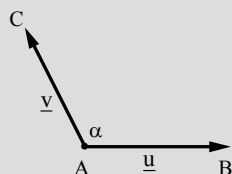


הווקטור הגאומטרי – מכפלה סקלרית

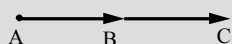
זווית בין שני וקטורים



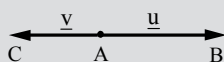
נתונים שני וקטורים $\vec{AB} = \underline{u}$ ו- $\vec{AC} = \underline{v}$,
השונים מווקטור האפס, בעלי מוצא משותף בנקודה A.
הקרניים AB ו- AC יוצרות זווית (בציור – הזווית α).
זווית זו נקראת הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
נסמן זווית זו כך $\alpha = \angle(\underline{u}; \underline{v})$.

הערות:

(1) נמדוד את הזווית α במעלות. התחום של הזווית במעלות הוא $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.



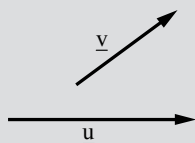
(2) כאשר $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על אותו ישר ובאותו כיוון,
הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא 0° .
ניתן לרשום זאת $\angle(\underline{u}; \underline{v}) = 0^\circ$.



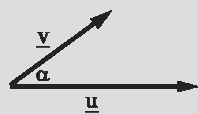
(3) כאשר $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על אותו ישר ובכיוונים
מנוגדים, הזווית ביניהם היא $\alpha = 180^\circ$.
ניתן לרשום זאת $\angle(\underline{u}; \underline{v}) = 180^\circ$.



(4) כאשר הזווית בין הווקטורים ישרה,
כלומר $\angle(\underline{u}; \underline{v}) = 90^\circ$, הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$
מאונכים (או ניצבים) זה לזה,
ונוכל לסמן $\underline{u} \perp \underline{v}$ או $\underline{v} \perp \underline{u}$.

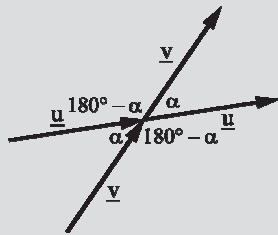
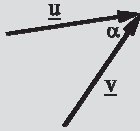
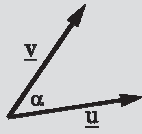


(5) אם לווקטורים אין נקודת מוצא משותפת,
נוכל להעתיק אחד מהם (או את שניהם)
בתנועה שומרת על האורך הכיוון,
כך שלאחר ההעתקה יהיה להם מוצא משותף.



נדגיש כי הזווית בין שני וקטורים שאינם בעלי
מוצא משותף מוגדרת כזווית בין אותם
וקטורים כאשר יש להם מוצא משותף,
כלומר אם נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$,
אז הזווית α שביניהם לא מושפעת מנקודת המוצא שלהם.
בציור שמשמאל מתוארים הווקטורים לאחר ההעתקה, כך שיש להם מוצא משותף.

(6) למדנו שווקטורים קולינאריים נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים. הם בעלי אותו כיוון או בעלי כיוונים מנוגדים, ולכן הזווית ביניהם תהיה, בהתאמה, 0° או 180° .



(7) הגדרנו שכאשר שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יוצאים מקדקוד של זווית, הזווית α שבציר היא הזווית בין שני הווקטורים.

ניתן להסיק שגם כאשר שני הווקטורים נכנסים לקדקוד הזווית, הזווית α היא הזווית בין שני הווקטורים (ראו ציור משמאל).

ניתן להוכיח זאת באמצעות העתקת הווקטורים, כך ששניהם ייצאו מקדקוד הזווית, ולהסתמך על כך שזוויות קדקודיות שוות זו לזו.

נשים לב שאם וקטור אחד יוצא מקדקוד הזווית α שבציר, והווקטור השני נכנס לקדקוד הזווית α שבציר, הזווית α שבציר אינה הזווית בין שני הווקטורים.

במקרה כזה הזווית בין שני הווקטורים היא הזווית המשלימה את α ל- 180° .

ניתן להוכיח זאת באמצעות העתקת הווקטורים,

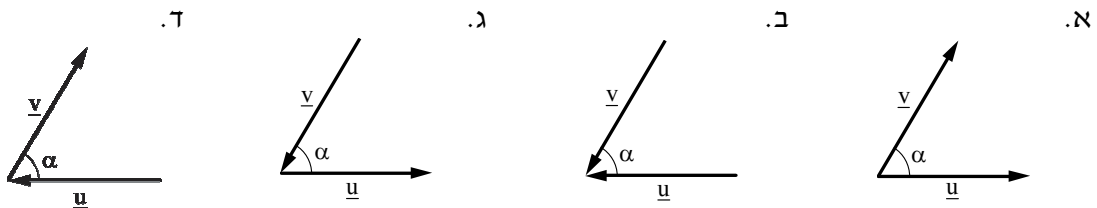
כך ששניהם ייצאו מקדקוד הזווית או שניהם ייכנסו לקדקוד הזווית, ולהסתמך על כך שזוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180° .

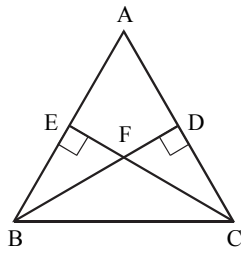
בהמשך נראה שכאשר נחשב זוויות בין שני וקטורים, נקפיד ששני הווקטורים יוצאים מקדקוד הזווית או ששני הווקטורים נכנסים לקדקוד הזווית.

תרגילים

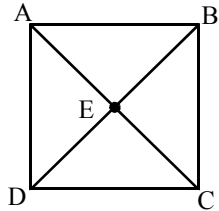
1. בכל אחד מהשרטוטים שלפניכם מסומנים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

נתון כי הזווית α שבציר היא בת 60° . מצאו מהו גודל הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

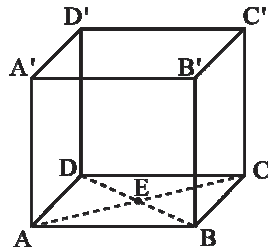




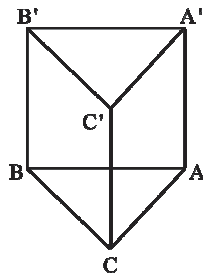
2. המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הגבהים BD ו-CE נפגשים בנקודה F.
א. מצאו את גודל הזווית בין כל שני וקטורים נתונים:
(1) $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ (2) $\vec{DB}$ ו- $\vec{CB}$ (3) $\vec{DA}$ ו- $\vec{DC}$.
ב. הסבירו מדוע הזווית בין $\vec{AB}$ ו- $\vec{BC}$ היא 120° .
ג. הסבירו מדוע הזווית בין $\vec{BC}$ ו- $\vec{EA}$ היא 60° .



3. אלכסוני הריבוע ABCD נפגשים בנקודה E.
א. קבעו מהו גודל הזווית בין כל זוג וקטורים:
(1) $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ (2) $\vec{CD}$ ו- $\vec{AD}$.
(3) $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ (4) $\vec{AE}$ ו- $\vec{CE}$.
ב. הסבירו מדוע הזווית בין $\vec{AC}$ ו- $\vec{CB}$ היא 135° .



4. נתונה קובייה ABCDA'B'C'D'.
אלכסוני הבסיס ABCD נפגשים בנקודה E.
א. קבעו מהו גודל הזווית בין כל זוג וקטורים:
(1) $\vec{A'B'}$ ו- $\vec{A'D'}$ (2) $\vec{AD}$ ו- $\vec{BD}$ (3) $\vec{CC'}$ ו- $\vec{D'D}$.
ב. הסבירו מדוע הזווית בין $\vec{BC}$ ו- $\vec{AA'}$ היא 90° .
ג. הסבירו מדוע הזווית בין $\vec{C'D'}$ ו- $\vec{BB'}$ היא 90° .



5. נתונה מנסרה ישרה ABCA'B'C', שבסיסה ABC, והם משולשים שווים צלעות.
א. קבעו מהו גודל הזווית בין כל זוג וקטורים:
(1) $\vec{BA}$ ו- $\vec{BB'}$ (2) $\vec{AB}$ ו- $\vec{CB}$ (3) $\vec{AC}$ ו- $\vec{A'C'}$.
ב. הסבירו מדוע הזווית בין $\vec{AB}$ ו- $\vec{A'C'}$ היא 60° .
ג. הסבירו מדוע הזווית בין $\vec{AC}$ ו- $\vec{CB}$ היא 120° .

תשובות:

1. א. 60° ב. 60° ג. 120° ד. 120° 2. א. (1) 60° (2) 30° (3) 180° .
3. א. (1) 45° (2) 90° (3) 0° (4) 180° 4. א. (1) 90° (2) 45° (3) 180° .
5. א. (1) 90° (2) 60° (3) 0° .

מכפלה סקלרית של שני וקטורים

נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ (השונים מווקטור האפס) בעלי מוצא משותף.

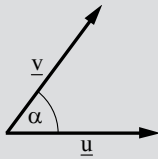
הזווית שבין שני הווקטורים היא α , כלומר $\alpha = \angle(\underline{u}; \underline{v})$.

ברצוננו להתאים לכל שני וקטורים כאלה מספר (סקלר),

התלוי באורכי הווקטורים ובזווית שביניהם.

מספר זה מסומן על ידי $\underline{u} \cdot \underline{v}$,

ונקרא **המכפלה הסקלרית** של שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



נגדיר את $\underline{u} \cdot \underline{v}$ באופן הבא: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$

באגף ימין ישנה מכפלה בין אורכי שני הווקטורים לקוסינוס הזווית שבין הווקטורים.

כפי שלמדנו, נהוג לסמן אורך של וקטור באמצעות ערך מוחלט, כלומר אורך הווקטור $\underline{u}$

מסומן $|\underline{u}|$ ואורך הווקטור $\underline{v}$ מסומן $|\underline{v}|$. שלושת גורמי המכפלה באגף ימין הם סקלרים

(מספרים), ולא וקטורים, ולכן התוצאה היא סקלר (מספר).

הנקודה שבין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$ ($\underline{u} \cdot \underline{v}$) מסמנת מכפלה סקלרית.

הערות:

(1) אם $\underline{u} = \underline{0}$ או $\underline{v} = \underline{0}$, אז מגדירים $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

(2) באמצעות המכפלה הסקלרית נחשב בעיקר אורכי וקטורים וזוויות במישור ובמרחב.

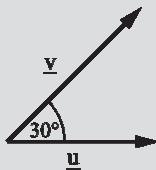
(3) קיים המושג מכפלה וקטורית, אך הוא אינו חלק מתכנית הלימודים של שאלון 472.

דוגמה:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים: $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = 5$.

הזווית שבין שני הווקטורים היא 30° .

חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.



פתרון:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \alpha = 4 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

נציב בנוסחה ונקבל:

דוגמה:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים: $|\underline{u}| = 6$, $|\underline{v}| = \sqrt{2}$, $\underline{u} \perp \underline{v}$.

חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

פתרון:

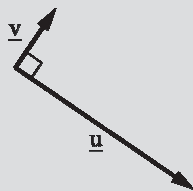
הווקטורים מאונכים זה לזה,

ולכן הזווית ביניהם היא 90° .

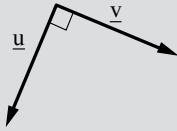
נציב בנוסחה $\alpha = 90^\circ$.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \alpha = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 90^\circ = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 0 = 0$$

נקבל:



שימו לב!



בדוגמה האחרונה, הזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$ היא ישרה, כלומר $\alpha = 90^\circ$, וקיבלנו שהמכפלה הסקלרית של שני הווקטורים שווה לאפס.

זו אינה תוצאה מקרית!

כאשר $\alpha = 90^\circ$, מתקיים: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 90^\circ$.

מאחר ש- $\cos 90^\circ = 0$, נקבל במקרה כזה $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

נסכם: אם שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מאונכים זה לזה ($\underline{u} \perp \underline{v}$), כלומר הזווית ביניהם

היא בת 90° , אז מתקיים $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

גם ההיפך נכון: אם שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ (שונים מווקטור האפס) מקיימים $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, אז הזווית ביניהם היא בת 90° , כלומר הווקטורים ניצבים (מאונכים) זה לזה.

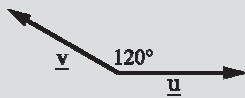
הסבר: אם $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, אז $|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha = 0$. ידוע $|\underline{u}| \neq 0$, $|\underline{v}| \neq 0$, לכן $\cos \alpha = 0$, ו- $\alpha = 90^\circ$.

דוגמה:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים: $|\underline{u}| = 3$, $|\underline{v}| = 2$.

הזווית שבין שני הווקטורים היא $\angle(\underline{u}; \underline{v}) = 120^\circ$

חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.



פתרון:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \alpha = 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

נציב בנוסחה ונקבל:

שימו לב!

בנוסחה $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \alpha$, האורכים $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$

הם חיוביים, ולכן **הסימן** (פלוס או מינוס) של $\cos \alpha$ **זהה** לסימן של $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

כאשר α זווית **חדה** ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), הקוסינוס שלה הוא **חיובי**,

ולכן המכפלה הסקלרית היא **חיובית**.

כאשר α זווית **קהה** ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), הקוסינוס שלה הוא **שלילי**,

ולכן המכפלה הסקלרית היא **שלילית**.

כאשר α זווית **ישרה** ($\alpha = 90^\circ$), הקוסינוס שלה **אפס**, ולכן המכפלה הסקלרית היא **אפס**.

תרגילים

1. נתונים אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ וגודל הזווית α שביניהם. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

א. $\alpha = 60^\circ$, $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 2$

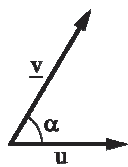
ב. $\alpha = 45^\circ$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 6$

ג. $\alpha = 150^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 5$

ד. $\alpha = 135^\circ$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 7$

ה. $\alpha = 90^\circ$, $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 8$

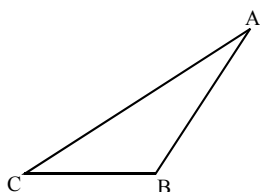
ו. $\alpha = 180^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 6$



2. בשרטוט שלפניכם מסומנים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

נתון: $\alpha = 55^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 3$.

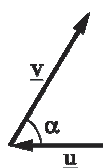
- א. מהו גודל הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$?
 ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.



3. במשולש ABC נתון: $\angle ABC = 115^\circ$.

נסמן: $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{u}$.

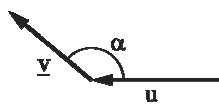
- א. מהו גודל הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$?
 ב. נתון: $BC = 3$, $BA = 5$.
 חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.



4. בשרטוט שלפניכם מסומנים הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

נתון: $\alpha = 60^\circ$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 4$.

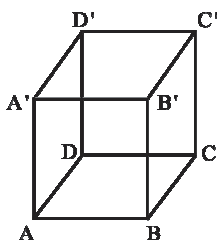
- א. מהו גודל הזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$?
 ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.



5. בשרטוט שלפניכם מסומנים הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

נתון: $\alpha = 140^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 6$.

- א. מהו גודל הזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$?
 ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.



6. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

- קבעו מהו הערך של כל אחת מהמכפלות הסקלריות הבאות:
 א. $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ב. $\underline{u} \cdot \underline{w}$ ג. $\underline{v} \cdot \underline{w}$

7. א. הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים: $|\underline{u}| = 4$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$. הזווית בין שני הווקטורים היא $\alpha = 30^\circ$.

חשבו את אורך הווקטור $\underline{v}$.

ב. הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים: $|\underline{v}| = \sqrt{3}$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = -6$. הזווית בין שני הווקטורים היא $\alpha = 120^\circ$.

חשבו את אורך הווקטור $\underline{u}$.

תשובות:

1. א. 3 ב. $6\sqrt{2}$ ג. $-10\sqrt{3}$ ד. $-7\sqrt{2}$ ה. 0 ו. -24 ז. 2 ח. 55° ט. 6.883 י. 3 יא. 115° יב. -6.339
 4. א. 120° ב. -12 ג. 5 ד. 40° ה. 22.98 ו. 6 ז. 0 ח. 0 ט. 0 י. 7 יא. $|\underline{v}| = 2\sqrt{3}$ יב. $|\underline{u}| = 4\sqrt{3}$

חישוב זווית בין שני וקטורים

הגדרנו את המכפלה הסקלרית כך: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \alpha$

אם "נבודד" את $\cos \alpha$ נקבל: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| |\underline{v}|}$ (הערה: נוסחה זו מופיעה בנוסחאון).

בדרך זו נוכל לחשב זווית בין שני וקטורים.

במונה רושמים את המכפלה הסקלרית של שני הווקטורים.

במכנה רושמים את המכפלה בין האורכים של שני הווקטורים.

דוגמה:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים: $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = 2$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = -5$.

חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

פתרון:

נחשב את הזווית המבוקשת באופן הבא: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| |\underline{v}|}$

נציב ונקבל $\cos \alpha = \frac{-5}{2 \cdot 4} = -0.625$. בעזרת מחשבון נקבל $\alpha = 128.68^\circ$, וזו הזווית המבוקשת.

8. אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם $|\underline{u}| = 5$, $|\underline{v}| = 3$. נתון: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 7$.

א. חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. 

ב. עפר טוען שגם ללא חישובים ניתן לדעת שהזווית בין שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא חדה. האם הוא צודק?

9. אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם $|\underline{u}| = 8$, $|\underline{v}| = 5$. נתון: $\underline{u} \cdot \underline{v} = -26$.

א. חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. עידו טוען שגם ללא חישובים ניתן לדעת שהזווית בין שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא קהה. האם הוא צודק?

10. אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם $|\underline{u}| = 5$, $|\underline{v}| = 2$. נתון: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

א. חשבו את הזווית בין שני הווקטורים.

ב. האם ניתן לענות על סעיף א' מבלי להיעזר בנתונים על אורכי הווקטורים? נמקו.

תשובות:

8. א. 62.18° . ב. כן, עפר צודק. המכפלה הסקלרית חיובית ולכן הזווית היא חדה.

9. א. 130.54° . ב. כן, עידו צודק. המכפלה הסקלרית שלילית ולכן הזווית היא קהה.

10. א. 90° . ב. כן. המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ שווה ל-0, ולכן הזווית בין $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא בת 90° .

מכפלה סקלרית של וקטור בווקטור עצמו

נחשב את המכפלה הסקלרית של וקטור $\underline{u}$ בווקטור עצמו, כלומר $\underline{u} \cdot \underline{u}$.

הנוסחה למכפלה סקלרית היא $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos \alpha$.

במקום $\underline{v}$ נציב $\underline{u}$. כמו כן, הזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{u}$ היא 0° .

נקבל: $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$. קיבלנו $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}| |\underline{u}| \cos 0^\circ = |\underline{u}| |\underline{u}| \cdot 1 = |\underline{u}|^2$.

נסכם:

המכפלה הסקלרית של וקטור בעצמו שווה לאורך הווקטור בריבוע, כלומר $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$.

באופן דומה, מתקיים: $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$, $\underline{w} \cdot \underline{w} = |\underline{w}|^2$ וכו'.

נדגיש כי למרות שהשוויון $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$ מזכיר את הכלל $a \cdot a = a^2$ לכפל של שני מספרים,

הרי שהביטוי $\underline{u} \cdot \underline{u}$ מייצג מכפלה סקלרית ולא כפל בין שני מספרים.

דוגמה:

הווקטור $\underline{u}$ מקיים $|\underline{u}| = 5$. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{u}$.

פתרון:

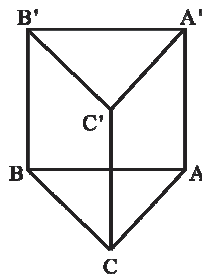
ניעזר בנוסחה $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$. נקבל: $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 5^2 = 25$.

11. א. הווקטור $\underline{u}$ מקיים $|\underline{u}| = 6$. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{u}$.

ב. אורך הווקטור $\underline{v}$ הוא 8. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{v} \cdot \underline{v}$.

12. א. הווקטור $\underline{u}$ מקיים $\underline{u} \cdot \underline{u} = 9$. חשבו את $|\underline{u}|$.

ב. נתונה מכפלה סקלרית $\underline{v} \cdot \underline{v} = 12$. חשבו את אורך הווקטור $\underline{v}$.



13. נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$.

בסיסי המנסרה ABC ו- $A'B'C'$ הם משולשים שווי צלעות.

