



פתרון הבחינה במתמטיקה

חורף תשפ"ו, 2026, שאלון 35572, גרסה 06:
מוגש ע"י צוות מורי מתמטיקה של "יואל גבע"





1. נתונה אליפסה שמשוואתה קנונית. הנקודה $A(2, 6)$ נמצאת על האליפסה.

שיעורי המוקד הימני של האליפסה הם $(\sqrt{25.6}, 0)$.

א. מצאו את משוואת האליפסה.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x .

דרך הנקודה A העבירו ישר העובר דרך ראשית הצירים, הנקודה O .

הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר AO . הנקודה P היא אמצע הקטע BC .

ב. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P .

ג. מצאו את משוואת המעגל המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם, ומשיק לישר AO בנקודה O .

נתונה אליפסה שמשוואתה קנונית. הנקודה $A(2, 6)$ נמצאת על האליפסה.

שיעורי המוקד הימני של האליפסה הם $(\sqrt{25.6}, 0)$.

א. מצאו את משוואת האליפסה.

נתון: $c = \sqrt{25.6}$

נניח את הנקודה $A(2, 6)$ כמילואי א'נסה.
בנוסף נזכור שמק"ם הקשר $a^2 - b^2 = c^2$

$$I \quad \frac{2^2}{a^2} + \frac{6^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1$$

$$II \quad a^2 - b^2 = (\sqrt{25.6})^2 \rightarrow a^2 = 25.6 + b^2$$



נ'3 יב אר לשלול II סלוק לשלול I

$$\frac{4}{25.6+b^2} + \frac{36}{b^2} = 1 \rightarrow 4b^2 + 36(25.6+b^2) = b^2(25.6+b^2) \rightarrow$$

$$4b^2 + 921.6 + 36b^2 = 25.6b^2 + b^4 \rightarrow b^4 - 11.4b^2 - 921.6 = 0 \rightarrow$$

$$b^2 = 38.4$$

$$b^2 = -24$$

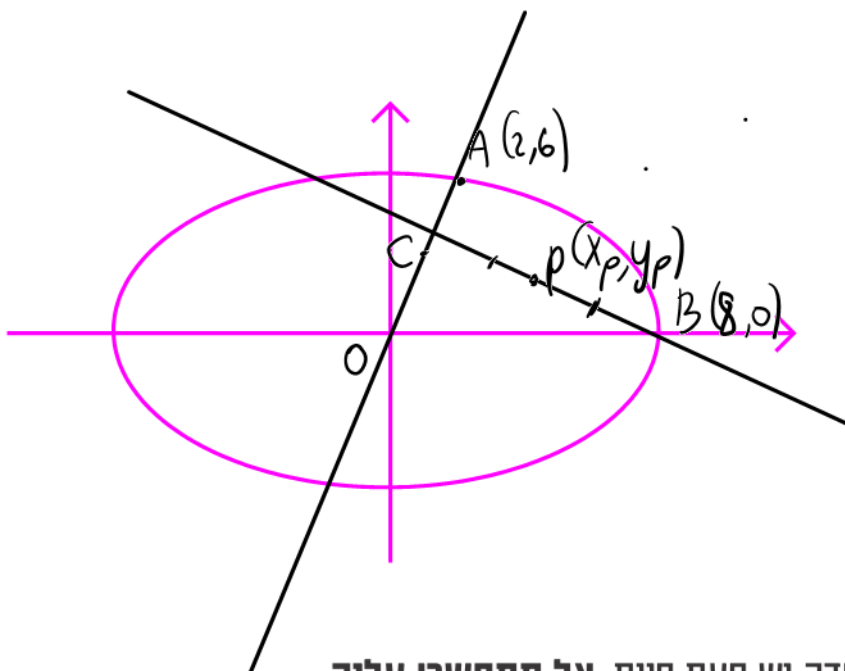
(סל)

$$a^2 = 64$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{38.4} = 1$$

לשלול.
האליפסה

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה-x.
דרך הנקודה A העבירו ישר העובר דרך ראשית הצירים, הנקודה O.
הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר AO. הנקודה P היא אמצע הקטע BC.
ב. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P.



