פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ו, 2026, שאלון 35571, גרסה 06:

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

פרק ראשון – שאלות קצרות

.1 ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

דרך הנקודות A ו־ E שעל המעגל העבירו שני משיקים המאונכים זה לזה.

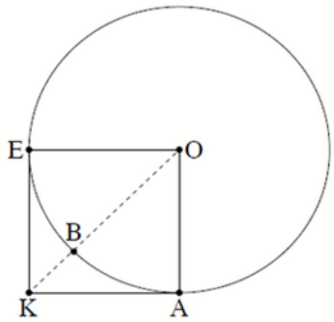
המשיקים נחתכים בנקודה K.

הקטע KO חותך את המעגל בנקודה B.

(1) מצאו פי כמה גדול שטח המשולש AOB משטח המשולש AKB.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא 25.

(2) מצאו את אורך הגובה לצלע AK במשולש AKB.



פתרון:

א.(1) המרובע AKEO הוא ריבוע ($\angle A=\angle K=\angle E=90^\circ$,
$OA=OE=R$)

לכן:
$$KO^2=AK^2+AO^2=2R^2$$
$$KO=\sqrt{2}R$$

למשולשים גובה משותף:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AKB}}=\frac{\frac{OB\cdot h}{2}}{\frac{KB\cdot h}{2}}=\frac{OB}{KB}=\frac{R}{\sqrt{2}R-R}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=2.414$$

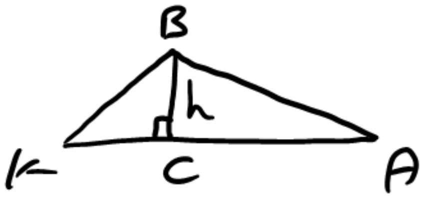
יחס השטחים: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}-1}=2.414}$

(2) ראשית נמצא את R לפי הנתון על שטח ΔAOB:

$$S_{AOB}=\frac{AO\cdot BO\cdot \sin\angle AOB}{2}$$

$$25=\frac{R\cdot R\cdot \sin 45^\circ}{2}\Rightarrow R^2=50\sqrt{2}\Rightarrow R=8.409$$

כעת נעביר גובה מ-B לצלע KA:



נסמן את הגובה ב-h.

לפי סעיף ד':

$$KB = \sqrt{2}R - R = 3.483$$

$$\sphericalangle BKC = 45^\circ$$

לכן:

$$\frac{h}{3.483} = \sin 45^\circ \Rightarrow h = 2.46$$

ב. בתחרות שחמט, שני שחקנים – יאיר ונדב – מתחרים זה נגד זה.

כל משחק יכול להסתיים באחת מ־3 התוצאות האלה: ניצחון של יאיר, ניצחון של נדב או תיקו.

בכל משחק ההסתברות שיאיר ינצח היא קבועה וגדולה פי 2 מן ההסתברות שנדב ינצח.

נסמן ב־ p את ההסתברות שנדב ינצח במשחק אחד.

יאיר ונדב משחקים שני משחקים.

(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות שאחד מן השחקנים ישיג שני ניצחונות.

ידוע שאם שום שחקן לא השיג שני ניצחונות, ההסתברות שכל אחד מן המשחקים יסתיים בתיקו היא $\frac{1}{55}$.

(2) קבעו איזו מן האפשרויות I–III שלפניכם מתאימה לערך של p. נמקו את קביעתכם.

I. $\frac{1}{8}$ II. $\frac{9}{25}$ III. $\frac{3}{10}$

פתרון:

(1) ההסתברות שנדב ינצח בשני המשחקים היא: p^2

ההסתברות שיאיר ינצח בשני המשחקים היא: $(2p)^2=4p^2$

ההסתברות שאחד מהם ינצח בשני המשחקים היא סכום ההסתברויות: $\boxed{5p^2}$

(2) ההסתברות הנתונה היא הסתברות מותנה:

$P($שני המשחקים יסתיימו בתיקו / לא הסתיימו בשני נצחונות של אחד השחקנים$)=\frac{1}{55}$

ההסתברות של משחק להסתיים בתיקו היא:

$$P=1-(p+2p)=1-3p$$

לכן: $P($שני המשחקים יסתיימו בתיקו$)=(1-3p)^2$

נציב בהסתברות המותנה:

$$\frac{(1-3P)^2}{1-5P^2}=\frac{1}{55}$$

$$\frac{1-6P+9P^2}{1-5P^2}=\frac{1}{55}$$

$$55-330P+495P^2=1-5P^2$$

$$500P^2-330P+54=0$$

$$P_1=0.3 \quad , P_2=0.36$$

הפתרון $P=0.36$ לא מתאים כי אז $2P=0.72$ ונקבל סכום הסתברויות גדול מ-1.

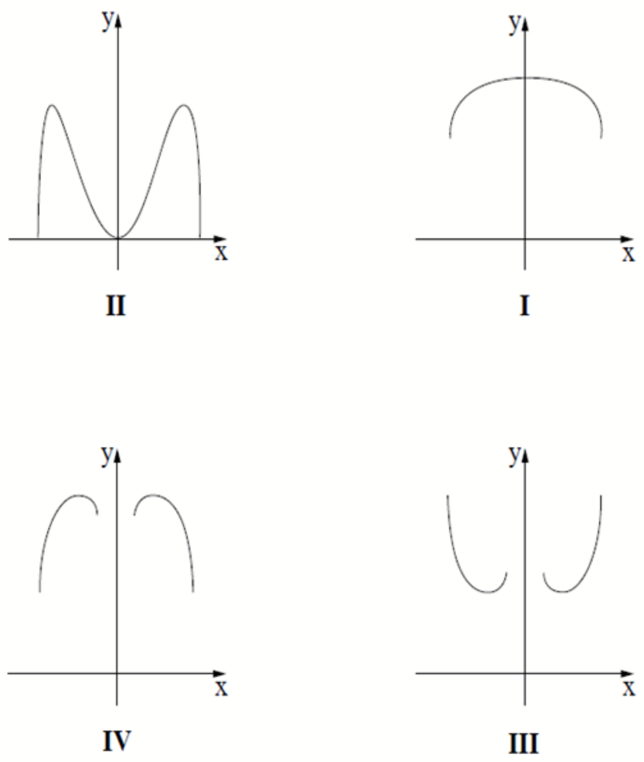
ולכן $P=0.3$

התשובה היא: $\boxed{III}$

ג. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{64-x^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) אחד מן הגרפים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו את קביעתכם.