נתון: $AB = 4$, $CC' = 5$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

קבעו מהו הערך של כל אחת מהמכפלות הסקלריות הבאות:

א. $\underline{u} \cdot \underline{w}$ ב. $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ג. $\underline{v} \cdot \underline{v}$ ד. $\underline{w} \cdot \underline{w}$

תשובות:

11. א. 36 ב. 64 12. א. 3 ב. $2\sqrt{3}$ 13. א. 0 ב. 8 ג. 16 ד. 25

מכפלה סקלרית של וקטורים שהם צירוף לינארי של וקטורים

נלמד עכשיו לחשב מכפלה סקלרית של שני וקטורים, כאשר לפחות אחד הווקטורים הוא צירוף לינארי של לפחות שני וקטורים. דוגמה למכפלה כזו: $(3\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} - 2\underline{v})$. בשלב הראשון לחישוב מכפלה סקלרית כזו נפתח סוגריים. בשלב זה נשתמש בחלק מחוקי הכפל במספרים המתקיימים גם עבור המכפלה הסקלרית. נרשום חוקים אלה:

$$(1) \text{ חילופיות: } \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}.$$

$$(2) \text{ הומוגניות: } \underline{u} \cdot t\underline{v} = t(\underline{u} \cdot \underline{v}).$$

$$(3) \text{ פילוג: } \underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}.$$

בשלב השני נקבל מכפלות סקלריות פשוטות (כמו $\underline{u} \cdot \underline{u}$, $\underline{v} \cdot \underline{v}$, $\underline{u} \cdot \underline{v}$), אותן נחשב כפי שראינו בדוגמאות קודמות.

דוגמה:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים: $|\underline{u}| = 2$, $|\underline{v}| = 3$, הזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$ היא 60° .

א. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{u})$.

ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $(2\underline{u} + 5\underline{v}) \cdot (\underline{u} - 3\underline{v})$.

פתרון:

א. ניעזר בחוק הפילוג ונקבל: $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{u}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{u}$.

$$\text{נחשב את } \underline{u} \cdot \underline{v}: \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$$

$$\text{נחשב את } \underline{u} \cdot \underline{u} \text{ על פי הכלל } \underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 2^2 = 4$$

$$\text{נציב ונקבל: } \underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{u}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{u} = 3 + 4 = 7$$

נסכם: המכפלה הסקלרית המבוקשת היא $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{u}) = 7$.

ב. ניעזר בחוק הפילוג ונקבל: $(2\underline{u} + 5\underline{v}) \cdot (\underline{u} - 3\underline{v}) = 2 \cdot \underline{u} \cdot \underline{u} - 6 \cdot \underline{u} \cdot \underline{v} + 5 \cdot \underline{v} \cdot \underline{u} - 15 \cdot \underline{v} \cdot \underline{v}$

מאחר ש- $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, נכנס איברים דומים: $(2\underline{u} + 5\underline{v}) \cdot (\underline{u} - 3\underline{v}) = 2 \cdot \underline{u} \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{v} - 15 \cdot \underline{v} \cdot \underline{v}$

$$\text{על פי סעיף א': } \underline{u} \cdot \underline{v} = 3, \underline{u} \cdot \underline{u} = 4, \text{ נחשב את } \underline{v} \cdot \underline{v}: \underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 3^2 = 9$$

$$\text{נציב ונקבל: } 2 \cdot \underline{u} \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{v} - 15 \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} = 2 \cdot 4 - 3 - 15 \cdot 9 = -130$$

נסכם: המכפלה הסקלרית המבוקשת היא $(2\underline{u} + 5\underline{v}) \cdot (\underline{u} - 3\underline{v}) = -130$.

הערות:

(1) כאשר מחשבים מכפלה סקלרית הכוללת פתיחת סוגריים, אפשר לחשב מראש

מכפלות סקלריות פשוטות כמו $\underline{u} \cdot \underline{u}$, $\underline{v} \cdot \underline{v}$, $\underline{u} \cdot \underline{v}$. זה מפשט את החישובים.

(2) בסעיף א', תוצאת המכפלה הסקלרית של $\underline{u}$ ושל $\underline{v} + \underline{u}$ היא חיובית,

ולכן ניתן לדעת שהזווית בין שני הווקטורים היא זווית חדה, גם מבלי לחשב אותה.

בסעיף ב' תוצאת המכפלה הסקלרית היא שלילית, ולכן ניתן לדעת גם ללא חישובים,

שהזווית בין שני הווקטורים היא קהה.

דוגמה:

$\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים, וכל אחד מהם מאונך לשני הווקטורים האחרים.
נתון: $|\underline{w}|=4$, $|\underline{v}|=\sqrt{5}$, $|\underline{u}|=3$.
חשבו את המכפלה הסקלרית $(\frac{1}{3}\underline{u}+\underline{w})\cdot(\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{w})$.

פתרון:

כדי לחשב את המכפלה הסקלרית המבוקשת נפתח סוגריים על פי חוק הפילוג.

$$(\frac{1}{3}\underline{u}+\underline{w})\cdot(\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{w})=\frac{1}{3}\cdot\underline{u}\cdot\underline{u}-\frac{1}{6}\cdot\underline{u}\cdot\underline{v}-\frac{1}{3}\cdot\underline{u}\cdot\underline{w}+\underline{u}\cdot\underline{w}-\frac{1}{2}\cdot\underline{v}\cdot\underline{w}-\underline{w}\cdot\underline{w}$$

נחשב כל אחת מהמכפלות הסקלריות הפשוטות.

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים המאונכים זה לזה שווה לאפס,

$$\underline{v}\cdot\underline{w}=0, \underline{u}\cdot\underline{w}=0, \underline{u}\cdot\underline{v}=0$$

$$\underline{w}\cdot\underline{w}=|\underline{w}|^2=4^2=16, \underline{v}\cdot\underline{v}=|\underline{v}|^2=(\sqrt{5})^2=5, \underline{u}\cdot\underline{u}=|\underline{u}|^2=3^2=9$$

$$(\frac{1}{3}\underline{u}+\underline{w})\cdot(\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{w})=\frac{1}{3}\cdot 9-0-0+0-0-16=-13$$

נציב ונקבל:

14. $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים שאורך כל אחד מהם הוא 1, והזווית ביניהם היא 60° .

א. חשבו את המכפלות הסקלריות הבאות: $\underline{v}\cdot\underline{v}$, $\underline{u}\cdot\underline{u}$, $\underline{u}\cdot\underline{v}$.

ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot(\underline{u}+\underline{v})$.

ג. חשבו את המכפלה הסקלרית $(2\underline{u}+\underline{v})\cdot(4\underline{u}+3\underline{v})$. 

15. $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים שהזווית ביניהם היא 150° . נתון: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=2\sqrt{3}$.

א. חשבו את המכפלות הסקלריות הבאות: $\underline{v}\cdot\underline{v}$, $\underline{u}\cdot\underline{u}$, $\underline{u}\cdot\underline{v}$.

ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot(\underline{u}-\underline{v})$.

ג. חשבו את המכפלה הסקלרית $(5\underline{u}+2\underline{v})\cdot(2\underline{u}+3\underline{v})$.

16. $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים המאונכים זה לזה. נתון: $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=4$.

חשבו את המכפלות הסקלריות הבאות:

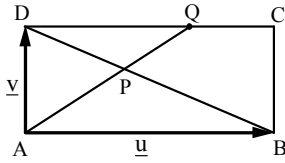
$$\text{א. } (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) \quad \text{ב. } (\underline{u}+\frac{1}{5}\underline{v})\cdot(1\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{u})$$

17. נתונים שני וקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ שווי אורך, כלומר $|\underline{a}|=|\underline{b}|$.

הוכיחו שהווקטורים $(\underline{a}+\underline{b})$ ו- $(\underline{a}-\underline{b})$ מאונכים זה לזה.

18. א. נתון שהווקטור $\underline{a}$ מאונך לווקטור $\underline{b}-\underline{c}$. הוכיחו: $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{c}$.

ב. נתון: $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{c}$. האם מכך ניתן להסיק ש- $\underline{b}=\underline{c}$? נמקו.



19. במלבן ABCD נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

נתון: $\overrightarrow{DQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$, $|\underline{v}| = 1$, $|\underline{u}| = 2$.

- א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AQ}$ ו- $\overrightarrow{DB}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{DB}$.

20. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים, וכל אחד מהם מאונך לשני הווקטורים האחרים.

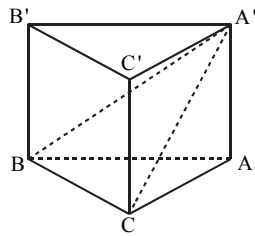
נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

- א. חשבו את המכפלות הסקלריות הבאות: $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{w} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{v}$, $\underline{u} \cdot \underline{u}$.
 ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$.

21. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים, וכל אחד מהם מאונך לשני הווקטורים האחרים.

נתון: $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = |\underline{w}| = 1$.

הראו שהווקטורים $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ ו- $\underline{u} + \underline{v} - 5\underline{w}$ מאונכים זה לזה.



22. ABCA'B'C' היא מנסרה ישרה שבסיסה משולש ABC.

נתון: $\angle BAC = 36.87^\circ$, $AA' = 5$, $AC = 4$, $AB = 6$.

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{A'C}$ ו- $\overrightarrow{A'B}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ (במידת הצורך).

ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'C}$.

תשובות:

14. א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0.5$, $\underline{u} \cdot \underline{u} = 1$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = 1$. ב. 1.5. ג. 16.

15. א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -18$, $\underline{u} \cdot \underline{u} = 36$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = 12$. ב. 54. ג. 90. 16. א. -7. ב. -4.2. 18. ב. לא.

19. א. $\overrightarrow{DB} = \underline{u} - \underline{v}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\underline{u} + \underline{v}$. ב. $1\frac{2}{3}$.

20. א. $\underline{u} \cdot \underline{u} = 1$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = 1$, $\underline{w} \cdot \underline{w} = 1$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$. ב. 2.

22. א. $\overrightarrow{A'B} = -\underline{w} + \underline{u}$, $\overrightarrow{A'C} = -\underline{w} + \underline{v}$. ב. 44.2.

חישוב אורך של וקטור שהוא צירוף לינארי של וקטורים

נלמד לחשב אורך של וקטור שהוא צירוף לינארי של שניים או שלושה וקטורים. ראינו שהמכפלה הסקלרית של הווקטור $\underline{u}$ בווקטור עצמו היא $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$. קיבלנו $|\underline{u}|^2 = \underline{u} \cdot \underline{u}$ ומכאן $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$. נוסחה זו מופיעה בנוסחאון בחינת הברגות. במילים – האורך של וקטור שווה לשורש הריבועי של המכפלה הסקלרית של הווקטור בווקטור עצמו.

הערות:

- (1) מקובל גם לסמן $\underline{u} \cdot \underline{u} = \underline{u}^2$.
- (2) בשוויון $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$, הביטוי $\underline{u} \cdot \underline{u}$ מייצג מכפלה סקלרית ולא כפל בין שני מספרים. בהתאם לכך בנוסחה $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$ אי אפשר לבטל את השורש ולרשום $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2} = \underline{u}$.
- (3) האורך של הווקטור הנגדי $-\underline{u}$ שווה לאורך של הווקטור $\underline{u}$, כלומר $|- \underline{u}| = |\underline{u}|$.
- (4) האורך של הווקטור $t\underline{u}$ שווה ל- $|t|$ פעמים האורך של $\underline{u}$.
אורך הווקטור $3\underline{u}$ הוא 3 פעמים אורך הווקטור $\underline{u}$: $|3\underline{u}| = 3|\underline{u}|$.
אורך הווקטור $-4\underline{u}$ הוא 4 פעמים אורך הווקטור $\underline{u}$: $|-4\underline{u}| = 4|\underline{u}|$.
- (5) כאשר מחשבים אורך של וקטור, שהוא צירוף לינארי של לפחות שני וקטורים שאינם קולינאריים, לאחר ההצבה בנוסחה $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$, נקבל בתוך השורש מכפלות סקלריות. נפתח סוגריים, נקבל מכפלות סקלריות פשוטות, אותן נחשב בהתאם לשלבים שלמדנו. לדוגמה: נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, ונרצה לחשב את אורך הווקטור $2\underline{u} + \underline{v}$, כלומר נרצה לחשב את $|2\underline{u} + \underline{v}|$.
בשלב הראשון ניעזר בנוסחה $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$. נקבל: $|2\underline{u} + \underline{v}| = \sqrt{(2\underline{u} + \underline{v}) \cdot (2\underline{u} + \underline{v})}$.
בשלב הבא נפתח סוגריים בתוך השורש, נקבל מכפלות סקלריות פשוטות, ונחשב אותן בהתאם לשלבים שלמדנו.

דוגמה:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = 2$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = -3$. חשבו את אורך הווקטור $\underline{u} - 3\underline{v}$.

פתרון:

ניעזר בנוסחה לחישוב אורך וקטור ונקבל: $|\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{(\underline{u} - 3\underline{v}) \cdot (\underline{u} - 3\underline{v})}$

נפתח סוגריים על פי חוק הפילוג: $\sqrt{(\underline{u} - 3\underline{v}) \cdot (\underline{u} - 3\underline{v})} = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot 3\underline{v} - 3\underline{v} \cdot \underline{u} + 9\underline{v} \cdot \underline{v}}$

ניעזר בכך ש- $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$, כמו כן, נשתמש בכך ש- $\underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{u} \cdot \underline{v}$.

נקבל: $\sqrt{|\underline{u}|^2 - 3\underline{u} \cdot \underline{v} - 3\underline{u} \cdot \underline{v} + 9|\underline{v}|^2} = \sqrt{|\underline{u}|^2 - 6\underline{u} \cdot \underline{v} + 9|\underline{v}|^2}$

נציב את הנתונים ונקבל: $\sqrt{4^2 - 6(-3) + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{16 + 18 + 36} = \sqrt{70}$

לסיכום: אורך הווקטור $\underline{u} - 3\underline{v}$ הוא $|\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{70}$.

הערה:

בדוגמה האחרונה חישבנו אורך של וקטור, ותוך כדי התהליך חישבנו מכפלה סקלרית של וקטור בעצמו. מאחר שפתיחת סוגריים במכפלה סקלרית דומה לפתיחת סוגריים במספרים, אפשר בחלק מהמקרים להיעזר בנוסחאות כפל מקוצר הקיימות במספרים. נרשום נוסחאות למקרים שבהם ניתן להשתמש במכפלות סקלריות מקוצרות:

$$(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = (\underline{u} + \underline{v})^2 = \underline{u}^2 = 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2$$

$$(\underline{u} - \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = (\underline{u} - \underline{v})^2 = \underline{u}^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2$$

$$(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u}^2 - \underline{v}^2$$

בכתיבה כזו המשמעות של $\underline{u}^2$ היא $\underline{u} \cdot \underline{u}$ ושל $\underline{v}^2$ היא $\underline{v} \cdot \underline{v}$.

נחשב בדוגמה הקודמת את $|\underline{u} - 3\underline{v}|$ על פי הנוסחה השנייה.

$$|\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{(\underline{u} - 3\underline{v}) \cdot (\underline{u} - 3\underline{v})} = \sqrt{(\underline{u} - 3\underline{v})^2} = \sqrt{\underline{u}^2 - 6\underline{u} \cdot \underline{v} + 9\underline{v}^2} \quad \text{נקבל:}$$

$$\sqrt{16 - 6(-3) + 9 \cdot 4} = \sqrt{16 + 18 + 36} = \sqrt{70} \quad \text{נציב: } \underline{u}^2 = \underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 16, \underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 4, \text{ נקבל: } \underline{u} \cdot \underline{v} = -3$$

נדגיש כי אפשר תמיד להשתמש גם בפתיחת סוגריים רגילה,

כלומר אין חובה להשתמש בנוסחאות המקוצרות.

כמו כן, בכתיבה מקוצרת כזו המשמעות של $\underline{u}^2$ היא $\underline{u} \cdot \underline{u}$, המשמעות של $\underline{v}^2$ היא $\underline{v} \cdot \underline{v}$ והמשמעות של $\underline{w}^2$ היא $\underline{w} \cdot \underline{w}$.

דוגמה:

הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מקיימים $|\underline{u}| = 3$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{w}| = 2$.

הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא 120° . הווקטור $\underline{w}$ מאונך לווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

חשבו את אורך הווקטור $3\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$.

פתרון:

$$|3\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}| = \sqrt{(3\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}) \cdot (3\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w})} \quad \text{ניעזר בנוסחה לחישוב אורך וקטור:}$$

נפתח סוגריים על פי חוק הפילוג ולאחר מכן נכנס איברים דומים:

$$\sqrt{9 \cdot \underline{u} \cdot \underline{u} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} - 3 \cdot \underline{u} \cdot \underline{w} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{4} \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{1}{2} \cdot \underline{v} \cdot \underline{w} - 3 \cdot \underline{u} \cdot \underline{w} - \frac{1}{2} \cdot \underline{w} \cdot \underline{v} + \underline{w} \cdot \underline{w}}$$

נחשב מכפלות סקלריות פשוטות:

$$\underline{w} \cdot \underline{w} = |\underline{w}|^2 = 2^2 = 4, \underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 6^2 = 36, \underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 3^2 = 9$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0, \underline{u} \cdot \underline{w} = 0, \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 120^\circ = 3 \cdot 6 \cdot (-0.5) = -9$$

$$\sqrt{9 \cdot 9 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-9) - 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-9) + \frac{1}{4} \cdot 36 - 0 - 0 - 0 + 4} = \sqrt{67} = 8.185 \quad \text{נקבל:}$$

$$|3\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}| = 8.185 \quad \text{לסיכום: אורך הווקטור } 3\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w} \text{ הוא } 8.185$$

23. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, המקיימים: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$, $\underline{u} \cdot \underline{v}=2$.
חשבו את $|\underline{u} + \underline{v}|$.
24. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, המקיימים: $|\underline{u}|=5$, $|\underline{v}|=3$, $\underline{u} \cdot \underline{v}=-1$.
חשבו את אורך הווקטור $\underline{u} - \underline{v}$.
25. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, המקיימים: $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=5$, $\underline{u} \cdot \underline{v}=8$.
חשבו את $|2\underline{u} - \underline{v}|$.
26.  נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, המאונכים זה לזה ומקיימים: $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=4$.
חשבו את $|2\underline{u} + 3\underline{v}|$.
27. הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא 60° . נתון: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשבו את $|3\underline{u} - 4\underline{v}|$.
28. הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא 120° . נתון: $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=4$.
חשבו את אורך הווקטור $\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$.
29. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים, וכל אחד מהם מאונך לשני הווקטורים האחרים.
נתון: $|\underline{w}|=3$, $|\underline{v}|=2$, $|\underline{u}|=1$.
חשבו את אורכי הווקטורים הבאים: א. $\underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$ ב. $\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$.
30. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים. $\underline{w}$ מאונך ל- $\underline{u}$ ול- $\underline{v}$. הזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$ היא 60° .
נתון: $|\underline{w}|=3$, $|\underline{u}|=|\underline{v}|=6$.
חשבו את אורך הווקטור $\frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$.

תשובות:

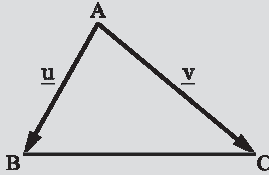
23. 7. 24. $\sqrt{10}$. 25. 6. 26. $4\sqrt{10}$. 27. $4\sqrt{19}$. 28. $\sqrt{3}$. 29. א. $\sqrt{14}$ ב. $\sqrt{3}$. 30. $6\sqrt{2}$.

הערה:

כאשר פותרים שאלה הכוללת צורה מישורית או גוף מרחבי חשוב להשתמש בתכונותיהם. לדוגמה: במשולש ישר זווית הניצבים מאונכים זה לזה, כלומר הווקטורים המייצגים את הניצבים מאונכים זה לזה, ומכאן שהמכפלה הסקלרית שלהם שווה לאפס. באופן דומה נתייחס לצלעות סמוכות במלבן או ריבוע המאונכות זו לזו, למקצועות סמוכים בתיבה או קובייה המאונכים זה לזה וכו'.

דוגמה:

במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
נתון: $\angle BAC = 80^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 4$.
א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את $\vec{BC}$.
ב. חשבו את אורך הצלע BC.



פתרון:

א. נביע את הווקטור $\vec{BC}$: $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\underline{u} + \underline{v}$.
ב. עלינו לחשב את אורך הצלע BC. נחשב את $|\vec{BC}|$, כלומר את $|\underline{v} - \underline{u}|$.
$$|\vec{BC}| = |-\underline{u} + \underline{v}| = \sqrt{(-\underline{u} + \underline{v}) \cdot (-\underline{u} + \underline{v})} = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u} - 2 \cdot \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v}}$$

נחשב את המכפלות הסקלריות הנדרשות.
נשים לב שהווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יוצאים שניהם מקדקוד הזווית $\angle BAC$, ולכן הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא $\angle BAC = 80^\circ$.
$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 80^\circ = 4 \cdot 5 \cdot \cos 80^\circ = 3.473$$

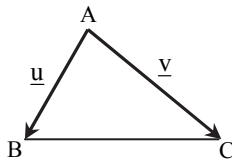
$$\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 5^2 = 25$$

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 4^2 = 16$$

נציב ונקבל:
$$|\vec{BC}| = |-\underline{u} + \underline{v}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u} - 2 \cdot \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{16 - 2 \cdot 3.473 + 25} = 5.836$$

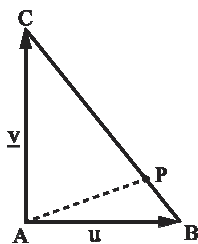
31.

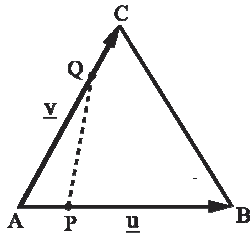
במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
נתון: $\angle BAC = 60^\circ$, $|\underline{v}| = 8$, $|\underline{u}| = 5$.
א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את $\vec{BC}$.
ב. חשבו את $|\vec{BC}|$.



