

חוברת בנושא

סדרה הנדסית

תכנית חדשה, שאלון 472

כיתה יב', 4 יח"ל

אריק דז'לדטי, יואל גבע

סדרה הנדסית – שאלון 472

סדרה הנדסית היא סדרה של מספרים שבה המנה של כל איבר באיבר הקודם לו היא גודל קבוע. את מנת הסדרה מסמנים באות q (quotient).

נתבונן לדוגמה בסדרה ההנדסית $2, 6, 18, 54, \dots$.

בסדרה זו המנה של כל איבר באיבר הקודם לו היא 3 $(\frac{54}{18}=3, \frac{18}{6}=3, \frac{6}{2}=3)$.

ולכן מנת הסדרה היא $q=3$.

הערות:

א. בסדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה q מתקיים: $a_1 \neq 0, q \neq 0$.
ב. כל איבר בסדרה הנדסית (פרט לראשון) מתקבל על-ידי כפל של האיבר הקודם לו

במנה q , כלומר מתקיים: $a_2 = a_1 q, a_3 = a_2 q, a_4 = a_3 q$ וכו'.

באופן דומה מתקיים: $\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \frac{a_4}{a_3} = q$ וכו'.

ג. ניתן לקבוע אם הסדרה היא סדרה הנדסית עולה, או סדרה הנדסית יורדת או סדרה הנדסית שאינה עולה ואינה יורדת, לפי הערך של המנה q ושל האיבר הראשון a_1 .
נדגיש שסדרה עולה זו סדרה שכל איבר שלה גדול מהאיבר שלפניו, וסדרה יורדת היא סדרה שכל איבר שלה קטן מהאיבר שלפניו.

לא ניתן לקבוע האם סדרה הנדסית עולה או יורדת על פי המנה בלבד.

דוגמה לסדרה הנדסית שבה $q > 1$ והסדרה עולה: $3, 15, 45, \dots$ ($q=3$)

דוגמה לסדרה הנדסית שבה $q > 1$ והסדרה יורדת: $-3, -6, -12, \dots$ ($q=2$)

דוגמה לסדרה הנדסית שבה $0 < q < 1$ והסדרה עולה: $-36, -12, -4, \dots$ ($q=\frac{1}{3}$)

דוגמה לסדרה הנדסית שבה $0 < q < 1$ והסדרה יורדת: $20, 10, 5, \dots$ ($q=\frac{1}{2}$)

כאשר מנת הסדרה שלילית ($q < 0$) הסדרה ההנדסית לא עולה ולא יורדת.

דוגמאות: $5, -10, 20, -40, \dots$ ($q=-2$)

$64, -16, 4, -1, \dots$ ($q=-\frac{1}{4}$)

דוגמה לסדרה הקבועה ($q=1$): $8, 8, 8, \dots$.

האיבר הכללי של סדרה הנדסית

נמצא כעת נוסחה לאיבר הכללי a_n של סדרה הנדסית.

נתבונן בסדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה q .

בסדרה מתקיים:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 q) \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 q^2) \cdot q = a_1 q^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 q^3) \cdot q = a_1 q^4$$

כפי שרואים, אפשר להביע כל איבר בסדרה הנדסית באמצעות a_1 ו- q .

כל איבר בסדרה מורכב ממכפלה של שני גורמים, כאשר:

(1) הגורם השמאלי במכפלה הוא a_1 .

(2) הגורם הימני במכפלה הוא q בחזקת מספר הקטן ב-1 ממקומו הסידורי של האיבר.

לדוגמה: כדי לקבל את a_{10} יש לכפול את a_1 ב- q^9 (ולא ב- q^{10}).

באופן כללי, כדי לקבל את האיבר העומד במקום ה- n , כלומר a_n , נכפול את a_1 ב- q^{n-1} .

הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית היא: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

זוהי הגדרה לפי מקום. בהמשך נראה בסדרה הנדסית גם הגדרה על פי כלל נסיגה, וייצוגים נוספים – ייצוג מילולי, ייצוג גרפי, ייצוג מספרי.

דוגמה:

נתונה הסדרה ההנדסית $3, 6, 12, \dots$.

חשבו את האיבר החמישי ואת האיבר התשיעי בסדרה.

פתרון:

על פי הנתון: $a_1 = 3$, $q = 2$.

האיבר החמישי הוא: $a_5 = a_1 q^4$. נציב ונקבל: $a_5 = 3 \cdot 2^4$, כלומר $a_5 = 48$.

האיבר התשיעי הוא: $a_9 = a_1 q^8$. נציב ונקבל: $a_9 = 3 \cdot 2^8$, כלומר $a_9 = 768$.

הערות:

(1) ראינו כי ניתן להביע כל איבר בסדרה באמצעות a_1 ו- q . לדוגמה: $a_9 = a_1 q^8$.

נדגיש שזו למעשה הצבה של $n=9$ בנוסחה של a_n .

הנוסחה לאיבר הכללי של הסדרה היא: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

נציב $n=9$ ונקבל $a_9 = a_1 \cdot q^{9-1} = a_1 \cdot q^8$.

(2) אפשר למצוא איברים גם באמצעות פריסת הסדרה,

כך שכל איבר גדול פי 2 מקודמו: $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, \dots$

בחלק מהשאלות לא ידועים הערכים של האיבר הראשון או מנת הסדרה (או שניהם).

דוגמה:

בסדרה הנדסית האיבר הראשון הוא 7 והאיבר השישי הוא 1,701. מצאו את מנת הסדרה.

פתרון:

על-פי הנתון: $a_6 = 1701$, כלומר $a_1 q^5 = 1701$. כמו כן נתון: $a_1 = 7$.
נציב ונקבל: $7q^5 = 1701$, ומכאן $q^5 = 243$. נוציא שורש חמישי משני האגפים.
מאחר שנוציא שורש אי זוגי, נקבל פתרון אחד: $q = \sqrt[5]{243} = 3$.

דוגמה:

בסדרה הנדסית האיבר השביעי גדול פי 16 מהאיבר השלישי. מצאו את מנת הסדרה.

פתרון:

על פי הנתון $a_7 = 16a_3$. במקום a_7 נציב $a_1 q^6$. במקום a_3 נציב $a_1 q^2$. נקבל: $a_1 q^6 = 16a_1 q^2$.
מכיוון שבסדרה הנדסית מתקיים $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$, נוכל לחלק את המשוואה ב- $a_1 q^2$.
נקבל: $q^4 = 16$. נוציא שורש רביעי משני האגפים. מאחר שנוציא שורש זוגי,
נקבל שני פתרונות. נקבל $q = \pm \sqrt[4]{16}$, ומכאן $q = 2$ או $q = -2$.

דוגמה:

בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר הרביעי לאיבר השלישי גדול פי 6 מהאיבר השני.
מצאו את מנת הסדרה.

פתרון:

על פי הנתון: $a_4 - a_3 = 6a_2$. נביע את האיברים על-ידי a_1 ו- q ונקבל: $a_1 q^3 - a_1 q^2 = 6a_1 q$.
נחלק את המשוואה ב- $a_1 q \neq 0$. נקבל $q^2 - q - 6 = 0$, ומכאן $q^2 - q - 6 = 0$.
פתרונות המשוואה הריבועית הם $q = 3$ או $q = -2$.

תרגילים

1. חשבו את המנה של כל אחת מהסדרות ההנדסיות הבאות:

א. $3, 6, 12, \dots$ ב. $8, 12, 18, \dots$ ג. $48, -36, 27, \dots$

2. א. נתונה הסדרה ההנדסית $2, 8, 32, \dots$. חשבו את a_8 .

ב. נתונה הסדרה ההנדסית $729, 486, 324, \dots$. חשבו את a_5 .

ג. נתונה הסדרה ההנדסית $7, -14, 28, \dots$. חשבו את a_{17} .

3. מצא את האיבר הראשון a_1 בסדרה הנדסית שבה $q = 3$, $a_7 = 1458$.

4. בסדרה הנדסית האיבר הרביעי הוא 3. מנת הסדרה היא $\frac{1}{2}$.
מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

5. מצאו על פי הנתונים את המנה q בסדרות ההנדסיות הבאות:
א. $a_6 = 1944$, $a_1 = 8$ ב. $a_3 = 48$, $a_1 = 3$

6. נתונה סדרה הנדסית שבה $a_1 = 729$ ו- $a_7 = 64$.
 א. מצאו את q (שתי אפשרויות).
 ב. כתבו כל אחד משבעת האיברים הראשונים בסדרה אם הסדרה עולה.
 ג. כתבו כל אחד משבעת האיברים הראשונים בסדרה אם הסדרה לא עולה ולא יורדת.
7. יש להכניס ארבעה מספרים בין המספרים 15 ו-480, כך שתתקבל סדרה הנדסית בת שישה איברים. רשמו את ששת המספרים בסדרה המתקבלת.
8. יש להכניס שלושה מספרים בין המספרים 4 ו-324, כך שתתקבל סדרה הנדסית בת חמישה איברים. מצאו את מנת הסדרה ההנדסית (רשמו את שתי האפשרויות).
9. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 + a_2 = 12$, $q = 2$. מצאו את האיבר הראשון a_1 .
10. בסדרה הנדסית שמנתה 3 ידוע כי האיבר הרביעי גדול ב-96 מהאיבר השני. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
11. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 + a_2 + a_3 = 7$, $a_1 = 1$. מצאו את מנת הסדרה q .
12. מצאו על פי הנתון את המנה של הסדרות ההנדסיות הבאות:
 א. $a_2 = 4a_1$ ב. $a_4 = 8a_1$ ג. $a_5 = -64a_2$
13. בסדרה הנדסית האיבר השביעי גדול פי 81 מהאיבר השלישי. מצאו את מנת הסדרה.
14. בסדרה הנדסית נתון: $a_2 + a_3 = 6a_1$. מצאו את מנת הסדרה.
15. א. בסדרה הנדסית נתון כי האיבר הרביעי גדול פי $1\frac{1}{3}$ מסכום האיברים השני והשלישי. מצאו את מנת הסדרה.
 ב. בסדרה הנדסית האיבר השלישי גדול פי 4 מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון. מצאו את מנת הסדרה.

תשובות:

1. א. 2. ב. 1.5. ג. -0.75. ד. 2. א. 32,768. ב. 144. ג. 458752. ד. 24.
5. א. 3. ב. 4 או -4. ד. 6. א. $q = \frac{2}{3}$ או $q = -\frac{2}{3}$. ב. 64, 96, 144, 216, 324, 486, 729.
- ג. 64, -96, 144, -216, 324, -486, 729.
7. -480, 240, -120, 60, -30, 15. 8. 3 או -3. 9. 4. 10. 4. 11. -3 או 2.
12. א. 4. ב. 2. ג. -4. 13. 3 או -3. 14. -3 או 2. 15. א. 2 או $-\frac{2}{3}$. ב. 2.

דוגמה:

בסדרה הנדסית האיבר השלישי הוא 45 והאיבר השביעי הוא 3,645.
מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

פתרון:

כדי למצוא את a_1 ואת q נרכיב שתי משוואות:

$$(1) \text{ הנתון הראשון הוא } a_3 = 45, \text{ כלומר } a_1 q^2 = 45.$$

$$(2) \text{ הנתון השני הוא } a_7 = 3645, \text{ כלומר } a_1 q^6 = 3645.$$

דרך א: נפתור את מערכת המשוואות באמצעות השיטה המוכרת של בידוד והצבה.

$$\text{נבודד את } a_1 \text{ מהמשוואה הראשונה: } a_1 = \frac{45}{q^2}.$$

$$\text{נציב במשוואה השנייה. נקבל: } \frac{45}{q^2} \cdot q^6 = 3645, \text{ כלומר } 45q^4 = 3645, \text{ ומכאן } q^4 = 81.$$

$$\text{נוציא שורש רביעי משני האגפים ונקבל } q = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3.$$

$$\text{נציב } q = 3 \text{ במשוואה } a_1 q^2 = 45. \text{ נקבל } a_1 \cdot 3^2 = 45, \text{ ומכאן } a_1 = 5.$$

$$\text{נציב } q = -3 \text{ במשוואה } a_1 q^2 = 45. \text{ נקבל } a_1 \cdot (-3)^2 = 45, \text{ ומכאן } a_1 = 5.$$

קיבלנו שתי סדרות הנדסיות אפשריות.

$$\text{אפשרות א: } 5, 15, 45, \dots \quad \text{אפשרות ב: } 5, -15, 45, \dots$$

דרך ב: נכיר שיטת פתרון באמצעות חילוק משוואות.

ניעזר בשיטה זו בעיקר כאשר שני האגפים מוצגים באמצעות מכפלות המאפשרות צמצום.

במקרה זה נחלק את משוואה (2) במשוואה (1).

$$\text{נקבל: } \frac{a_1 q^6}{a_1 q^2} = \frac{3645}{45}. \text{ לאחר צמצום נקבל } q^4 = 81, \text{ ומכאן } q = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3.$$

המשך הפתרון כמו בדרך א.

16. מצאו את האיבר הראשון ואת המנה בסדרות ההנדסיות הבאות:

$$\text{א. } a_2 = 12, a_3 = 24 \quad \text{ב. } a_4 = 16, a_7 = -128$$

17. מצאו את האיבר הראשון ואת המנה בסדרה הנדסית שבה $a_2 = 12$, $a_4 = 108$

18. בסדרה הנדסית האיבר הרביעי הוא 160 והאיבר השמיני הוא 2560.

א. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה, אם ידוע שהסדרה לא עולה ולא יורדת.