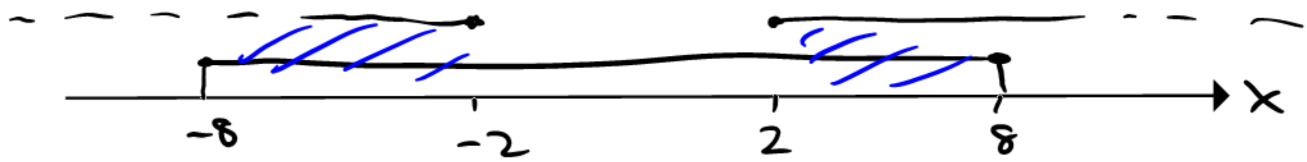
פתרון:

(1) תחום הגדרה:

$0\le x^2-4$ וגם $0\le 64-x^2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x\le -2$ או $2\le x$ $-8\le x\le 8$



תשובה: $\boxed{-8\le x\le -2 \text{ או } 2\le x\le 8}$

(2) גרפים I ו- II לא מתאימים כי לא משקפים את תחום ההגדרה.

נחשב את ערכי הפונקציה בקצוות תחום ההגדרה:

$f(2) = \sqrt{0} + 2\sqrt{64-4} = 2\sqrt{60}$

$f(8) = \sqrt{8^2-4} + \sqrt{0} = \sqrt{60}$

$\Rightarrow f(8) < f(2)$

זה מתאים רק לגרף IV.

תשובה: $\boxed{\text{גרף IV}}$

ד. נתונה סדרה אין־סופית שאיבריה מקיימים $a_n = \frac{\cos(\pi \cdot 2^n)}{3 \cdot 2^n}$ לכל n טבעי.

(1) מצאו את שלושת האיברים הראשונים בסדרה a_n.

(2) הוכיחו כי הסדרה a_n היא הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

(3) מצאו את סכום הסדרה a_n.

פתרון:

(1) נציב:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= \frac{\cos(\pi \cdot 2)}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6} \\ a_2 &= \frac{\cos(\pi \cdot 4)}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12} \\ a_3 &= \frac{\cos(\pi \cdot 8)}{3 \cdot 8} = \frac{1}{24} \end{aligned}}$$

(2)

$$a_n = \frac{\cos(\pi \cdot 2^n)}{3 \cdot 2^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{\cos(\pi \cdot 2^{n+1})}{3 \cdot 2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\cos(\pi \cdot 2^{n+1})}{3 \cdot 2^{n+1}}}{\frac{\cos(\pi \cdot 2^n)}{3 \cdot 2^n}} = \frac{3 \cdot 2^n \cdot \cos(\pi \cdot 2^{n+1})}{3 \cdot 2^{n+1} \cdot \cos(\pi \cdot 2^n)}$$

כעת:

$$\cos(\pi \cdot 2^{n+1}) = \cos(\pi \cdot 2^n) = 1$$

(הזוויות הן כפולות של 2π)

לכן:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n+1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

הסדרה a_n הנדסית עם מנה $\boxed{q = \frac{1}{2}}$

(3) הסדרה אינסופית מתכנסת!

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2. a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שסכומה מתכנס.

המנה של הסדרה היא q.

נסמן ב־ T את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה,

ונסמן ב־ R את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה.

נתון: $\frac{T^2}{R^2} = 25$.

א. מצאו את הערך של q.

נתונה סדרה b_n שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

נתון: $b_1 = 1$.

ב. מצאו את הערך של a_1.

ג. הביעו באמצעות n את b_n.

ד. הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = \frac{25^n - 1}{24}.$$

א. לאור הנתון, ניתן להסיק שהסדרה חיובית, יורדת ועבור
אפס ובנוסף $0<q<1$

$$T = \frac{a_1}{1-q^2} \qquad R = \frac{a_1 q}{1-q^2}$$

$$\frac{T^2}{R^2} = \left(\frac{T}{R}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a_1}{1-q^2}}{\frac{a_1 q}{1-q^2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{1}{q^2} = 25 \rightarrow \boxed{q = \frac{1}{5}}$$

נתונה סדרה b_n שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

נתון: $b_1 = 1$.

ב. מצאו את הערך של a_1.

$$b_1 = \frac{1+\frac{1}{5}}{a_1 \cdot a_2} \rightarrow 1 = \frac{\frac{6}{5}}{a_1 \cdot a_1 q} \rightarrow a_1^2 = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{1}{5}}$$

$$a_1^2 = 6 \rightarrow \boxed{a_1 = \sqrt{6}}$$

ג. הביעו באמצעות n את b_n .

$$b_n = \frac{1+\frac{1}{5}}{a_1 \cdot q^{n-1} a_1 \cdot q^n} = \frac{\frac{6}{5}}{a_1^2 \cdot q^{2n-1}} = \frac{\frac{\cancel{6}}{5}}{\cancel{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}}$$

$$b_n = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1-2n} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2-2n} = 5^{2n-2}$$

$$\boxed{b_n = 5^{2n-2}}$$

ד. הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{25^n - 1}{24}.$$

נוכיח שסדרה b_n הינה הנדסית ונסכום לפי נוסחת סכום.

ראשית נציג את b_{n+1}:

$$b_{n+1} = 5^{2(n+1)-2} = 5^{2n}$$

כעת נראה שהמנה קבועה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{5^{2n}}{5^{2n-2}} = 5^2 = 25 = q_b$$

$$S_n = \frac{b_1(q_b^n - 1)}{q_b - 1} = \frac{1(25^n - 1)}{25 - 1} = \boxed{\frac{25^n - 1}{24}}$$

.3 בשכבה י"א של תיכון עירוני גדול חלק מן התלמידים הם מדריכים בתנועת נוער והשאר אינם מדריכים.

בשכבה זו לחלק מן התלמידים יש רישיון נהיגה ולשאר אין רישיון נהיגה.

חצי מן התלמידים שיש להם רישיון נהיגה הם מדריכים בתנועת נוער.

אחוז התלמידים המדריכים מבין התלמידים שיש להם רישיון שווה לאחוז התלמידים שאין להם רישיון מבין התלמידים המדריכים.

בוחרים באקראי תלמיד מבין תלמידי השכבה.

ההסתברות שהתלמיד שנבחר הוא מדריך או שיש לו רישיון היא 0.36 .

א. מצאו כמה אחוזים מן התלמידים בשכבה זו הם מדריכים.

ב. בוחרים באקראי תלמיד מבין התלמידים שאין להם רישיון.
מהי ההסתברות שתלמיד זה הוא מדריך?

בוחרים באקראי 5 תלמידים מבין התלמידים שאין להם רישיון.

ג. **(1)** מהי ההסתברות שנבחר יותר ממדריך אחד?
(2) ידוע שנבחר יותר ממדריך אחד. מהי ההסתברות כי מספר המדריכים שנבחרו הוא זוגי?