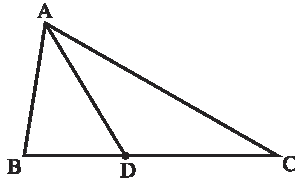
32.

במשולש ישר-זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$)
נתון: $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = \sqrt{3}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על הצלע BC, כך שמתקיים $\vec{BP} = \frac{1}{5} \cdot \vec{BC}$.
א. הביעו את $\vec{BC}$ ואת $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
ב. חשבו את אורך הווקטור $\vec{AP}$.

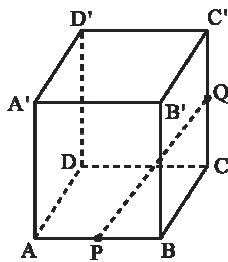




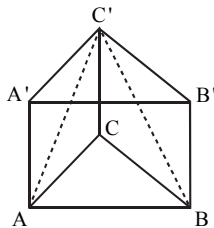
33. במשולש שווה-צלעות ABC, נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
נתון: $|\underline{u}| = 8$. הנקודה P מקיימת $\vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AB}$,
והנקודה Q מקיימת $\vec{AQ} = \frac{3}{4}\vec{AC}$.
א. הביעו את $\vec{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
ב. חשבו את $|\vec{PQ}|$.



34. במשולש ABC נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
הנקודה D מחלקת את הקטע BC ביחס $BD:DC = 2:3$.
א. הביעו את $\vec{AD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
ב. נתון גם: $\angle BAC = 70^\circ$, $|\underline{u}| = 2$, $|\underline{v}| = 4$.
חשבו את אורך הווקטור $\vec{AD}$.



35. בתיבה ABCD-A'B'C'D' נתון: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA' = 5$.
נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$. הנקודה P היא אמצע
המקצוע AB, הנקודה Q היא אמצע המקצוע CC'.
א. הביעו את הווקטור $\vec{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
ב. הסבירו מדוע מתקיים: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.
ג. חשבו את אורך הווקטור $\vec{PQ}$.



36. במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' נתון: $AB = AC = 6$,
 $AA' = 5$, $\angle CAB = 66.42^\circ$. נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$.
א. קבעו את הערך של: $\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{w} \cdot \underline{v}$, $\underline{w} \cdot \underline{u}$.
ב. הביעו את הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BC'}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
ג. חשבו את אורכי הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BC'}$.

תשובות:

31. א. $-\underline{u} + \underline{v}$. ב. 7. ג. 32. א. $\vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\vec{AP} = \frac{4}{5}\underline{u} + \frac{1}{5}\underline{v}$. ב. $|\vec{AP}| = |\frac{4}{5}\underline{u} + \frac{1}{5}\underline{v}| = 2.08$.
33. א. $\vec{PQ} = -\frac{1}{5}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v}$. ב. $|\vec{PQ}| = 5.381$. ג. 34. א. $\vec{AD} = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$. ב. 2.305.
35. א. $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$. ב. מקצועות סמוכים בתיבה מאונכים זה לזה. ג. $\sqrt{19.5} = 4.387$.
36. א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 14.4$, $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$. ב. $\vec{AC'} = \underline{v} + \underline{w}$, $\vec{BC'} = -\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$. ג. $|\vec{AC'}| = 7.81$, $|\vec{BC'}| = 8.26$.

חישוב זווית בין שני וקטורים שהם צירוף לינארי של וקטורים

למדנו לחשב זווית בין שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנוסחה $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| |\underline{v}|}$.

במונה רושמים את המכפלה הסקלרית של שני הווקטורים.

במכנה רושמים את המכפלה בין האורכים של שני הווקטורים.

נראה שימוש בנוסחה במקרה שבו לפחות אחד הווקטורים הוא צירוף לינארי של לפחות שני וקטורים.

דוגמה:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא בת 45° .
חשבו את הזווית בין הווקטור $\underline{u} + \underline{v}$ לווקטור $3\underline{u} - 2\underline{v}$.

פתרון:

נחשב את הזווית בין שני הווקטורים באופן הבא: $\cos \alpha = \frac{(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (3\underline{u} - 2\underline{v})}{|\underline{u} + \underline{v}| |3\underline{u} - 2\underline{v}|}$.

(1) נחשב את המכפלה הסקלרית שבמונה:

$$(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (3\underline{u} - 2\underline{v}) = 3\underline{u} \cdot \underline{u} - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + 3\underline{v} \cdot \underline{u} - 2\underline{v} \cdot \underline{v} = 3|\underline{u}|^2 + \underline{u} \cdot \underline{v} - 2|\underline{v}|^2$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| |\underline{v}| \cos 45^\circ = 6 \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ = 9\sqrt{2}, \quad |\underline{v}|=3, \quad |\underline{u}|=6$$

$$3 \cdot 6^2 + 9\sqrt{2} - 2 \cdot 3^2 = 102.728 \quad \text{נקבל:}$$

(2) נחשב את אורכי הווקטורים (המופיעים במכנה).

$$|\underline{u} + \underline{v}| = \sqrt{(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} + \underline{v})} = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u} + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v}}$$

נחשב את המכפלות הסקלריות שבתוך השורש:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 9\sqrt{2} \text{ ש-ראינו כן, כמו כן, } \underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 3^2 = 9, \quad \underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 6^2 = 36$$

$$|\underline{u} + \underline{v}| = \sqrt{36 + 2 \cdot 9\sqrt{2} + 9} = 8.394 \quad \text{נציב ונקבל:}$$

$$|3\underline{u} - 2\underline{v}| = \sqrt{(3\underline{u} - 2\underline{v}) \cdot (3\underline{u} - 2\underline{v})} = \sqrt{9\underline{u} \cdot \underline{u} - 12\underline{u} \cdot \underline{v} + 4\underline{v} \cdot \underline{v}}$$

$$|3\underline{u} - 2\underline{v}| = \sqrt{9 \cdot 36 - 12 \cdot 9\sqrt{2} + 4 \cdot 9} = 14.397 \quad \text{נציב: } \underline{u} \cdot \underline{v} = 9\sqrt{2}, \quad \underline{v} \cdot \underline{v} = 9, \quad \underline{u} \cdot \underline{u} = 36 \text{ נקבל:}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\underline{u} + \underline{v}) \cdot (3\underline{u} - 2\underline{v})}{|\underline{u} + \underline{v}| |3\underline{u} - 2\underline{v}|} = \frac{102.728}{8.394 \cdot 14.397}$$

בעזרת מחשבון נקבל $\alpha = 31.78^\circ$ וזו הזווית המבוקשת.

דוגמה:

$\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים, וכל אחד מהם מאונך לשני הווקטורים האחרים. נתון: $|\underline{v}|=3$, $|\underline{u}|=|\underline{w}|=6$. חשבו את גודל הזווית בין הווקטור $\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}$ לווקטור $\underline{u}-\underline{v}-\underline{w}$.

פתרון:

נחשב את הזווית שבין שני הווקטורים על פי הנוסחה: $\cos \alpha = \frac{(\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}) \cdot (\underline{u}-\underline{v}-\underline{w})}{|\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}| \cdot |\underline{u}-\underline{v}-\underline{w}|}$

נחשב תחילה את המונה. נפתח סוגריים ונקבל: $\frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{u} \cdot \underline{w} - \underline{v} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{w}$.
כאשר שני וקטורים מאונכים זה לזה, המכפלה הסקלרית שלהם שווה לאפס.
נקבל ששלושת הווקטורים הנתונים מקיימים: $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.
כמו כן מתקיים: $\underline{w} \cdot \underline{w} = |\underline{w}|^2 = 6^2 = 36$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 3^2 = 9$, $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 6^2 = 36$.
נחשב את המונה: $\frac{1}{2} \cdot 36 - 0 - 0 + 0 - 0 - 36 = -18$

נעבור לחשב את אורכי הווקטורים שבמכנה:

$$|\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}| = \sqrt{(\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}) \cdot (\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w})} = \sqrt{\frac{1}{4}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{w} \cdot \underline{w}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 36 + 0 + 36} = \sqrt{45}$$

$$|\underline{u}-\underline{v}-\underline{w}| = \sqrt{(\underline{u}-\underline{v}-\underline{w}) \cdot (\underline{u}-\underline{v}-\underline{w})} = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{w} - \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{w} - \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{w} \cdot \underline{w}}$$

$$|\underline{u}-\underline{v}-\underline{w}| = \sqrt{36 - 0 - 0 - 0 + 9 + 0 - 0 + 0 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

$$\cos \alpha = \frac{(\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}) \cdot (\underline{u}-\underline{v}-\underline{w})}{|\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{w}| \cdot |\underline{u}-\underline{v}-\underline{w}|} = \frac{-18}{\sqrt{45} \cdot 9} = -0.298$$

נחשב את הזווית המבוקשת באופן הבא: $\alpha = 107.3^\circ$ וזו הזווית המבוקשת.

37. הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא 60° . נתון: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=6$.

א. חשבו את אורכי הווקטורים הבאים: (1) $\underline{u}+\underline{v}$, (2) $\underline{u}-3\underline{v}$.

ב. חשבו את הזווית בין הווקטור $\underline{u}+\underline{v}$ לבין הווקטור $\underline{u}-3\underline{v}$.

38. $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים המאונכים זה לזה. נתון: $|\underline{u}|=|\underline{v}|=8$.

א. חשבו את אורך הווקטור $\underline{u}-\underline{v}$.

ב. חשבו את הזווית בין הווקטור $\underline{u}$ לבין הווקטור $\underline{u}-\underline{v}$.

39.  הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מאונכים זה לזה, ומקיימים: $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=3$.
חשבו את הזווית בין הווקטור $2\underline{u}+\underline{v}$ לבין הווקטור $3\underline{u}-4\underline{v}$.

40. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. נתון: $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=\sqrt{3}$, $\angle(\underline{u};\underline{v})=30^\circ$.
חשבו את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}$ ו- $\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$.

41. $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים שהזווית ביניהם היא 120° . נתון: $|\underline{v}| = 2|\underline{u}|$.
 א. הביעו באמצעות $|\underline{u}|$ את המכפלות הסקלריות: $(1) \underline{u} \cdot \underline{u}$, $(1) \underline{v} \cdot \underline{v}$, $(1) \underline{u} \cdot \underline{v}$.
 ב. הביעו באמצעות $|\underline{u}|$: (1) את אורך הווקטור $2\underline{u} + \underline{v}$, (2) את אורך הווקטור $-\underline{u} + 4\underline{v}$.
 ג. חשבו את הזווית בין $2\underline{u} + \underline{v}$ לבין $-\underline{u} + 4\underline{v}$.

42. $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים. נתון: $|\underline{v}| = 3|\underline{u}|$, $\angle(\underline{u}; \underline{v}) = 60^\circ$.
 א. הביעו באמצעות $|\underline{u}|$ את המכפלות הסקלריות: $(1) \underline{u} \cdot \underline{u}$, $(1) \underline{v} \cdot \underline{v}$, $(1) \underline{u} \cdot \underline{v}$.
 ב. הביעו באמצעות $|\underline{u}|$: (1) את אורך הווקטור $\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$, (2) את אורך הווקטור $\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v}$.
 ג. חשבו את הזווית בין הווקטור $\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$ לבין הווקטור $\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v}$.

43. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים המאונכים זה לזה.
 הוכיחו שאם $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 2$, אז הווקטור $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ מאונך לווקטור $\underline{u} - \underline{v}$.

44. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים, וכל אחד מהם מאונך לשני הווקטורים האחרים.
 נתון: $|\underline{w}| = 2$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1$.
 א. חשבו את אורך הווקטור $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטור $\underline{u}$ לבין הווקטור $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$.

45. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים, וכל אחד מהם יוצר זווית בת 60° עם שני הווקטורים האחרים.
 נתון: $|\underline{u}| = 1$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{w}| = 3$.
 א. חשבו את אורכי הווקטורים הבאים: $(1) \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $(2) -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטור $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ לבין הווקטור $-\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$.

46. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ הם שלושה וקטורים, וכל אחד מהם מאונך לשני הווקטורים האחרים.
 נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$. חשבו את הזווית בין $\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$ לבין $-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$.

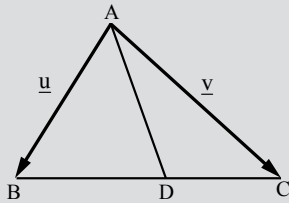
תשובות:

37. א. $(1) 2\sqrt{19} = 8.718$, $(2) 16.37$. ב. 144.37° . 38. א. $8\sqrt{2}$. ב. 45° . 39. 100.3° . 40. 128.95° .
 41. א. $(1) |\underline{u}|^2$, $(2) 4|\underline{u}|^2$, $(3) -|\underline{u}|^2$. ב. $(1) \sqrt{6}|\underline{u}| = 2.449|\underline{u}|$, $(2) \sqrt{73}|\underline{u}| = 8.544|\underline{u}|$. ג. 65.82° .
 42. א. $(1) |\underline{u}|^2$, $(2) 9|\underline{u}|^2$, $(3) 1.5|\underline{u}|^2$. ב. $(1) \sqrt{3}|\underline{u}| = 1.732|\underline{u}|$, $(2) 2.784|\underline{u}|$. ג. 141.05° .
 44. א. $\sqrt{6}$. ב. 65.91° . 45. א. $(1) 5$, $(2) \sqrt{2}$. ב. 129.52° . 46. 145.32° .

חישובי זוויות ושטחים – שאלות במישור

דוגמה:

במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$. נתון: $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. הנקודה D נמצאת על הצלע BC ומקיימת: $\vec{BD} = \frac{3}{5}\vec{BC}$.



- הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{AD}$.
- חשבו את אורך הווקטור $\vec{AD}$.
- חשבו את גודל הזווית DAC.
- חשבו את שטח המשולש ADC.

פתרון:

א. נביע את הווקטור $\vec{AD}$: $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC}$

נתון $\vec{AB} = \underline{u}$. נביע $\vec{BC}$: $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\underline{u} + \underline{v}$

נציב ונקבל: $\vec{AD} = \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC} = \underline{u} + \frac{3}{5}(-\underline{u} + \underline{v}) = \underline{u} - \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} = \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v}$

ב. נתון $AB = 4$, כלומר $|\underline{u}| = 4$ ו- $AC = 6$, כלומר $|\underline{v}| = 6$.

כמו כן, $\angle BAC = 60^\circ$, כלומר הזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$ היא 60° . נביע את $|\vec{AD}|$:

$$|\vec{AD}| = \left| \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} \right| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} \right) \cdot \left(\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} \right)} = \sqrt{\frac{4}{25}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{12}{25}\underline{u} \cdot \underline{v} + \frac{9}{25}\underline{v} \cdot \underline{v}} =$$

נחשב מכפלות סקלריות נדרשות:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 6 \cdot 0.5 = 12, \quad \underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 6^2 = 36, \quad \underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 4^2 = 16$$

נציב ונקבל: $|\vec{AD}| = \sqrt{\frac{4}{25} \cdot 16 + \frac{12}{25} \cdot 12 + \frac{9}{25} \cdot 36} = \sqrt{21.28}$

ג. כדי לחשב זווית נתונה בציור, נוזה שני וקטורים היוצאים מקדקוד הזווית, או שני וקטורים הנכנסים לקדקוד הזווית. הזווית בין שני הווקטורים היא הזווית המבוקשת. בדוגמה זו, שני הווקטורים $\vec{AD}$ ו- $\vec{AC}$ יוצאים מקדקוד הזווית המבוקשת DAC, ולכן נחשב את הזווית ביניהם. ניתן גם לחשב זווית בין שני הווקטורים $\vec{DA}$ ו- $\vec{CA}$, הנכנסים לקדקוד הזווית המבוקשת.

נחשב את הזווית באופן הבא: $\cos \angle DAC = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AD}| |\vec{AC}|} = \frac{\left(\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} \right) \cdot \underline{v}}{\left| \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} \right| |\underline{v}|}$

נחשב את המכפלה הסקלרית שבמונה: $\left(\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} \right) \cdot \underline{v} = \frac{2}{5}\underline{u} \cdot \underline{v} + \frac{3}{5}\underline{v} \cdot \underline{v} = \frac{2}{5} \cdot 12 + \frac{3}{5} \cdot 36 = 26.4$

נחשב את אורכי הווקטורים שבמכנה. נתון $|\underline{v}| = 6$. אורך הווקטור $\vec{AD}$ הוא $\sqrt{21.28}$.

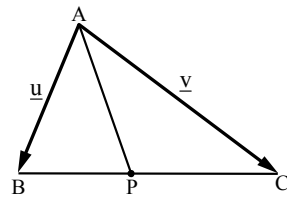
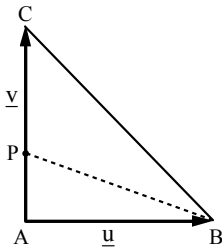
נציב ונקבל: $\cos \angle DAC = \frac{\left(\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} \right) \cdot \underline{v}}{\left| \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v} \right| |\underline{v}|} = \frac{26.4}{\sqrt{21.28} \cdot 6}$. בעזרת מחשבון נקבל $\angle DAC = 17.48^\circ$.

ד. נחשב את שטח המשולש ADC על פי מחצית מכפלת אורכי שתי צלעות בסינוס הזווית שביניהן. נוסחה זו נלמדה בטריגונומטריה ונמצאת בנוסחאון בחינת הבגרות.

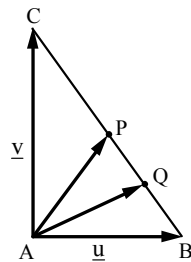
$$S_{\Delta ADC} = \frac{AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC}{2} = \frac{\sqrt{21.28} \cdot 6 \cdot \sin 17.48^\circ}{2} = 4.157 \quad \text{נקבל:}$$

תרגילים

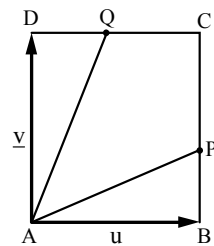
1. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\angle BAC = 90^\circ$). נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 6$. הנקודה P מקיימת $\vec{AP} = \frac{3}{8} \cdot \vec{AC}$.
- הביעו את הווקטורים $\vec{BC}$ ו- $\vec{BP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 - חשבו את $|\vec{BC}|$ ו- $|\vec{BP}|$.
 - חשבו את $\angle CBP$.
 - חשבו את שטח המשולש ABP.



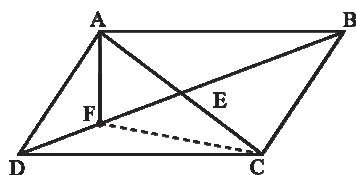
2. במשולש ABC נתון: $\angle BAC = 80^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 2$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. הנקודה P נמצאת על הצלע BC, כך שמתקיים $BP:PC = 3:4$.
- הביעו את $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 - חשבו את אורך הווקטור $\vec{AP}$.
 - חשבו את גודל הזווית BAP.
 - חשבו את שטח המשולש ABP.



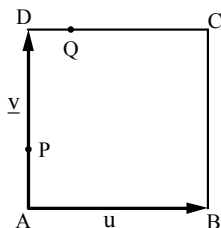
3. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$), נתון: $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$, $|\underline{v}| = 12$, $|\underline{u}| = 8$. P היא אמצע הקטע BC ו-Q היא אמצע הקטע PB.
- הביעו את $\vec{AP}$ ואת $\vec{AQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 - חשבו את המכפלה הסקלרית $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$.
 - חשבו את $|\vec{AP}|$ ואת $|\vec{AQ}|$.
 - חשבו את הזווית $\angle PAQ$.



4. במלבן ABCD הנקודות P ו-Q מקיימות $\vec{DQ} = \frac{2}{5} \cdot \vec{DC}$, $\vec{BP} = \frac{2}{5} \cdot \vec{BC}$.
- נתון: $|\underline{v}| = \sqrt{6}$, $|\underline{u}| = 2$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
- הביעו את $\vec{AP}$ ואת $\vec{AQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 - חשבו את גודל הזווית $\angle QAP$.

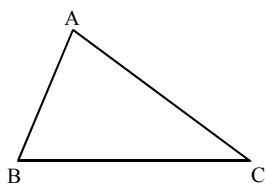


5. האלכסונים AC ו-BD של מקבילית ABCD נחתכים בנקודה E. הנקודה F נמצאת על האלכסון BD. נתון: $DF:FB = 1:3$. נסמן: $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 נתון: $\angle BAD = 120^\circ$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$.
 א. הביעו את הווקטורים $\vec{AF}$ ו- $\vec{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. חשבו את גודל הזווית FAC.
 ג. חשבו את שטח המשולש ACF.