נקודה B היא (8,0)

לשלול הישר AO היא

$$y = 3x$$

$$x_p = \frac{x_c + 8}{2} \rightarrow x_c = 2x_p - 8$$

$$y_p = \frac{y_c + 0}{2} \rightarrow y_c = 2y_p$$

$$C(2x_p - 8, 2y_p)$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





כעת נצטרך את הנקודה C מקואטר ע"י קו ישר ! למקוטר לשוואר
הישר AO

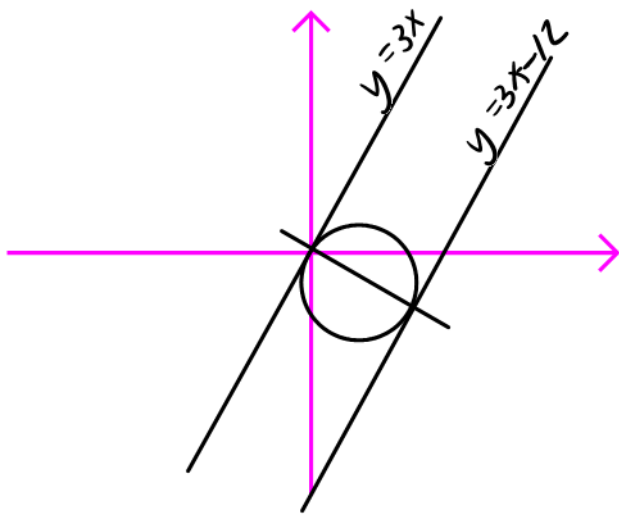
$$24p = 3(2x_p - 8)$$

$$2y = 6x - 24$$

המקום הראשוני המיועד: $y = 3x - 12$

ג. מצאו את משוואת המעגל המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם, ומשיק לישר AO בנקודה O.

המקום הראשוני שמצאנו מתאר ישר מקביל לישר AO



כאשר נמצא את המרחק בין הישרים - הוא קוטר המעגל.

$$-3x + y = 0$$

$$-3x + y + 12 = 0$$

$$d = \frac{|12 - 0|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

כעת נמצא את משוואת הישר עזר'נו מן הקוטר ויוצר מראשית הצירים

$$y = -\frac{1}{3}x$$

נמצא את החיתוך בין הישר הנ"ל למקום הראשוני אומג' מציאו
ואסימום נמצא את אנגל הקוטר ע"י נוסחת אנגל קטן.

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





$$-\frac{1}{3}x = 3x - 12 \quad | \cdot 3$$

$$-x = 9x - 36$$

$$36 = 10x$$

$$3.6 = x$$

$$y = -1.2$$

נקודת החיתוך בין הישר אלון מונח הנקודה לבין הישר קים היא $(3.6, -1.2)$

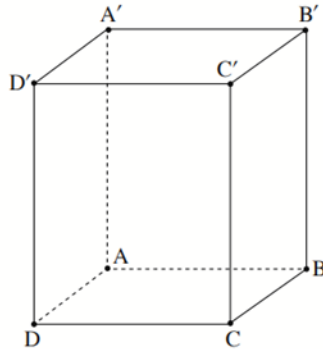
כעת נמצא את מרכז המעגל נ"ל. את צו קטע בין ראשי הצירים לבין הנקודה שחשקנו