ב. מצאו את האיבר השלישי בסדרה.

תשובות:

$$16. \text{ א. } a_1 = 6, q = 2 \quad \text{ב. } a_1 = -2, q = -2 \quad 17. \text{ א. } a_1 = 4, q = 3 \quad \text{או } a_1 = -4, q = -3.$$

$$18. \text{ א. } a_1 = -20, q = 2 \quad \text{ב. } -80.$$

שאלות מציאותיות המתוארות באמצעות סדרה הנדסית

דוגמה:

מספר הבלונים המיוצרים במפעל גדל בכל שנה פי 1.2.
בשנה הרביעית יוצרו במפעל 10,800 בלונים.
כמה בלונים יוצרו במפעל בשנה השישית?

פתרון:

מספר הבלונים המיוצרים במפעל גדל בכל שנה פי 1.2,
ולכן מספרי הבלונים המיוצרים במפעל מדי שנה יוצרים סדרה הנדסית שמנתה $q = 1.2$.
האיבר הראשון בסדרה הוא מספר הבלונים המיוצרים במפעל בשנה הראשונה,
האיבר השני בסדרה הוא מספר הבלונים המיוצרים במפעל בשנה השנייה וכו'.
על פי הנתון $a_4 = 10,800$, ומכאן $a_1 q^3 = 10,800$.
נציב $q = 1.2$. נקבל $a_1 \cdot (1.2)^3 = 10,800$, ומכאן $a_1 = 6,250$.
נחשב כמה בלונים יוצרו במפעל בשנה השישית: $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 6250 \cdot (1.2)^5 = 15,552$.
לסיכום: בשנה השישית יוצרו במפעל 15,552 בלונים.

הערה: כאשר מספר הבלונים המיוצרים במפעל גדל בכל שנה פי 1.2,
המשמעות היא שמספר הבלונים המיוצרים גדל מדי שנה ב-20%.

19. מוצר מסוים מתייקר פי 2 בכל שנה. מחיר המוצר בשנה הראשונה הוא 12 שקלים.

א. מהו מחיר המוצר בשנה הרביעית?

ב. מהו מחיר המוצר בשנה השביעית?

20. מספר הפועלים במפעל גדל בכל שנה פי 1.2 לעומת השנה שלפניה.

בשנה הרביעית עבדו במפעל 27,000 פועלים.

א. כמה פועלים עבדו במפעל בשנה הראשונה?

ב. כמה פועלים עבדו במפעל בשנה השישית?

21. משכורתו של פועל גדלה בכל חודש ב-50%.

בחודש הראשון הייתה משכורתו 2400 שקלים.

מה הייתה משכורתו בחודש החמישי?

22. הצגת בידור הועלתה בתיאטרון במשך 5 ימים רצופים,

כך שמספר הצופים בכל יום היה חלק קבוע ממספר הצופים ביום שלפניו.

ביום הראשון צפו בהצגה 1,458 אנשים, וביום האחרון צפו בהצגה 288 אנשים.

כמה אנשים צפו בהצגה בסך הכול?

תשובות:

19. א. 96 שקלים. ב. 768 שקלים. 20. א. 15,625 פועלים. ב. 38,880 פועלים.

21. 12,150 שקלים. 22. 3,798 אנשים.

מציאת הנוסחה ל- a_n , הגדרת הסדרה על-ידי כלל נסיגה

עד עכשיו הגדרנו סדרה הנדסית על-פי הנוסחה לאיבר הכללי a_n (נוסחה לפי מקום). ניתן להגדיר סדרה הנדסית גם באמצעות כלל נסיגה.

בדרך זו, מגדירים את איברי הסדרה באמצעות איברים אחרים בסדרה.

בדרך כלל נותנים את האיבר הראשון בסדרה (נתון זה נקרא התנאי ההתחלתי), ובנוסף נותנים נוסחה שמראה כיצד מתקבל כל איבר בסדרה (החל מהאיבר השני) בעזרת האיבר שקודם לו.

כלל הנסיגה המתאים לסדרה הנדסית שאיברה הראשון k ומנתה q

$$\text{הוא: } a_1 = k, a_{n+1} = a_n \cdot q$$

לדוגמה:

נתונה הסדרה ההנדסית $4, 12, 36, \dots$

מנת הסדרה היא $q=3$, ולכן כלל הנסיגה שמתאים לסדרה הוא: $a_1 = 4, a_{n+1} = 3a_n$.

דוגמה:

נתונה הסדרה ההנדסית $5, 10, 20, \dots$

א. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n באמצעות n בלבד.

ב. הגדירו את הסדרה באמצעות כלל נסיגה.

פתרון:

א. הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית היא $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

נציב $a_1 = 5, q = 2$. נקבל: $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.

נשים לב שהנוסחה לאיבר כללי בסדרה הנדסית היא פונקציה שנראית מבחינה אלגברית כפונקציה מעריכית פשוטה, אבל המשתנה n יכול לקבל רק ערכים של מספרים טבעיים. הגרף המתאים מורכב מנקודות הנמצאות כולן על גרף הפונקציה $f(x) = 5 \cdot 2^{x-1}$, אבל הוא גרף בדיד המורכב נקודות.

ב. מנת הסדרה היא $q=2$ ולכן כלל הנסיגה הוא $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n$.

דוגמה:

סדרה מוגדרת באמצעות כלל נסיגה $a_1 = 24, a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$.

א. רשמו את מנת הסדרה. האם ניתן לדעת שהסדרה עולה או יורדת? נמקו.

ב. נתון: $a_1 = 24$. כתבו את ששת האיברים הראשונים בסדרה.

פתרון:

א. על פי כלל הנסיגה, הסדרה היא סדרה הנדסית שמנתה $q = -\frac{1}{2}$.

סדרה שמנתה שלילית היא סדרה הנדסית לא עולה ולא יורדת.

ב. נתון $a_1 = 24, q = -\frac{1}{2}$.

נוכל להציג את ששת האיברים הראשונים בסדרה: $24, -12, 6, -3, 1.5, -0.75$.

הערה: גם כלל נסיגה מהצורה $a_{n+1} = -\frac{a_n}{2}, q = -\frac{1}{2}$ משמעותו.

23. בסדרות ההנדסיות הבאות מצאו את הנוסחה לאיבר הכללי a_n (באמצעות n בלבד):

א. $2, 6, 18, \dots$ ב. $640, 320, 160, \dots$ ג. $3, -6, 12, \dots$

24. בסדרה נתון: $a_{n+1} = 3 \cdot a_n, a_1 = 2$.

א. הוכיחו שהסדרה היא הנדסית. מהי מנת הסדרה?

ב. רשמו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ג. מצאו את האיבר השביעי בסדרה.

25. סדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, a_1 = 135$.

א. הסבירו מדוע הסדרה היא הנדסית וכתבו את מנת הסדרה.

ב. מצאו את הנוסחה לאיבר הכללי a_n .

26. נתונה סדרה הנדסית $5, 10, 20, \dots$.

א. מהי מנת הסדרה?

ב. הציגו את הסדרה באמצעות כלל נסיגה.

27. נתונה סדרה הנדסית: $1, -4, 16, \dots$.

א. הגדירו את הסדרה באמצעות כלל נסיגה.

ב. הגדירו את הסדרה באמצעות נוסחה לפי מקום.

תשובות:

23. א. $2 \cdot 3^{n-1}$ ב. $640 \cdot (0.5)^{n-1}$ ג. $3 \cdot (-2)^{n-1}$ 24. א. 3 ב. $2, 6, 18, 54$ ג. $1, 458$

25. א. $q = \frac{1}{3}$ ב. $a_n = 135 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}$ 26. א. $q = 2$ ב. $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 5$

27. א. $a_{n+1} = -4a_n, a_1 = 1$ ב. $a_n = (-4)^{n-1}$

כיצד מוכיחים שסדרה היא הנדסית

כדי להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית, צריך להראות שהמנה של כל איבר (פרט לראשון) באיבר הקודם לו היא קבועה,

כלומר יש להוכיח שהמנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ היא קבועה (אינה תלויה ב- n).

דוגמה:

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי הנוסחה: $a_n = 3 \cdot 2^n$.

א. חשבו את a_1 ואת a_6 .

ב. הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית ורשמו את מנת הסדרה.

ג. מצאו נוסחה באמצעות n בלבד לאיבר a_{2n} .

פתרון:

א. הנוסחה לאיבר הכללי של הסדרה היא: $a_n = 3 \cdot 2^n$.

כדי לחשב את a_1 , נציב 1 בכל מקום שבו מופיע n . נקבל: $a_1 = 3 \cdot 2^1$, כלומר $a_1 = 6$.
כדי לחשב את a_6 , נציב 6 בכל מקום שבו מופיע n . נקבל: $a_6 = 3 \cdot 2^6$, כלומר $a_6 = 192$.

ב. כדי להראות שהסדרה היא הנדסית, נוכיח שהביטוי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ הוא קבוע ולא תלוי ב- n .

נתון: $a_n = 3 \cdot 2^n$. כדי להביע את a_{n+1} , נציב בנוסחה $(n+1)$ בכל מקום שבו מופיע n .
נקבל: $a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{(n+1)-n} = 2^1 = 2$$

נחשב את המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קבועה ושווה ל-2, ולכן הסדרה היא סדרה הנדסית ומנתה 2.

ג. הנוסחה לאיבר הכללי היא $a_n = 3 \cdot 2^n$. כדי להביע את a_{2n} , נציב בנוסחה $(2n)$ בכל מקום שבו מופיע n . נקבל: $a_{2n} = 3 \cdot 2^{2n}$.

הערה: כדי להוכיח שסדרה היא הנדסית, לא מספיק לחשב מנה בין שני איברים עוקבים מסוימים. יש להראות שהמנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קבועה. לעומת זאת, כדי להוכיח שסדרה אינה סדרה הנדסית, מספיק למצוא שלושה איברים, ולהראות שהמנה בין איבר לקודמו אינה קבועה.

28. האיבר הכללי של סדרה הוא $a_n = 3 \cdot 5^n$.

א. מצאו על ידי n נוסחה לאיבר a_{n+1} . הדרכה: הציבו $n+1$ במקום n בנוסחה ל- a_n .

ב. הוכיחו שהסדרה היא הנדסית. הדרכה: הראו שהביטוי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קבוע ואינו תלוי ב- n .

ג. האם ניתן להוכיח שהסדרה היא הנדסית על ידי כך שנמצא את שלושת האיברים

הראשונים בה ונראה שמנה $\frac{a_3}{a_2}$ שווה למנה $\frac{a_2}{a_1}$? נמקו.

29. בתרגילים הבאים נתון האיבר הכללי של סדרה.

הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה ואת האיבר הראשון שלה.

$$\text{א. } a_n = 2^{n+3} \quad \text{ב. } a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \text{ג. } a_n = 5 \cdot (-2)^n$$

30. האיבר הכללי של סדרה נתון על ידי הנוסחה $a_n = 2 \cdot 3^n$.

א. הוכיחו שהסדרה היא הנדסית.

ב. הגדירו את הסדרה באמצעות כלל נסיגה.

31. נתונה הסדרה ההנדסית $2, 6, 18, \dots$. מצאו נוסחה באמצעות n בלבד לאיברים הבאים:

$$\text{א. } a_{n+1} \quad \text{ב. } a_{2n} \quad \text{ג. } a_{n-1} \quad \text{ד. } a_{3n+4}$$

תשובות:

28. א. $a_{n+1} = 3 \cdot 5^{n+1}$. ג. לא. 29. א. $a_1 = 16, q = 2$. ב. $a_1 = 2, q = 3$. ג. $a_1 = -10, q = -2$.

30. ב. $a_1 = 6, a_{n+1} = 3a_n$. 31. א. $2 \cdot 3^n$. ב. $2 \cdot 3^{2n-1}$. ג. $2 \cdot 3^{n-2}$. ד. $2 \cdot 3^{3n+3}$.

מציאת מקומו הסידורי של איבר בסדרה הנדסית

כאשר נתון בסדרה הנדסית הערך של האיבר הכללי a_n ונרצה למצוא את n , נצטרך לפתור משוואה מעריכית.

דוגמה:

מצאו את מספר האיברים בסדרה ההנדסית $7, 14, \dots, 896$.

פתרון:

על-פי הנתון: $a_1 = 7, q = 2, a_n = 896$. עלינו למצוא את n .

הנוסחה לאיבר הכללי a_n היא: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

נציב ונקבל $896 = 7 \cdot 2^{n-1}$. נחלק את המשוואה ב-7 ונקבל $128 = 2^{n-1}$.

דרך א': מכיוון ש- $128 = 2^7$, הרי נקבל $2^7 = 2^{n-1}$.

נשווה מעריכים ונקבל $7 = n - 1$, כלומר $n = 8$ ומכאן שבסדרה יש 8 איברים.

דרך ב': ניעזר במקש $\ln$ שבמחשבון.

המשוואה היא $2^{n-1} = 128$ ולכן $2^{n-1} = 128 \Rightarrow n-1 = \frac{\ln 128}{\ln 2} = 7$ ומכאן $n = 8$.

נקבל שבסדרה יש 8 איברים.

32. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 7, q = 2, a_n = 224$. מצאו את n .

33. א. בסדרה הנדסית האיבר הראשון הוא -32 והאיבר האחרון הוא -162.

מצאו כמה איברים בסדרה אם מנתה 1.5.

ב. בסדרה הנדסית האיבר הראשון הוא 243 והאיבר האחרון הוא 72.

מצאו כמה איברים בסדרה אם מנתה $\frac{2}{3}$.