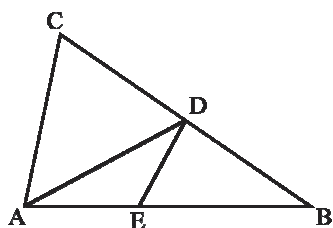


6. בריבוע ABCD נסמן: $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 נתון: $\vec{DQ} = \frac{1}{3}\vec{QC}$, $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AD}$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1$.
 א. הביעו את הווקטורים $\vec{PQ}$ ו- $\vec{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. חשבו את הזווית בין $\vec{PQ}$ לבין $\vec{AC}$.
 ג. האם הקטעים AC ו-PQ נמצאים על ישרים נחתכים, או על ישרים מצטלבים? נמקו.

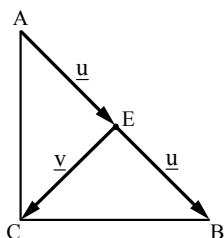
7. הווקטור $\underline{u}$ מאונך לווקטור $3\underline{u} - 2\underline{v}$. נתון: $|\underline{u}| = 2$.
 א. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.
 ב. נתון: $|3\underline{u} - 2\underline{v}| = 4$. (1) חשבו את אורך הווקטור $\underline{v}$.
 (2) חשבו את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



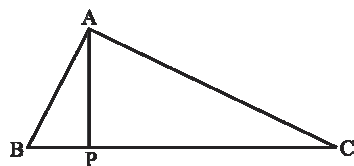
8. במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את $\vec{BC}$.
 ב. נתון: $|\vec{AB}| = 11$, $|\vec{AC}| = 16$, $|\vec{BC}| = 18$.
 חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.
 ג. חשבו את הזווית BAC.



9. הנקודה D היא אמצע הצלע AC במשולש ABC. הנקודה E נמצאת על הצלע BC, כך ש- $BE:EC = 2:3$.
 נתון: $AB = 6$, $AC = 10$. נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
 א. הביעו את הווקטורים $\vec{BD}$ ו- $\vec{ED}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. נתון: $|\vec{ED}| = \sqrt{11.08}$.
 (1) חשבו את $\underline{u} \cdot \underline{v}$. (2) חשבו את $\angle A$.
 ג. חשבו את שטח המשולש ABC.



10. במשולש ABC הנקודה E היא אמצע הצלע AB.
 נסמן: $\vec{EB} = \underline{u}$, $\vec{EC} = \underline{v}$.
 א. הביעו את הווקטורים $\vec{CB}$ ו- $\vec{CA}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הוכיחו כי אם $\vec{CA}$ ניצב ל- $\vec{CB}$, אז $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם וקטורים בעלי אותו אורך.



11. במשולש ABC נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = 12$.
 הנקודה P נמצאת על הצלע BC, כך ש- $BP:PC = 1:9$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את $\vec{AP}$ ו- $\vec{BC}$.
 ב. נתון ש- $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. הוכיחו: $BC \perp AP$.
 ג. האם המשולש ABC הוא ישר-זווית? נמקו.

תשובות:

1. א. $\vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\vec{BP} = -\underline{u} + \frac{3}{8}\underline{v}$. ב. $|\vec{BC}| = 6\sqrt{2}$, $|\vec{BP}| = 6.408$. ג. 24.44° . ד. 11.25.
 2. א. $\vec{AP} = \frac{4}{7}\underline{u} + \frac{3}{7}\underline{v}$. ב. 2.219. ג. 49.52° . ד. 1.688.
 3. א. $\vec{AP} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{AQ} = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$. ב. 42. ג. $\sqrt{52}$, $\sqrt{45}$. ד. 29.74° .
 4. א. $\vec{AP} = \underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$, $\vec{AQ} = \underline{v} + \frac{2}{5}\underline{u}$. ב. 45.81° .
 5. א. $\vec{AC} = \underline{u} + \underline{v}$, $\vec{AF} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v}$. ב. 49.11° . ב. 1.299.
 6. א. $\vec{AC} = \underline{u} + \underline{v}$, $\vec{PQ} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$. ב. 24.44° .
- ג. AC ו- PQ נמצאים באותו מישור ואינם קולינאריים, ולכן הם נמצאים על ישרים נחתכים.
7. א. 6. ב. $\sqrt{13}$ (1) 33.69° (2). 8. א. $\vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$. ב. 6. ב. 78.46° .
 9. א. $\vec{BD} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{ED} = -\frac{3}{5}\underline{u} + \frac{1}{10}\underline{v}$. ב. (1) 24. (2) 66.42° . ג. 27.5.
 10. א. $\vec{CB} = \underline{u} - \underline{v}$, $\vec{CA} = -\underline{u} - \underline{v}$. 11. א. $\vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\vec{AP} = \frac{9}{10}\underline{u} + \frac{1}{10}\underline{v}$. ג. כן.

חישובי זוויות, אורכים ושטחים בגופים מרחביים

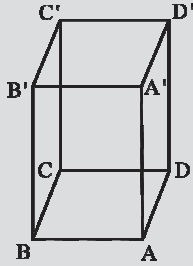
בחלק זה נשתמש במכפלה סקלרית כדי לחשב זוויות, אורכי קטעים, שטחים ונפחים בגופים תלת ממדיים.

נשים לב למספר תכונות חשובות במסגרת שאלות אלה:

בתיבה ובקובייה כל שני מקצועות סמוכים מאונכים זה לזה, ולכן המכפלה הסקלרית של הווקטורים המייצגים מקצועות אלה שווה לאפס.

לדוגמה: בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שמשמאל מתקיים בין השאר: $\vec{A'D'} \cdot \vec{DD'} = 0$, $\vec{CB} \cdot \vec{CC'} = 0$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$.

באופן דומה, במנסרה ישרה, המקצועות הצדדיים (שהם גבהים במנסרה) מאונכים למקצועות הבסיס, ולכן המכפלה הסקלרית של הווקטורים המייצגים אותם שווה לאפס.



דוגמה:

נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$, שבסיסה משולש שווה צלעות ABC .

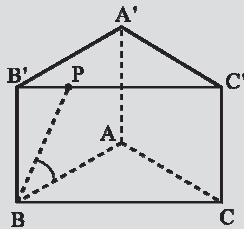
נסמן: $\vec{AA'} = \vec{w}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AB} = \vec{u}$.

P היא נקודה על $B'C'$, כך ש- $\vec{B'P} = \frac{1}{4}\vec{B'C'}$.

א. הביעו את $\vec{A'P}$ ואת $\vec{BP}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$ ו- $\vec{w}$.

ב. נתון: $|\vec{w}| = 6$, $|\vec{v}| = 4$. חשבו את גודל הזווית ABP .

ג. האם $\vec{A'P}$ ו- $\vec{BP}$ מאונכים זה לזה? נמקו.



פתרון:

א. נביע את $\vec{A'P}$ על פי המסלול הבא: $\vec{A'P} = \vec{A'B'} + \vec{B'P}$.

נתון כי $\vec{B'P} = \frac{1}{4}\vec{B'C'}$, לכן $\vec{A'P} = \vec{A'B'} + \frac{1}{4}\vec{B'C'}$.

נביע את $\vec{B'C'}$: $\vec{B'C'} = \vec{B'A'} + \vec{A'C'} = -\vec{u} + \vec{v}$

נביע את $\vec{A'P}$: $\vec{A'P} = \vec{A'B'} + \frac{1}{4}\vec{B'C'} = \vec{u} + \frac{1}{4}(-\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} - \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$

נביע את $\vec{BP}$: $\vec{BP} = \vec{BB'} + \vec{B'P} = \vec{w} + \frac{1}{4}(-\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} - \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}$

ב. הזווית ABP היא זווית בין שני הווקטורים $\vec{BA}$ ו- $\vec{BP}$, היוצאים מקדקוד הזווית.

נחשב את הזווית באופן הבא: $\cos \angle ABP = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BP}}{|\vec{BA}| |\vec{BP}|} = \frac{-\vec{u} \cdot (-\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w})}{|-\vec{u}| \cdot |-\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}|}$

נחשב את המכפלה הסקלרית שבמונה: $-\vec{u} \cdot (-\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{4}\vec{u} \cdot \vec{u} - \frac{1}{4}\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$

נחשב מכפלות סקלריות שנדרשות. נשים לב ש- $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$.

המשולש ABC הוא שווה-צלעות, לכן $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$ לא מאונכים זה לזה,

אלא הזווית ביניהם היא 60° . כמו כן, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 4$.

נקבל: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$

$$\text{כמו כן: } \underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 4^2 = 16, \underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 4^2 = 16, \underline{w} \cdot \underline{w} = |\underline{w}|^2 = 6^2 = 36$$

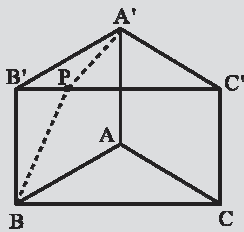
$$\text{נחשב את המכפלה הסקלרית שבמונה: } \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{4} \cdot 8 - 0 = 4 - 2 = 2$$

$$\text{נחשב את אורכי הצלעות שבמכנה. נחשב את אורך הווקטור } \overrightarrow{BA} = -\underline{u} : |\underline{u}| = |\underline{u}| = 4$$

$$\begin{aligned} \text{נחשב את אורך הווקטור } \overrightarrow{BP} : \left| -\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \underline{w} \right| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \underline{w} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \underline{w} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}\underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{1}{16}\underline{u} \cdot \underline{v} - \frac{1}{4}\underline{u} \cdot \underline{w} - \frac{1}{16}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{16}\underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{1}{4}\underline{v} \cdot \underline{w} - \frac{1}{4}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{1}{4}\underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{w} \cdot \underline{w}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{16} \cdot 16 - \frac{1}{16} \cdot 8 - 0 - \frac{1}{16} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + 0 - 0 + 0 + 36} = 6.083 \end{aligned}$$

$$\text{נציב ונקבל: } \cos \angle ABP = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{2}{4 \cdot 6.083}$$

$$\angle ABP = 85.29^\circ \text{ נקבל בעזרת מחשבון}$$



ג. כדי לדעת האם $\overrightarrow{A'P}$ ו- $\overrightarrow{BP}$ מאונכים זה לזה,

יש לבדוק האם המכפלה הסקלרית שלהם

$$\text{שווה לאפס, כלומר } \overrightarrow{A'P} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

לא חייבים להתייחס למכנה.

נחשב את המכפלה הסקלרית:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'P} \cdot \overrightarrow{BP} &= \left(\frac{3}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \underline{w} \right) = -\frac{3}{16}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{3}{16}\underline{u} \cdot \underline{v} + \frac{3}{4}\underline{u} \cdot \underline{w} - \frac{1}{16}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{16}\underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{1}{4}\underline{v} \cdot \underline{w} = \\ &= -\frac{3}{16} \cdot 16 + \frac{3}{16} \cdot 8 + 0 - \frac{1}{16} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + 0 = -1 \end{aligned}$$

קיבלנו $\overrightarrow{A'P} \cdot \overrightarrow{BP} = -1$, ולכן $\overrightarrow{A'P}$ ו- $\overrightarrow{BP}$ אינם מאונכים זה לזה.

דוגמה:

נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

$$\text{נסמן: } \overrightarrow{AA'} = \underline{w}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AB} = \underline{u}$$

הנקודות P ו- M נמצאות על האלכסון DB'

ומחלקות אותו לשלושה חלקים שווים ($DP = PM = MB'$).

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{DB'}$ ו- $\overrightarrow{DP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{CP}$ ו- $\overrightarrow{CM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ג. נתון: $|\underline{u}| = 2$, $|\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$. חשבו את $\angle PCM$.

ד. חשבו את שטח המשולש PCM.

פתרון:

$$\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'} = \underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \quad \text{א. נביע את } \overrightarrow{DB'} \text{ באופן הבא:}$$

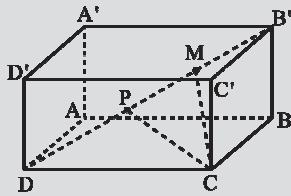
נעבור להביע את $\overrightarrow{DP}$. הנקודות P ו- M מחלקות את DB' לשלושה חלקים שווים,

$$\text{לכן } \overrightarrow{DP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DB'} = \frac{1}{3} (\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}) = \frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w} \quad \text{נקבל:}$$

ב. נביע את הווקטור $\overrightarrow{CP}$: $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP} = -\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w} = -\frac{2}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$
 נעבור להביע את הווקטור $\overrightarrow{CM}$.

על פי יחס החלוקה הנתון מתקיים $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB'}$.

נציב ונקבל : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DB'} = -\underline{u} + \frac{2}{3}(\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}) = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}$



ג. הזווית המבוקשת, $\angle PCM$,

נוצרת בין הווקטורים $\overrightarrow{CP}$ ו- $\overrightarrow{CM}$, שמוצאם בקדקוד הזווית.

נציב ונקבל : $\cos \angle PCM = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{CM}|}$

נחשב את המונה : $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} = \left(-\frac{2}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}\right)$

$$= \frac{2}{9}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{4}{9}\underline{u} \cdot \underline{v} - \frac{4}{9}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{1}{9}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{2}{9}\underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{2}{9}\underline{v} \cdot \underline{w} - \frac{1}{9}\underline{w} \cdot \underline{u} - \frac{2}{9}\underline{w} \cdot \underline{v} + \frac{2}{9}\underline{w} \cdot \underline{w}$$

מאחר שהווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מייצגים את מקצועות התיבה,

כל אחד מהם מאונך לשני האחרים, ולכן מתקיים : $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.
 נציב 0 במקום המכפלות הסקלריות הללו.

נקבל : $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{2}{9}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{2}{9}\underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{2}{9}\underline{w} \cdot \underline{w}$

נביע מכפלות סקלריות : $\underline{w} \cdot \underline{w} = |\underline{w}|^2 = 1^2 = 1$, $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 1^2 = 1$, $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2 = 2^2 = 4$

נציב ונקבל : $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{2}{9} \cdot 4 + \frac{2}{9} \cdot 1 + \frac{2}{9} \cdot 1 = 1\frac{1}{3}$

נחשב את אורכי הווקטורים שבמכנה :

$$|\overrightarrow{CP}| = \left| -\frac{2}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w} \right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}\right)}$$

$$|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{\frac{4}{9}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{2}{9}\underline{u} \cdot \underline{v} - \frac{2}{9}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{2}{9}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{9}\underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{1}{9}\underline{v} \cdot \underline{w} - \frac{2}{9}\underline{w} \cdot \underline{u} - \frac{1}{9}\underline{w} \cdot \underline{v} + \frac{1}{9}\underline{w} \cdot \underline{w}} = \sqrt{2}$$

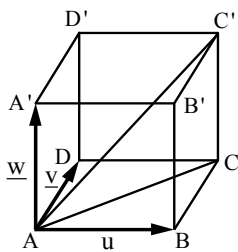
בצורה דומה נחשב את $|\overrightarrow{CM}|$ ונקבל : $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{1\frac{1}{3}} = 1.1547$.

נציב ונקבל : $\cos \angle PCM = \frac{1\frac{1}{3}}{\sqrt{2} \cdot 1.1547}$, ומכאן $\angle PCM = 35.26^\circ$.

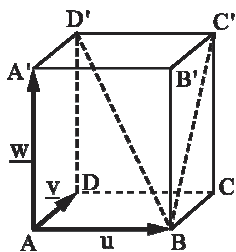
ד. נחשב את שטח המשולש CPM על פי מחצית מכפלת אורכי שתי צלעות של המשולש בסינוס הזווית שביניהן.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{CP \cdot CM \cdot \sin \angle PCM}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1.1547 \cdot \sin 35.26^\circ}{2} = 0.471 \quad \text{נקבל :}$$

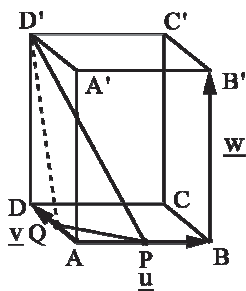
מכפלה סקלרית – שאלות עם תיבה וקובייה



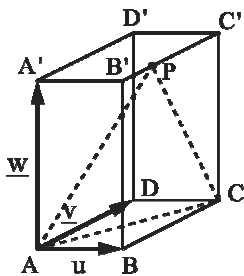
1. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
- א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{AC'}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו- $\underline{w}$.
- ב. הסבירו מדוע מתקיים: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.
- ג. נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.
- (1) חשבו את $|\overrightarrow{AC}|$ (האורך של אלכסון הבסיס).
- (2) חשבו את $|\overrightarrow{AC'}|$ (האורך של אלכסון התיבה).
- ד. חשבו את הזווית $\angle CAC'$.



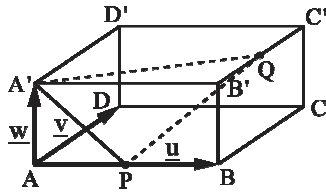
2. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
- א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{BD'}$ ו- $\overrightarrow{BC'}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו- $\underline{w}$.
- ב. הסבירו מדוע מתקיים: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.
- ג. נתון: $|\underline{w}| = 3$, $|\underline{v}| = 1$, $|\underline{u}| = 2$.
- (1) חשבו את אורך הווקטור $\overrightarrow{BD'}$ (אורך אלכסון התיבה).
- (2) חשבו את אורך הווקטור $\overrightarrow{BC'}$ (אורך אלכסון הפאה $BCC'B'$).
- ד. חשבו את הזווית $\angle D'BC'$.



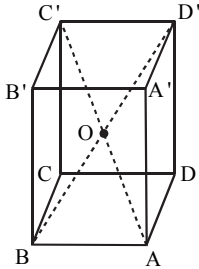
3. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.
- הנקודות P ו-Q הן אמצעי המקצועות AB ו-AD, בהתאמה. נסמן: $\overrightarrow{BB'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
- א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{PD'}$ ו- $\overrightarrow{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו- $\underline{w}$.
- ב. נתון: $|\underline{w}| = 2$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1$.
- חשבו את $|\overrightarrow{PD'}|$ ואת $|\overrightarrow{PQ}|$.
- ג. (1) חשבו את הזווית $\angle QPD'$.
- (2) חשבו את שטח המשולש QPD' .



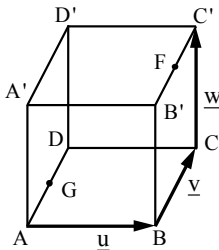
4. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
- נתון: $|\underline{w}| = 12$, $|\underline{v}| = 8$, $|\underline{u}| = 4$.
- P היא נקודה המקיימת $\overrightarrow{B'P} = \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{B'C'}$.
- א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{CP}$ בעזרת $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו- $\underline{w}$.
- ב. הראו שהמשולש APC הוא שווה-שוקיים ($AP = CP$).
- ג. (1) חשבו את זווית הראש של המשולש APC.
- (2) חשבו את שטח המשולש APC.



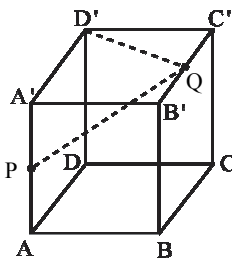
5. בתיבה ריבועית $ABCD A'B'C'D'$ אחד הבסיסים הוא $ABCD$. הנקודות P ו- Q הן האמצעים של המקצועות AB ו- $B'C'$, בהתאמה. נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{w}| = 2$, $|\underline{u}| = 4$.
 א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{PQ}$ ו- $\overrightarrow{A'Q}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. חשבו את הזווית $\angle A'QP$.
 ג. חשבו את היקף המשולש $A'QP$.



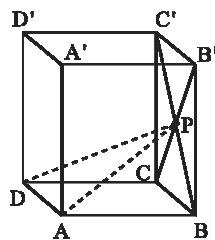
6. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{w}| = 6$, $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 2$.
 א. חשבו את נפח התיבה.
 ב. אלכסוני התיבה, AC' ו- BD' , נחתכים בנקודה O .
 (1) הביעו את $\overrightarrow{AC'}$ ואת $\overrightarrow{BD'}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 (2) חשבו את הזווית $\angle D'OC'$, שבין $\overrightarrow{AC'}$ ל- $\overrightarrow{BD'}$.



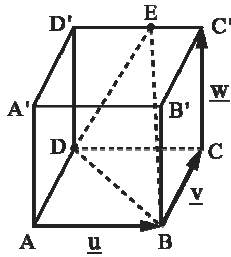
7. הנפח של קובייה $ABCD A'B'C'D'$ הוא 8 (ראו ציור).
 א. חשבו את אורך מקצוע הקובייה ואת שטח הפנים שלה.
 ב. נסמן: $\overrightarrow{CC'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודות G ו- F הן בהתאמה אמצעי המקצועות AD ו- $B'C'$. נתון: $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\underline{u}$.
 (1) הסבירו היכן ממוקמת הנקודה E .
 (2) הביעו את $\overrightarrow{EF}$ ואת $\overrightarrow{GF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 (3) חשבו את גודל הזווית $\angle EFG$.



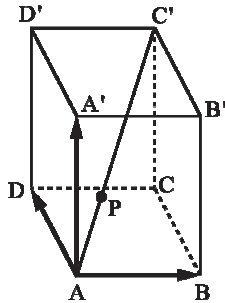
8. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 4$, שטח הפנים של התיבה הוא 288.
 א. חשבו את $|\underline{w}|$.
 ב. הנקודה P היא אמצע AA' , הנקודה Q מקיימת $\overrightarrow{B'Q} = \overrightarrow{QC'}$. הביעו את $\overrightarrow{PQ}$ ואת $\overrightarrow{D'Q}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ג. (1) חשבו את גודל הזווית $\angle PQD'$.
 (2) חשבו את שטח המשולש PQD' .