3א.

נגדיר:
A - מדריכים בתנועת נוער
$\bar{A}$ - אינם מדריכים בתנועת נוער
B - יש רישיון נהיגה
$\bar{B}$ - אין רישיון נהיגה

נתון: $p(A/B)=\frac{1}{2}$

I $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{1}{2}$

נתון: $p(A/B)=p(\bar{B}/A)$

$\frac{1}{2}=p(\bar{B}/A)$

II $\frac{p(\bar{B}\cap A)}{p(A)}=\frac{1}{2}$

נתון: $p(A\cup B)=0.36$

III $p(\bar{A}\cap\bar{B})=1-0.36=0.64$

נגדיר: $p(A)=x$ ונציב ב II

נקבל $p(\bar{B}\cap A)=\frac{1}{2}x$

	A	$\bar{A}$	
B			
$\bar{B}$	$\frac{1}{2}x$	0.64	
	x		1

המשך 3א

נסמן באחוזים x רק תכונות

בטבלה את $P(A\cap B)$ ו $P(B)$ ונציב

ב I :

$$\frac{\frac{1}{2}x}{1-(0.64+\frac{1}{2}x)}=\frac{1}{2} \qquad 1:\frac{1}{2}$$

$$x=0.36-\frac{1}{2}x$$

$$1.5x=0.36$$

$$x=0.24$$

$\boxed{\text{24\% מן התלמידים הם מעריכים}}$

נמלא את הטבלה רק תכונות הטבלה:

	$\bar{A}$	A	
0.24	0.12	0.12	B
0.76	0.64	0.12	$\bar{B}$
1	0.76	0.24	

3ב.

$$P(A/\bar{B})=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.12}{0.76}$$

$$\boxed{P(A/\bar{B})=\frac{3}{19}}$$

3ד(1)

$$P(\text{יותר ממעריך אחד})=1-P_5(1)-P_5(0)$$

$$P(\text{יותר ממעריך אחד})=1-\binom{5}{1}\left(\frac{3}{19}\right)^1\left(\frac{16}{19}\right)^4-\binom{5}{0}\left(\frac{3}{19}\right)^0\cdot\left(\frac{16}{19}\right)^5\approx 0.179$$

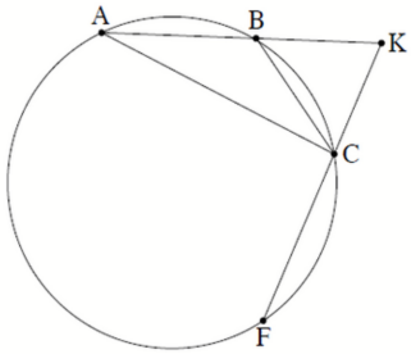
3ד(2)

$$P(\text{מספר המעריכים שלמידים זוגי}/\text{נבחר יותר ממעריך אחד})=\frac{P(\text{מספר המעריכים שלמידים זוגי}\cap\text{נבחר יותר ממעריך אחד})}{P(\text{נבחר יותר ממעריך אחד})}=\frac{P_5(2)+P_5(4)}{0.179}=\frac{\binom{5}{2}\left(\frac{3}{19}\right)^2\left(\frac{16}{19}\right)^3+\binom{5}{4}\left(\frac{3}{19}\right)^4\left(\frac{16}{19}\right)^1}{0.179}$$

$$\boxed{P(\text{מספר המעריכים שלמידים זוגי}/\text{נבחר יותר ממעריך אחד})=\frac{0.14887+0.002617}{0.179}\approx 0.845}$$

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

4. בסרטוט שלפניכם משולש קהה זווית ABC החסום במעגל.
הנקודה K נמצאת על המשך הצלע AB כך ש- AB = BK.
המשך הקטע KC חותך את המעגל בנקודה נוספת, בנקודה F.
נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$.



א. הוכיחו כי AF הוא קוטר במעגל.

המיתרים BF ו- AC נחתכים בנקודה D.

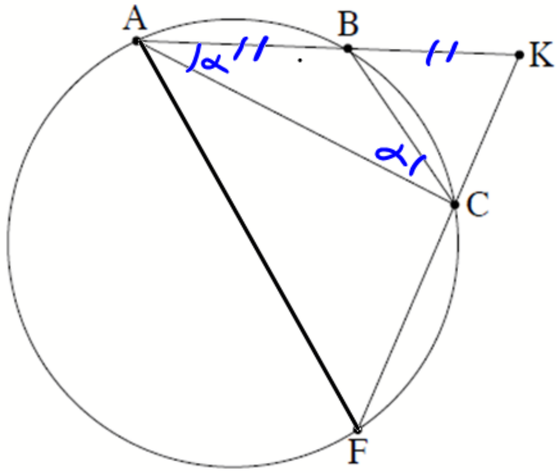
ב. הוכיחו כי המשולש ADK הוא שווה שוקיים.

ג. (1) הוכיחו כי המרובע BDCK הוא בר חסימה במעגל.

(2) הוכיחו כי $\sphericalangle DKC = \sphericalangle FAC$.

ד. הוכיחו כי $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.

פתרון:

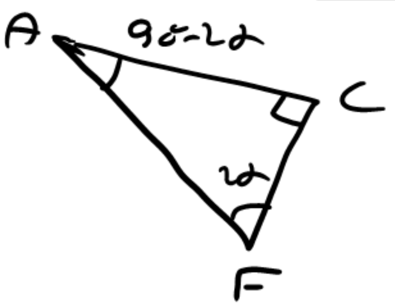


א. נוסיף את הנתונים לשרטוט ונעביר את המיתר AF

נסמן $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \alpha$

המספר	טענה	נימוק
1	$AB = BK$	נתון
2	F על המשך KC	נתון
3	$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \alpha$	נתון + סימון
4	נעביר מיתר AF	בניית עזר

המספר	טענה	נימוק
5	$AB = BC$	מול זוויות שוות במשולש מונחות צלעות שוות. לפי 3
6	$AB = BC = BK$	כלל המעבר. לפי 1, 5
7	$\measuredangle ACK = 90^\circ$	אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע, אזי המשולש ישר זווית והצלע היא היתר. לפי 6
8	$\measuredangle ACF = 90^\circ$	סכום זוויות צמודות 180°. לפי 2, 7
9	AF קוטר מ.ש.ל. א'	מול זווית היקפית ישרה במעגל מונח קוטר
10	נעביר מיתר BF ונסמן את D	בניית עזר (שימוש בסוף השאלה)
11	נעביר את הקו KD	בניית עזר
12	$\measuredangle AKC = 90^\circ - \alpha$	השלמה 180° במשולש ACK. לפי 3, 7
13	$\measuredangle BFK = \measuredangle BAC = \alpha$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת, שוות. לפי 3.
14	$\measuredangle KBF = 90^\circ$	השלמה 180° במשולש
15	משולש ADK שווה שוקיים מ.ש.ל. ב'	משולש שבו גובה לצלע הוא גם תיכון הוא שווה שוקיים. לפי 1, 14

