\sin x + 2\cos x \sin x$$

$$\sin x (2\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$k = -1: x = -\pi$$

$$k = 0: x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 0: x = -\frac{\pi}{3}$$

נמצא נקודות קיצון:  $-\pi \leq x \leq \pi$

$$k = 0: x = 0$$

$$k = 1: x = \pi$$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$
$f'(x)$	+	-	+	-	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

$$f'(-\frac{\pi}{2}) > 0$$

$$f'(-\frac{\pi}{2}) < 0$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) > 0$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) < 0$$



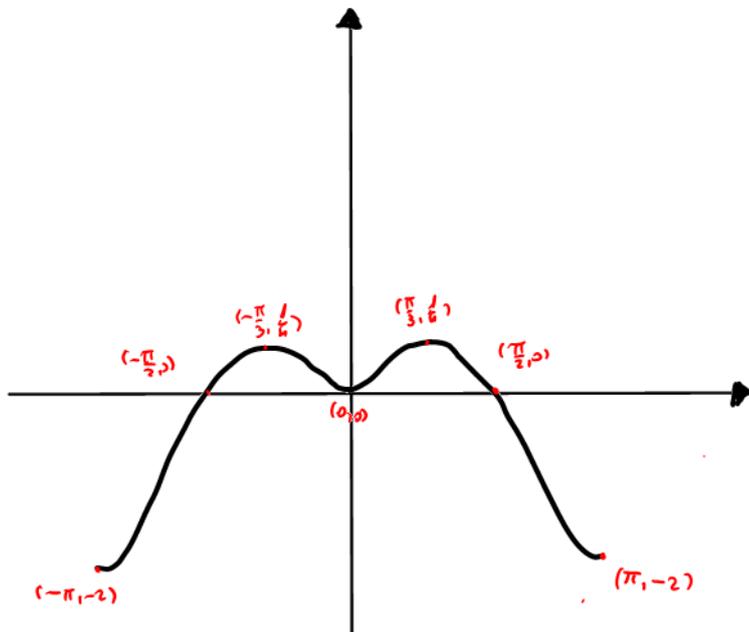
המשך

72.  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}$   
 $f(\pi) = \cos(\pi) - (\cos(\pi))^2 = -2$

לכתיב ובסוף לצייר עיזוי הי-ג הנקודות הנדרשות:

$\min(-\pi, -2), \max\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right), \min(0, 0), \max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right), \min(\pi, -2)$

73.



73. אם שהיננה אל מספר ותואם ב-2 נקודות  
 קצות (בצד שמאל) של פונקציה אחת הנלכה אנכית  
 ומתון אל צד א-2 נקודות קצות (ב + f(x), צד  
 הנלכה אנכית אל f(x) ב-2 נקודות)  
 כי יקרה קצת ב  $0 < b \leq 2$  או  $b = -\frac{1}{4}$

$b = -\frac{1}{4}, b = 1$

עק ב גרין  
 האיזני האסתי



7.1

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - \frac{1}{4}}$$

תחום ההקשרה של  $f(x)$  הוא:  $-\pi \leq x \leq \pi$   
 אזו מתוכם התקווה חיתוך של  $f(x)$  עם ציר ה-  
 כאשר הצורה אנכית של  $\frac{1}{4}$  שפי מכה. הקורה של  
 החיתוכים הם ציר  $x$  וגם  $x$  לבית  $(\frac{\pi}{3}, 0)$  ,  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$

$$-\pi \leq x < -\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \frac{\pi}{3} < x \leq \pi$$

7.2

$$g'(x) = \frac{0(f(x) - \frac{1}{4}) - f'(x)}{(f(x) - \frac{1}{4})^2}$$

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x) - \frac{1}{4})^2} \longrightarrow g'(x) = 0 \longrightarrow -f'(x) = 0$$

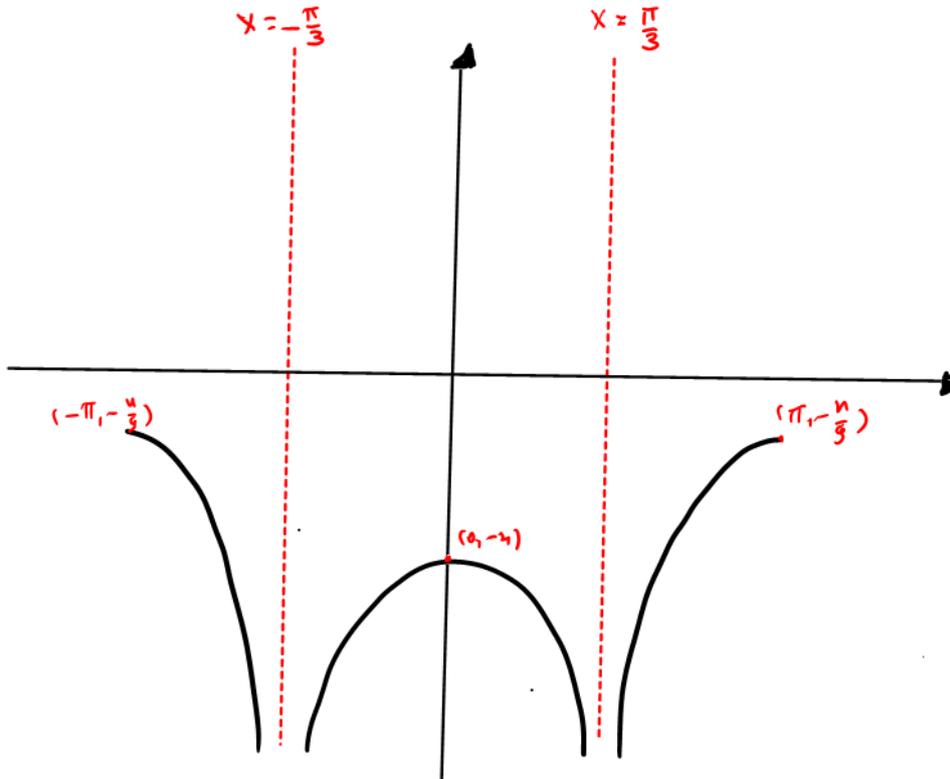
אחד  $x = \frac{\pi}{3}$  !  $x = -\frac{\pi}{3}$  שונים קמחום ההקשרה של  $f(x)$   
 שיעורי ה- $x$  של הקורה הקיבון לא ישתנו, אך מכיוון אסמן תנצלות  
 של  $f(x)$  !  $f(x)$  (גבי תחומי קטורי ובייזב ותיפסא, ולכן סוג הקיבון  
 וחתף. זרכו הקיבון של טעם :