34. מצאו כמה איברים יש בסדרה ההנדסית הבאה: $5, \dots, 160, 320, 640$.

35. כמה מספרים יש להכניס בין 2 ל-1,458, כדי שתתקבל סדרה הנדסית שמנתה $q = 3$?

36. אדם החזיר הלוואה במספר תשלומים, כך שכל תשלום היה קטן ב-20% מהתשלום שקדם לו.

התשלום הראשון היה 6250 שקלים והתשלום האחרון היה 2048 שקלים.

בכמה תשלומים הוחזרה ההלוואה?

37. בסדרה נתון: $a_1 = 4, a_{n+1} = 5 \cdot a_n$. מצאו את מקומו של איבר בסדרה שערכו 62,500.

38. נתונה סדרה הנדסית שבה $a_3 = 3^{11}$ ו- $a_6 = 3^{17}$.

א. חשבו את מנת הסדרה.

ב. חשבו את a_8 .

ג. מצאו את מקומו הסידורי של איבר בסדרה שערכו 3^{29} .

39. נתונה סדרה הנדסית $10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, \dots$.
 א. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n של הסדרה.
 ב. ידוע שהאיבר האחרון בסדרה הוא 10000000. כמה איברים ישנם בסדרה?

תשובות:

32. א. 5. ב. 4. 34. 8. 35. 5 מספרים. 36. 6 תשלומים. 37. a_7 .
 38. א. 9. ב. 3^{21} . ג. a_{12} . 39. א. $a_n = 10^{2n-9}$. ב. 8.

דוגמה:

נתונה הסדרה ההנדסית $3, 6, 12, \dots$.
 סכום שני האיברים האחרונים בסדרה הוא 4,608. כמה איברים בסדרה?

פתרון:

ניתן לסמן שני איברים סמוכים שמיקומם אינו ידוע באופן הבא: a_n, a_{n+1} .
 בסדרה הנדסית אם אחד האיברים הוא a_n , אז האיבר שאחריו שווה ל- $a_n \cdot q$.
 על פי הנתון, סכומם 4,608.
 נקבל $a_n + a_n \cdot q = 4,608$. אפשר לרשום גם $a_n(1+q) = 4,608$.
 נציב $q = 2$ ונקבל $3 \cdot a_n = 4,608$, ומכאן $a_n = 1536$.
 האיבר הראשון מבין השניים הוא $a_n = 1536$ והאיבר שאחריו הוא 3072.
 כדי למצוא את מקומם של שני האיברים נציב בנוסחה $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
 נקבל $1536 = 3 \cdot 2^{n-1}$. פתרון המשוואה הוא $n = 10$.
 האיברים הם: $a_{10} = 1536$ ו- $a_{11} = 3072$.
 לסיכום: בסדרה ישנם 11 איברים.

40. נתונה סדרה הנדסית $5, 10, 20, \dots$.
 מצאו את מקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם 480.
 41. נתונה הסדרה ההנדסית $3, 6, 12, \dots$.
 סכום שני האיברים האחרונים בסדרה הוא 4,608. כמה איברים ישנם בסדרה?
 42. נתונה הסדרה ההנדסית $7, 14, 28, \dots$.
 מצא את מקומם של שלושה איברים סמוכים בסדרה שסכומם 1,568.
 43. נתונה הסדרה ההנדסית $2, 6, 18, \dots$.
 האיבר האחרון בסדרה גדול ב-8,748 מהאיבר הנמצא במקום אחד לפניו.
 כמה איברים בסדרה?

- תשובות: 40. a_6, a_7 . 41. 11. 42. a_6, a_7, a_8 . 43. 9.

ייצוג של סדרה הנדסית באמצעות טבלת ערכים

דוגמה:

n	1	2	3	4
a_n	27			8

לפניכם טבלה המתארת ערכים

של איברים בסדרה הנדסית.

א. חשבו את מנת הסדרה.

ב. מהו האיבר השמיני בסדרה?

פתרון:

א. על פי הטבלה, נתון כי $a_1 = 27$, $a_4 = 8$. נביע את a_4 באמצעות a_1 ו- q . נקבל $a_1 q^3 = 8$.

נציב $a_1 = 27$. נקבל $27q^3 = 8$, כלומר $q^3 = \frac{8}{27}$. נוציא שורש שלישי משני האגפים.

$$\text{נקבל: } q = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

הערה: מאחר שהשורש שהוצאנו הוא מסדר איזוגי, קיבלנו פתרון אחד.

ב. נביע את האיבר השמיני בסדרה. נקבל $a_8 = a_1 \cdot q^7$. נציב $a_1 = 27$, $q = \frac{2}{3}$.

$$\text{נקבל: } a_8 = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{128}{81}$$

n	1	2	3	4
a_n	3		12	

44. לפניכם טבלה המתארת ערכים

של איברים בסדרה הנדסית עולה.

א. חשבו את מנת הסדרה.

ב. מהו האיבר השישי בסדרה?

n	1	2	3	4
a_n	216			8

45. לפניכם טבלה המתארת ערכים

של איברים בסדרה הנדסית.

א. חשבו את מנת הסדרה.

ב. הגדירו את הסדרה באמצעות כלל נסיגה.

n	1	2	3	4
a_n			100	125

46. לפניכם טבלה המתארת ערכים

של איברים בסדרה הנדסית.

א. חשבו את מנת הסדרה.

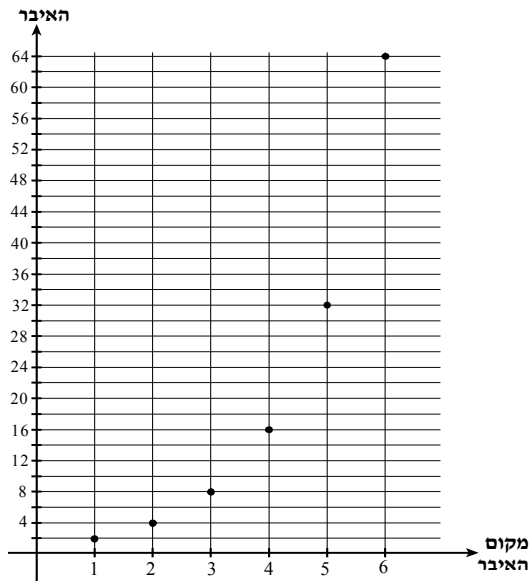
ב. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

תשובות:

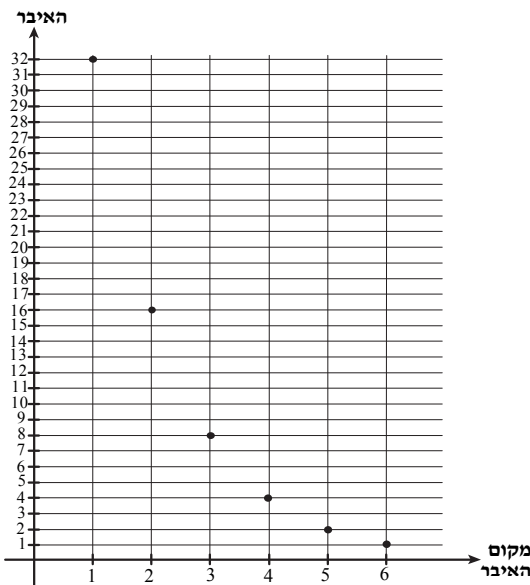
44. א. $q = 2$. ב. 96. 45. א. $q = \frac{1}{3}$. ב. $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, $a_1 = 216$. 46. א. $q = 1.25$. ב. $a_1 = 64$.

ייצוג גרפי של סדרה הנדסית

נראה עכשיו כיצד מייצגים סדרה הנדסית באמצעות גרף של נקודות בודדות.
 הציר האופקי מייצג את מקום האיבר (n) והציר האנכי מייצג את ערך האיבר (a_n).
 ראינו שהנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית על פי מקומו היא $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
 התיאור הגרפי של נוסחה זו הוא פונקציה מערכית.
 מאחר שהערך של המשתנה n הוא רק מספרים טבעיים, הגרף אינו רציף,
 אלא מורכב מנקודות בודדות (כל הנקודות נמצאות על גרף של פונקציה מעריכית).



47. בגרף שלפניכם מתוארת סדרה הנדסית.
 א. מצאו על פי הגרף את האיבר הראשון בסדרה, ואת מנת הסדרה.
 ב. חשבו את האיבר העשירי בסדרה.
 ג. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n באמצעות n בלבד.
 ד. האם יש בסדרה איברים שליליים? נמקו.



48. בגרף שלפניכם מתוארת סדרה הנדסית.
 א. מצאו על פי הגרף את האיבר הראשון בסדרה, ואת מנת הסדרה.
 ב. חשבו את האיבר השמיני בסדרה.
 ג. הציגו את הסדרה באמצעות כלל נסיגה.
 ד. האם נכון לומר שהסדרה יורדת? נמקו.

תשובות: 47. א. $a_1 = 2$, $q = 2$. ב. $a_{10} = 1,024$. ג. $a_{10} = 1,024$. ד. לא.

48. א. $a_1 = 32$, $q = \frac{1}{2}$. ב. $a_8 = 0.25$. ג. $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$, $a_1 = 32$. ד. כן.

תכונת הסדרה ההנדסית

כלל: כאשר המספרים a, b, c מהווים איברים סמוכים בסדרה הנדסית,

אז המנה של b ב- a שווה למנה של c ב- b , כלומר מתקיים: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

הערה: מהקשר $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ נוכל לקבל: $b^2 = a \cdot c$.

במקרה כזה נוהגים לומר ש- b הוא ממוצע הנדסי של a ו- c .
מכאן מקור השם סדרה הנדסית.

דוגמה:

שלושה מספרים, שהראשון מביניהם הוא 12, מהווים סדרה הנדסית.
אם נחסר מהאיבר הראשון 3, ונוסיף לאיבר השלישי 9,
נקבל שלושה מספרים המהווים סדרה הנדסית אחרת.
מצאו את שלושת המספרים הנתונים ואת שלושת המספרים לאחר השינויים.

פתרון:

נסמן ב- q את מנת הסדרה.

שלושת המספרים ניתן להצגה באופן הבא: $12, 12q, 12q^2$.

נחסר מהאיבר הראשון 3, ונוסיף לאיבר השלישי 9: $9, 12q, 12q^2 + 9$.

על פי הנתון, מספרים אלה מהווים סדרה הנדסית, לכן המנה ביניהם קבועה,

$$\text{כלומר מתקיים } \frac{12q^2 + 9}{12q} = \frac{12q}{9}.$$

נקבל $9(12q^2 + 9) = 144q^2$, ומכאן $q^2 = \frac{9}{4}$. הפתרון הוא $q = 1\frac{1}{2}$ או $q = -1\frac{1}{2}$.

נציב ונמצא את שלושת המספרים הנתונים (ונוסיף גם את המספרים לאחר השינויים):

אפשרות א: הסדרה ההנדסית המקורית: 12, 18, 27.

הסדרה ההנדסית לאחר השינויים: 9, 18, 36.

אפשרות ב: הסדרה ההנדסית המקורית: 12, -18, 27.

הסדרה ההנדסית לאחר השינויים: 9, -18, 36.

49. בכל אחד מהסעיפים שלפניכם נתונים שלושה מספרים מהווים איברים סמוכים בסדרה הנדסית. מצאו את x ורשמו את שלושת המספרים.

א. $x, x+6, x+18$. ב. $x, 3x-2, 5x-2$.

50. שלושה מספרים שהראשון בהם הוא 16 מהווים סדרה הנדסית.

אם נוסיף לאיבר הראשון 2 ונחסר מהאיבר השלישי 1,

נקבל שלושה מספרים מהווים סדרה הנדסית חדשה.

מצאו את שלושת המספרים של שתי הסדרות ההנדסיות.

51. המספרים a_1, a_2, a_3 מהווים סדרה הנדסית שמנתה 3. אם כופלים את המספר השמאלי ב-2, מוסיפים למספר האמצעי 1 ומחסרים מהמספר הימני 1, מתקבלת סדרה הנדסית חדשה. מצאו את שתי הסדרות.

52. נתונים שלושה מספרים: 3, 8, 18. עידו מעוניין להוסיף אותו מספר לכל אחד מהם כדי לקבל שלושה מספרים המהווים סדרה הנדסית. מצאו מהו המספר.

תשובות:

49. א. $x = 6$; 6, 12, 24. ב. $x = 2$; 2, 4, 8 או $x = 0.5$; 0.5, -0.5, 0.5.

50. 9, 12, 16 או 8, 12, 18 או 9, -12, 16 או 8, -12, 18.

51. 9, 3, 1 או 8, 4, 2 או -1, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{9}$ או -2, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{9}$. **52.** 2.

פתרון מערכת משוואות באמצעות חילוק משוואות

נראה מקרים שבהם מתקבלת מערכת משוואות הנפתרת באמצעות חילוק משוואות.