המספר	טענה	נימוק
16	$\angle KBD+\angle KCD=180$	חישוב. לפי 7,14
17	מרובע BDCK בר חסימה במעגל מ.ש.ל. ב' (1)	מרובע בעל שני זוויות נגדיות שסכומן 180 הוא בר חסימה במעגל. לפי 16
18	$AD=KD$	לפי 15
19	$\angle AKD=\angle KAD=\alpha$	לפי 3, 15, זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים שוות.
20	$\angle DKC=90-2\alpha$	חיסור זוויות. לפי 13,12
21	$\angle AFB=\alpha$	מול מיתרים שווים במעגל מונחות זוויות היקפיות שוות. לפי 5,3
22	$\angle FAB=90-\alpha$	השלמה ל180 במשולש ABF. לפי 21,14
23	$\angle FAC=90-2\alpha$	חיסור זוויות. לפי 22,21
24	$\angle FAC=\angle DKC$ מ.ש.ל. ב' 2	לפי 23,20
25	נתבונן במשולש ACF. $\frac{AC}{AF}=\cos(90-2\alpha)$ נתבונן במשולש KCD. $\frac{KC}{KD}=\cos(90-2\alpha)$	 

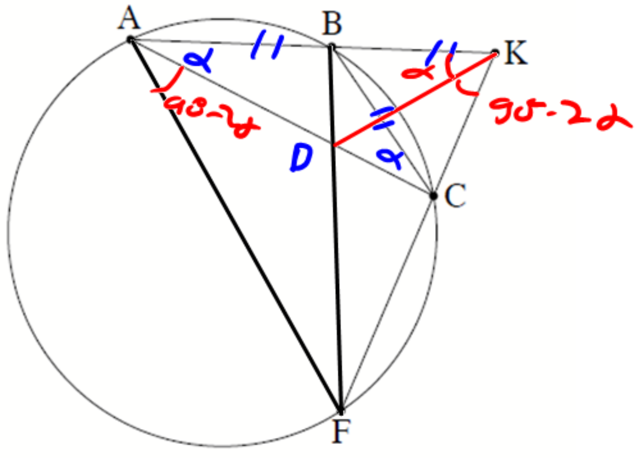
הביטויים שווים, ולכן

$$\frac{AC}{AF} = \frac{KC}{KD}$$

הוכחנו בסעיף ב' כי $AD = KD$ ולכן:

$$\frac{AC}{AF} = \frac{KC}{AD} \Rightarrow \boxed{AC \cdot AD = KC \cdot AF}$$

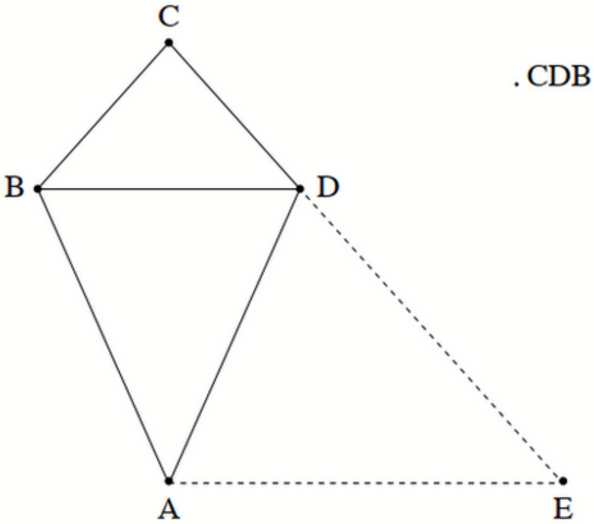
מ.ש.ל. ג'


A
B
K
D
C
F
α
α
2α
90-α
90-2α

5. בסרטוט שלפניכם דלתון $ABCD$ $(AB = AD\ ,\ \ CB = CD)$.

נתון: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha$, $0^{o} < \alpha < 45^{o}$.

נסמן: $AB = k$.



א. הביעו באמצעות k ו־ α את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB .

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD גדול פי $\frac{4}{3}$

מרדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB .

ב. מצאו את גודל הזווית BAD .

הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD .

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל ל־ BD וחותך את

המשך הצלע CD בנקודה E .

נתון כי שטח המשולש AOE הוא 54 .

ג. מצאו את הערך של k .

נתונים:

$AB = AD = k$

$CB = CD$

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDB = 2\alpha$

א.

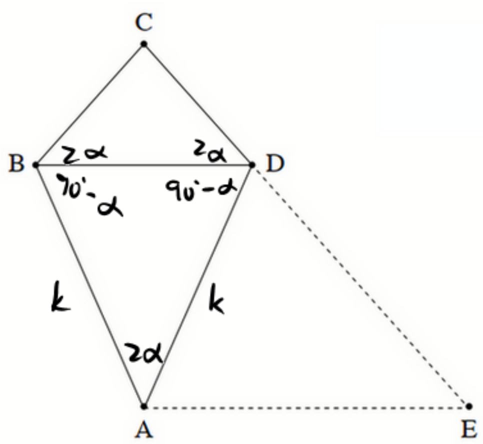
$\Delta \underline{BAD}$:

$\sphericalangle B = \sphericalangle D = \frac{180^{\circ} - 2\alpha}{2} = 90^{\circ} - \alpha$

$\frac{k}{\underbrace{\sin(90^{\circ} - \alpha)}_{= \cos\alpha}} = \frac{BD}{\sin 2\alpha}$

$BD = \frac{k \cdot \sin 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{k \cdot 2\sin\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha}$

$BD = 2k \sin\alpha$



רדיוס המעגל החוסם
את המשולש BDC :

$\underline{\Delta BDC}$: $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 2\alpha$

זוויות בסיס שוות במשו"ש

$\sphericalangle C = 180^{\circ} - 4\alpha$

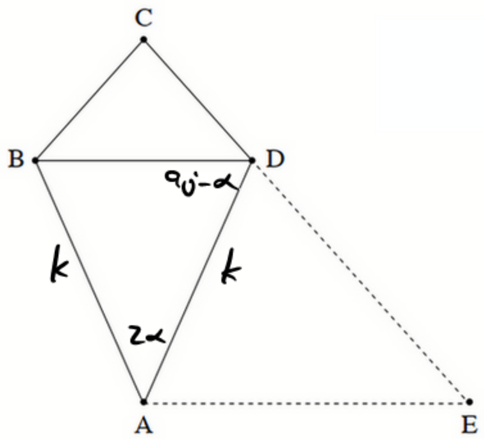
$\frac{BD}{\sin(180^{\circ} - 4\alpha)} = 2R$

$R = \frac{2k \sin\alpha}{2\sin 4\alpha}$

$\boxed{R_{BDC} = \frac{k \cdot \sin\alpha}{\sin 4\alpha}}$

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD גדול פי $\frac{4}{3}$ מרדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.