$$R = \frac{6}{\sqrt{10}}, \quad \text{מרכז המעגל} \quad (1.8, -0.6)$$

$$(x - 1.8)^2 + (y + 0.6)^2 = 3.6$$

מחלק
המעגל





2. בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A' B' C' D'$.
נתון כי משוואת המישור $A' B' C' D'$ היא $x + 4y - 8z - 126 = 0$,
וכי $B(0, 7, 8)$.
א. מצאו את אורך המקצוע BB' .
נתון כי הצגה פרמטרית של הישר AB היא $\underline{x} = (0, 7, 8) + t(0, 2, 1)$.
אורך המקצוע AB הוא $5\sqrt{5}$, ושיעור ה- y של הקודקוד A הוא שלילי.
ב. מצאו את שיעורי הקודקוד A .
ג. מצאו את משוואת המישור $ABB'A'$.
נתונה נקודה $M(k, 1, 5)$, k הוא פרמטר חיובי.
נתון כי גודל הזווית שבין הישר AB ובין הישר AM הוא 60° .
ד. מצאו את הערך של k (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).
נתון כי הנקודה M נמצאת על המישור $DCC'D'$.
ה. מצאו את נפח התיבה.

פתרון:

א. אורן המילר BB' היא מרחק נקודה B ממישור הבסיס העליון.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|0 + 4 \cdot 7 - 8 \cdot 8 - 126|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + (-8)^2}} = \frac{162}{\sqrt{81}} = 18$$

$$|BB'| = 18$$

תשובה:

ג. ההצגה הפרמטרית של AB היא:

$$\underline{x} = (0, 7, 8) + t(0, 2, 1)$$

$$\text{נסמך: } A(0, 7+2t, 8+t)$$

$$\text{נתון: } |AB| = 5\sqrt{5}, \text{ אינו נרשם בנוסחה לאורך אקטורי:}$$

$$\sqrt{(0-0)^2 + (7+2t-7)^2 + (8+t-8)^2} = 5\sqrt{5} \quad | \quad ()^2$$

$$\begin{aligned} 4t^2 + t^2 &= 125 & | & \quad t^2 = 25 \quad | \quad \sqrt{} \\ 5t^2 &= 125 & | & \quad t = \pm 5 \end{aligned}$$





נתון כי שיעור ϵ של נקודה A של $\vec{AB}$, זכור $\epsilon = -5$
ונקודה:

$$A(0, -3, 3)$$

ד. מישור $ABB'A'$ מאונך למישור הקבועים $A'B'C'$ וזכור הנקודה של הקבועים היא וקטור כיוון של המישור $ABB'A'$.

מכאן, שההצגה הבדלית של היא

$$\vec{x} = (0, 3, 8) + \epsilon(0, 2, 1) + d(1, 4, -8)$$

(מכאן) זכור המשוואה של המישור:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 4, -8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + c = 0 \\ a + 4b - 8c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = 8c - 4b \end{cases}$$

נבחר $b = -1$ ונקודה $c = 2$ $a = 20$

משוואת המישור היא $20x - y + 2z + d = 0$

נציב את נקודה $A(0, -3, 3)$ ונקודה d :

$$20 \cdot 0 - (-3) + 2 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = -9$$

משוואת מישור $ABB'A'$: $20x - y + 2z - 9 = 0$

3. וזכור הכיוון של הישר AB הוא: $(0, 2, 1)$

וקטור הכיוון של הישר AM הוא:

$$\vec{AM} = M - A = (k, 1, 5) - (0, -3, 3) = (k, 4, 2)$$

נציב בנוסחה $\cos$ בין שני ישרים:

$$\cos 60^\circ = \frac{|(0, 2, 1) \cdot (k, 4, 2)|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{k^2 + 4^2 + 2^2}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



$$\frac{1}{2} = \frac{10+8+21}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{k^2+16+4}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{k^2+20}} \quad / ()^2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{100}{5 \cdot (k^2+20)} \Rightarrow 5k^2+100 = 400$$

$$5k^2=300 \Rightarrow k^2=60 \Rightarrow k=\pm\sqrt{60}$$

$$\boxed{k=\sqrt{60}} \quad \text{כי } 0 < k$$

ה. לחישוב הנפח של התיבה חסר רק האורך של
הגובה AD/BC . הוא שווה לאורך של נקודה M
מהפאה $ABB'A'$:

$$|BC| = \frac{|20 \cdot \sqrt{60} - 1 + 2 \cdot 5 - 9|}{\sqrt{20^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{20\sqrt{60}}{\sqrt{405}} = \frac{40\sqrt{3}}{9}$$