דוגמה:

בסדרה הנדסית סכום האיברים השני והשלישי הוא 42, וסכום האיברים החמישי והשישי הוא 336. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

פתרון:

כדי למצוא את a_1 ואת q נרכיב שתי משוואות.

$$(1) \text{ על-פי הנתון הראשון: } a_2 + a_3 = 42$$

$$\text{נביע כל אחד מהאיברים על-ידי } a_1 \text{ ו- } q. \text{ נקבל: } a_1q + a_1q^2 = 42$$

$$(2) \text{ על-פי הנתון השני: } a_5 + a_6 = 336$$

$$\text{נביע כל אחד מהאיברים על-ידי } a_1 \text{ ו- } q. \text{ נקבל: } a_1q^4 + a_1q^5 = 336$$

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^2 = 42 \\ a_1q^4 + a_1q^5 = 336 \end{cases} \quad \text{קיבלנו מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים:}$$

$$\begin{cases} a_1q(1+q) = 42 \\ a_1q^4(1+q) = 336 \end{cases} \quad \text{נוציא גורם משותף מקסימלי בכל משוואה:}$$

נחלק את משוואה (2) במשוואה (1).

$$\text{נקבל: } \frac{a_1q^4(1+q)}{a_1q(1+q)} = \frac{336}{42}. \text{ נצמצם ונקבל } q^3 = 8, \text{ ומכאן } q = 2.$$

$$\text{נציב } q = 2 \text{ במשוואה } a_1q(1+q) = 42 \text{ ונקבל } a_1 = 7.$$

53. מצאו על פי הנתונים את האיבר הראשון ואת המנה של כל אחת מהסדרות ההנדסיות הבאות:

$$\text{א. } a_1 + a_2 = 15, a_2 + a_3 = 30 \quad \text{ב. } a_1 + a_3 = 185, a_2 + a_4 = 370$$

54. בסדרה הנדסית סכום האיברים השני והחמישי הוא 72,

וסכום האיברים השלישי והשישי הוא 36.

מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

55. בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השני לראשון הוא 5, וההפרש בין האיבר השלישי

לאיבר השני הוא 10. מצאו את a_1 ואת q .

56. בסדרה הנדסית סכום האיברים הראשון, השלישי והחמישי הוא 147,

וסכום האיברים השני, הרביעי והשישי הוא 294.

מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

57. בסדרה הנדסית עולה, האיבר השני גדול ב-4 מהאיבר הראשון וקטן ב-12 מהאיבר השלישי.

מהי מנת סדרה?

58. בסדרה הנדסית נתון: $a_3 = 12$, $a_1 + a_2 = 9$.
 א. מצאו את a_1 ואת q . כתבו את שתי האפשרויות.
 ב. אחת הסדרות שמצאתם בסעיף א היא סדרה עולה.
 מצאו כמה איברים יש בסדרה זו אם האיבר האחרון בה הוא 384.
59. סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 52.
 האיבר השלישי גדול ב-32 מהאיבר הראשון.
 מצאו את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה.
60. בסדרה הנדסית האיבר השני גדול ב-7 מהאיבר הראשון וקטן ב-42 מהאיבר הרביעי.
 מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
61. בסדרה הנדסית חמישה איברים. סכום ארבעת האיברים הראשונים הוא 75,
 וסכום ארבעת האיברים האחרונים הוא 150.
 מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
62. בסדרה הנדסית האיבר השני קטן פי 8 מהאיבר החמישי.
 א. מצאו את מנת הסדרה.
 ב. סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 21.
 מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
63. בסדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים, סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 70.
 האיבר השביעי גדול פי $1\frac{1}{3}$ מסכום האיברים החמישי והשישי.
 מצאו את שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
64. בסדרה הנדסית שמנתה שונה מ-1 סכום שני האיברים הראשונים קטן פי 9
 מסכום שני האיברים הבאים אחריהם. מהי מנת הסדרה?
 הדרכה: היעזרו בהוצאת גורם משותף.
65. את המספר 65 חילקו לארבעה מחוברים חיוביים המהווים סדרה הנדסית.
 ההפרש בין שני המחוברים הראשונים (כלומר, ההפרש שבין האיבר השני של הסדרה
 לראשון) גדול פי $2\frac{1}{4}$ מההפרש שבין שני המחוברים האחרונים.
 לאילו מחוברים חולק המספר 65?
66. בסדרה הנדסית מכפלת שלושת האיברים הראשונים היא 27.
 א. מצאו את האיבר השני בסדרה.
 ב. נתון כי סכום שני האיברים הראשונים בסדרה הוא 4.
 מהו האיבר השלישי בסדרה?

67. א. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 \cdot a_3 = 16$. מצאו את a_2 . כתבו את שתי האפשרויות.
 ב. נתון כי סכום שני האיברים הראשונים הוא 6. מהו האיבר השלישי בסדרה?

68. שלושה מספרים חיוביים שסכומם 35 יוצרים סדרה הנדסית.
 אם נחסר מהמספר הראשון 2 מהשני 1, ונוסיף למספר השלישי 7,
 נקבל שלושה מספרים המהווים סדרה הנדסית.
 מצאו את המנה של כל אחת מהסדרות ההנדסיות.

69. שלושה מספרים שמכפלתם 125 מהווים סדרה הנדסית.
 אם נוסיף לשני המספרים הראשונים 1 ונחסר מהמספר השלישי 7,
 יתקבלו שלושה מספרים המהווים סדרה הנדסית חדשה. מצאו את שלושת המספרים.

תשובות:

53. א. $q = 2, a_1 = 5$. ב. $q = 2, a_1 = 37$. 54. $q = 0.5, a_1 = 128$. 55. $q = 2, a_1 = 5$.
 56. 7. 57. 3. 58. א. $q = 2, a_1 = 3$ או $q = 2, a_1 = 27$. ב. $q = -\frac{2}{3}$. 8 איברים.
 59. 4, 12, 36 או $\frac{196}{3}, -\frac{140}{3}, \frac{100}{3}$. 60. $q = 2, a_1 = 7$ או $q = -3, a_1 = -1.75$.
 61. $q = 2, a_1 = 5$. 62. א. $q = 2$. ב. $a_1 = 3$. 63. 10, 20, 40. 64. 3 או -3. 65. 27, 18, 12, 8.
 66. א. 3. ב. 9. 67. א. 4 או -4. ב. 8 או 1.6. 68. 3, 2. 69. 1, 5, 25 או 5, -7, $-\frac{25}{7}$.

שאלות עם שתי סדרות

דוגמה:

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה הנדסית שהמנה שלה q .
 בונים סדרה שאיבריה הם: $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, \dots$.
 א. הביעו באמצעות a_1, q ו- n את b_n , האיבר העומד במקום ה- n י.
 ב. הראו כי הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ היא סדרה הנדסית.

פתרון:

א. על פי החוקיות נקבל: $b_n = a_n + a_{n+1} = a_n + a_n \cdot q = a_n(1+q) = a_1 \cdot q^{n-1}(1+q)$

ב. יש להראות שהמנה $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ היא קבועה.

כדי להביע את b_{n+1} בביטוי של b_n , בכל מקום שבו מופיע n נציב $(n+1)$.

דרך א: נתבונן בביטוי $b_n = a_n(1+q)$

נציב $(n+1)$ במקום (n) . נקבל: $b_{n+1} = a_{n+1}(1+q)$

נחשב את המנה $\frac{b_{n+1}}{b_n}$: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}(1+q)}{a_n(1+q)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n \cdot q}{a_n} = q$

קיבלנו $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, כלומר המנה קבועה ושווה ל- q , וסדרת b_n היא הנדסית ומנתה q .

דרך ב: נתבונן בביטוי $b_n = a_1 \cdot q^{n-1}(1+q)$.

נציב $(n+1)$ במקום (n) . נקבל: $b_{n+1} = a_1 \cdot q^{n+1-1}(1+q)$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_1 \cdot q^{n+1-1}(1+q)}{a_1 \cdot q^{n-1}(1+q)} = \frac{q^n}{q^{n-1}} = q^{n-(n-1)} = q^1 = q \quad : \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

נחשב את המנה $\frac{b_{n+1}}{b_n}$: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, כלומר המנה קבועה ושווה ל- q , וסדרת b_n היא הנדסית ומנתה q .

70. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה q .

בונים סדרה הנדסית חדשה $b_1, b_2, b_3, \dots$ כך ש- $b_1 = 4a_1, b_2 = 4a_2, b_3 = 4a_3, \dots$

א. הביעו באמצעות q את מנת הסדרה ההנדסית החדשה.

ב. הביעו באמצעות a_1 ו- q את b_{10} .

ג. הביעו באמצעות a_1, q ו- n את b_n ואת b_{n+1} .

71. נתונה סדרה הנדסית: $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה q .

בונים סדרה הנדסית חדשה: $b_1 = \frac{a_1}{3}, b_2 = \frac{a_2}{3}, b_3 = \frac{a_3}{3}, \dots$

א. הביעו באמצעות q את מנת הסדרה ההנדסית החדשה.

ב. הביעו באמצעות a_1 ו- q את b_{20} .

ג. הביעו באמצעות a_1, q ו- n את b_n .

72. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה q .

בונים סדרה חדשה שאיבריה הם $b_1 = 2a_1, b_2 = 2a_2, b_3 = 2a_3, \dots$

א. הביעו באמצעות a_1, q ו- n את b_n .

ב. הביעו באמצעות a_1, q ו- n את b_{n+1} .

ג. הוכיחו שסדרת b_n היא הנדסית והביעו את מנתה באמצעות q .

73. הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה הנדסית שהמנה שלה q .

בונים סדרה שאיבריה הם: $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, \dots$

א. הביעו באמצעות a_1, q ו- n נוסחה ל- b_n , האיבר העומד במקום ה- n .

ב. הראו כי הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ היא סדרה הנדסית והביעו באמצעות q את מנתה.

74. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה q .

הוכיחו שהסדרות הבאות הן הנדסיות, ורשמו את מנתן:

$$\text{א. } \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots \quad \text{ב. } a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$$

תשובות:

70. א. q . ב. $b_{10} = 4a_1 \cdot q^9$. ג. $b_n = 4a_1 \cdot q^{n-1}$, $b_{n+1} = 4a_1 q^n$. **71.** א. q . ב. $b_{20} = \frac{a_1 \cdot q^{19}}{3}$. ג. $b_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{3}$.

72. א. $b_n = 2a_1 \cdot q^{n-1}$. ב. $b_{n+1} = 2a_1 \cdot q^n$. ג. q . **73.** א. $a_1 \cdot q^{n-1}(1+q)$. ב. q . **74.** א. $\frac{1}{q}$. ב. q^2 .

הסכום של סדרה הנדסית

נתבונן בסדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה q .
נסמן את סכום n האיברים הראשונים בסדרה ב- S_n , כלומר $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.
נמצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית.

תחילה נביע כל איבר על פי הנוסחה לאיבר הכללי ונקבל את שוויון (1):

$$(1) S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

נכפול ב- q את שני האגפים של שוויון (1) ונקבל את שוויון (2):

$$(2) q \cdot S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$$

נכפול ב- (-1) את שני האגפים של שוויון (1) ונקבל את שוויון (3):

$$(3) -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \dots - a_1q^{n-1}$$

קיבלנו:

$$(2) q \cdot S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$$

$$(3) -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \dots - a_1q^{n-1}$$

כעת נחבר את שוויון (2) עם שוויון (3).

באגף שמאל נקבל: $q \cdot S_n - S_n$, כלומר $(q-1) \cdot S_n$.

באגף ימין נשים לב לעובדה שמלבד האיבר האחרון של סכום (2), שהוא $a_1 \cdot q^n$, והאיבר הראשון של סכום (3), שהוא $-a_1$, הופיעו אותם האיברים בסימנים הפוכים, ולכן הם ביטלו זה את זה. נקבל באגף ימין $a_1q^n - a_1$, כלומר $a_1(q^n - 1)$.
נשווה בין האגפים ונקבל: $(q-1) \cdot S_n = a_1(q^n - 1)$.

אם $q \neq 1$, נוכל לחלק ב- $(q-1)$ ולקבל $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ ($q \neq 1$).

$$\text{הנוסחה: } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1, q \neq 0, a_1 \neq 0)$$

הערה: אם $q = 1$, אז לא ניתן להשתמש בנוסחה זו.
במקרה זה כל איברי הסדרה שווים, ולכן $S_n = n \cdot a_1$.

דוגמה:

נתונה הסדרה ההנדסית $6, 12, 24, \dots$

א. חשבו את סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה.

ב. חשבו את האיבר העומד במקום ה-12 בסדרה.

פתרון:

א. הנוסחה היא $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$. עלינו לחשב את S_{12} . נציב $n = 12$: $S_{12} = \frac{a_1(q^{12} - 1)}{q - 1}$.

נציב $a_1 = 6$, $q = 2$. נקבל: $S_{12} = \frac{6(2^{12} - 1)}{2 - 1} = 24,570$.

ב. האיבר העומד במקום ה-12 הוא $a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$. נציב ונקבל: $a_{12} = 6 \cdot 2^{11} = 12,288$.

דוגמה:

סכום הסדרה ההנדסית $4, 12, 36, \dots$ הוא 39,364.

א. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

ב. חשבו את האיבר האחרון בסדרה.

פתרון:

א. על-פי הנתון: $a_1 = 4$, $q = 3$, $S_n = 39,364$.

$$n \text{ נציב בנוסחה } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ נקבל } 39,364 = \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1} \text{ ומכאן } 39,364 = 2(3^n - 1).$$

$$\text{נחלק ב-2 ונקבל: } 19,682 = 3^n - 1, \text{ ומכאן } 19,683 = 3^n.$$

ניתן לפתור משוואה מעריכית זו בשתי דרכים.

דרך א': מכיוון ש- $19,683 = 3^9$, נקבל $3^9 = 3^n$ ולכן $n = 9$, כלומר בסדרה יש 9 איברים.

דרך ב': ניעזר במקש $\ln$ שבמחשבון. נקבל: $n = \frac{\ln 19,683}{\ln 3} = 9$, לכן יש בסדרה 9 איברים.