ב. מצאו את גודל הזווית BAD.



ΔABD: $\frac{k}{\sin(90-\alpha)} = 2R_{ABD}$

$R_{ABD} = \frac{k}{2\cos\alpha}$

$R_{ABD} = \frac{4}{3}\cdot R_{CDB}$

$\frac{k}{2\cos\alpha} = \frac{4}{3}\cdot\frac{k\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$ $\quad /:k$

$3\cdot\sin 4\alpha = 4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$

$3\cdot 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 4\sin 2\alpha$ $\quad /:2$

$3\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot(3\cos 2\alpha - 2) = 0$ $\qquad 0<\alpha<45°$

$\sin 2\alpha = 0$

$2\alpha = 0$ $\qquad 2\alpha = 180°$

$\alpha = 0$ $\qquad \alpha = 90°$

פסול $\qquad$ פסול

$3\cos 2\alpha = 2$

$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$

$2\alpha = 48.19°$

$\alpha = 24.1°$

$\boxed{\measuredangle BAD = 48.19°}$

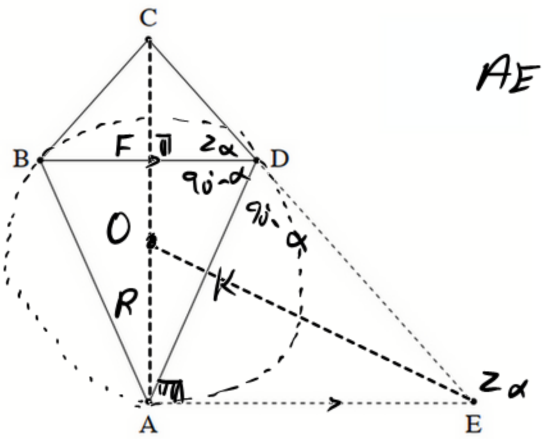
הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD .

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל ל- BD וחותך את

המשך הצלע CD בנקודה E .

נתון כי שטח המשולש AOE הוא 54 .

ג. מצאו את הערך של k .



$AE \parallel BD$

$\sphericalangle ADE = 180 - 2\alpha - (90-\alpha) = 90 - \alpha$

השלמה לזווית שטוחה

$\sphericalangle AED = \sphericalangle BDC = 2\alpha$

זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים

$$\underline{\triangle ADE}: \quad \frac{k}{\sin 2\alpha} = \frac{AE}{\sin(90-\alpha)} \Rightarrow AE = \frac{k \cdot \cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{k}{2\sin\alpha}$$

נסמן F מפגש אלכסוני הדלתון

אלכסוני הדלתון מאונכים זה לזה $\sphericalangle CFD = 90^\circ$

$\sphericalangle OAE = \sphericalangle CFD = 90^\circ$

זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים.

$$S_{AOE} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2\cos\alpha} \cdot \frac{k}{2\sin\alpha} = \frac{k^2}{4\sin 2\alpha} = 54$$

$$k = \sqrt{54 \cdot 4\sin 2\alpha} \qquad 2\alpha = 48.19^\circ$$

$$\boxed{k = 12.69}$$

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-kx}}{x^3}$, k הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)=-f(x)$.

שיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $h(x)$ הוא 2.4 .

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו $k=12$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ו.

ג. **(1)** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=(f(x))^2$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 3 .

ה. האם ערך הביטוי $\int_a^{a+1} g(x)\,dx$ שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$? נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=3$ ו־ $x=6$.

א. תחום הגדרה $k>0$ פרמטר חיובי

$f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-kx}}{x^3}$

$x^3\neq0$ וכן $5x^2-kx\ge0$

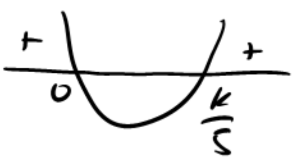
$x\neq0$

$5x^2-kx=0$

$x(5x-k)=0$

$x=0$ $\quad 5x=k$

$x=\frac{k}{5}$



$\Rightarrow \boxed{x\ge\frac{k}{5}\ ,\ x<0}$

$x\le0\ ,\ x\ge\frac{k}{5}$ וגם $x\neq0$

ז. $h(x)=-f(x)$ ונתון $h(2.4)=f(2.4)$

בנקודה המשותפת $x=2.4$ $\quad f(x)=-f(x)$

$2f(x)=0$

$f(x)=0 \Rightarrow f(2.4)=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{5\cdot 2.4^2-k\cdot 2.4}}{2.4^3}=0$

$\frac{k}{5}=2.4$

$28.8-2.4k=0 \qquad \boxed{k=12}$

ד(1). אסימפטוטות

$f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-12x}}{x^3}$, $x<0,\ x\ge 2.4$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=0$

$x=0$ אסימפטוטה אנכית
$y=0$ אסימפטוטה אופקית

ד(2). נקודות קיצון

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

$u=\sqrt{5x^2-12x} \qquad v=x^3$

$u'=\frac{10x-12}{2\sqrt{5x^2-12x}}=\frac{5x-6}{\sqrt{5x^2-12x}} \qquad v'=3x^2$

$$f'(x)=\frac{\frac{(5x-6)\cdot x^3}{\sqrt{5x^2-12x}}-\frac{3x^2\cdot\sqrt{5x^2-12x}}{1}}{(x^3)^2}=\frac{\frac{x^3(5x-6)-3x^2(5x^2-12x)}{\sqrt{5x^2-12x}}}{x^6}$$

$$=\frac{x^2\cdot\left[5x^2-6x-15x^2+36x\right]}{x^6\sqrt{5x^2-12x}}=\frac{-10x^2+30x}{x^4\sqrt{5x^2-12x}}$$

$$f'(x)=\frac{-10x^2+30x}{x^4\sqrt{5x^2-12x}}=0$$

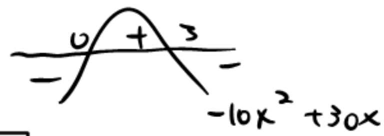
$$-10x^2+30x=0$$

$$10x(-x+3)=0$$

$x=0$ פסול $\qquad x=3$

x		0		2.4		3	
f'	$-$	////	////	קצה	$+$	0	$-$
f	↘	////	////	min	↗	max	↘
		לא	לא מוגדר				