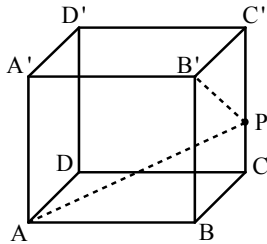
9. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{w}| = 4$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$.
 א. P היא נקודת המפגש של אלכסוני הפאה $BB'C'C$. הביעו את $\overrightarrow{AP}$ ואת $\overrightarrow{DP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. חשבו את הזווית $\angle APD$.
 ג. חשבו את שטח המשולש APD .



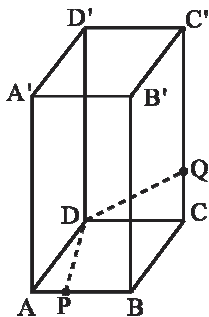
10. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $AA' = 6$, $BC = 2$, $AB = 4$.
 נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה E נמצאת על המקצוע $D'C'$,
 ומחלקת אותו ביחס של $D'E:EC' = 5:3$.
 א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{ED}$ ו- $\overrightarrow{EB}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
 ב. הוכיחו שהמשולש BDE הוא משולש שווה שוקיים.
 ג. חשבו את הזוויות של המשולש BDE.



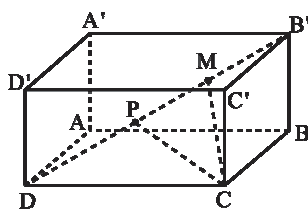
11. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ (ראו ציור). אורכי מקצועות התיבה הם: $AB = AD = 1$, $AA' = 2$. הנקודה P מחלקת את האלכסון AC' כך ש- $\frac{AP}{PC'} = \frac{1}{2}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PC}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
 ב. הראו כי מתקיים $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$.
 ג. חשבו את שטח המשולש APC.



12. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה P נמצאת על CC' כך שמתקיים $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC'}$.
 מחברים את הנקודה P עם הנקודות A ו- B' .
 א. הביעו את $\overrightarrow{AP}$ ואת $\overrightarrow{B'P}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
 ב. נתון: $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{B'P} = 76$. חשבו את $|\underline{w}|$.
 ג. הסבירו מדוע $\angle APB \neq 90^\circ$.
 ד. חשבו את הזווית $\angle APB'$.
 ה. חשבו את שטח המשולש APB' .



13. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה P מקיימת $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, והנקודה Q מקיימת $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{QC'}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{QD}$ ו- $\overrightarrow{DP}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
 ב. $\overrightarrow{QD} \cdot \overrightarrow{PD} = 12$. חשבו את $|\underline{u}|$.
 ג. נתון: $|\underline{w}| = 2|\underline{u}| = 3|\underline{v}|$. חשבו את $|\underline{v}|$ ו- $|\underline{w}|$.
 ד. (1) חשבו את הזווית $\angle PDQ$.
 (2) מהו גודל הזווית בין $\overrightarrow{QD}$ ל- $\overrightarrow{DP}$?

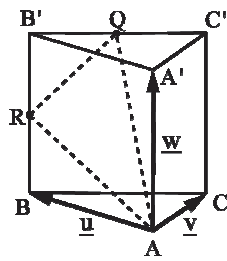


14. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. נסמן : $\overrightarrow{AA'} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{w}$. הנקודות P ו-M מחלקות את האלכסון DB' לשלושה קטעים שווים : $DP = PM = MB'$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{CP}$ ואת $\overrightarrow{CM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. נתון : $|\underline{w}| = 2$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1$.
 (1) חשבו את הזווית $\angle PCM$.
 (2) חשבו את שטח המשולש $\triangle PCM$.

תשובות:

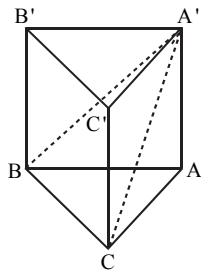
1. א. $\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$, $\overrightarrow{AC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$. ב. מקצועות סמוכים בקובייה מאונכים זה לזה.
 ג. (1) $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$. (2) $|\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{3}$. ד. 35.26° .
2. א. $\overrightarrow{BD} = \underline{v} + \underline{w} - \underline{u}$, $\overrightarrow{BC'} = \underline{v} + \underline{w}$. ב. מקצועות סמוכים בתיבה מאונכים זה לזה.
 ג. (1) $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{14}$. (2) $|\overrightarrow{BC'}| = \sqrt{10}$. ד. 32.31° .
3. א. $\overrightarrow{PD'} = \underline{v} + \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u}$. ב. $|\overrightarrow{PD'}| = \sqrt{5.25}$, $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{0.5}$. ג. (1) 62.42° . (2) 0.718 .
4. א. $\overrightarrow{AP} = \underline{u} + \underline{w} + \frac{3}{8}\underline{v}$, $\overrightarrow{CP} = -\frac{5}{8}\underline{v} + \underline{w}$. ב. $AP = CP = 13$. ג. (1) 40.24° . (2) 54.59 .
5. א. $\overrightarrow{AQ} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\underline{u} + \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}$. ב. 39.23° . ג. 10.76 .
6. א. 36 . ב. $\overrightarrow{AC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{BD'} = -\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$. ב. 33.20° .
7. א. אורך מקצוע הקובייה הוא 2 , שטח הפנים של הקובייה הוא 24 .
 ב. (1) E ממוקמת באמצע המקצוע AB . (2) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{GF} = \underline{u} + \underline{w}$. (3) 30° .
8. א. $|\underline{w}| = 12$. ב. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\underline{w} + \underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u}$, $\overrightarrow{D'Q} = \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u}$. ג. (1) 54.52° . (2) 22.45 .
9. א. $\overrightarrow{AP} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{DP} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$. ב. 31° . ג. 3.606 .
10. א. $\overrightarrow{ED} = -\frac{5}{8}\underline{u} - \underline{w}$, $\overrightarrow{EB} = \frac{3}{8}\underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$. ב. $EB = ED = 6.5$. ג. 40.24° , 69.88° , 69.88° .
11. א. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, $\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$. ב. 0.471 .
12. א. $\overrightarrow{AP} = \underline{u} + \underline{v} + \frac{2}{5}\underline{w}$, $\overrightarrow{B'P} = \underline{v} - \frac{3}{5}\underline{w}$. ב. $|\underline{w}| = 10$. ד. 63.68° . ה. 76.81 .
13. א. $\overrightarrow{QD} = -\frac{1}{4}\underline{w} - \underline{u}$, $\overrightarrow{DP} = -\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}$. ב. $|\underline{u}| = 6$. ג. $|\underline{w}| = 12$, $|\underline{v}| = 4$. ד. (1) 66.42° . (2) 113.58° .
14. א. $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$. ב. (1) 35.26° . (2) 0.471 .

מכפלה סקלרית – שאלות עם מנסרה ומקבילון



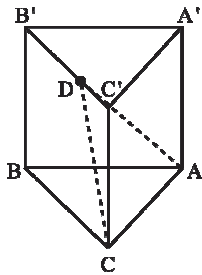
15. במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$, שבסיסה משולש ישר-זווית ($\angle CAB = 90^\circ$), נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 א. הסבירו מדוע מתקיים $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$.
 ב. הנקודות Q ו-R הן אמצעי המקצועות $B'C'$ ו- BB' , בהתאמה. הביעו את $\vec{AQ}$ ואת $\vec{AR}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ג. נתון: $|\underline{w}| = 4$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$.
 (1) חשבו את הזווית $\angle QAR$. (2) חשבו את שטח המשולש QAR.

16. במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$, הבסיסים ABC ו- $A'B'C'$ הם משולשים שווי צלעות בעלי צלע שאורכה 4. אורך המקצוע הצדדי הוא 5. נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.



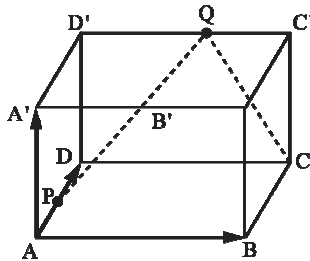
- א. (1) הסבירו מדוע מתקיים $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$. (2) האם מתקיים $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$? נמקו.
 ב. הביעו את הווקטורים $\vec{A'B'}$ ו- $\vec{A'C'}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ג. חשבו את אורכי הקטעים $A'B'$ ו- $A'C'$.
 ד. (1) חשבו את הזווית $\angle BA'C'$. (2) חשבו את שטח המשולש $BA'C'$.
 ה. האם המשולש $BA'C'$ הוא ישר זווית? נמקו.

17. נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה ABC ו- $A'B'C'$ הם משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים ($\angle BCA = 90^\circ$). נתון: $CA = 6$, $CC' = 8$. נסמן: $\vec{CA} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$, $\vec{CC'} = \underline{w}$.
 א. חשבו את נפח המנסרה.

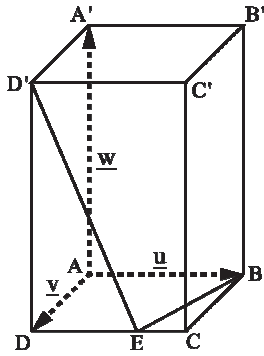


- ב. הנקודה D נמצאת על המקצוע $B'C'$, כך ש- $\vec{C'D} = \frac{2}{5}\vec{C'B'}$.
 (1) הביעו את הווקטור $\vec{AD}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 (2) חשבו את אורך הווקטור $\vec{AD}$.
 ג. (1) חשבו את הזווית $\angle CAD$. (2) חשבו את שטח המשולש CAD.
 ד. הראו כי המשולש ACD הוא ישר זווית.

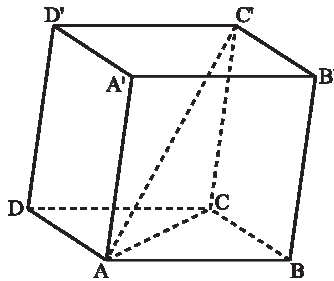
18. במנסרה ישרה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיסים ABCD ו- $A'B'C'D'$ הם מעוינים.



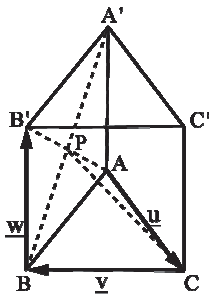
- נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה Q מקיימת $\vec{D'Q} = \frac{3}{5}\vec{D'C'}$.
 א. הביעו את $\vec{PQ}$ ו- $\vec{CQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. נתון: $\angle BAD = 60^\circ$, $|\underline{w}| = \sqrt{1.5}$, $|\underline{u}| = 2$.
 (1) חשבו את אורכי הווקטורים $\vec{PQ}$ ו- $\vec{CQ}$.
 (2) חשבו את הזווית $\angle PQC$.



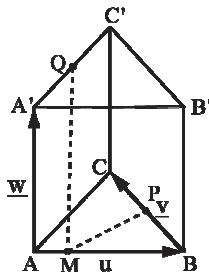
19. במנסרה ישרה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא מקבילית.
 נתון: $\angle BAD = 120^\circ$, $AD = 2$, $AB = 3$.
 א. חשבו את שטח הבסיס $ABCD$.
 ב. נתון: נפח המנסרה הוא $15\sqrt{3}$. חשבו את האורך של AA' .
 ג. הנקודה E נמצאת על המקצוע DC ומחלקת אותו ביחס של $DE:EC = 2:1$.
 נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 הביעו את הווקטורים $\vec{ED'}$ ו- $\vec{EB}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ד. (1) חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.
 (2) מצאו את אורך הווקטור $\vec{EB}$.
 ה. חשבו את גודל הזווית $D'EB$.



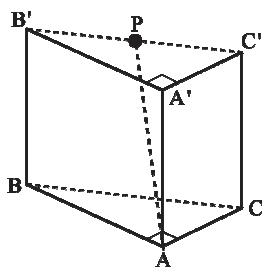
20. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 נתון: $\angle ABC = \angle B'BC = \angle B'BA = 60^\circ$,
 $|\underline{w}| = 4$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$.
 א. חשבו את המכפלות הסקלריות: $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{v}$.
 ב. (1) הביעו את $\vec{AC'}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 (2) חשבו את אורך הווקטור $\vec{AC'}$.
 ג. (1) חשבו את הזווית $\angle ACC'$.
 (2) חשבו את שטח המשולש ACC' .



21. נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$.
 נסמן: $\vec{BB'} = \underline{w}$, $\vec{CB} = \underline{v}$, $\vec{AC} = \underline{u}$.
 הנקודה P היא המפגש של אלכסוני הפאה $ABB'A'$.
 א. הביעו את הווקטור $\vec{CP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}|$. הוכיחו ש- $\vec{CP}$ מאונך ל- $\vec{AB}$.



22. במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$, כל המקצועות שווים באורכם ל-1.
 נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 א. (1) הסבירו מדוע הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא 120° .
 (2) חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.
 ב. P ו- Q הן נקודות האמצע של המקצועות BC ו- $A'C'$, בהתאמה. נתון: $\vec{MB} = 4 \cdot \vec{AM}$.
 הביעו את הווקטורים $\vec{MQ}$ ו- $\vec{MP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ג. חשבו את הזווית $\angle PMQ$.

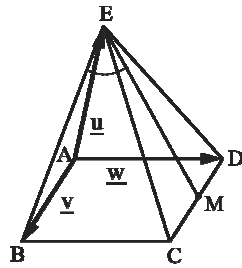


23. הבסיס של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הוא משולש ישר-זווית ($\angle BAC = 90^\circ$). הנקודה P היא אמצע המקצוע $B'C'$. הנקודה Q מקיימת ש- $\overrightarrow{BQ} = -\frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{BB'}$. נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. א. הסבירו היכן ממוקמת הנקודה Q. ב. הביעו את $\overrightarrow{AP}$ ואת $\overrightarrow{CQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$. ג. נתון $|\underline{w}| = |\underline{u}| = 2|\underline{v}|$. הראו כי מתקיים $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CQ}$.

תשובות:

15. א. במנסרה ישרה הפאות הצדדיות הן מלבנים, והמקצוע הצדדי מאונך למקצועות הבסיס. ב. $\overrightarrow{AR} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{AQ} = \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$. ג. (1) 37.80° . (2) 4.848.
16. א. (1) במנסרה ישרה הפאות הצדדיות הן מלבנים, והמקצוע הצדדי מאונך למקצועות הבסיס. (2) לא, מאחר שמקצועות הבסיס AB ו- AC אינם מאונכים זה לזה. ב. $\overrightarrow{A'C} = -\underline{w} + \underline{v}$, $\overrightarrow{A'B} = -\underline{w} + \underline{u}$. ג. $|\overrightarrow{A'B}| = \sqrt{41}$, $|\overrightarrow{A'C}| = \sqrt{41}$. ד. (1) 36.4° . (2) 12.17. ה. לא.
17. א. 144. ב. (1) $\overrightarrow{AD} = -\underline{u} + \underline{w} + \frac{2}{5}\underline{v}$. (2) 10.28. ג. (1) 54.29° . (2) 25.04.
18. א. $\overrightarrow{CQ} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \underline{w}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$. ב. (1) $|\overrightarrow{PQ}| = 2.267$, $|\overrightarrow{CQ}| = 1.463$. (2) 87.58° .
19. א. $3\sqrt{3}$. ב. $AA' = 5$. ג. $\overrightarrow{ED'} = -\frac{2}{3}\underline{u} + \underline{w}$, $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{3}\underline{u} - \underline{v}$. ד. (1) -3. (2) $\sqrt{7}$. ה. 106.3° .
20. א. $\underline{u} \cdot \underline{w} = -6$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = -3$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 4$. ב. (1) $\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$. (2) $\sqrt{7}$. ג. (1) 79.11° . (2) 5.196.
21. א. $\overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$.
22. א. (1) המשולש ABC הוא שווה צלעות, ולכן הזווית בין $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היוצאים מקדקוד הזווית B היא 60° , ומכאן שהזווית בין $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא 120° . (2) -0.5. ב. $\overrightarrow{MP} = \frac{4}{5}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\overrightarrow{MQ} = \frac{3}{10}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$. ג. 73.65° .
23. א. על המשך $B'B$ (מהצד של B). ב. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{CQ} = \underline{u} - \underline{v} - \frac{3}{8}\underline{w}$.

מכפלה סקלרית – שאלות עם פירמידה



24. נתונה פירמידה מרובעת ABCDE שבסיסה ריבוע ABCD.

נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AE} = \underline{u}$.

M היא נקודת האמצע של הקטע CD.

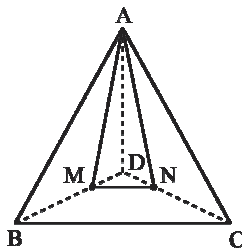
א. הביעו את $\vec{EB}$ ואת $\vec{EM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. נתון כי $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מאונכים זה לזה.

כמו כן, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$.

(1) חשבו את הזווית MEB.

(2) חשבו את שטח המשולש MEB.



25. בפירמידה משולשת ABCD נתון: $\vec{DA} = \underline{u}$, $\vec{DB} = \underline{v}$, $\vec{DC} = \underline{w}$.

הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות DB ו-DC,

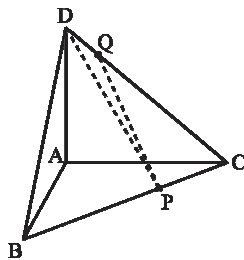
בהתאמה, כך ש- $\vec{DM} = \frac{1}{3}\vec{DB}$, $\vec{DN} = \frac{1}{3}\vec{DC}$.

א. הביעו את הווקטורים $\vec{AM}$ ו- $\vec{MN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. נתון $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 9$. כמו כן: $\underline{u} \perp \underline{w}$, $\underline{u} \perp \underline{v}$, $\angle BDC = 60^\circ$.

(1) חשבו את הזווית AMN.

(2) חשבו את שטח המשולש AMN.



26. בפירמידה משולשת ABCD נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{w}$.

הנקודה P מקיימת $\vec{BP} = \frac{3}{5}\vec{BC}$, והנקודה Q מקיימת $\vec{DQ} = \frac{1}{5}\vec{DC}$.

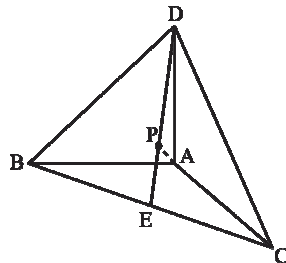
א. הביעו את $\vec{PD}$ ואת $\vec{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. נתון: $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = |\underline{w}| = 5$.

כמו כן $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מאונכים זה לזה.

(1) חשבו את הזווית DPQ.

(2) חשבו את היקף המשולש DPQ.



27. בפירמידה משולשת ABCD נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{w}$.

DE הוא תיכון לצלע BC במשולש BDC.

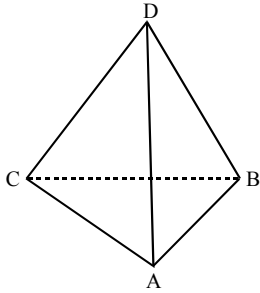
P היא נקודת המפגש של התיכונים במשולש BDC.

א. הביעו את $\vec{DE}$ ו- $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

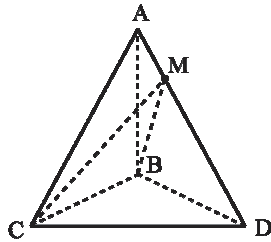
ב. נתון: $|\underline{u}| = 3$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{w}| = 12$.

כמו כן, $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מאונכים זה לזה.

הוכיחו: $\cos \angle DAP = \frac{12}{13}$.



28. נתונה פירמידה משולשת ישרה ABCD, שבסיסה ABC. נסמן: $\vec{DA} = \underline{w}$, $\vec{DB} = \underline{v}$, $\vec{DC} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$.
 א. $\angle CDB = 53.13^\circ$, $\angle ADC = 53.13^\circ$, $\angle ADB = 53.13^\circ$.
 ב. הסבירו מדוע הפאות ADB, ADC ו-BDC הן משולשים שווים שוקיים.
 ג. חשבו את שטח המעטפת של הפירמידה.
 ד. (1) הראו שהמשולש ABC הוא שווה צלעות.
 (2) הביעו את הווקטור $\vec{AB}$ וחשבו את אורכו.
 (3) חשבו את שטח המשולש ABC.
 (4) חשבו את שטח הפנים של הפירמידה ABCD.

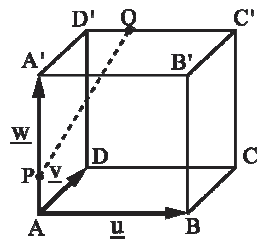


29. לפניכם פירמידה משולשת ABCD (ראו ציור). נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 א. M היא נקודה על הישר AD, כך ש-AM:MD=1:3. הביעו את $\vec{BM}$ ואת $\vec{CM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. נתון: $\angle BAC = 60^\circ$, $AD = 2$, $AB = AC = 1$.
 א. $\angle CAD = 82.82^\circ$, $\angle BAD = 53.13^\circ$.
 ב. חשבו את גודל הזווית $\angle BMC$.