ב. האיבר האחרון בסדרה הוא a_9 . נציב ונקבל: $a_9 = a_1 \cdot q^8 = 4 \cdot 3^8 = 12,288$.

תרגילים

1. א. נתונה הסדרה ההנדסית $10, 20, 40, \dots$. חשבו את S_8 .
ב. נתונה הסדרה ההנדסית $5, 15, 45, \dots$. חשבו את S_{10} .

2. נתונה הסדרה ההנדסית $4096, 2048, 1024, \dots$.
חשבו את סכום שבעת האיברים הראשונים בסדרה.

3. בסדרה ההנדסית הבאה ישנם שלושה-עשר איברים $1, -3, 9, -27, \dots$.
א. חשבו את סכום כל איברי הסדרה.
ב. מהו האיבר האחרון בסדרה?

4. בסדרה הנדסית נתון: $q = 3$, $S_6 = 1456$. מצאו את a_1 .

5. בסדרה הנדסית שהמנה שלה $\frac{2}{3}$, סכום שבעת האיברים הראשונים הוא 2,059.
מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

6. הסכום של סדרה הנדסית שבה שישה איברים הוא -1,456. מנת הסדרה היא 3.
מהו האיבר הראשון בסדרה, ומהו האיבר האחרון בסדרה?

7. בסדרה הנדסית שבה 6 איברים, האיבר הראשון הוא 1 והאיבר האחרון הוא 32.
א. מהי מנת הסדרה?
ב. חשבו את סכום הסדרה.
8.  בסדרה הנדסית האיבר השישי גדול פי 27 מהאיבר השלישי.
א. מהי מנת הסדרה?
ב. סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה הוא 78728. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
9. בסדרה הנדסית האיבר הראשון הוא 2- והמנה היא 3. האיבר האחרון בסדרה הוא -486.
א. כמה איברים ישנם בסדרה?
ב. חשבו את סכום הסדרה.
10. חשבו את סכום הסדרה ההנדסית 5, 10, 20, ..., 640.
11. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = 5$, $q = 2$, $S_n = 5115$. מצאו את n .
12. א. סכום הסדרה ההנדסית 1, 4, 16, ... הוא 1,365.
כמה איברים ישנם בסדרה?
ב.  סכום הסדרה ההנדסית 2187, 1458, 972, ... הוא 6,305.
כמה איברים ישנם בסדרה?
13. נתונים איברים ראשונים, והסכום של סדרה הנדסית: $2 + 6 + 18 + \dots = 2186$.
מצאו כמה איברים יש בסדרה
14. בסדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים, האיבר השלישי גדול ב-125 מהאיבר הראשון.
סכום האיברים השני והרביעי גדול פי $\frac{13}{6}$ מהאיבר השלישי.
א. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
ב. סכום כל איברי הסדרה הוא 1318.75. כמה איברים בסדרה?
15. בסדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים, סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 152.
האיבר השלישי בסדרה קטן ב-8 מסכום שני האיברים הראשונים.
א. מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה?
ב. חשבו את סכום ששת האיברים הראשונים בסדרה.
16.  בסדרה הנדסית עולה סכום ארבעת האיברים הראשונים הוא 160,
וסכום שמונת האיברים הראשונים הוא 13,120.
מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

17. סכום ארבעת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 130, וסכום האיברים השני והרביעי הוא 78. מהי מנת הסדרה?

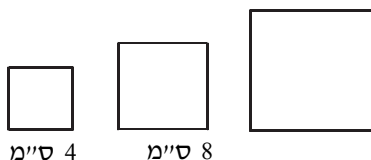
18. נתונה הסדרה ההנדסית $2, 6, 18, \dots$.
 א. כמה איברים בסדרה קטנים מ-39,366?
 ב. חשבו את סכום האיברים בסדרה הקטנים מ-39,366.

תשובות:

1. א. 2,550. ב. 147,620. 2. 8,128. 3. א. 398,581. ב. 531,441. 4. 4. 5. 729.
 6. -4, -972. 7. א. $q=2$. ב. 63. 8. א. $q=3$. ב. $a_1=8$. 9. א. 6 איברים. ב. -728.
 10. 1275. 11. 10. 12. א. 6. ב. 8. 13. 7. 14. א. $a_1=100$, $q=1\frac{1}{2}$. ב. 5.
 15. א. $a_1=32$, $q=1\frac{1}{2}$. ב. 665. 16. $a_1=4$, $q=3$. 17. $1\frac{1}{2}$. 18. א. 9. ב. 19,682.

שאלות מציאותיות – סכום סדרה הנדסית

19. פועל מייצר בכל שעה פי 2 מדבקות מאשר ייצר בשעה שלפניה.
 בשעה הראשונה מייצר הפועל 5 מדבקות.
 א. כמה מדבקות מייצר הפועל ב-6 השעות הראשונות?
 ב. כמה מדבקות מייצר הפועל ב-8 השעות הראשונות?
20. רווחיה של חברה גדלים בכל שנה ב-40%.
 בשנה השישית הרוויחה החברה 672,280 שקלים.
 א. מהו הרווח של החברה בשנה הראשונה?
 ב. מהו הרווח המצטבר של החברה במהלך 6 השנים הראשונות?
21. יאיר החליט לחסוך כסף עבור קניית מכונית. בחודש הראשון חסך 5,000 שקלים, ובכל חודש נוסף חסך סכום הגדול פי 1.6 בהשוואה לחודש הקודם לו.
 לאחר 5 חודשי חיסכון הגיע יאיר לסכום הנדרש לקניית הרכב.
 א. כמה שקלים חסך יאיר?
 ב. בעת הקנייה נערך מבצע הוזלה כך שיאיר שילם על הרכב רק 96% מהסכום שחסך.
 כמה שקלים שילם יאיר עבור המכונית? (עגלו את תשובתכם לשקלים שלמים).
22. ההיקפים של ריבועים מהווים סדרה הנדסית עולה.
 אורך הצלע של הריבוע הראשון הוא 4 ס"מ,
 ואורך הצלע של הריבוע השני הוא 8 ס"מ.
 א. מהו ההיקף של הריבוע השלישי בסדרה?
 ב. מה אורך צלע הריבוע השישי בסדרה?
 ג. מהו סכום ההיקפים של 20 הריבועים הראשונים?



23. תערוכה נערכה במשך 6 ימים.
מספר המבקרים בכל יום היה חלק קבוע ממספרם ביום שלפניו.
ביום השני ביקרו בתערוכה 1,620 אנשים, וביום החמישי ביקרו בתערוכה 480 אנשים.
א. כמה אנשים ביקרו בתערוכה ביום הראשון?
ב. כמה אנשים ביקרו בתערוכה בסך הכול?
24. סוחר השתתף ביריד שנמשך מספר ימים.
בכל יום הרוויח הסוחר $\frac{2}{3}$ מהסכום שהרוויח ביום שקדם לו.
ביום החמישי ליריד הרוויח הסוחר 2,880 שקלים, ובסך הכול הוא הרוויח 41,180 שקלים.
כמה ימים נמשך היריד?

תשובות:

19. א. 315. ב. 1275. 20. א. 125,000 שקלים. ב. 2,040,480 שקלים.
21. א. 79,048 שקלים. ב. 75,886 שקלים. 22. א. 64 ס"מ. ב. 128 ס"מ. ג. 16,777,200 ס"מ.
23. א. 2,430. ב. 6,650. 24. 7 ימים.

סדרה הנדסית – מציאת נוסחה ל- S_n באמצעות n בלבד

דוגמה:

נתונה הסדרה ההנדסית $6, 18, 54, \dots$.
א. מצאו נוסחה ל- S_n באמצעות n בלבד.
ב. היעזרו בנוסחה שמצאתם בסעיף א, וחשבו את סכום שמונת האיברים הראשונים בסדרה.

פתרון:

א. על-פי הנתון: $a_1 = 6$, $q = 3$. נציב בנוסחה: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

$$S_n = \frac{6(3^n - 1)}{3 - 1} = 3(3^n - 1)$$

אפשר גם לפתוח סוגריים ולהיעזר בחוקי חזקות ולקבל: $S_n = 3 \cdot 3^n - 3 = 3^{n+1} - 3$.
ב. כדי לחשב באמצעות הנוסחה $S_n = 3^{n+1} - 3$ את סכום שמונת האיברים הראשונים בסדרה, נציב בנוסחה $n = 8$. נקבל: $S_8 = 3^{8+1} - 3 = 19680$.
הערה: ניתן כמובן לחשב את S_8 על פי נוסחת הסכום הרגילה של סדרה הנדסית.

25. מצאו את הנוסחה ל- S_n בסדרות ההנדסיות הבאות:
א. $5, 10, 20, \dots$ ב. $3, -6, 12, \dots$ ג. $729, 486, 324, \dots$

26. סדרה מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$.
מצאו נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

27. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה $a_1 = 8, a_{n+1} = -4a_n$.
 א. הסבירו מדוע הסדרה היא סדרה הנדסית.
 ב. חשבו את סכום שמונת האיברים הראשונים בסדרה.
 ג. חשבו את הממוצע של שמונת האיברים הראשונים בסדרה.

28. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, a_1 = 120$.
 א. רשמו את חמשת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. הסבירו מדוע הסדרה הנתונה היא סדרה הנדסית חיובית ויורדת.
 ג. חשבו את סכום ששת האיברים הראשונים בסדרה.

29. סדרה מוגדרת לכל n טבעי באמצעות הנוסחה $a_n = 3^n$.
 א. מהו האיבר הראשון בסדרה?
 ב. הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית.
 ג. מצאו את הנוסחה ל- S_n .

30. סדרה מוגדרת לכל n טבעי באמצעות הנוסחה $a_n = 5 \cdot 2^{n+1}$.
 א. הוכיחו שהסדרה היא הנדסית.
 ב. מצאו נוסחה לסכום S_n של n האיברים הראשונים בסדרה.

תשובות:

25. א. $5 \cdot 2^n - 5$. ב. $1 - (-2)^n$. ג. $2187 - 2187 \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 26. $3(2^n - 1)$. 27. ב. $-104,856$. ג. $-13,107$.
 28. א. $7.5, 15, 30, 60, 120$.
 ב. האיבר הראשון הוא חיובי. המנה היא $\frac{1}{2}$ (חיובית), ולכן כל האיברים הם חיוביים.
 כל איבר קטן מקודמו פי 2, ולכן הסדרה יורדת. ג. 236.25 .
 29. א. 3. ג. $\frac{3 \cdot (3^n - 1)}{2} = \frac{3 \cdot 3^n - 3}{2} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$. 30. ב. $S_n = 20 \cdot 2^n - 20 = 5 \cdot 2^{n+2} - 20$.

מעבר מנוסחת הסכום לאיבר הכללי בסדרה הנדסית

נדון במקרים שבהם נתונה נוסחה ל- S_n ונרצה למצוא נוסחה לאיבר הכללי a_n . נושא זה כבר נלמד במסגרת סדרה חשבונית.

דוגמה:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

א. חשבו את S_5 ו- S_6 .

ב. חשבו את a_6 .

ג. חשבו את a_1 .

פתרון:

א. נתון כי: $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

כדי לחשב את S_6 , נציב $n=6$. נקבל: $S_6 = 2 \cdot 3^6 - 2 = 1456$.

כדי לקבל את S_5 , נציב $n=5$. נקבל: $S_5 = 2 \cdot 3^5 - 2 = 484$.

ב. כדי לחשב את a_6 נחסר מ- S_6 את S_5 . נקבל: $a_6 = S_6 - S_5 = 1,456 - 484 = 972$.

ג. נציב $n=1$ בנוסחה $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$. נקבל $S_1 = 2 \cdot 3^1 - 2 = 4$.

קיבלנו $S_1 = 4$, ולכן $a_1 = 4$.

נסכם:

כאשר נתונה נוסחה לסכום S_n , של n האיברים הראשונים של סדרה,

ניתן לחשב כל איבר בסדרה באמצעות חיסור סכומים,

מלבד a_1 המחושב ישירות באמצעות הצבת $n=1$ בנוסחה הנתונה.

בהצבה כזו מקבלים את S_1 , שזה למעשה הערך של האיבר הראשון a_1 .

אם נתון הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה ונחסר ממנו את סכום $(n-1)$

האיברים הראשונים בסדרה, נקבל את האיבר העומד במקום ה- n , כלומר a_n .

כאשר נתונה נוסחה לסכום S_n של סדרה כלשהי,

ניתן למצוא נוסחה לאיבר הכללי a_n על-פי הקשר: $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$).

דוגמה:

נתונה נוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה: $S_n = 3 \cdot 5^n - 3$.

א. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n . האם הנוסחה נכונה עבור כל n טבעי?

ב. הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית.

פתרון:

א. נמצא נוסחה ל- a_n בעזרת הקשר: $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$).

על-פי הנתון: $S_n = 3 \cdot 5^n - 3$.

כדי להביע את S_{n-1} , נציב $(n-1)$ בכל מקום שבו מופיע n . נקבל: $S_{n-1} = 3 \cdot 5^{n-1} - 3$.

נביע את a_n : $a_n = S_n - S_{n-1} = (3 \cdot 5^n - 3) - (3 \cdot 5^{n-1} - 3) = 3 \cdot 5^n - 3 - 3 \cdot 5^{n-1} + 3$

קיבלנו: $a_n = 3 \cdot 5^n - 3 \cdot 5^{n-1} = 3 \cdot 5^n - \frac{3 \cdot 5^n}{5^1} = \frac{15 \cdot 5^n - 3 \cdot 5^n}{5} = \frac{12 \cdot 5^n}{5}$

הערה: באמצעות חוקי חזקות אפשר (אבל לא חובה) לקבל $a_n = \frac{12 \cdot 5^n}{5} = 12 \cdot 5^{n-1}$

נבדוק האם הנוסחה נכונה שמצאנו עבור כל n טבעי.