נחשב את הנפח של התיבה:

$$V = AB \cdot BC \cdot BB' = 5\sqrt{5} \cdot 18 \cdot \frac{40\sqrt{3}}{9} = 1,549.19$$

תגובה:

$$\boxed{V = 1,549.19}$$



3. א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z - 3i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 3$ הוא פרבולה, ומצאו את משוואתה.

נתון מספר מרוכב $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

נתון מצולע קמור I, שקודקודיו מיוצגים על ידי פתרונות המשוואה $z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta))$, z הוא משתנה מרוכב.

ב. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I.

נתון מצולע II, שקודקודיו מיוצגים על ידי המספרים $w, -w, \frac{1}{w}, -\frac{1}{w}$.

ג. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע II.

נתון כי מצולע II הוא מעוין.

ד. מצאו את הערך של θ .

נתון כי הנקודה המייצגת את w נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ה. מצאו את היחס בין שטח מצולע II ובין שטח מצולע I.

$$|z - 3i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 3$$

$$|x + yi - 3i| = y + 3$$

$$|x + (y - 3)i| = y + 3$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = y + 3 \quad |()^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$

$$x^2 = 12y \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{12}x^2}$$

$$z = x + yi$$

$$\bar{z} = x - yi$$

$$z - \bar{z} = 2yi \quad | : 2i$$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = y$$

א.



$$w = r \operatorname{cis} \theta$$

נתון מספר מרוכב $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

נתון מצולע קמור I, שקודקודיו מיוצגים על ידי פתרונות המשוואה $z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta))$,
z הוא משתנה מרוכב.

ב. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I.

$$z^4 = \frac{1}{r^4} \operatorname{cis} 4\theta$$

$$z_k = \sqrt[4]{\frac{1}{r^4}} \operatorname{cis} \left(\frac{4\theta + 360^\circ k}{4} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (\theta + 90^\circ k)$$

$$z_0 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} \theta$$

$$z_1 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (\theta + 90^\circ)$$

$$z_2 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (\theta + 180^\circ)$$

$$z_3 = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (\theta + 270^\circ)$$

נתון מצולע II, שקודקודיו מיוצגים על ידי המספרים $w, -w, \frac{1}{w}, -\frac{1}{w}$.

ג. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע II.

$$w = r \operatorname{cis} \theta$$

$$-w = -r \operatorname{cis} \theta = r \operatorname{cis} (\theta + 180^\circ)$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1 \operatorname{cis} 0^\circ}{r \operatorname{cis} \theta} = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (-\theta)$$

$$-\frac{1}{w} = -\frac{1}{r} \operatorname{cis} (-\theta) = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (-\theta + 180^\circ)$$

$$w = r \operatorname{cis} \theta$$

$$-w = r \operatorname{cis} (\theta + 180^\circ)$$

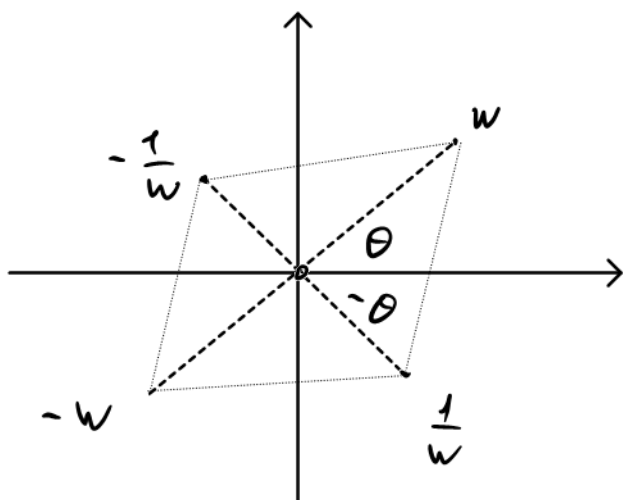
$$\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (-\theta)$$

$$-\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis} (-\theta + 180^\circ)$$



נתון כי מצולע II הוא מעוין.