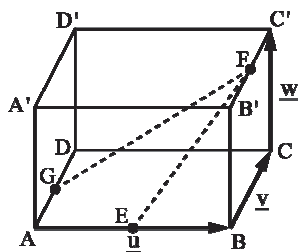
תשובות:

24. א. $\vec{EB} = \underline{v} - \underline{u}$, $\vec{EM} = \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{u} + \underline{w}$. ב. (1) 45° . (2) $\frac{3}{4}$.
 25. א. $\vec{AM} = -\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$, $\vec{MN} = -\frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$. ב. (1) 80.9° . (2) 14.05.
 26. א. $\vec{PD} = -\frac{2}{5}\underline{u} - \frac{3}{5}\underline{v} + \underline{w}$, $\vec{PQ} = -\frac{2}{5}\underline{u} - \frac{2}{5}\underline{v} + \frac{4}{5}\underline{w}$. ב. (1) 6.04° . (2) 12.21.
 27. א. $\vec{DE} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$, $\vec{AP} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.
 28. א. בפירמידה ישרה כל המקצועות הצדדיים שווים אורך. ב. 4.8.
 ג. (2) $\vec{AB} = -\underline{w} + \underline{v}$, אורך הצלע הוא 1.789 (3) 1.386 (4) 6.186.
 29. א. $\vec{BM} = -\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}$, $\vec{CM} = -\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w}$. ב. 63.05° .

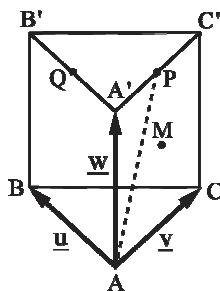
מכפלה סקלרית – שאלות נוספות עם כלל הגופים במרחב



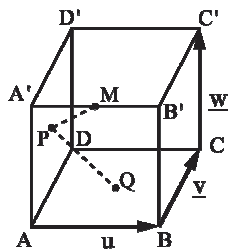
30. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודה P מקיימת $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AA'}$, והנקודה Q מקיימת $\overrightarrow{D'Q} = \frac{1}{4} \overrightarrow{D'C'}$.
א. הביעו את $\overrightarrow{PQ}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
ב. נתון: $|\underline{v}| = 1$, $|\underline{w}| = 2$. כמו כן: $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3.5}$. חשבו את $|\underline{u}|$.
ג. חשבו את נפח התיבה ואת שטח הפנים שלה.



31. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{CC'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודות E, F ו-G הן נקודות האמצע של מקצועות הקובייה. א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{FE}$ ו- $\overrightarrow{FG}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
נתון: $|\overrightarrow{FE}| = \sqrt{6}$.
ב. חשבו את אורך מקצוע הקובייה.
ג. (1) חשבו את הזווית $\angle GFE$.
(2) מהו גודל הזווית שבין $\overrightarrow{FE}$ ל- $\overrightarrow{FG}$.



32. במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$, שבסיסה הם משולשים שווי-צלעות, נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. P אמצע המקצוע $A'C'$, Q אמצע המקצוע $A'B'$, M היא נקודת המפגש של אלכסוני הפאה $ACC'A'$. א. הביעו את $\overrightarrow{AP}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
ב. נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1$, אורך הווקטור $\overrightarrow{AP}$ הוא $\frac{\sqrt{5}}{2}$. חשבו את $|\underline{w}|$.
ג. (1) בטאו את הווקטורים $\overrightarrow{BM}$ ו- $\overrightarrow{BQ}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
(2) חשבו את הזווית $\angle MBQ$.



33. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. P ו-Q הן נקודות המפגש של האלכסונים בפאות $ADD'A'$ ו- $ABCD$, בהתאמה. הנקודה M מקיימת $\overrightarrow{B'M} = \frac{1}{2} \overrightarrow{B'A'}$.
א. הביעו את $\overrightarrow{PM}$ ואת $\overrightarrow{PQ}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$.
ב. הוכיחו כי $\angle MPQ = 90^\circ$.
ג. נתון: $|\underline{w}| = 6$. חשבו את שטח המשולש MPQ.

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

ב. הסבירו מדוע הישר QP אינו נפגש עם המישור ABB'A'.

הנקודה P היא אמצע CC'.

א. (1) הביעו את $\overrightarrow{A'X}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. (1) הביעו את הווקטור $\vec{PX}$.

ג. הראו כי הנקודה X נמצאת במרחקים שווים מכל אחת מהנקודות A, B ו- P .

A diagram of a tetrahedron with vertices labeled A, B, C, and D. Vertex A is on the left, B is at the bottom right, C is on the right, and D is at the top. Three vectors are shown: $\underline{u}$ from A to B, $\underline{v}$ from A to C, and $\underline{w}$ from A to D. Point M is located on the edge AD, and point N is located on the edge CD. A vector is drawn from M to N.

N היא נקודה על הפאה BCD, המקיימת $\vec{DN} = \frac{1}{4}\vec{DB} + \frac{1}{4}\vec{DC}$.

ב. (1) הראו ש- $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABC.

ג. הנקודה E היא אמצע המקצוע BC.

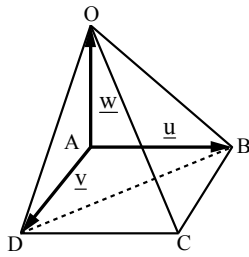
ד. נתון ש- $\overrightarrow{MN}$ ניצב ל- $\overrightarrow{BC}$. הוכיחו ש- $|u| = |v|$.

[illegible]

א. (1) הוכיחו: $\vec{DE} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$.

ב. נתון כי $\overrightarrow{AD}$ ניצב ל- $\overrightarrow{BC}$. הראו כי $\underline{w} \cdot \underline{u} = \underline{w} \cdot \underline{v}$.

הוכיחו כי $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.



38. נתונה פירמידה מרובעת ABCDO שבסיסה מקבילית.

נסמן: $\vec{AO} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. הביעו את $\vec{BD}$ ו- $\vec{OC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. (1) נתון: $AO \perp BD$. הוכיחו: $\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w}$.

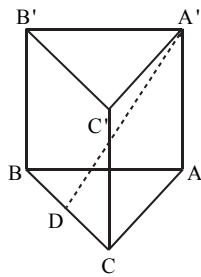
(2) נתון: $OC \perp BD$.

הוכיחו: המרובע ABCD הוא מעוין.

ג. הוכיחו: $|\vec{OB}| = |\vec{OD}|$.

39. נתונה מנסרה ישרה ABCA'B'C' שבסיסה ABC ו-A'B'C' הם משולשים שווי צלעות.

נתון: $AA' = 6$, $AB = 4$, $\vec{BD} = \vec{DC}$ (ראו ציור). נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.



א. (1) הביעו את הווקטור $\vec{A'D}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

(2) חשבו את $|\vec{A'D}|$.

ב. הנקודה E מקיימת $\vec{A'E} = \frac{3}{4} \vec{A'D}$.

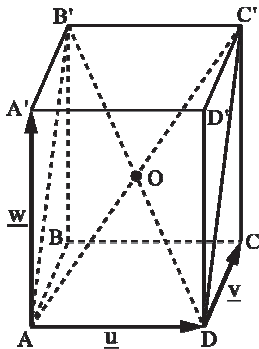
(1) על איזה ישר בציור נמצאת הנקודה E?

(2) הביעו את הווקטור $\vec{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

(3) הראו כי $\vec{AE} \perp \vec{A'D}$.

ג. (1) חשבו את אורך הווקטור $\vec{AE}$.

(2) חשבו את שטח המשולש A'AE.



40. במנסרה ישרה ABCDA'B'C'D' הבסיס ABCD הוא ריבוע.

נתון: $AA' = 8$, $AB = 5$. נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{u}$, $\vec{AB} = \underline{v}$.

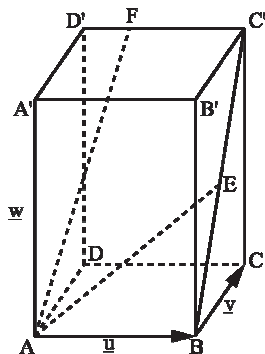
א. הביעו את הווקטורים $\vec{B'D}$ ו- $\vec{C'D}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. (1) הראו כי $\vec{C'D} \perp \vec{C'B'}$.

(2) האם המרובע AB'C'D הוא מלבן? נמקו.

ג. הנקודה O היא מפגש אלכסוני המרובע AB'C'D.

חשבו את הזווית B'OC' שבין אלכסוני המרובע AB'C'D.



41. במנסרה ישרה ABCDA'B'C'D' הבסיס ABCD הוא ריבוע.

נתון: $AA' = 12$, $AB = 5$. הנקודה E היא מפגש אלכסוני

הפאה BB'C'C. הנקודה F נמצאת על המקצוע D'C' ומחלקת אותו ביחס של $D'F:FC' = 1:2$.

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. הביעו את הווקטורים $\vec{AE}$, $\vec{BE}$ ו- $\vec{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. הראו כי $\vec{AB} \perp \vec{BC'}$.

ג. (1) חשבו את אורכי הווקטורים $\vec{AE}$ ו- $\vec{AF}$.

(2) חשבו את גודל הזווית EAF.

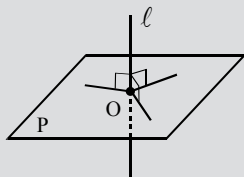
(3) חשבו את שטח המשולש EAF.

תשובות:

30. א. $\vec{PQ} = \frac{3}{4}\underline{w} + \underline{v} + \frac{1}{4}\underline{u}$. ב. $|\underline{u}| = 2$ (1) . (2) הנפח שווה ל-4 , שטח הפנים שווה ל-16 .
31. א. $\vec{FE} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{FG} = -\underline{u} - \underline{w}$. ב. 2 . ג. (1) 30° . (2) 30° .
32. א. $\vec{AP} = \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$. ב. $|\underline{w}| = 1$. ג. (1) $\vec{BM} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{BQ} = \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u}$. (2) 38.50° .
33. א. $\vec{PM} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{w}$. ג. 11.02 .
34. א. $\vec{QP} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}$. ב. הווקטור $\vec{QP}$ הוא צירוף לינארי של שני וקטורים ($\underline{u}$ ו- $\underline{v}$) לא קולינאריים במישור $ABB'A'$. מאחר שהנקודות P ו-Q אינן נמצאות במישור, הווקטור מקביל למישור.
35. א. (1) $\vec{A'X} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{8}\underline{v}$. (2) הווקטור $\vec{A'X}$ הוא צירוף לינארי של שני וקטורים ($\underline{u}$ ו- $\underline{v}$) לא קולינאריים הנמצאים במישור $A'B'C'D'$. מאחר שהנקודה A' נמצאת במישור $A'B'C'D'$, הווקטור מוכל במישור מישור, והנקודה A' במישור. ב. (1) $\vec{PX} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{7}{8}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$. (2) $|\vec{PX}| = 9$.
36. א. $\vec{MN} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$. ב. (1) $\vec{MN}$ הוא צירוף לינארי של שני וקטורים לא קולינאריים במישור ABC . מאחר שהנקודה M אינה נמצאת במישור, הווקטור מקביל למישור.
- (2) לא, מאחר ש- $\vec{MN}$ ו- $\vec{AB}$ אינם כפל בסקלר אחד של השני. ג. (2) $AE : MN = 2 : 1$.
38. א. $\vec{OC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\vec{BD} = \underline{v} - \underline{u}$.
39. א. (1) $\vec{A'D} = -\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$. (2) $|\vec{A'D}| = 4\sqrt{3}$.
- ב. (1) על הישר A'D . (2) $\vec{AE} = \frac{1}{4}\underline{w} + \frac{3}{8}\underline{u} + \frac{3}{8}\underline{v}$. ג. (1) $|\vec{AE}| = 3$. (2) 7.794 .
40. א. $\vec{C'D} = -\underline{v} - \underline{w}$, $\vec{B'D} = \underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$, $\vec{AC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$. ב. (2) כן. ג. 55.85° .
41. א. $\vec{BE} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\vec{AE} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\vec{AF} = \underline{w} + \underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}$.
- ג. (1) $|\vec{AE}| = 8.201$, $|\vec{AF}| = 13.11$. (2) 30.26° . (3) 27.09 .

ישר מאונך למישור

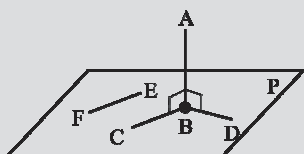
נדון בישר המאונך למישור ובווקטור המאונך למישור.



בציור מתואר ישר ℓ החותך מישור P בנקודה O .
הגדרה: אם הישר ℓ יוצר זווית ישרה עם כל ישר הנמצא במישור P , אז הישר ℓ נקרא **ישר מאונך למישור**.
 הערה: ישר מאונך למישור נקרא גם ישר ניצב למישור.

בהסתמך על הגדרה זו נוכל לרשום את המשפט הבא:

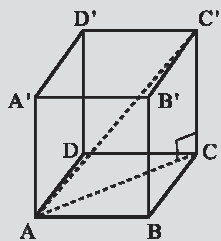
משפט: אם ישר מאונך למישור, אז הוא מאונך לכל ישר הנמצא במישור.



במילים אחרות, אם הישר AB מאונך למישור P , אזי AB מאונך **לכל** ישר הנמצא במישור P .
 לדוגמה: AB מאונך ל- BC , AB מאונך ל- BD , AB מאונך ל- EF וכו'.

נובע מכך שהווקטור $\vec{AB}$ מאונך **לכל** וקטור הנמצא במישור P .
 כלומר, $\vec{AB}$ מאונך ל- $\vec{BC}$, $\vec{AB}$ מאונך ל- $\vec{BD}$, $\vec{AB}$ מאונך ל- $\vec{EF}$ וכו'.
 נובע שה**מכפלה הסקלרית** של הווקטור $\vec{AB}$ עם כל וקטור הנמצא במישור שווה לאפס.

דוגמה חשובה לישר המאונך למישור היא **גבהים של גופים תלת ממדיים**.



נתבונן בתיבה $ABCD A'B'C'D'$.

המקצוע הצדדי בתיבה הוא גובה התיבה.

גובה של תיבה מאונך למישורים של בסיסי התיבה.

כלומר, הגובה $C'C$ מאונך למישור הבסיס $ABCD$ (וגם למישור הבסיס $A'B'C'D'$).

מסקנה: הגובה $C'C$ מאונך **לכל** ישר במישור הבסיס $ABCD$.

לדוגמה: הגובה $C'C$ מאונך לאלכסון CA של הבסיס.

הערה: גם בקובייה ומנסרה ישרה מקצוע צדדי הוא גובה, כלומר **מאונך למישורי הבסיסים**, ועל פי המשפט שלמדנו מאונך לכל ישר הנמצא במישורי הבסיסים.

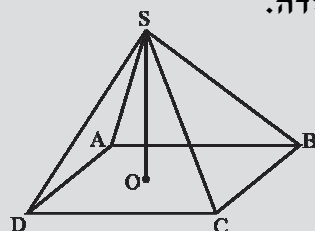
נדגים את המשפט גם בפירמידה $SABCD$, שבסיסה $ABCD$.

SO הוא גובה הפירמידה, ולכן **מאונך למישור בסיס הפירמידה**.

נובע ש- SO מאונך **לכל** ישר במישור הבסיס $ABCD$.

לדוגמה: הגובה SO מאונך לאלכסון AC של הבסיס.

קיימים מקרים שבהם נסמן: $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{SO} = \underline{w}$.
 במקרים אלה $\underline{w}$ מאונך למישור הנקבע על ידי $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$,
 ולכן $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$ ו- $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$, ונרשום



הערה: הגובה של מנסרה הוא אורך קטע המחבר נקודה על בסיס אחד של המנסרה

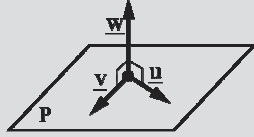
עם נקודה על הבסיס השני של המנסרה, ומאונך למישור בסיס המנסרה.

מקצוע צדדי הוא גובה המנסרה במנסרה ישרה, אך אינו גובה במנסרה שאינה ישרה.

כיצד מוכיחים שווקטור מאונך למישור?

כאשר נרצה לקבוע האם הווקטור מאונך למישור, ניעזר במשפט הבא:

משפט: אם וקטור מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים שמגדירים מישור, אז הווקטור מאונך למישור.

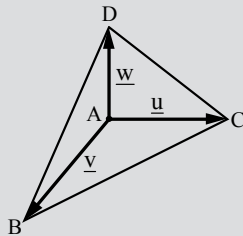


נתונים שני וקטורים לא קולינאריים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
שני הווקטורים קובעים מישור (ראו בציור מישור P).
על פי המשפט, אם וקטור $\underline{w}$ מאונך לווקטור $\underline{u}$
וגם מאונך לווקטור $\underline{v}$, אז וקטור $\underline{w}$ מאונך למישור P.
הערה: הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ אינם בהכרח נפגשים.

נוכיח את המשפט.

$\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים לא קולינאריים הקובעים מישור.
נתון כי וקטור $\underline{w}$ מאונך לווקטור $\underline{u}$ וגם מאונך לווקטור $\underline{v}$, כלומר המכפלה הסקלרית שלו עם כל אחד מהם שווה לאפס ומתקיים: $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$ ו- $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$.
נרצה להראות שהעובדה שהווקטור $\underline{w}$ מאונך ל- $\underline{u}$ וגם ל- $\underline{v}$, **מספיקה** כדי לקבוע ש- $\underline{w}$ מאונך למישור, כלומר מאונך לכל וקטור הנמצא במישור.
למדנו שכאשר הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ קובעים מישור, כל וקטור הנמצא במישור ניתן להצגה כצירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כלומר ניתן להצגה בצורה $t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$ (t ו-s הם מספרים).
אם נוכיח שהווקטור $\underline{w}$ מאונך לכל וקטור מהצורה $t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$,
נסיק ש- $\underline{w}$ מאונך לכל וקטור הנמצא במישור, ומכאן שהוא מאונך למישור.
נחשב את המכפלה הסקלרית של $\underline{w}$ ו- $t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$. ניעזר בכך שמתקיים $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$ ו- $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$.
נקבל: $\underline{w} \cdot (t\underline{u} + s\underline{v}) = t \cdot \underline{w} \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{w} \cdot \underline{v} = 0 + 0 = 0$.
קיבלנו שהווקטור $\underline{w}$ מאונך לכל וקטור הנמצא במישור, ולכן הוא מאונך למישור.

דוגמה:



לפניכם פירמידה משולשת ABCD.
נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$.
נתון כי הווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור ABC.
א. הסבירו מדוע מתקיים: $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$.
ב. הוכיחו כי הווקטורים $\overrightarrow{AD}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ מאונכים זה לזה.

פתרון:

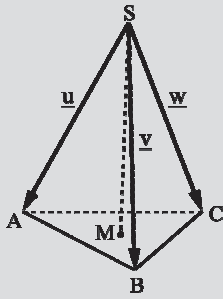
א. הווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור ABC, ולכן הוא מאונך **לכל** וקטור הנמצא במישור ABC, ומכאן שהוא מאונך לווקטור $\underline{u}$ ומאונך לווקטור $\underline{v}$, כלומר: $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$.
ב. דרך א: נפתור ללא שימוש במכפלה סקלרית. ראינו שהווקטור $\underline{w}$ מאונך לכל וקטור הנמצא במישור ABC, ומכאן שהוא מאונך לווקטור $\overrightarrow{BC}$ הנמצא במישור זה.
דרך ב: נפתור באמצעות וקטורים. כדי להוכיח ש- $\overrightarrow{AD}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ מאונכים זה לזה, נראה שהמכפלה הסקלרית שלהם היא אפס. נביע את $\overrightarrow{BC}$:
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\underline{u} + \underline{v}$.
נחשב את המכפלה הסקלרית: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{w} \cdot (-\underline{u} + \underline{v}) = -\underline{w} \cdot \underline{u} + \underline{w} \cdot \underline{v} = -0 + 0 = 0$.
קיבלנו $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, ולכן $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$.

שימו לב!

א. כאשר נתון וקטור $\underline{w}$ המאונך למישור שנקבע באמצעות הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, מומלץ לרשום כבר בתחילת הפתרון שהמכפלה הסקלרית של $\underline{w}$ עם $\underline{u}$ שווה לאפס, ושהמכפלה הסקלרית של $\underline{w}$ עם $\underline{v}$ שווה לאפס, כלומר: $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$.

ב. כאשר נרצה להוכיח שווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור שנקבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, נראה ש- $\underline{w}$ מאונך ל- $\underline{u}$ וגם מאונך ל- $\underline{v}$, כלומר: $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$. נדגיש כי אם $\underline{w}$ אינו מאונך לווקטור הנמצא במישור, ברור כי $\underline{w}$ אינו מאונך למישור.

דוגמה:



נתונה פירמידה ישרה SABC. נסמן: $\vec{SA} = \underline{u}$, $\vec{SB} = \underline{v}$, $\vec{SC} = \underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$

באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ (במידת הצורך).

ב. M היא נקודה במישור הבסיס ABC.

נתון: $\vec{SM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w}$.