הקשר $a_n = S_n - S_{n-1}$ מתקיים עבור $n \geq 2$, לכן גם את הנוסחה $a_n = \frac{12 \cdot 5^n}{5}$

הוכחנו עבור $n \geq 2$.

כדי לבדוק האם הנוסחה ל- a_n נכונה גם עבור $n=1$, יש לבדוק האם a_1 המתקבל על-ידי הצבת $n=1$ בנוסחת a_n שווה ל- S_1 המתקבל על-ידי הצבת $n=1$ בנוסחת S_n .

נציב $n=1$ בנוסחה $S_n = 3 \cdot 5^n - 3$. נקבל $S_1 = 3 \cdot 5^1 - 3 = 12$.

קיבלנו $S_1 = 12$, ולכן $a_1 = 12$. זהו ערך נכון עבור a_1 .

כעת נציב $n=1$ בנוסחה $a_n = \frac{12 \cdot 5^n}{5}$. נקבל: $a_1 = \frac{12 \cdot 5^1}{5} = 12$.

התוצאה שהתקבלה כאשר הצבנו $n=1$ בנוסחת a_n ,

שווה לתוצאה שהתקבלה כאשר הצבנו $n=1$ בנוסחת S_n .

המסקנה היא שהנוסחה ל- a_n נכונה גם עבור $n=1$, ומכאן שהיא נכונה לכל n טבעי.

ב. כדי להוכיח שהסדרה היא הנדסית יש להוכיח שהמנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קבועה ואינה תלויה ב- n .

מצאנו $a_n = \frac{12 \cdot 5^n}{5}$. נביע את a_{n+1} . נציב $(n+1)$ במקום n ונקבל: $a_{n+1} = \frac{12 \cdot 5^{n+1}}{5}$.

נחשב את המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. במהלך החישוב ניעזר בכלל לחילוק שברים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{12 \cdot 5^{n+1}}{5}}{\frac{12 \cdot 5^n}{5}} = \frac{12 \cdot 5^{n+1} \cdot 5}{12 \cdot 5^n \cdot 5} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^1 = 5$$

נקבל:

קיבלנו: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 5$, כלומר המנה של כל איבר בקודמו היא קבועה ושווה ל-5,

ולכן הסדרה היא סדרה הנדסית שבה המנה היא $q=5$.

תרגילים

31. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית היא $S_n = 5 \cdot 2^n - 5$.

א. חשבו את S_4 ואת S_3 .

ב. חשבו את a_4 . היעזרו בסעיף א'.

32. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה היא $S_n = 3^n - 1$.

א. חשבו את S_1 , S_2 ו- S_3 .

ב. חשבו את a_1 , a_2 ו- a_3 .

33. סכום n האיברים הראשונים של הסדרה הנתונה הוא $S_n = 12 \cdot 1.5^n - 12$
 א. חשבו את a_7 . ב. חשבו את a_1 .

34. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה היא $S_n = 2^n - 1$
 א. מצאו נוסחה לסכום $(n-1)$ האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. היעזרו בקשר $a_n = S_n - S_{n-1}$, $(n \geq 2)$, ומצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n .

35. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה היא $S_n = 2 \cdot 5^n - 2$
 א. מצאו את הנוסחה לאיבר הכללי a_n , ובדקו שמתקיים $a_1 = S_1$.
 ב. הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית.

36. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה היא $S_n = 2 + (-2)^{n+1}$
 א. מצאו את הנוסחה לאיבר הכללי a_n , ובדקו שמתקיים $a_1 = S_1$.
 ב. הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית והגדירו אותה באמצעות כלל נסיגה.

37. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה היא $S_n = 2^{n+3} - 8$
 א. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n באמצעות n בלבד.
 ב. מצאו את מקומו הסידורי של איבר בסדרה שערכו 128 .

38. בסדרה נתון: $S_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 10$
 א. חשבו את האיבר השביעי בסדרה.
 ב. רשמו ביטוי לאיבר הכללי a_n .
 ג. הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית והציגו אותה באמצעות כלל נסיגה.

39. סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = 4^{n+1} + 1$
 א. חשבו את a_1 .
 ב. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n , $(n \geq 2)$.
 ג. האם הנוסחה שמצאתם בסעיף א' נכונה עבור כל איברי הסדרה?

תשובות:

31. א. $S_3 = 35$, $S_4 = 75$. ב. $a_4 = 40$. **32.** א. $S_3 = 26$, $S_2 = 8$, $S_1 = 2$. ב. $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 18$.

33. א. $S_1 = \frac{2187}{32} = 68.34375$. ב. $a_1 = 6$. **34.** א. $S_{n-1} = 2^{n-1} - 1$. ב. $a_n = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

35. א. $a_n = \frac{8 \cdot 5^n}{5} = 8 \cdot 5^{n-1}$. **36.** א. $a_n = -3(-2)^n$. ב. $a_1 = 6$, $a_{n+1} = -2a_n$.

37. א. $a_n = 2^{n+2}$. ב. $a_5 = 128$. **38.** א. 640 . ב. $5 \cdot 2^n$. ג. $a_{n+1} = 2a_n$, $a_1 = 10$.

39. א. $a_1 = 17$. ב. $a_n = 3 \cdot 4^n$. ג. לא, היא אינה נכונה עבור $n = 1$.

סדרה הנדסית – סכום איברים אחרונים

דוגמה:

בסדרה הנדסית יש 12 איברים.
סכום ששת האיברים הראשונים בסדרה הוא 441, וסכום ששת האיברים האחרונים בסדרה הוא 28,224.
מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

פתרון:

כדי למצוא את a_1 ואת q נרכיב שתי משוואות.

(1) סכום ששת האיברים הראשונים הוא 441, כלומר $S_6 = 441$.

$$(1) \quad \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 441 \quad \text{נציב בנוסחת הסכום ונקבל:}$$

(2) סכום ששת האיברים האחרונים הוא 28,224.

סכום זה הוא סכום של סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_7 , מנתה q ומספר האיברים שלה הוא 6.

$$\text{נציב בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית ונקבל: } S_6 \text{ אחרונים} = \frac{a_7(q^6 - 1)}{q - 1}$$

$$(2) \quad \frac{a_1 q^6 (q^6 - 1)}{q - 1} = 28224 \quad \text{נציב במקום } a_7, \text{ נשווה ל- } 28,224 \text{ ונקבל:}$$

$$\begin{cases} (1) \quad \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 441 \\ (2) \quad \frac{a_1 q^6 (q^6 - 1)}{q - 1} = 28224 \end{cases} \quad \text{קיבלנו מערכת של שתי משוואות:}$$

נחלק את משוואה (2) במשוואה (1).

$$\text{נקבל} \quad \frac{\frac{a_1 q^6 (q^6 - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1 (q^6 - 1)}{q - 1}} = \frac{28224}{441}, \quad \text{ומכאן} \quad \frac{a_1 q^6 (q^6 - 1)(q - 1)}{a_1 (q^6 - 1)(q - 1)} = 64. \quad \text{לאחר צמצום נקבל} \quad q^6 = 64.$$

$$\text{נוציא שורש שישי משני האגפים:} \quad q = \pm \sqrt[6]{64} = \pm 2.$$

$$\text{נציב } q = 2 \text{ במשוואה } \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 441 \text{ ונקבל: } a_1 = 7.$$

$$\text{נציב } q = -2 \text{ במשוואה } \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 441 \text{ ונקבל: } a_1 = -21.$$

הערה:

ניתן להביע את סכום 6 האיברים האחרונים בסדרה ההנדסית באמצעות חיסור סכומים, אבל זה לא מומלץ, מאחר שלרוב תתקבל משוואה מסובכת מאוד מבחינה אלגברית.

40. בסדרה ההנדסית $3, 6, 12, \dots$ יש 20 איברים.
א. מהו המקום והערך של האיבר הראשון מתוך עשרת האיברים האחרונים בסדרה?
ב. חשבו את סכום עשרת האיברים האחרונים בסדרה.
41. סכום הסדרה ההנדסית $3, 6, 12, \dots$ הוא 24,573.
א. כמה איברים ישנם בסדרה?
ב. חשבו את סכום שמונת האיברים האחרונים בסדרה.
42. נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$. בסדרה 13 איברים ומנתה q .
א. הביעו על-ידי a_1 ו- q את סכום ששת האיברים האחרונים בסדרה.
ב. נתון כי מנת הסדרה היא 2, וכי סכום ששת האיברים האחרונים בסדרה הוא 24,192.
מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
43. בסדרה הנדסית שאיברה הראשון a_1 ומנתה q ישנם 10 איברים.
א. הביעו על-ידי a_1 ו- q את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הביעו על-ידי a_1 ו- q את סכום חמשת האיברים האחרונים בסדרה.
ג. הביעו באמצעות q את היחס בין סכום חמשת האיברים האחרונים בסדרה, לסכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.
44. בסדרה הנדסית עולה שאיברה הראשון a_1 ומנתה q ישנם 12 איברים.
א. הביעו על-ידי a_1 ו- q את סכום ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הביעו על-ידי a_1 ו- q את סכום ארבעת האיברים האחרונים בסדרה.
ג. נתון כי סכום ארבעת האיברים הראשונים בסדרה הוא 75,
וסכום ארבעת האיברים האחרונים הוא 19,200.
(1) מצאו את מנת הסדרה. הדרכה: היעזרו בחילוק משוואות.
(2) חשבו את סכום הסדרה.
45. בסדרה הנדסית יש 14 איברים. סכום שבעת האיברים הראשונים הוא 1,093.
וסכום שבעת האיברים האחרונים הוא 2,390,391.
מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
46. בסדרה הנדסית עולה שבה 11 איברים נתון כי סכום שבעת האיברים הראשונים הוא 6,558,
וסכום שבעת האיברים האחרונים הוא 531,198.
א. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
ב. חשבו את האיבר האמצעי בסדרה.
47. בסדרה הנדסית יש 12 איברים.
סכום ששת האיברים האחרונים גדול פי 729 מסכום ששת האיברים הראשונים.
מצאו את מנת הסדרה.

48  בריכת מים ריקה התמלאה מים במשך חמש שעות במהירות פוחתת. כמות המים שנכנסה בכל שעה מהווה חלק קבוע מהכמות שנכנסה בשעה הקודמת. הכמות שנכנסה בארבע השעות הראשונות הייתה גדולה פי 2 מהכמות שנכנסה בארבע השעות האחרונות (מתוך החמש). בשעתיים הראשונות נכנסו לבריכה 48 מ"ק מים. מצאו את נפח הבריכה.

49 בסדרה הנדסית שמנתה q יש 12 איברים. הביעו באמצעות q :
 א. את היחס בין סכום הסדרה לסכום ששת האיברים הראשונים.
 ב. את היחס בין סכום הסדרה לסכום ששת האיברים האחרונים.

50 בסדרה הנדסית יש 10 איברים.
 סכום הסדרה הוא 1,023 וסכום חמשת האיברים הראשונים הוא 31.
 מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

תשובות:

- 40** א. $a_{11} = 3072$. ב. 3,142,656 . **41** א. 13 איברים . ב. 24,480 . **42** א. $\frac{a_1 q^7 (q^6 - 1)}{q - 1}$. ב. 3 .
- 43** א. $\frac{a_1 (q^5 - 1)}{q - 1}$. א. $\frac{a_1 q^5 (q^5 - 1)}{q - 1}$. א. q^5 . **44** א. $\frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1}$. ב. $\frac{a_1 q^8 (q^4 - 1)}{q - 1}$. ג. (1) 2 . (2) 20,475 .
- 45** $q = 3, a_1 = 1$. **46** א. 6 . ב. 1458 . **47** 3 או -3 . **48** 62 מ"ק . **49** א. $q^6 + 1$. ב. $\frac{q^6 + 1}{q^6}$.
- 50** $q = 2, a_1 = 1$.

מקומות אי-זוגיים, מקומות זוגיים – סכום סדרה הנדסית

נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ שמנתה q .
נתבונן בסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים שהיא הסדרה $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$
נמצא בסדרה זו את המנה של שני איברים סמוכים:

$$\frac{a_7}{a_5} = \frac{a_1 q^5}{a_1 q^3} = q^2, \quad \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 q^4}{a_1 q^2} = q^2, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2$$

ניתן לראות שהמנה של שני איברים סמוכים בסדרה $a_1, a_3, a_5, \dots$ קבועה ושווה ל- q^2 .

האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ($a_1, a_3, a_5, \dots$) מהווים סדרה הנדסית
שהאיבר הראשון שלה שווה לאיבר הראשון של הסדרה המקורית, כלומר שווה ל- a_1 , ומנתה שווה לריבוע המנה של הסדרה המקורית, כלומר שווה ל- q^2 .

נתבונן בסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים שהיא הסדרה $a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$
נמצא בסדרה זו את המנה של שני איברים סמוכים:

$$\frac{a_8}{a_6} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^5} = q^2, \quad \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1 q^5}{a_1 q^3} = q^2, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 q^3}{a_1 q} = q^2$$

ניתן לראות שהמנה של שני איברים סמוכים בסדרה $a_2, a_4, a_6, \dots$ קבועה ושווה ל- q^2 .