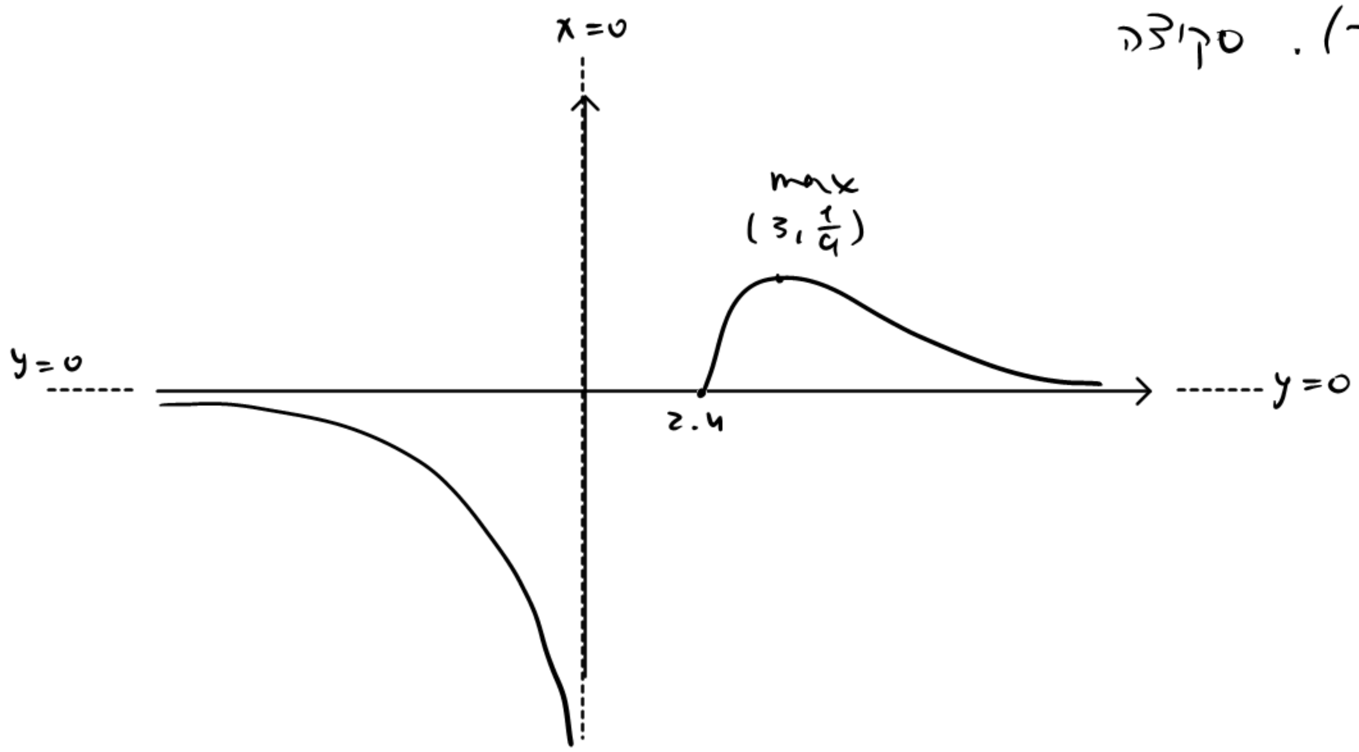
$$f'(x)=\frac{-10x^2+30x}{(+)}$$



$$f(3)=\frac{\sqrt{5\cdot3^2-12\cdot3}}{3^3}=\frac{1}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\max\left(3,\frac{1}{9}\right)\\ \min(2.4,0)\end{array}}$$

ד(3). סקיצה

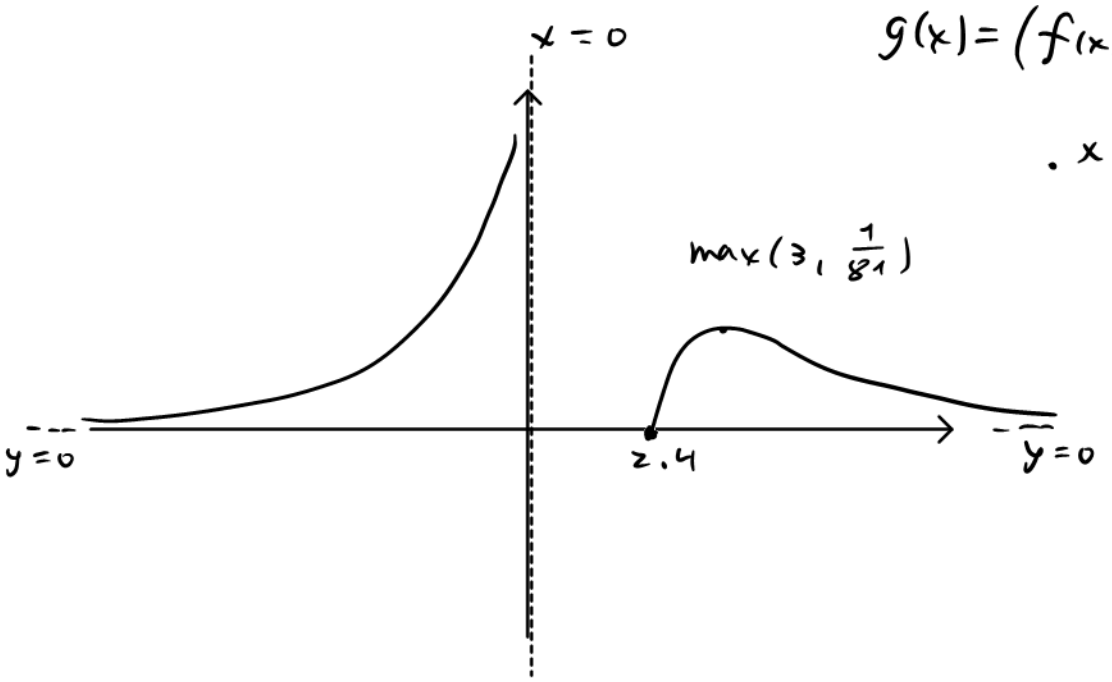


נתונה הפונקציה $g(x)=(f(x))^2$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. $g(x)=(f(x))^2$

$g(x)\ge 0$ לכל x.



a הוא פרמטר גדול מ־ 3.