ד. מצאו את הערך של θ .



אנליסיס מעוין
מאונכים זה לזה
 $2\theta = 90^\circ$
 $\theta = 45^\circ$

$$w = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

נתון כי הנקודה המייצגת את w נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

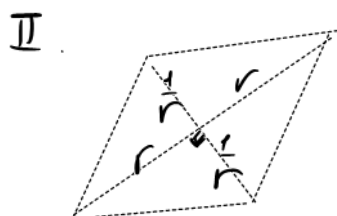
ה. מצאו את היחס בין שטח מצולע II ובין שטח מצולע I.

$$x = r \cos \theta = r \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

$$y = r \sin \theta = r \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

$$x^2 = 8y \quad \text{מציבים}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\right)^2 = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

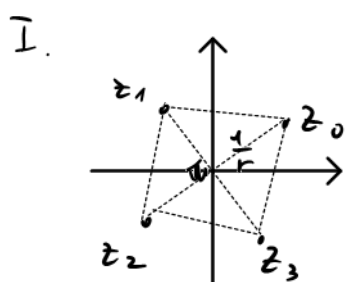


$$\frac{1}{2} r^2 = 6\sqrt{2} r \quad | : r \neq 0$$

$$\frac{1}{2} r = 6\sqrt{2} \quad r = 12\sqrt{2}$$

$$S_{II} = \frac{2r \cdot 2 \cdot \frac{1}{r}}{2} = 2$$

$$\frac{S_{II}}{S_I} = \frac{\frac{2}{r}}{\frac{2}{r^2}} = r^2 = 288$$



$$S_I = \frac{2 \cdot \frac{1}{r} \cdot 2 \cdot \frac{1}{r}}{2} = \frac{2}{r^2}$$

$$\frac{S_{II}}{S_I} = 288$$





4. $f'(x)$ הוא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq 0$.

נתון כי הפונקצייה $f(x)$ יורדת בתחום $x > 0$ ובתחום $x < 0$,

וכי $f'(x) \neq 0$ בכל תחום הגדרתה.

א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{1}{x}$.

ב. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

הוא פרמטר גדול מ-1.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{\ln a}$ ו- $x = \frac{1}{\ln(5a)}$ הוא 9.

ד. מצאו את הערך של a .

$$g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) \quad e^{f(x)} > 0$$

$$f'(x) < 0 \quad (x \neq 0)$$

נא לשים לב: $x \neq 0$, לפי נתוני הבעיה נמצא של $f(x)$ (אם $x > 0$, $x < 0$)

חיוביות של $g(x)$: אף x שלילית של $g(x)$: $x > 0, x < 0$





$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{נתון:}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

(1) I

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -0 \cdot e^0 = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{1}{0} e^0 = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \cdot e^{-\infty} = 0^-$$

$x \rightarrow \pm \infty$ אפס קר ערך 0

$x \rightarrow 0^+$ אט אט אפס קר ערך $-\infty$

$$u = -\frac{1}{x^2}$$

$$v = e^{\frac{1}{x}} \quad (2) I$$

$$u' = -\frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$v' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$g'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$(uv)' = u'v + u \cdot v'$$

$$= \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} (2x+1) = g'(x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x		$-\frac{1}{2}$		0	
f'	(-)	0	(+)	//	(+)
f	↘	min	↗	//	↗