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - b}$$

$$\max(-\pi, -\frac{\pi}{3}), \max(0, -\frac{\pi}{3}), \max(\pi, -\frac{\pi}{3})$$



71.





8. נתונה הפונקצייה  $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 8kx$ , המוגדרת לכל  $x$ .  
 $k$  הוא פרמטר שונה מ-0.

הנקודה  $A$  היא נקודת הפיתול של הפונקצייה  $f(x)$ .  
א. הביעו באמצעות  $k$  את שיעורי הנקודה  $A$ .

נתון כי הנקודה  $A$  נמצאת ברביע הראשון.

ב. מצאו את תחום הערכים האפשרי של  $k$ .

דרך הנקודה  $A$  העבירו אנך לציר ה- $x$  החותך אותו בנקודה  $B$ , ואנך לציר ה- $y$  החותך אותו בנקודה  $C$ .

נתון ריבוע  $I$  שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע  $AB$ , וריבוע  $II$  שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע  $AC$ .

ג. מצאו את הערך של  $k$  שבעבורו סכום שטחי הריבועים  $I$  ו- $II$  הוא מינימלי (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

$$f'(x) = 3kx^2 - 6x + 8k$$

1c

$$f''(x) = 6kx - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{k}$$

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + 8k \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} - \frac{3}{k^2} + 8 = 8 - \frac{2}{k^2}$$

$$\left(\frac{1}{k}, 8 - \frac{2}{k^2}\right) A$$

$$x_A = \frac{1}{k} > 0 \rightarrow k > 0$$

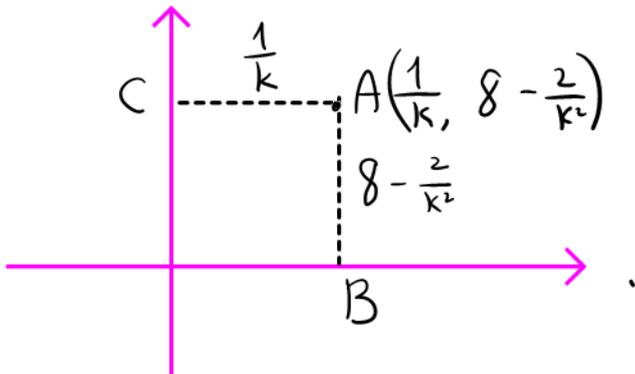
12

$$y_A = 8 - \frac{2}{k^2} > 0 \rightarrow 8 > \frac{2}{k^2} \rightarrow k^2 > \frac{1}{4} \rightarrow k > \frac{1}{2}$$

$$k > \frac{1}{2} \text{ ס'כום}$$



דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה B, ואנך לציר ה-y החותך אותו בנקודה C.  
נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB, וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC.  
מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו-II הוא מינימלי (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).



$$\text{I ריבוע } S = AB^2 = \left(8 - \frac{2}{k^2}\right)^2$$

$$\text{II ריבוע } S = AC^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^2}$$

סכום הכל הריבועים

$$S(k) = \frac{1}{k^2} + \left(8 - \frac{2}{k^2}\right)^2 = \frac{1}{k^2} + 64 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^4} =$$

$$S(k) = \frac{4}{k^4} - \frac{31}{k^2} + 64 = 4 \cdot k^{-4} - 31k^{-2} + 64$$

$$S'(k) = -16k^{-5} + 62k^{-3} = \frac{-16}{k^5} + \frac{62}{k^3} = \frac{-16 + 62k^2}{k^5} = 0$$

$$16 = 62k^2 \rightarrow k^2 = \frac{8}{31} \rightarrow k = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{31}}$$

מקלור

$$S''(k) = 124k$$

$$S''\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{31}}\right) = 124 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{31}} = + \rightarrow \min$$

ד'ס'נ'מ עקור  $k = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{31}}$  סכום השטחים מינימלי