$a>3$

ה. האם ערך הביטוי $\int_a^{a+1} g(x)\,dx$ שווה, גדול או קטן בהשוואה לערך הביטוי $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$? נמקו את תשובתכם.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=3$ ו־ $x=6$.

ה. עבור $0<f(x)<1$ מתקיים $g(x)<f(x)$.

לדוגמה $g(3)<f(3)$ בנקודת המקסימום.

עבור $a>3$ אכן מתקיים $0<f(x)<1$

לכן האינטגרל בגבולות הנתונים על $g(x)$ קטן מאשר על $f(x)$

$\boxed{\text{תשובה: קטן}}$

1.

$$g(x)=(f(x))^2=\left(\frac{\sqrt{5x^2-12x}}{x^3}\right)^2=\frac{5x^2-12x}{x^6}$$

$$g(x)=\frac{5}{x^4}-\frac{12}{x^5}$$

$$\int g(x)dx=\int(5\cdot x^{-4}-12\cdot x^{-5})dx=5\cdot\frac{x^{-3}}{-3}-12\cdot\frac{x^{-4}}{-4}+c$$

$$S=\int_3^6 g(x)dx=\left[-\frac{5}{3}x^{-3}+3\cdot x^{-4}\right]\Big|_3^6=$$

$$=\left(-\frac{7}{1296}\right)-\left(-\frac{2}{81}\right)=\frac{25}{1296}=0.01929$$

$$\boxed{S=\frac{25}{1296}=0.0193}$$

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=(\sin x)^2+\cos x-1$, המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{f(x)+b}$, b הוא פרמטר.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק שתי אסימפטוטות אנכיות.

ד. כתבו שני ערכים אפשריים של b , שאחד מהם חיובי והאחר שלילי.

הציבו בפונקצייה $g(x)$ את הערך השלילי של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ה–ו.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

7א.

נוכיח כי:

$$F(x)=F(-x)$$

$$(\sin x)^2+\cos x-1=(\sin(-x))^2+\cos(-x)-1$$

לפי הזהויות: $\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(-x)=\cos x$

נקבל:

$$(\sin x)^2+\cos x-1=(-\sin x)^2+\cos x-1$$

$$\boxed{(\sin x)^2+\cos x-1=(\sin x)^2+\cos x-1}$$

נשים לב שאפשר להשתמש בזהות $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ולהציג את

את $f(x)$ כך:

$$f(x)=1-(\cos x)^2+\cos x-1$$

$$f(x)=\cos x-(\cos x)^2$$

חיתוך

$\cos x - (\cos x)^2 = 0$

$\cos x(1 - \cos x) = 0$

$\cos x = 0$ $\qquad$ $\cos x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\qquad$ $x = 2\pi k$

$k=-1: \; x = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $k=0: \; x=0$

$k=0: \; x = \frac{\pi}{2}$

נמצא נקודות בתחום: $-\pi \le x \le \pi$

$\boxed{(-\frac{\pi}{2},0) \; , \; (0,0) \; , \; (\frac{\pi}{2},0)}$

נגזרת

$f'(x) = -\sin x + 2\cos x \sin x$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ $\qquad$ $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pi k$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \; , \; x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$k=-1: \; x = -\pi$ $\qquad$ $k=0: \; x = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $k=0: \; x = -\frac{\pi}{3}$ $\qquad$: $-\pi \le x \le \pi$ נמצא נקודות בתחום:

$k=0: \; x = 0$

$k=1: \; x = \pi$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

$f'(-\frac{\pi}{2}) > 0$

$f'(-\frac{\pi}{6}) < 0$

$f'(\frac{\pi}{6}) > 0$

$f'(\frac{\pi}{2}) < 0$

המשך 7ד(2)

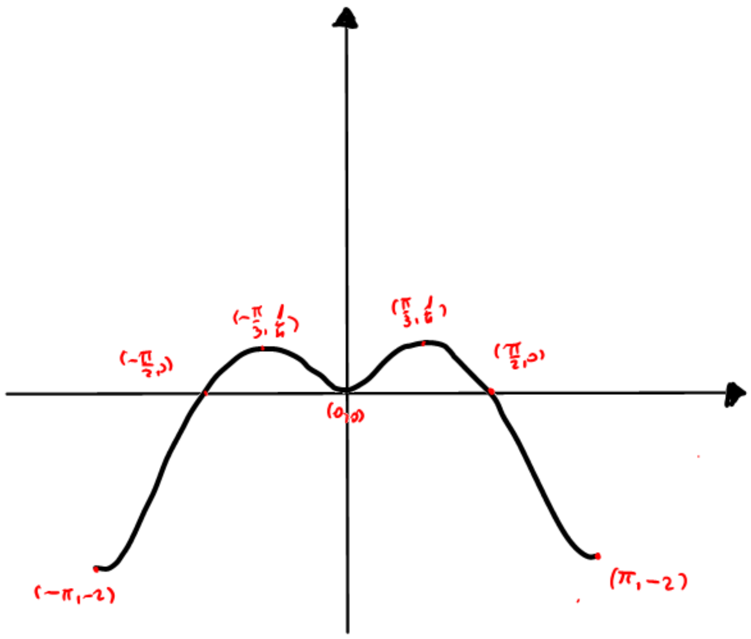
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(\pi) = \cos(\pi) - (\cos(\pi))^2 = -2$$

נמיין ונסמן לוגית שיעורי ה-y הנקודות הנבדקות לגבים:

$$\boxed{\min(-\pi,-2)\ ,\ \max\left(-\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)\ ,\ \min(\pi,-2)}$$

7ה.



7ו. ע"מ שהמכנה של g(x) יתאפס ב-2 נקודות בדיוק נצטרך שהגרף של f(x) לאחר הזזה אנכית יחתוך את ציר x ב-2 נקודות בדיוק ($f(x)+b$, זוהי הזזה אנכית של f(x) ב-b יחידות)
כך יקרה בעבור $0<b\le 2$ או $b=-\frac{1}{4}$

$$\boxed{b=-\frac{1}{4}\ ,\ b=1}$$

אין b גאוני
היחידי האפשרי:

1) ה' 7

$$g(x)=\frac{1}{f(x)-\frac{1}{4}}$$

תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $-\pi \le x \le \pi$
אלא מתוך הנקודות חיתוך של $f(x)$ עם ציר x
לאחר הזזה אנכית של $\frac{1}{4}$ כלפי מטה. במקרה לב
החיתוכים עם ציר x ובפרט להיות $(\frac{\pi}{3},0)$, $(-\frac{\pi}{3},0)$

ולכן ת"ח של $g(x)$: $\boxed{-\pi \le x < -\frac{\pi}{3} \text{ או } -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \text{ או } \frac{\pi}{3} < x \le \pi}$