האיברים העומדים במקומות הזוגיים ($a_2, a_4, a_6, \dots$) מהווים סדרה הנדסית
שהאיבר הראשון שלה שווה לאיבר השני של הסדרה המקורית, כלומר שווה ל- a_2 , ומנתה שווה לריבוע המנה של הסדרה המקורית, כלומר שווה ל- q^2 .

הערה: בפתרון שאלות מותר להשתמש בכך שסדרת האיברים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים שבמקומות הזוגיים הן סדרות הנדסיות שמנתן q^2 , וזאת למרות שהחישובים שהצנו בעמוד זה אינם מהווים הוכחה לכך.

דוגמה:

בסדרה הנדסית יש 14 איברים.

סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא 32766 וסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 65532. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

פתרון:

נסמן ב- q את מנת הסדרה המקורית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$.
סדרת האיברים שבמקומות האי-זוגיים ($a_1, a_3, a_5, \dots$) היא סדרה הנדסית.
האיבר הראשון שלה הוא a_1 של הסדרה המקורית, המנה שלה היא q^2 ומספר האיברים

שלה הוא $\frac{14}{2}$, כלומר 7. נציב בנוסחת הסכום ונקבל: $S = \frac{a_1[(q^2)^7 - 1]}{q^2 - 1}$ מקומות אי-זוגיים

הערה: על פי כלל החזקות $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, נקבל $(q^2)^7 = q^{2 \cdot 7} = q^{14}$.

נשווה ל-32,766 ונקבל את המשוואה הראשונה: $(1) \frac{a_1(q^{14} - 1)}{q^2 - 1} = 32766$

נעבור לסדרה האיברים שבמקומות הזוגיים $(a_2, a_4, a_6, \dots)$, שגם היא סדרה הנדסית. האיבר הראשון שלה הוא a_2 של הסדרה המקורית, המנה שלה היא q^2 ומספר האיברים שלה הוא $\frac{14}{2}$ כלומר 7.

$$S = \frac{a_2[(q^2)^7 - 1]}{q^2 - 1} \quad \text{מקומות זוגיים} \quad \text{נציב בנוסחת הסכום ונקבל:}$$

$$(2) \quad \frac{a_1 q(q^{14} - 1)}{q^2 - 1} = 65532 \quad \text{ונקבל:} \quad 65,532 \quad \text{נשווה ל-} \quad (q^2)^7 = q^{14} \quad \text{על פי חוקי חזקות מתקיים}$$

$$\begin{cases} \frac{a_1(q^{14} - 1)}{q^2 - 1} = 32766 \\ \frac{a_1 q(q^{14} - 1)}{q^2 - 1} = 65532 \end{cases} \quad \text{קיבלנו מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים:}$$

$$\text{נחלק את משוואה (2) במשוואה (1). נקבל:} \quad q = \frac{65532}{32766}, \quad \text{כלומר } q = 2.$$

$$\text{נציב } q = 2 \text{ במשוואה (1). נקבל:} \quad \frac{a_1(2^{14} - 1)}{2^2 - 1} = 32766, \quad \text{ומכאן } a_1 = 6.$$

הערה:

בחלק מהשאלות, כדי לצמצם ניעזר בנוסחת הכפל המקוצר $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
דוגמאות: $q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1)$, $q^8 - 1 = (q^4 - 1)(q^4 + 1)$, $q^{2n} - 1 = (q^n - 1)(q^n + 1)$.

51. בסדרה ההנדסית $5, 10, 20, 40, \dots$ יש 16 איברים.

- א. מהי המנה של סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים?
- ב. כמה איברים יש בסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים?
- ג. חשבו את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- ד. חשבו את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- ה. מצאו את הסכום של כל איברי הסדרה.
- ו. הראו שהוא שווה לסכום התשובות שבסעיפים ב' ו-ג'.

52. בסדרה הנדסית שבה 10 איברים המנה היא 2.

- א. נתון כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול ב-1,364 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- ב. מהי המנה ומהו מספר האיברים של סדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים?
- ג. מצאו את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

53. בסדרה הנדסית שמנתה 3 יש 21 איברים.

- א. כמה איברים ישנם בסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
- ב. סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא 7,845,264,902.
- ג. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

54. בסדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 ומנתה q ישנם 10 איברים.
 א. הביעו על-ידי a_1 ו- q את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
 ב. הביעו על-ידי a_1 ו- q את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
 ג. הביעו באמצעות q את היחס שבין סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים לסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
 ד. הביעו באמצעות q את היחס שבין סכום כל איברי הסדרה לסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
 ה. הביעו באמצעות q את היחס שבין סכום כל איברי הסדרה לסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
55. בסדרה הנדסית יש 8 איברים. סכום האיברים המופיעים במקומות הזוגיים הוא 850, וסכום האיברים המופיעים במקומות האי-זוגיים הוא 425.
 מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה. הדרכה: היעזרו בחילוק משוואות.
56. בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 797,160 וסכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 265,720.
 א. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
 ב. חשבו את סכום חמשת האיברים האחרונים בסדרה.
57. בסדרה הנדסית יש 16 איברים.
 נסמן: $S = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{16}$, $T = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$.
 נתון: T קטן פי 3 מ- S .
 א. מצאו את מנת הסדרה הנתונה.
 ב. סכום כל איברי הסדרה הוא 86,093,440. מהו האיבר האחרון בסדרה?
58. בסדרה הנדסית יש 12 איברים.
 סכום הסדרה הוא 4,095 וסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 2,730.
 מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

תשובות:

51. א. (1) 4. ב. 109,225. ג. 218,450. ד. 327,675.
52. א. המנה היא 4, מספר האיברים הוא 5. ב. 4. 53. א. 11. ב. 2.
54. א. $\frac{a_1(q^{10}-1)}{q^2-1}$. ב. $\frac{a_1q(q^{10}-1)}{q^2-1}$. ג. q . ד. $q+1$. ה. $\frac{q+1}{q}$. 55. $a_1 = 5$, $q = 2$.
56. א. $a_1 = 4$, $q = 3$. ב. 1,058,508. 57. א. 3. ב. 57,395,628. 58. $a_1 = 1$, $q = 2$.

שינוי סימני האיברים שבמקומות האי-זוגיים

נתבונן בסדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ שמנתה q .
(1) אם משנים את הסימנים של האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים,

מתקבלת הסדרה $-a_1, a_2, -a_3, a_4, \dots$

נמצא בסדרה זו את המנה של שני איברים סמוכים:

$$\frac{a_2}{-a_1} = \frac{a_1 q}{-a_1} = -q, \quad \frac{-a_3}{a_2} = \frac{-a_1 q^2}{a_1 q} = -q, \quad \frac{a_4}{-a_3} = \frac{a_1 q^3}{-a_1 q^2} = -q$$

ניתן לראות שהמנה של שני איברים סמוכים היא קבועה ושווה ל- $-q$,
והסדרה $-a_1, a_2, -a_3, a_4, \dots$ היא סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $-a_1$
ומנתה $-q$. **מספר האיברים** בסדרה זו שווה למספר האיברים בסדרה המקורית.

(2) אם משנים את הסימנים של האיברים העומדים במקומות הזוגיים,

מתקבלת הסדרה $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$

נמצא בסדרה זו את המנה של שני איברים סמוכים:

$$\frac{-a_2}{a_1} = \frac{-a_1 q}{a_1} = -q, \quad \frac{a_3}{-a_2} = \frac{a_1 q^2}{-a_1 q} = -q, \quad \frac{-a_4}{a_3} = \frac{-a_1 q^3}{a_1 q^2} = -q$$

ניתן לראות שהמנה של שני איברים סמוכים היא קבועה ושווה ל- $-q$,
והסדרה $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$ היא סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1
ומנתה $-q$. **מספר האיברים** בסדרה זו שווה למספר האיברים בסדרה המקורית.

דוגמה:

בסדרה הנדסית שהמנה שלה שונה מ-1 יש 20 איברים.
אם משנים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים, מתקבלת סדרה
שסכומה קטן פי 7 מסכום הסדרה המקורית. מצאו את מנת הסדרה המקורית.

פתרון:

בסדרה המקורית יש 20 איברים $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. נסמן ב- q את מנת הסדרה
המקורית ונקבל שסכומה $\frac{a_1(q^{20}-1)}{q-1}$. משנים את סימני האיברים שבמקומות הזוגיים.

מתקבלת הסדרה ההנדסית $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$. גם בסדרה החדשה יש 20 איברים.
האיבר הראשון שלה הוא a_1 של הסדרה המקורית, מנתה היא $-q$.

נביע את סכום הסדרה החדשה. נקבל $\frac{a_1[(-q)^{20}-1]}{-q-1}$, כלומר $\frac{a_1(q^{20}-1)}{-q-1}$.

הערה: עבור n זוגי מתקיים: $(-q)^n = q^n$. לכן, השתמשנו בפתרון בקשר $(-q)^{20} = q^{20}$.

סכום הסדרה החדשה קטן פי 7 מסכום הסדרה המקורית ולכן $\frac{7 \cdot a_1(q^{20}-1)}{-q-1} = \frac{a_1(q^{20}-1)}{q-1}$

בסדרה הנדסית מתקיים תמיד $a_1 \neq 0$.

כמו כן, בשאלה זו נתון $q \neq 1$ ולכן נוכל לחלק את שני האגפים ב- $a_1(q^{20}-1) \neq 0$.

נקבל: $\frac{7}{-q-1} = \frac{1}{q-1}$. פתרון המשוואה הוא $q = \frac{3}{4}$ וזו מנת הסדרה המקורית.

59. נתונה הסדרה ההנדסית $7, 14, 28, 56, \dots$.
 בסדרה יש 16 איברים.
 א. חשבו את סכום הסדרה.
 ב. משנים סימנים לאיברים העומדים במקומות האי-זוגיים, ומתקבלת סדרה חדשה $-7, 14, -28, 56, \dots$.
 חשבו את סכום הסדרה החדשה.
60. בסדרה הנדסית שהמנה שלה 3 יש 10 איברים.
 ידוע כי אם הופכים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים, מתקבלת סדרה חדשה שסכומה קטן ב-177,144 מסכום הסדרה המקורית.
 א. כמה איברים יש בסדרה החדשה ומהי מנתה?
 ב. מצאו את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
61. בסדרה ההנדסית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ יש 14 איברים ומנתה q .
 א. הביעו על ידי a_1 ו- q את סכום הסדרה.
 ב. משנים סימנים לאיברים העומדים במקומות האי-זוגיים של הסדרה המקורית, ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $-a_1, a_2, -a_3, a_4, \dots$.
 הביעו על ידי a_1 ו- q את סכום הסדרה החדשה.
 ג. הביעו באמצעות q את היחס בין סכום הסדרה לבין סכום הסדרה שבה מחליפים את סימניהם של כל האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.
62. בסדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ יש 8 איברים. מנת הסדרה היא q .
 א. הביעו על ידי a_1 ו- q את סכום הסדרה.
 ב. משנים סימנים לאיברים העומדים במקומות הזוגיים של הסדרה המקורית, ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$.
 הביעו על ידי a_1 ו- q את סכום הסדרה החדשה.
 ג. סכום כל איברי הסדרה המקורית הוא 1785, וסכום הסדרה המתקבלת כאשר מחליפים את הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא -595.
 מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
63. בסדרה הנדסית 12 איברים.
 סכום כל איברי הסדרה הוא 265,720, וסכום הסדרה המתקבלת כאשר מחליפים את הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים הוא 132,860.
 א. מצאו את מנת הסדרה.
 ב. חשבו את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.
64. בסדרה הנדסית יש 14 איברים.
 נתון: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{14} = 81,915$, $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{14} = -27,305$.
 מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

65. נתונה סדרה הנדסית שבה 10 איברים.
אם מחליפים את סימניהם של כל האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים, מתקבלת סדרה שסכומה גדול פי 7 מסכום הסדרה הנתונה.
א. מצאו את מנת הסדרה הנתונה.
ב. מצאו את היחס בין סכום הסדרה לבין סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

66. נתונה סדרה הנדסית שבה 16 איברים.
סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 16,142,520.
אם מחליפים את סימניהם של כל האיברים בסדרה המקורית הנמצאים במקומות הזוגיים, מתקבלת סדרה שסכומה -10,761,680.
מצאו את מנת הסדרה.

תשובות:

59. א. 458745. ב. 152915. 60. א. 10 איברים, המנה היא -3. ב. 4.
61. א. $\frac{a_1(q^{14}-1)}{q-1}$. ב. $\frac{-a_1(q^{14}-1)}{-q-1}$. ג. $\frac{q+1}{q-1}$. 62. א. $\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}$. ב. $\frac{a_1(q^8-1)}{-q-1}$. ג. $a_1 = 7, q = 2$.
63. א. 3. ב. 199,290. 64. $a_1 = 5, q = 2$. 65. א. $-1\frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{4}$. 66. 5.

סדרה הנדסית – סדרת ריבועי האיברים

נתבונן בסדרה ההנדסית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ שמנתה q .
אם מעלים בריבוע את כל אחד מאיברי הסדרה, מתקבלת הסדרה $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$.
זוהי סדרה הנדסית, שאיברה הראשון הוא a_1^2 ומנתה q^2 .

67. בסדרה ההנדסית $3, 6, 12, 24, \dots$ יש 12 איברים.
א. חשבו את סכום איברי הסדרה.
ב. חשבו את סכום הריבועים של איברי הסדרה $(3^2 + 6^2 + 12^2 + \dots)$.
68. בסדרה הנדסית שבה 10 איברים נתון שסכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 29,524.
סכום ריבועי חמשת האיברים הראשונים בסדרה הוא 118,096.
מצאו את האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הנתונה.
69. בסדרה הנדסית שבה 18 איברים, האיבר הראשון הוא 5.
סכום כל איברי הסדרה גדול פי 2 מסכום הריבועים של תשעת האיברים הראשונים.
מצאו את מנת הסדרה.