$$g'(-1) = \frac{(4)}{(+) } (2 \cdot (-1) + 1) = (-)$$

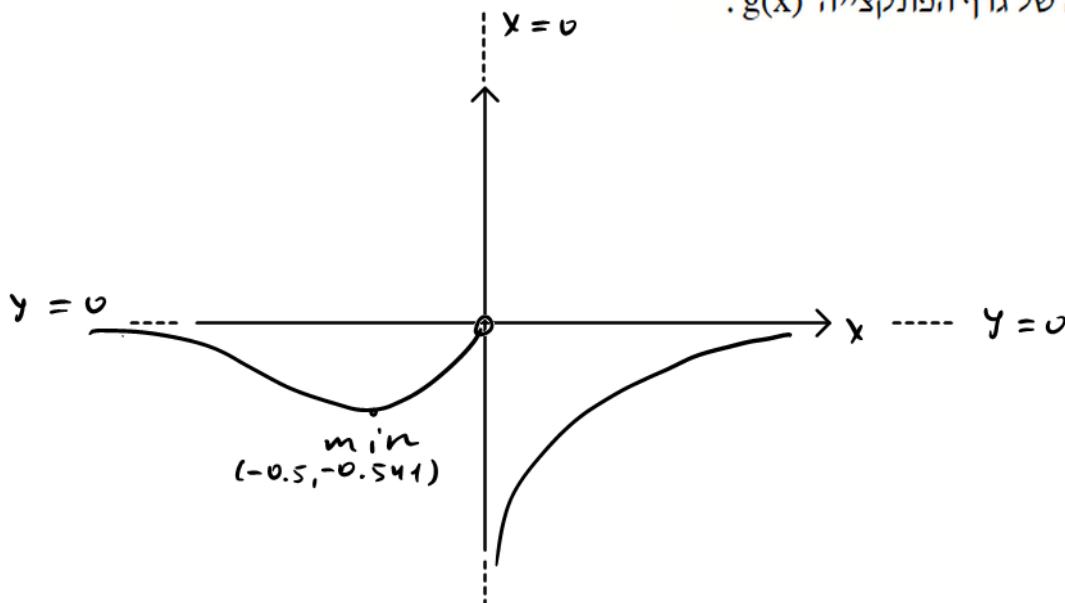
$$g'(-\frac{1}{2}) = \frac{(4)}{(+) } \cdot (+) = (+) \quad g'(1) = (+)$$

$$\min(-0.5, -4e^{-2})$$

$$g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{0.25} e^{-2} = -4e^{-2} = -\frac{4}{e^2} \approx -0.541$$



ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.



a הוא פרמטר גדול מ-1.

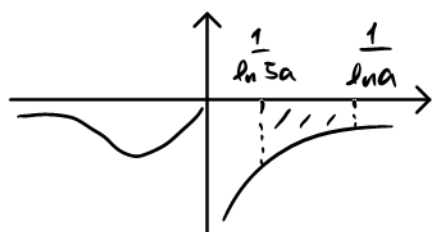
נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{\ln a}$ ו- $x = \frac{1}{\ln(5a)}$ הוא 9.

ד. מצאו את הערך של a .

מחילת האינטגרל:

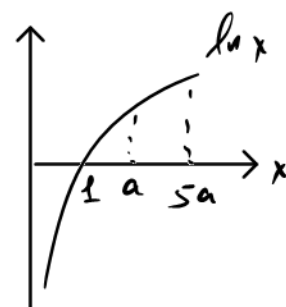
$$\int g(x) dx = \int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C = e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$\ln a > 0 \\ a > 1$$



$$\ln a > \ln a$$

$$\frac{1}{\ln a} > \frac{1}{\ln(5a)}$$



$$S = - \int_{\frac{1}{\ln(5a)}}^{\frac{1}{\ln a}} g(x) dx = \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_{\frac{1}{\ln(5a)}}^{\frac{1}{\ln a}} = \left[e^{\frac{1}{x}} \right]_{\frac{1}{\ln a}}^{\frac{1}{\ln(5a)}} = e^{\ln(5a)} - e^{\ln a} = 5a - a = 4a \\ 4a = 9 \quad \boxed{a = \frac{9}{4}}$$