2) ה' 7

$$g'(x)=\frac{0(f(x)-\frac{1}{4})-f'(x)}{(f(x)-\frac{1}{4})^2}$$

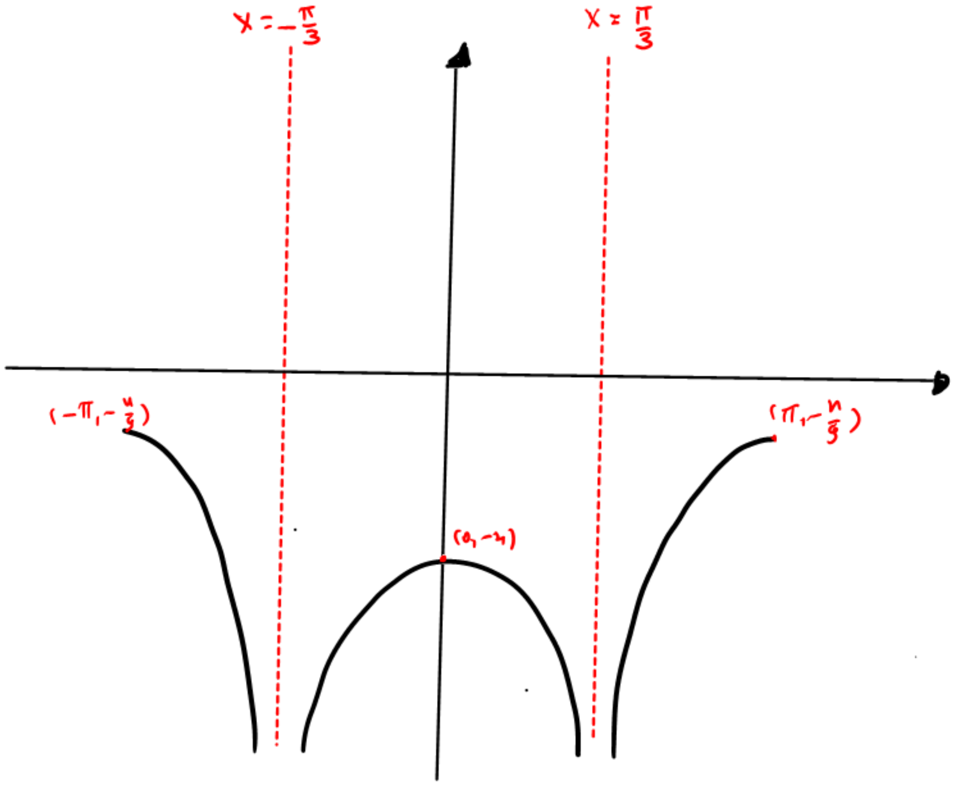
$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x)-\frac{1}{4})^2} \longrightarrow g'(x)=0 \longrightarrow -f'(x)=0$$

למרות $x=\frac{\pi}{3}$ ו- $x=-\frac{\pi}{3}$ שאינם בתחום ההגדרה של $g(x)$
שיעורי ה-x של נקודות הקיצון לא ישתנו, אך מכיוון וסימן הנגזרת
של $f(x)$ ו- $g(x)$ נגדי תחומי העלייה והירידה יתהפכו, ולכן סוג הקיצון
יתחלף. ערכי הקיצון של $g(x)$:

$$g(x_1)=\frac{1}{f(x_1)-b}$$

$$\boxed{\max(-\pi,-\tfrac{4}{9}),\ \max(0,-4),\ \max(\pi,-\tfrac{4}{9})}$$

71.



8. נתונה הפונקציה $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 0.5kx$, המוגדרת לכל x .

k הוא פרמטר שונה מ־ 0 .

הנקודה A היא נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A .

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ב. מצאו את תחום הערכים האפשריים של k .

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה־ x החותך אותו בנקודה B , ואנך לציר ה־ y החותך אותו בנקודה C .

נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB , וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC .

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו־ II הוא מינימלי (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

<u>א'</u>

$f'(x) = 3kx^2 - 6x + 0.5k$

$f''(x) = 6kx - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{k}$

$f\left(\frac{1}{k}\right) = k\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 0.5k\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} - \frac{3}{k^2} + 0.5 = \frac{1}{2} - \frac{2}{k^2}$

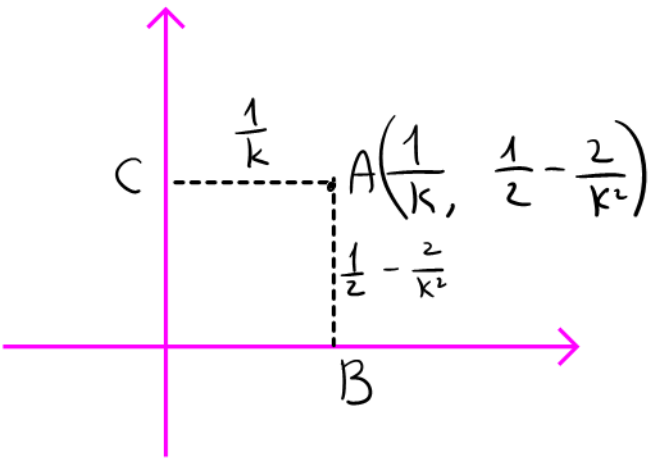
$\boxed{A\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2} - \frac{2}{k^2}\right)}$

<u>ב'</u>

$x_A = \frac{1}{k} > 0 \rightarrow k > 0$

$y_A = \frac{1}{2} - \frac{2}{k^2} > 0 \rightarrow \frac{1}{2} > \frac{2}{k^2} \rightarrow k^2 > 4 \rightarrow k > 2$

$\boxed{\text{סיכום } k > 2}$



ריבוע I $S = AB^2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{k^2}\right)^2$

ריבוע II $S = AC^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^2}$

סכום שטחי הריבועים $S(k) = \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{k^2}\right)^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^4} =$

$$S(k) = \frac{4}{k^4} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{4} = 4\cdot k^{-4} - k^{-2} + \frac{1}{4}$$

$$S'(k) = -16k^{-5} + 2k^{-3} = \frac{-16}{k^5} + \frac{2}{k^3} = \frac{-16+2k^2}{k^5} = 0$$

$$16 = 2k^2 \rightarrow k^2 = 8 \rightarrow \boxed{k = 2\sqrt{2}}$$

מקודות $S''(k) = 4k$

$$S''(2\sqrt{2}) = 4\cdot 2\sqrt{2} = + \rightarrow \min$$

$\boxed{\text{לסיכום עבור } k=2\sqrt{2} \text{ סכום השטחים מינימלי}}$