תשובות:

67. א. 12,285. ב. 50,331,645. 68. 4. 69. 9.

סדרות שבהן מספר האיברים מובע על ידי n

דוגמה:

בסדרה הנדסית יש מספר זוגי של איברים.
 סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא 850.
 סכום הסדרה כאשר הפכו בה את סימני האיברים שבמקומות הזוגיים היא -425.
 מצאו את מנת הסדרה.

פתרון:

נסמן ב- q את מנת הסדרה הנתונה.
 מאחר שבסדרה יש מספר זוגי של איברים, נעדיף לסמן את מספר האיברים ב- $2n$.
 איברי הסדרה הם $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2n}$.
 (1) סדרת האיברים שבמקומות האי-זוגיים $(a_1, a_3, a_5, \dots)$ היא סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 , מנתה q^2 , ומספר איבריה הוא $\frac{2n}{2}$, כלומר n .
 הסכום של סדרה זו הוא $\frac{a_1[(q^2)^n - 1]}{q^2 - 1}$. נשווה ל-850 ונקבל: $(1) \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = 850$.
 (2) כאשר הופכים את סימני האיברים שבמקומות הזוגיים מתקבלת סדרה הנדסית $(a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots, -a_{2n})$. האיבר הראשון של סדרה זו הוא a_1 , מנתה $-q$ ומספר איבריה הוא $2n$ (כלומר שווה למספר האיברים בסדרה המקורית).
 הסכום של סדרה זו הוא $\frac{a_1[(-q)^{2n} - 1]}{-q - 1}$. נשווה ל-425 ונקבל: $(2) \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{-q - 1} = -425$.
 קיבלנו את מערכת המשוואות:

$$(1) \begin{cases} \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = 850 \\ \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{-q - 1} = -425 \end{cases}$$

נחלק את משוואה (1) במשוואה (2).
 נקבל: $\frac{-q - 1}{(q^2 - 1)} = -2$, ומכאן $\frac{-(q+1)}{(q-1)(q+1)} = -2$, כלומר $\frac{-1}{q-1} = -2$. הפתרון הוא $q = 1\frac{1}{2}$.

70 🎥

בסדרה הנדסית $2n$ איברים. מנת הסדרה היא q .
 א. הביעו באמצעות a_1 , q ו- n את סכום כל איברי הסדרה.
 ב. הביעו באמצעות a_1 , q ו- n את סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים.
 ג. סכום הסדרה הוא 40 וסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא 8.
 מצאו את מנת הסדרה.

71 🎥

בסדרה הנדסית $2n$ איברים. מנת הסדרה היא q .
 א. הביעו באמצעות a_1 , q ו- n את סכום כל איברי הסדרה.
 ב. הביעו באמצעות a_1 , q ו- n את סכום האיברים שבמקומות הזוגיים.
 ג. סכום הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
 מצאו את מנת הסדרה.

72. בסדרה הנדסית $2n$ איברים. בסדרה זו סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים שווה ל-682, וסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ל-341. א. מצאו את מנת הסדרה. ב. האיבר הראשון בסדרה שווה ל-1. כמה איברים ישנם בסדרה?
73. בסדרה הנדסית יש מספר זוגי של איברים. סכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא $\frac{2}{3}$ מסכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים. א. מצאו את מנת הסדרה. ב. מצאו את האיבר הראשון בסדרה, אם ידוע שבסדרה 8 איברים, וסכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 3783.
74. בסדרה הנדסית מספר זוגי של איברים. סכום כל האיברים בסדרה הוא 2550, וסכום כל האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 1700. א. מהי מנת הסדרה? ב. האיבר השלישי בסדרה גדול ב-10 מסכום שני האיברים הראשונים. כמה איברים בסדרה?
75. נתון טור הנדסי שבו $2n$ איברים. אם מחליפים את סימניהם של כל האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים, מתקבל טור שסכומו גדול פי 3 מסכום הטור המקורי. מצאו את מנת הטור הנתון.
76. בסדרה הנדסית יש $2n$ איברים. סכום כל איברי הסדרה הוא 665, וסכום איברי הסדרה המתקבלת כאשר מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא 133. א. מצאו את מנת הסדרה. ב. האיבר הראשון בסדרה הוא 243. מצאו כמה איברים ישנם בסדרה.
77. נתונה סדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים. סכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 2728, וסכום הסדרה שבה הפוכים סימני האיברים שבמקומות הזוגיים הוא -1364. מצאו את מנת הסדרה.
78. בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים נתון כי סכום ריבועי n האיברים הראשונים קטן פי 4 מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

תשובות:

70. א. $\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}$. ב. $\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$. ג. 4. 71. א. $\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}$. ב. $\frac{a_1q(q^{2n}-1)}{q^2-1}$. ג. $\frac{1}{2}$.
72. א. 2. ב. 10. 73. א. $\frac{2}{3}$. ב. 2187. 74. א. 2. ב. 8. 75. -2. 76. א. $\frac{2}{3}$. ב. 6. 77. 2. 78. $\frac{1}{4}$.

דוגמה:

בסדרה הנדסית שבה n איברים, המנה היא q . הביעו באמצעות q את היחס בין סכום $(n-3)$ האיברים הראשונים בסדרה לסכום $(n-3)$ האיברים האחרונים בסדרה.

פתרון:

הסדרה ההנדסית היא $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$.
סכום $(n-3)$ האיברים הראשונים, כלומר $a_1, a_2, \dots, a_{n-3}$ הוא סכום של סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 , מנתה q ומספר איבריה הוא $(n-3)$.

$$S_{n-3} = \frac{a_1(q^{n-3} - 1)}{q - 1} \quad \text{נציב בנוסחת הסכום ונקבל:}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{3 ראשונים} & \text{n-3 אחרונים} \\ \hline a_1, \dots, a_3 & a_4, \dots, a_n \\ \hline \end{array} \quad \text{נבונן בסכום (n-3) האיברים האחרונים:}$$

n איברים

סכום $(n-3)$ האיברים האחרונים הוא סכום של סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_4 , מנתה q ומספר האיברים שלה הוא $(n-3)$.

$$S_{n-3} = \frac{a_4(q^{n-3} - 1)}{q - 1} \quad \text{נציב בנוסחת הסכום ונקבל}$$

$$\frac{a_1(q^{n-3} - 1)}{q - 1} = \frac{a_4(q^{n-3} - 1)(q - 1)}{a_4(q^{n-3} - 1)(q - 1)} = \frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1}{a_1 q^3} = \frac{1}{q^3}$$

נחשב את היחס המבוקש:

- 79.** בסדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה q יש n איברים ($n > 2$).
א. (1) מה המקום הסידורי של האיבר הראשון בסדרת $n-2$ האיברים האחרונים בסדרה?
(2) הביעו באמצעות a_1, q ו- n את סכום $n-2$ האיברים האחרונים בסדרה.
ב. חשבו את היחס בין סכום $n-2$ האיברים האחרונים בסדרה לסכום $n-2$ האיברים הראשונים בסדרה.

- 80.** בסדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהמנה שלה q יש n איברים ($n > 3$).
א. הביעו באמצעות a_1, q ו- n את סכום $n-3$ האיברים האחרונים בסדרה.
ב. נתון כי סכום $n-3$ האיברים הראשונים בסדרה קטן פי 64 מסכום $n-3$ האיברים האחרונים בסדרה. חשבו את מנת הסדרה.
ג. נתון: $a_1 + a_2 + a_3 = 21$. מצאו את a_1 .

- 81.** בסדרה הנדסית יש n איברים. סכום $n-1$ האיברים הראשונים בסדרה הוא 480, וסכום $n-1$ האיברים האחרונים בסדרה הוא 1440.
א. מצאו את מנת הסדרה.
ב. האיבר השלישי בסדרה גדול ב-72 מהאיבר השני. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
ג. כמה איברים ישנם בסדרה?

82. בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים המנה היא q .
 א. (1) מה המקום הסידורי של האיבר הראשון בסדרת n האיברים האחרונים בסדרה.
 (2) הביעו באמצעות a_1 , q ו- n את סכום n האיברים האחרונים בסדרה.
 ב. הביעו באמצעות q ו- n את היחס בין סכום n האיברים האחרונים בסדרה לסכום n האיברים הראשונים.

83.  בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים המנה היא 2.
 סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא 93 וסכום n האיברים האחרונים בסדרה הוא 2,976. מצאו כמה איברים יש בסדרה.

תשובות:

79. א. (1) a_3 . (2) $\frac{a_1 q^2 (q^{n-2} - 1)}{q - 1}$. ב. q^2 . 80. א. $\frac{a_1 q^3 (q^{n-3} - 1)}{q - 1}$. ב. 4. ג. 1.
 81. א. $a_1 = 12$, $q = 3$. ב. 5. 82. א. (1) במקום ה- $n+1$. (2) $\frac{a_1 q^n (q^n - 1)}{q - 1}$. ב. q^n . 83. 10.

סכום סדרה הנדסית – שאלות נוספות

84. נתונה הסדרה ההנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$. בסדרה 24 איברים ומנתה q .
 נתבונן בסכום הבא: $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{24}$
 א. כמה איברים ישנם בסכום?
 ב. הביעו את מנת הסכום באמצעות q .
 ג. הביעו את הסכום באמצעות a_1 ו- q .
 85. נתונה הסדרה ההנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$. בסדרה 28 איברים ומנתה $\sqrt{2}$.
 נתבונן בסכום הבא: $a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{28}$
 א. כמה מחוברים ישנם בסכום ומהי מנת הסכום?
 ב. חשבו את הסכום אם נתון $a_1 = 5$.
 86.  בסדרה הנדסית שהמנה שלה 2 יש 30 איברים. בונים סדרה המורכבת מכל האיברים שמיקומם מתחלק ב-3 ללא שארית ($a_3, a_6, a_9, \dots$).
 סכום הסדרה החדשה קטן ב-920,350,134 מסכום איברי הסדרה המקורית.
 מצאו את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

87. בסדרה הנדסית שבה $3n$ איברים המנה היא 3.
 נסמן: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{3n}$, $T = a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n}$.
 א. הביעו את T באמצעות a_1 ו- n .
 ב. חשבו את היחס $\frac{S}{T}$.

88. נתונה הסדרה ההנדסית $3, 12, 48, \dots$. בסדרה 8 איברים. מכניסים בין כל שני איברים סמוכים איבר נוסף, כך שנוצרת סדרה הנדסית חדשה עולה שבה 15 איברים. א. מצאו את מנת הסדרה החדשה. ב. חשבו את סכום הסדרה החדשה.

89. בסדרה ההנדסית שבה 15 איברים נתון: $a_1 = 6, q = -2$. א. האם הסדרה יורדת? ב. חשבו כמה איברים שליליים יש בסדרה וחשבו את סכומם.

90. הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה הנדסית שהמנה שלה q . בונים סדרה שאיבריה הם: $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, \dots$. א. הביעו באמצעות a_1, q ו- n את b_n , האיבר העומד במקום ה- n . ב. הראו כי הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ היא סדרה הנדסית. מהי מנת הסדרה? ג. הביעו באמצעות a_1, q ו- n את הסכום: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$.

91. נתונות שתי סדרות הנדסיות. בסדרה הראשונה $a_1, a_2, a_3, \dots$ יש 8 איברים, מנתה 2 וסכומה 765. בסדרה השנייה $b_1, b_2, b_3, \dots$ יש 6 איברים. א. חשבו את a_1 . ב. נתון: $b_2 = a_4, b_1 = a_2$. חשבו את סכום הסדרה השנייה.

92. בסדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ יש 6 איברים והמנה שלה q . בונים סדרה חדשה שאיבריה הם: $b_1 = \frac{1}{a_1}, b_2 = \frac{1}{a_2}, b_3 = \frac{1}{a_3}, \dots$. א. הביעו את b_n באמצעות a_n . ב. הראו כי הסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ היא סדרה הנדסית. מהי מנת הסדרה? ג. הביעו באמצעות a_1 ו- q את הסכום $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_6}$.

ד. נתון כי האיבר השני של הסדרה המקורית הוא 10, וסכום הסדרה המקורית גדול פי 800 מסכום הסדרה החדשה. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה המקורית.

תשובות:

84. א. 8 איברים. ב. q^3 . ג. $\frac{a_1 q^2 (q^{24} - 1)}{q^3 - 1}$. 85. א. 7 מחוברים, המנה היא 4. ב. 27,305.

86. 2. 87. א. $T = \frac{9a_1(3^{3n} - 1)}{26} = \frac{9a_1(27^n - 1)}{26}$. ב. $\frac{4}{9}$. 88. א. 2. ב. 98,301.

89. א. הסדרה לא עולה ולא יורדת. ב. 7 איברים שליליים, סכומם -65,532.

90. א. $a_1 q^{n-1} (1+q)$. ב. q . ג. $\frac{a_1 (1+q)(q^n - 1)}{q - 1}$. 91. א. $a_1 = 3$. ב. 8190.

92. א. $b_n = \frac{1}{a_n}$. ב. $\frac{1}{q}$. ג. $\frac{(q^6 - 1)}{a_1 q^5 (q - 1)}$. ד. $q = 2, a_1 = 5$.