הוכיחו: SM הוא גובה של הפירמידה SABC לבסיס ABC.

פתרון:

נשים לב שהפירמידה ישרה, ולכן כל המקצועות הצדדיים שלה שווים אורך,

כלומר מתקיים: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}|$.

א. נביע את הווקטורים המבוקשים: $\vec{AB} = \vec{AS} + \vec{SB} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\vec{AC} = \vec{AS} + \vec{SC} = -\underline{u} + \underline{w}$.

ב. כדי להוכיח ש-SM הוא גובה של הפירמידה SABC לבסיס ABC,

יש להראות שהווקטור $\vec{SM}$ מאונך למישור ABC, כלומר להוכיח שהווקטור $\vec{SM}$

מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים הנמצאים במישור, $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$.

(1) נוכיח $\vec{SM} \perp \vec{AB}$. לצורך כך נראה ש- $\vec{SM} \cdot \vec{AB} = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{SM} \cdot \vec{AB} &= \left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}\right) \cdot (-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{v} - \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{w} \\ &= -\frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{w}\end{aligned}$$

$$\vec{SM} \cdot \vec{AB} = -\frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{v} = -\frac{1}{3}|\underline{u}|^2 + \frac{1}{3}|\underline{v}|^2 \quad \text{ניעזר בכך ש-} \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} \text{ . נקבל:}$$

מאחר ש- $|\underline{u}| = |\underline{v}|$, נקבל $\vec{SM} \cdot \vec{AB} = 0$, כלומר $\vec{SM} \perp \vec{AB}$.

(2) נוכיח $\vec{SM} \perp \vec{AC}$. לצורך כך נראה ש- $\vec{SM} \cdot \vec{AC} = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{SM} \cdot \vec{AC} &= \left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}\right) \cdot (-\underline{u} + \underline{w}) = -\frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{w} - \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{w} - \frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{1}{3}\underline{w} \cdot \underline{w} \\ &= -\frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} \cdot \underline{w} + \frac{1}{3}\underline{w} \cdot \underline{w}\end{aligned}$$

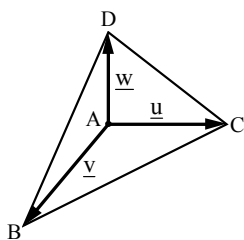
$$\vec{SM} \cdot \vec{AC} = -\frac{1}{3}\underline{u} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{w} \cdot \underline{w} = -\frac{1}{3}|\underline{u}|^2 + \frac{1}{3}|\underline{w}|^2 \quad \text{ניעזר בכך ש-} \underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{v} \cdot \underline{w} \text{ . נקבל:}$$

מאחר ש- $|\underline{u}| = |\underline{w}|$, נקבל $\vec{SM} \cdot \vec{AC} = 0$, כלומר $\vec{SM} \perp \vec{AC}$.

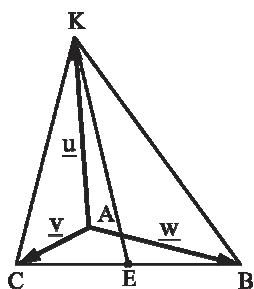
נסכם: הוכחנו ש- $\vec{SM}$ מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ שבמישור ABC,

לכן $\vec{SM}$ מאונך למישור הבסיס ABC, כלומר הוא גובה של הפירמידה לבסיס ABC.

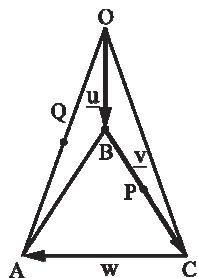
תרגילים



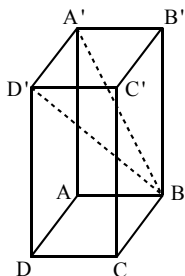
1. נתונה פירמידה משולשת ABCD. נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AC} = \underline{u}$. נתון כי הווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור ABC. הסבירו מדוע מתקיים: (1) $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, (2) $\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$.
 ב. (1) בטאו את הווקטור $\vec{BC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 (2) הראו כי הווקטור $\vec{AD}$ מאונך לווקטור $\vec{BC}$.
 הוכיחו באמצעות מכפלה סקלרית או הסבירו באופן מילולי.



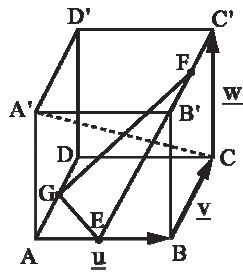
2. בפירמידה משולשת KABC נסמן $\vec{AK} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{w}$. נקודה E היא אמצע הצלע BC.
 א. בטאו את הווקטור $\vec{KE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. נתון: $|\underline{u}| = 3$, $|\underline{v}| = 1$, $|\underline{w}| = 2$.
 $\angle BAC = 120^\circ$, $\vec{AK}$ מאונך לבסיס ABC.
 (1) הסבירו מדוע $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.
 (2) חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{v} \cdot \underline{w}$.
 (3) חשבו את אורך הווקטור $\vec{KE}$.



3. בפירמידה משולשת ABCO נסמן: $\vec{CA} = \underline{w}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{OB} = \underline{u}$. P היא אמצע הקטע BC, ו-Q היא אמצע הקטע AO.
 א. הביעו את הווקטור $\vec{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. הווקטור $\underline{u}$ מאונך למישור המשולש ABC. הסבירו מדוע $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.
 ג. נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$, המשולש ABC הוא שווה-צלעות.
 (1) הסבירו מדוע הזווית בין $\underline{v}$ ל- $\underline{w}$ היא 120° .
 (2) חשבו את המכפלה הסקלרית $\vec{PQ} \cdot \vec{AB}$.

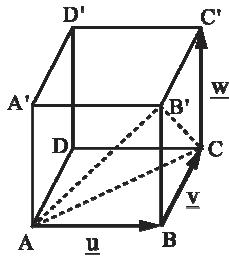


4. נתונה תיבה ABCD-A'B'C'D'.
 א. (1) הסבירו מדוע הווקטור $\vec{D'A'}$ מאונך לווקטור $\vec{A'A}$.
 (2) הסבירו מדוע הווקטור $\vec{D'A'}$ מאונך לווקטור $\vec{A'B'}$.
 ב. הסבירו באמצעות סעיף א' מדוע הווקטור $\vec{D'A'}$ מאונך למישור הפאה ABB'A'.
 ג. הסבירו באמצעות סעיף ב' מדוע הווקטור $\vec{D'A'}$ מאונך לווקטור $\vec{A'B}$.

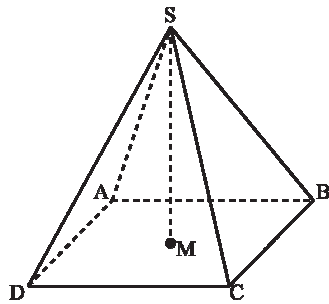


5. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{CC'} = \underline{w}$. הנקודות E, F ו-G הן בהתאמה נקודות האמצע של מקצועות הקובייה AB, $B'C'$ ו-AD. הביעו את הווקטורים $\vec{FE}$, $\vec{FG}$ ו- $\vec{A'C}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ (במידת הצורך).
 ב. (1) הוכיחו: הווקטור $\vec{A'C}$ מאונך לווקטור $\vec{FG}$.
 (2) הוכיחו: הווקטור $\vec{A'C}$ מאונך לווקטור $\vec{FE}$.
 ג. הסבירו באמצעות סעיף ב' מדוע הווקטור $\vec{A'C}$ מאונך למישור המשולש EFG.

6. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = \sqrt{8}$, $|\underline{w}| = 4$.
 א. הביעו את הווקטורים $\vec{AC}$ ו- $\vec{AB'}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. הנקודה E מקיימת: $\vec{BE} = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}$.
 (1) הוכיחו: הווקטור $\vec{BE}$ מאונך לווקטור $\vec{AC}$.
 (2) הוכיחו: הווקטור $\vec{BE}$ מאונך לווקטור $\vec{AB'}$.
 ג. הסבירו מדוע הווקטור $\vec{BE}$ מאונך למישור המשולש $AB'C$.
 ד. הסבירו באמצעות סעיף ג' מדוע הווקטור $\vec{BE}$ מאונך לווקטור $\vec{B'C}$.

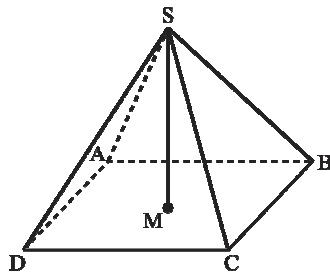


7. בפירמידה ישרה $SABCD$ הבסיס ABCD הוא מלבן. SM הוא גובה הפירמידה.



- א. האם הנקודה M היא מפגש אלכסוני המלבן ABCD?
 ב. נסמן: $\vec{SM} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 הסבירו מדוע $\underline{w}$ מאונך ל- $\underline{u}$ ומאונך ל- $\underline{v}$.
 נתון: $SM = 6$, $BC = 4$, $AB = 5$.
 ג. חשבו את נפח הפירמידה.
 ד. הביעו את הווקטורים $\vec{MC}$ ו- $\vec{SC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ה. (1) חשבו את אורך הווקטור $\vec{MC}$.
 (2) חשבו את גודל הזווית $\angle SCM$.

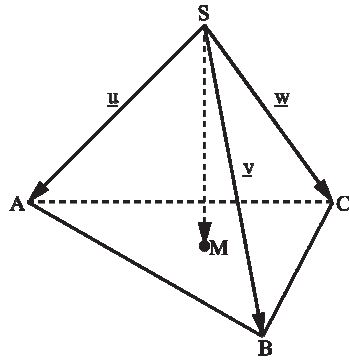
8. בפירמידה ישרה $SABCD$, הבסיס ABCD הוא ריבוע. אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה M.



- א. הסבירו מדוע SM הוא גובה הפירמידה.
 ב. נתון: $SM = 8$, נפח הפירמידה הוא 96.
 חשבו את אורך הצלע של בסיס הפירמידה.
 ג. נסמן: $\vec{SM} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 הביעו את הווקטורים $\vec{SA}$ ו- $\vec{SB}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ד. (1) הסבירו מדוע $\vec{SA}$ ו- $\vec{SB}$ שווי אורך.
 (2) חשבו את גודל הזווית $\angle ASB$.
 ה. חשבו את שטח הפנים של הפירמידה.

9.

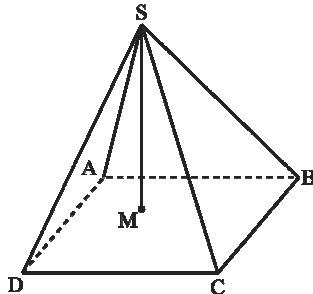
נתונה פירמידה ישרה $SABC$, שבסיסה משולש ABC .
אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה הוא 6. נתון: $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = 30^\circ$.
נסמן: $\vec{SA} = \underline{u}$, $\vec{SB} = \underline{v}$, $\vec{SC} = \underline{w}$.



- א. חשבו את המכפלות הסקלריות: $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{v}$.
- ב. (1) הביעו את הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
(2) חשבו את אורכי הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$.
(3) מהו גודל הזווית $\angle BAC$?
(4) חשבו את שטח המשולש BAC .
- ג. M היא נקודה במישור ABC , כך ש- $\vec{SM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.
הוכיחו כי הווקטור $\vec{SM}$ מאונך למישור ABC .
ד. (1) חשבו את הגובה SM של הפירמידה.
(2) חשבו נפח הפירמידה $SABC$.

10.

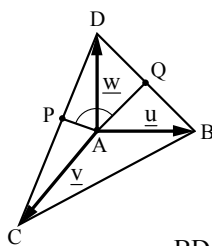
בפירמידה $SABCD$ הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע.
נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.



- הנקודה M מקיימת $\vec{SM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \underline{w}$.
- א. (1) הביעו את הווקטור $\vec{AM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
(2) הסבירו מדוע הנקודה M נמצאת במישור $ABCD$.
- ב. נתון: $|\underline{u}| = 9$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 27$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 27$.
- הראו כי $\vec{SM}$ מאונך למישור הבסיס $ABCD$.
- ג. (1) נתון: $|\underline{w}| = 6$. חשבו את אורך הווקטור $\vec{SM}$.
(2) חשבו את נפח הפירמידה $SABCD$.

11.

בפירמידה משולשת $ABCD$ נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
נתון כי $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מאונכים זה לזה.



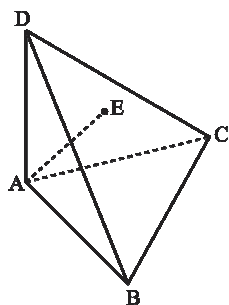
- כמו כן $|\underline{v}| = 1.5|\underline{w}|$, $|\underline{u}| = |\underline{w}|$, שטח המשולש ABD הוא 8.
- א. חשבו את $|\underline{u}|$.
- ב. (1) הסבירו מדוע $\underline{w}$ הוא גובה של הפירמידה לבסיס ABC .
(2) חשבו את נפח הפירמידה $ABCD$.
- ג. הנקודה P היא אמצע המקצוע CD , והנקודה Q היא אמצע המקצוע BD .
- (1) הביעו את $\vec{AP}$ ואת $\vec{AQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
- (2) חשבו את הזווית בין $\vec{AP}$ ל- $\vec{AQ}$.

12. בפירמידה משולשת ABCD נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מאונכים זה לזה.

נתון: $|\underline{w}| = 4$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 2$.

הנקודה E נמצאת על הפאה BCD ומקיימת: $\vec{AE} = \frac{4}{9}\underline{u} + \frac{4}{9}\underline{v} + \frac{1}{9}\underline{w}$.



א. הוכיחו: הווקטור $\vec{AE}$ מאונך לווקטור $\vec{DB}$.

(2) הוכיחו: הווקטור $\vec{AE}$ מאונך לווקטור $\vec{DC}$.

(3) הסבירו מדוע AE הוא גובה של הפירמידה למישור הפאה BCD.

(4) הסבירו מדוע $\angle AED = 90^\circ$.

ב. חשבו את האורך של הווקטור $\vec{AE}$ ושל הווקטור $\vec{DE}$.

ג. חשבו את שטח המשולש AED.

13. במנסרה ישרה ABCA'B'C' הבסיסים הם משולשים ישרי-זווית ($\angle A = 90^\circ$).

נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = \frac{1}{2}|\underline{w}|$, $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{CA'} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. נתון כי נפח המנסרה הנתונה הוא 216. חשבו את $|\underline{w}|$.

ב. P ו-Q הן נקודות האמצע של המקצועות AC ו-AB,

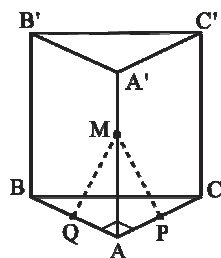
בהתאמה. הנקודה M מקיימת $\vec{AM} = \frac{3}{5}\vec{AA'}$.

(1) הסבירו מדוע MA הוא גובה של הפירמידה MPAQ.

(2) חשבו את נפח הפירמידה MPAQ.

ג. הביעו את $\vec{PM}$ ואת $\vec{QM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ד. חשבו את הזווית $\angle PMQ$.



14. במקבילון ABCDA'B'C'D' הבסיס ABCD הוא מעוין. אורך צלע המעוין שווה ל-5.

נתון: $AA' = 6$, $\angle BAD = \angle A'AB = \angle A'AD = 60^\circ$.

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. חשבו את המכפלות הסקלריות הבאות:

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v}$ (2) $\underline{u} \cdot \underline{w}$ (3) $\underline{v} \cdot \underline{w}$.

הנקודה E מקיימת $\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AC}$.

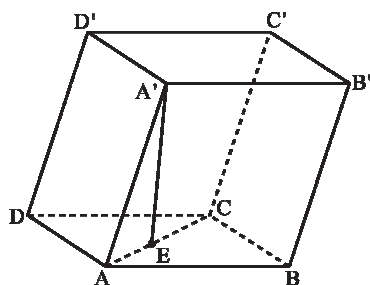
ב. הביעו את הווקטור $\vec{A'E}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ג. הראו כי הווקטור $\vec{A'E}$ מאונך למישור הבסיס ABCD.

ד. (1) חשבו את $|\vec{A'E}|$.

(2) חשבו את שטח המעוין ABCD.

(3) חשבו את נפח המקבילון.



תשובות:

1. א. הווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור ABC ולכן מאונך לכל וקטור הנמצא במישור ABC, והמכפלה הסקלרית שלו עם כל וקטור כזה שווה לאפס.
 ב. (1) $\vec{BC} = -\underline{v} + \underline{u}$. (2) הווקטור $\underline{w}$ מאונך לכל וקטור הנמצא במישור ABC, ולכן מאונך ל- $\vec{BC}$. אפשר גם להראות ש- $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$.
2. א. $\vec{KE} = \frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{u}$. ב. (1) הווקטור $\underline{u}$ מאונך למישור ABC, ולכן מאונך לכל וקטור הנמצא במישור ABC, והמכפלה הסקלרית שלו עם כל וקטור כזה שווה לאפס.
 (2) -1. (3) 3.12.
3. א. $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u}$. ב. הווקטור $\underline{u}$ מאונך למישור ABC, ולכן מאונך לכל וקטור הנמצא במישור ABC, והמכפלה הסקלרית שלו עם כל וקטור כזה שווה לאפס.
 ג. (1) המשולש ABC הוא שווה צלעות, לכן הזווית בין $\underline{v}$ ל- $\underline{w}$ היא 60° , ומכאן שהזווית בין $\underline{v}$ ל- $\underline{w}$ היא 120° . (2) $-\frac{1}{4}$.
4. א. (1) מקצועות סמוכים בתיבה מאונכים זה לזה.
 (2) מקצועות סמוכים בתיבה מאונכים זה לזה.
 ב. הווקטור $\vec{D'A'}$ מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים הנמצאים במישור $ABB'A'$, ולכן מאונך למישור. ג. הווקטור $\vec{D'A'}$ מאונך למישור $ABB'A'$, ולכן מאונך לכל וקטור הנמצא במישור $ABB'A'$, כלומר מאונך לווקטור $\vec{A'B}$.
5. א. $\vec{A'C} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\vec{FG} = -\underline{u} - \underline{w}$, $\vec{FE} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{v}$.
6. א. $\vec{AB'} = \underline{u} + \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{u} + \underline{v}$. ג. הווקטור $\vec{BE}$ מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים הנמצאים במישור $AB'C$, ולכן מאונך למישור. ג. הווקטור $\vec{BE}$ מאונך למישור $AB'C$, ולכן מאונך לכל וקטור הנמצא במישור $AB'C$, כלומר מאונך לווקטור $\vec{B'C}$.
7. א. כן, בפירמידה ישרה שבסיסה מלבן, גובה הפירמידה נפגש עם בסיס הפירמידה בנקודת מפגש אלכסוני הבסיס. ב. הווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור ABCD, ולכן מאונך לווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הנמצאים במישור ABCD. ג. 40.
 ד. $\vec{SC} = \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{MC} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$. ה. (1) 3.202. (2) 61.91° .
8. א. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, גובה הפירמידה נפגש עם בסיס הפירמידה בנקודת מפגש אלכסוני הבסיס. ב. 6. ג. $\vec{SB} = \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{SA} = \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$.
 ד. (1) בפירמידה ישרה המקצועות הצדדיים שווי אורך. (2) 38.69° . ה. 138.5.

9. א. $\underline{v} \cdot \underline{w} = 18\sqrt{3}$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 18\sqrt{3}$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 18\sqrt{3}$.

ב. (1) $\overrightarrow{AB} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\overrightarrow{AC} = -\underline{u} + \underline{w}$. (2) $|\overrightarrow{AB}| = 3.106$, $|\overrightarrow{AC}| = 3.106$. (3) 60° . (4) 4.177.
ד. (1) 5.726. (2) 7.973.

10. א. (1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$. (2) הווקטור $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$ הוא צירוף לינארי של שני וקטורים

לא קולינאריים במישור ABCD. הנקודה A נמצאת במישור ABCD,

ולכן $\overrightarrow{AM}$ מוכל במישור, ומכאן שהנקודה M נמצאת במישור ABCD.

ג. (1) $3\sqrt{2}$. (2) 114.55.

11. א. $|\underline{u}| = 4$. ב. (1) $\underline{w}$ מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים במישור ABC. (2) 16.

ג. (1) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}$. (2) 60° .

12. א. (3) $\overrightarrow{AE}$ מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים במישור הפאה BCD, ולכן מאונך לפאה. מוצאו בקדקוד הפירמידה וסופו בפאה שמול הקדקוד ומכאן שהוא גובה של הפירמידה.

(4) $\overrightarrow{AE}$ מאונך למישור BCD, ולכן מאונך לכל וקטור הנמצא במישור זה.

ב. $|\overrightarrow{AE}| = 1\frac{1}{3}$, $|\overrightarrow{DE}| = 3.771$. ג. 2.514.

13. א. $|\underline{w}| = 12$. ב. (1) $\overrightarrow{MA}$ מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים ($\underline{v}$ ו- $\underline{u}$) הנמצאים במישור PAQ,

ולכן מאונך למישור זה ומהווה גובה של הפירמידה. (2) 10.8.

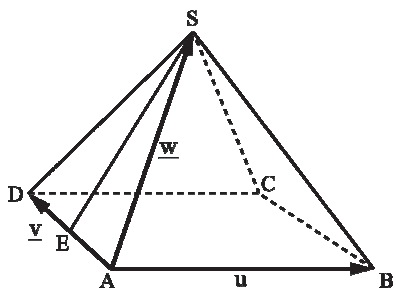
ג. $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{3}{5}\underline{w}$, $\overrightarrow{QM} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{w}$. ד. 31.56° .

14. א. (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12.5$. (2) $\underline{u} \cdot \underline{w} = 15$. (3) $\underline{v} \cdot \underline{w} = 15$. ב. $\overrightarrow{A'E} = \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} - \underline{w}$.

ד. (1) $2\sqrt{6}$. (2) 21.65. (3) 106.1.

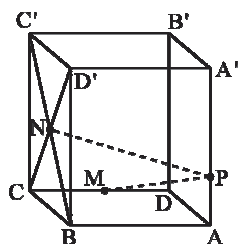
וקטורים גאומטריים – שאלות לסיכום וחזרה

1. נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע. כל הפאות הצדדיות של הפירמידה הן משולשים שווים צלעות. נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.



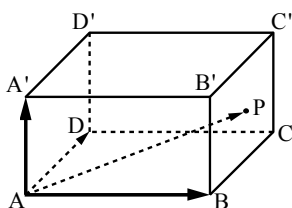
- הנקודה E היא אמצע המקצוע AD .
נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 4$.
א. הביעו את $\vec{SE}$ ו- $\vec{SB}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
ב. (1) חשבו את גודל הזווית BSE .
(2) חשבו את שטח המשולש BSE .
ג. הנקודה F היא אמצע המקצוע SB .
(1) הביעו את $\vec{DF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
(2) האם $\vec{DF}$ ו- $\vec{SB}$ מאונכים זה לזה? נמקו.

2. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$, הנקודה M היא אמצע DC , הנקודה N היא מפגש אלכסוני הפאה $BB'C'C$, והנקודה P נמצאת על AA' כך ש- $\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AA'}$.



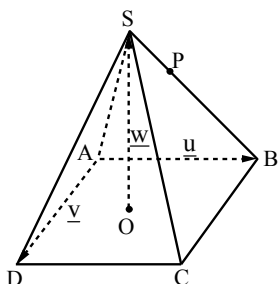
- נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
א. הביעו את הווקטורים $\vec{PM}$ ו- $\vec{PN}$ כצירוף לינארי של $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
ב. נתון: בסיס התיבה הוא ריבוע, $\vec{PN} \perp \vec{PM}$.
חשבו את היחס בין האורך של צלע הבסיס לבין האורך של גובה התיבה.

3. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.



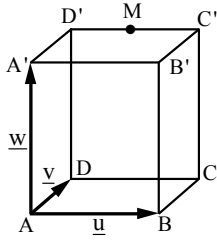
- נתון: $|\vec{AA'}| = 8$, $|\vec{AD}| = 6$, $|\vec{AB}| = 6$.
הנקודה P מקיימת $\vec{AP} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.
א. (1) הביעו את הווקטור $\vec{BP}$.
(2) הסבירו מדוע הנקודה P נמצאת על המישור $BCC'B'$.
ב. חשבו את הזווית שהווקטור $\vec{AP}$ יוצר עם הווקטור $\vec{AD'}$.

4. נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע. אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה O .



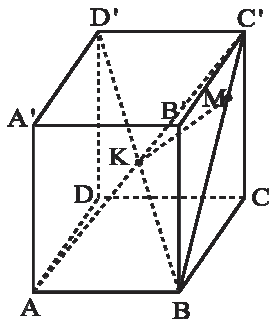
- נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{OS} = \underline{w}$.
א. הסבירו מדוע OS הוא גובה הפירמידה.
ב. הביעו את $\vec{BS}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
ג. נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 6$, $\vec{BP} = \frac{2}{3}\vec{BS}$.
(1) הביעו את $\vec{PA}$ ו- $\vec{PC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
(2) הראו ש- $\vec{PA}$ ו- $\vec{PC}$ מאונכים זה לזה.
ד. חשבו את שטח המשולש APC .

5. במנסרה ישרה $ABCD A'B'C'D'$, הבסיס $ABCD$ הוא מעוין.
נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$ (ראו ציור). נתון: $|\underline{w}| = 5$, $|\underline{u}| = 4$.
א. הנקודה M היא אמצע המקצוע $D'C'$ (ראו ציור).



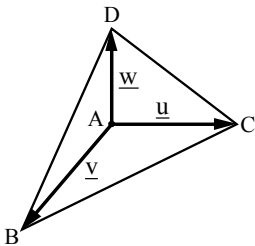
- הביעו את הווקטור $\vec{AM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
נתון גם כי $|\vec{AM}| = 7$.
ב. (1) מצאו את המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$.
(2) מצאו את גודל הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
ג. (1) חשבו את שטח הבסיס $ABCD$.
(2) חשבו את נפח המנסרה $ABCD A'B'C'D'$.
(3) חשבו את נפח הפירמידה המרובעת $A'ABCD$.

6. ★ נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$ (ראו ציור) שאורך צלעה 1. נתון: $\vec{AB} = \underline{a}$, $\vec{BC} = \underline{b}$, $\vec{CC'} = \underline{c}$.
נקודה K היא מפגש האלכסונים AC' ו- BD' .



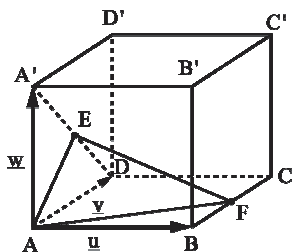
- א. הביעו את $\vec{AC'}$ ואת $\vec{BD'}$ באמצעות $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$.
ב. (1) חשבו את הזווית $\angle D'KC'$ שבין $\vec{BD'}$ ל- $\vec{AC'}$.
(2) האם נכון ש- $\angle D'KC' < 90^\circ$? קבועה ללא תלות בממדי הקובייה?
ג. M נקודה על BC' כך שמתקיים $\vec{BM} = \frac{3}{4} \vec{BC'}$.
(1) הביעו את $\vec{MK}$ ואת $\vec{C'K}$ באמצעות $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$.
(2) חשבו את $|\vec{MK}|$.
(3) חשבו את $\angle MKC'$.

7. ► בפירמידה משולשת $ABCD$ נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AC} = \underline{u}$.



- הווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מאונכים זה לזה.
הנקודה E מקיימת: $\vec{DE} = \frac{1}{2} \vec{DB} + \frac{1}{3} \vec{DC}$.
א. הסבירו מדוע הנקודה E נמצאת במישור המשולש BCD .
ב. הביעו את $\vec{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
ג. נתון: $|\underline{w}| = 2\sqrt{3}$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = \sqrt{6}$.
הוכיחו שהישר AE מאונך למישור המשולש BCD .

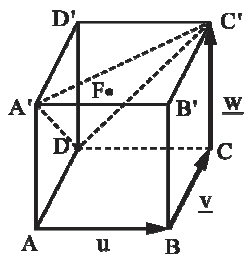
8. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{v}| = 1$, $|\underline{u}| = |\underline{w}| = 2$.
הנקודה F מקיימת $\vec{BF} = \frac{1}{2} \vec{BC}$. הנקודה E היא אמצע האלכסון $A'D$.



- א. הביעו את הווקטורים $\vec{AE}$, $\vec{AF}$ ו- $\vec{EF}$ כצירוף לינארי של $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
ב. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה:
(1) הישר AB מאונך לישר AE .
(2) הישר AF מאונך לישר AE .
(3) הישר EF מקביל למישור $ABB'A'$.
ג. חשבו את הזווית $\angle EAF$ ואת שטח המשולש EAF .

9. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

נתון: $|\underline{u}| = 5$, $|\underline{v}| = |\underline{w}| = 8$.



א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DC'}$ ו- $\overrightarrow{BD'}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. חשבו את $|\overrightarrow{DA'}|$, $|\overrightarrow{DC'}|$ ו- $|\overrightarrow{BD'}|$.

ג. (1) חשבו את הזווית $\angle A'DC'$.

(2) חשבו את שטח המשולש $A'DC'$.

ד. הנקודה F מקיימת $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$.

(1) הסבירו מדוע הנקודה F נמצאת על מישור המשולש $A'DC'$.

(2) הביעו את הווקטור $\overrightarrow{BF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

(3) האם הנקודה F נמצאת על האלכסון BD' ? נמקו.

(4) חשבו את אורך הקטע BF.

10. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע המקצוע CC' .

הנקודה F מקיימת $\overrightarrow{DF} = -\frac{3}{4}\underline{w}$.

א. הסבירו היכן ממוקמת הנקודה F.

ב. נתון כי נפח הקובייה הוא 27.

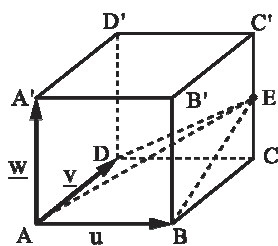
(1) מהו אורך צלע הקובייה?

(2) חשבו את נפח הפירמידה המרובעת EABCD.

(3) חשבו את נפח הפירמידה המרובעת FABCD.

ג. הביעו את $\overrightarrow{AE}$ ואת $\overrightarrow{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ד. הראו כי $\cos \angle EAF = \frac{1}{3}$.



11. נתונה מנסרה ישרה $ABCD A'B'C'D'$.

הבסיס ABCD של המנסרה הוא מעוין שאורך צלעו 4.

נתון: $\angle BAD = 45^\circ$, הנקודה E היא אמצע המקצוע $C'B'$.

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{D'E}$ ו- $\overrightarrow{D'A}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. לפניכם שלוש טענות (1-3).

קבעו אילו מהטענות נכונות. נמקו.

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ (2) $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$ (3) $\overrightarrow{D'A}$ מאונך ל- $\overrightarrow{D'E}$.

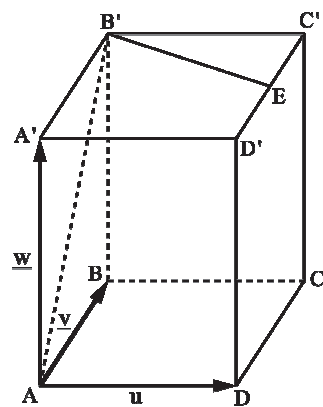
ג. (1) חשבו את שטח הבסיס ABCD.

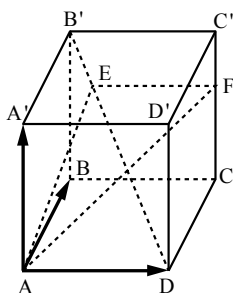
(2) נתון כי נפח המנסרה הוא $48\sqrt{2}$.

חשבו את אורך הגובה של המנסרה.

ד. (1) חשבו את אורך הווקטור $\overrightarrow{D'E}$.

(2) חשבו את שטח המשולש $AD'E$.





12. נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$.

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

הנקודה E נמצאת על האלכסון DB' כך ש- $\vec{DE} = \frac{3}{4}\vec{DB'}$.

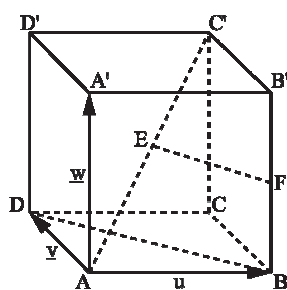
הנקודה F נמצאת על המקצוע CC' כך ש- $\vec{CF} = \frac{3}{4}\vec{CC'}$.

א. הביעו את הווקטור $\vec{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. הביעו את הווקטור $\vec{EF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ג. הראו כי הווקטור $\vec{EF}$ מקביל למישור הפאה ABCD.

ד. האם הווקטור $\vec{DB'}$ מאונך למישור AEF? נמקו.



13. נתונה הקובייה $ABCD A'B'C'D'$.

הנקודה F היא אמצע המקצוע BB' .

הנקודה E היא אמצע האלכסון AC' .

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 3$.

א. הביעו את הווקטורים $\vec{DE}$, $\vec{EF}$, $\vec{AC'}$, $\vec{DB}$ כצירוף לינארי של $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

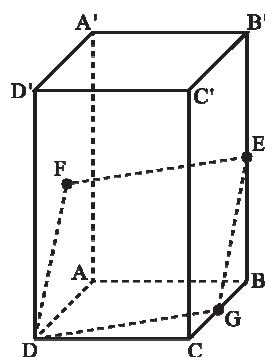
ב. (1) חשבו את אורכי הווקטורים $\vec{DE}$ ו- $\vec{DB}$.

(2) חשבו את גודל הזווית EDB.

ג. (1) הסבירו מדוע הווקטור $\vec{EF}$ מקביל למישור ABCD.

(2) הסבירו מדוע $EF \parallel BD$.

ד. קבעו איזה מרובע הוא EDBF, וחשבו את זוויתיו.



14. נתונה מנסרה ישרה $ABCD A'B'C'D'$.

הנקודה E היא אמצע המקצוע BB' .

הנקודה F היא מפגש אלכסוני הפאה $AA'D'D$.

נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. כתבו את הווקטורים $\vec{DE}$ ו- $\vec{FE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. (1) הראו ש- $\vec{FE}$ מקביל למישור $A'B'C'D'$.

(2) האם $\vec{FE}$ מקביל ל- $A'B'$?

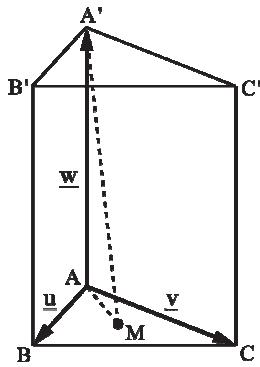
ג. הנקודה G היא אמצע המקצוע BC.

הוכיחו שהמרובע DFEG הוא מקבילית.

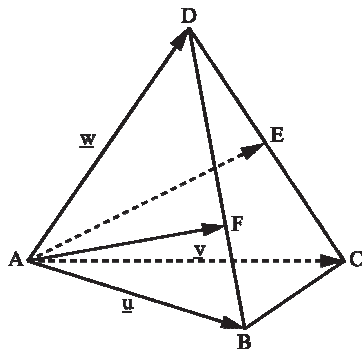
ד. נתון: $\angle ADC = 60^\circ$, $|\underline{w}| = 5$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$.

(1) חשבו את $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

(2) חשבו את היקף המקבילית DFEG.



15. נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$.
 בסיסי המנסרה ABC ו- $A'B'C'$ הם משולשים שווי צלעות.
 הנקודה M היא מפגש התיכונים של המשולש ABC .
 נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 א. הביעו את $\vec{AM}$ ו- $\vec{A'M}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות, ונמקו:
 (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ (2) $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$ (3) $\underline{w} \cdot \vec{AM} = 0$.
 ג. נתון: $|\underline{w}| = 10$, $|\underline{u}| = 5$.
 חשבו את גודל הזווית $\angle AMA'$.



16. בפירמידה משולשת $ABCD$, הפאות ABD ו- ACD הן משולשים שווי צלעות (ראו ציור).
 הנקודה E היא אמצע המקצוע CD .
 הנקודה F נמצאת על המקצוע BD ומחלקת אותו ביחס של $BF:FD = 1:2$.
 נסמן: $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 נתון: $\angle BAC = 30^\circ$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 4$.
 א. חשבו את המכפלות הסקלריות: $\underline{v} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{u} \cdot \underline{v}$.
 ב. הביעו את הווקטורים $\vec{CD}$ ו- $\vec{BD}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ג. הביעו את הווקטורים $\vec{AE}$ ו- $\vec{AF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ד. לפניכם שלוש טענות (1) – (3).
 קבעו אילו מהטענות נכונות ואילו אינן נכונות. נמקו.
 (1) $\vec{CD}$ מאונך ל- $\vec{AE}$. (2) $\vec{CD}$ מאונך ל- $\vec{AF}$. (3) $\vec{CD}$ מאונך למישור EAF .

תשובות:

1. א. $\vec{SE} = -\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{SB} = -\underline{w} + \underline{u}$. ב. (1) 73.22° . (2) 6.633 . ג. (1) $\vec{DF} = -\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}$. (2) לא.
2. א. $\vec{PM} = -\frac{1}{4}\underline{w} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u}$, $\vec{PN} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w}$. ב. $\frac{|\underline{u}|}{|\underline{w}|} = \frac{1}{4}$.
3. א. (1) $\vec{BP} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$. (2) הווקטור $\vec{BP}$ הוא צירוף לינארי של שני וקטורים ($\underline{v}$ ו- $\underline{w}$) לא קולינאריים הנמצאים במישור $BCC'B'$. הנקודה B נמצאת במישור, ולכן $\vec{BP}$ מוכל במישור, ומכאן שהנקודה P נמצאת במישור. ב. 56.98° .
4. א. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, גובה הפירמידה נפגש עם בסיס הפירמידה בנקודת מפגש אלכסוני הבסיס. ב. $\vec{BS} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{w}$. ג. (1) $\vec{PC} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$, $\vec{PA} = -\frac{2}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$. ד. 18.
5. א. $\vec{AM} = \frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$. ב. (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 4$. (2) 75.52° . ג. (1) 15.49 . (2) 77.46 . (3) 25.82 .

6. א. $\overrightarrow{AC'} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $\overrightarrow{BD'} = -\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$. ב. (1) 70.53° . (2) כן.
- ג. (1) $\overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\underline{a} - \frac{1}{4}\underline{b} - \frac{1}{4}\underline{c}$, $\overrightarrow{CK} = -\frac{1}{2}\underline{a} - \frac{1}{2}\underline{b} - \frac{1}{2}\underline{c}$. (2) 0.6124. (3) 19.47° .
7. א. $\overrightarrow{DE}$ הוא צירוף לינארי של שני וקטורים ($\overrightarrow{DB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$) לא קולינאריים שבמישור BCD.
הנקודה D נמצאת במישור, ולכן $\overrightarrow{DE}$ מוכל במישור BCD, והנקודה E נמצאת במישור זה.
ב. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{6}\underline{w}$.
8. א. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{AF} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\overrightarrow{EF} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$. ב. (1) כן. (2) לא. (3) כן.
ג. $\angle EAF = 83.77^\circ$, $S_{\triangle EAF} = 0.479$.
9. א. $\overrightarrow{DA'} = -\underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{DC'} = \underline{u} + \underline{w}$, $\overrightarrow{BD'} = -\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$. ב. $|\overrightarrow{DA'}| = 8\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{DC'}| = 9.434$, $|\overrightarrow{BD'}| = 12.37$.
ג. (1) 53.16° . (2) 42.71.
- ד. (1) $\overrightarrow{DF}$ הוא צירוף לינארי של שני וקטורים לא קולינאריים הנמצאים במישור A'DC'.
הנקודה D נמצאת במישור, ולכן $\overrightarrow{DF}$ מוכל במישור BCD, והנקודה F נמצאת במישור.
 $\overrightarrow{BF} = -\frac{2}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}$ (2).
- (3) כן, מאחר ש- $\overrightarrow{BD}$ ו- $\overrightarrow{BF}$ הם כפל בסקלר אחד של השני ($\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$). (4) $|\overrightarrow{BF}| = 8.247$.
10. א. על המשך D'D (מהצד של D). ב. (1) 3. (2) 4.5. (3) 6.75. ג. $\overrightarrow{AE} = \underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{AF} = \underline{v} - \frac{3}{4}\underline{w}$.
11. א. $\overrightarrow{D'A} = -\underline{v} - \underline{w}$, $\overrightarrow{D'E} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$. ב. טענה (2). ג. (1) $8\sqrt{2}$. (2) 6. ד. (1) 2.947. (2) 10.50.
12. א. $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{3}{4}\underline{w}$. ב. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v}$. ד. לא.
13. א. $\overrightarrow{DB} = -\underline{v} + \underline{u}$, $\overrightarrow{AC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$.
- ב. (1) $|\overrightarrow{DB}| = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{6.75}$. (2) 35.26° .
- ג. (1) $\overrightarrow{EF}$ הוא צירוף לינארי של שני וקטורים לא קולינאריים הנמצאים במישור ABCD.
הנקודה F אינה נמצאת במישור, ולכן $\overrightarrow{EF}$ מקביל למישור.
(2) $\overrightarrow{EF}$ ו- $\overrightarrow{BD}$ הם כפל בסקלר אחד של השני ($\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$).
- ד. המרובע EDBF הוא טרפז ישר זווית. זוויותיו הן: 35.26° , 54.74° , 90° , 90° .
14. א. $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{FE} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$. ב. (2) לא. ד. (1) -3. (2) 12.6.
15. א. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{A'M} = -\underline{w} + \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$. ב. טענות (2) ו-(3) הן נכונות.
- הסבר: הווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור ABC, ולכן מאונך לכל וקטור במישור ABC. ג. 73.9° .
16. א. $\underline{u} \cdot \underline{w} = 8$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 8$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 8$. ב. $\overrightarrow{CD} = -\underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{BD} = -\underline{u} + \underline{w}$.
ג. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{w}$. ד. טענה (1) נכונה, טענות (2) ו-(3) אינן נכונות.