

חוברת בנושא

וקטורים

תכנית חדשה, שאלון 472

כיתה יב', 4 יח"ל

אריק דז'לדטי, יואל גבע

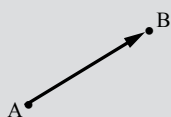
וקטורים

הווקטור הגאומטרי

הצגת הווקטור הגאומטרי וסימונו

בטבע ישנם גדלים שיש להם ערך מספרי וגם כיוון. לדוגמה: מהירות, כוח. גדלים אלה נקראים **וקטורים**. כמו כן, ישנם גדלים שיש להם רק ערך מספרי ואין להם כיוון. לדוגמה: שטח, טמפרטורה. גדלים אלה מתוארים בצורה כמותית בלבד והם נקראים **סקלרים**.

בספר זה נדון בעיקר בווקטורים כפי שהם מופיעים בשאלות גאומטריות במישור ובמרחב. נתחיל מהגדרת הווקטור הגאומטרי. **וקטור גאומטרי הוא קטע בעל כיוון**. נהוג לתאר את הווקטור הגאומטרי באמצעות חץ עם אורך וכיוון. הנקודה שממנה מתחיל הווקטור נקראת המוצא (או נקודת ההתחלה) של הווקטור, והנקודה שבה מסתיים הווקטור נקראת הסוף של הווקטור.



נניח כי נתונות נקודות A ו-B (במישור או במרחב). את הווקטור שמוצאו בנקודה A וסופו בנקודה B, נוהגים לשרטט כחץ שהתחלה שלו בנקודה A והחוד שלו בנקודה B. הסימון של חץ כזה הוא $\vec{AB}$. נשים לב שכאשר כותבים $\vec{AB}$, האות השמאלית (A) היא המוצא של הווקטור והאות הימנית (B) היא הסוף של הווקטור. נהוג לסמן וקטורים גם על ידי אות קטנה ומתחתיה קו: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ וכו'. לדוגמה: אפשר לסמן $\vec{AB} = \underline{u}$.

נשים לב שכאשר מסמנים קטעים, אין הבדל בין AB ל-BA ושני הסימונים מייצגים בדרך כלל את אורך הקטע המחבר את הנקודות A ו-B. **בכתיבת וקטורים יש חשיבות גם לכיוון של הקטע ולא רק לאורכו**, ולכן קיים הבדל בין הסימון $\vec{AB}$ (המייצג וקטור שתחילתו בנקודה A וסופו בנקודה B), לסימון $\vec{BA}$ (המייצג וקטור שתחילתו בנקודה B וסופו בנקודה A).

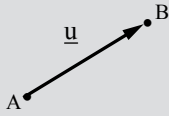
הדיון בווקטורים יהיה גם במרחב תלת ממדי ולא רק במישור דו ממדי. וקטור יכול להיות בכל כיוון במרחב. לדוגמה: הווקטור יכול להיות חץ המחבר נקודה על רצפת הכיתה עם נקודה הנמצאת על אחד הקירות בכיתה וכו'.

וקטור האפס

הווקטור $\vec{AA}$, שמתחיל ומסתיים באותה נקודה הוא וקטור שאורכו אפס, ולא ניתן לייחס לו כיוון.

וקטור זה נקרא **וקטור האפס**. הסימון לווקטור כזה הוא $\vec{AA} = \underline{0}$. רשמנו אפס ומתחתיו קו כדי לציין שמדובר בווקטור האפס ולא במספר אפס שהוא סקלר.

אורך וקטור



האורך של הווקטור $\overrightarrow{AB}$ הוא אורך הקטע AB .
נהוג לסמן אורך של וקטור באמצעות ערך מוחלט.

לדוגמה: האורך של הווקטור $\overrightarrow{AB}$ מסומן $|\overrightarrow{AB}|$.

כמו כן, אם מסומן $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, אז $|\overrightarrow{AB}| = |\underline{u}|$.

מאחר שאורך הווקטור הוא אורך הקטע AB , אפשר לסמנו גם AB , כלומר ללא חץ מעליו.
נדגיש כי **אורך של וקטור זה סקלר, כלומר גודל ללא כיוון**.

וקטורים שווים

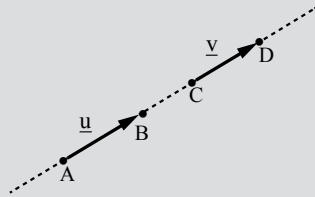
כאשר שני קטעים שווים, הכוונה היא לכך שהם בעלי אותו אורך.

ראינו כי וקטור הוא קטע בעל כיוון,

ולכן המשמעות של **וקטורים שווים** היא שהם שווים **באורך וגם בכיוון**.

קיימות שתי אפשרויות לקבלת וקטורים שווים.

מקרה (1): וקטורים הנמצאים על אותו ישר.



לפניכם שני וקטורים $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ו- $\overrightarrow{CD} = \underline{v}$ הנמצאים על אותו ישר.

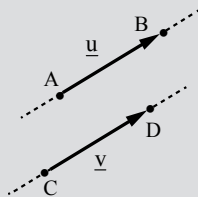
אם אפשר להזיז את אחד הווקטורים, בתנועה השומרת

על אורכו וכיוונו, כך שהוא יתלכד עם הווקטור השני,

אז שני הווקטורים הם בעלי אותו אורך ואותו כיוון,

והם נקראים וקטורים שווים. נוכל לרשום $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ או $\underline{u} = \underline{v}$.

מקרה (2): וקטורים הנמצאים על ישרים מקבילים.



לפניכם שני וקטורים $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ו- $\overrightarrow{CD} = \underline{v}$ שאינם על ישר אחד.

אם אפשר להזיז את אחד הווקטורים, בתנועה השומרת

על אורכו וכיוונו, כך שהוא יועתק לישר המקביל לישר

עליו הוא נמצא, ויתלכד עם הווקטור השני,

אז שני הווקטורים הם בעלי אותו אורך ואותו כיוון,

והם נקראים וקטורים שווים. נוכל לרשום $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ או $\underline{u} = \underline{v}$.

נסכם: שני וקטורים נקראים שווים אם אפשר להזיז את אחד הווקטורים,

על ידי תנועה השומרת על אורך הווקטור וכיוונו, כך שהוא יתלכד עם הווקטור השני.

ניתן לראות ששני וקטורים שווים יכולים להיות מצוירים במקומות שונים.

הערות:

(1) **וקטורים שווים** נמצאים (תמיד) על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

(2) כאשר מסמנים $AB = CD$,

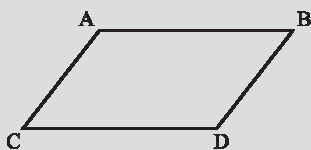
הכוונה היא ששני הקטעים שווים באורכם.

לעומת זאת, כאשר מסמנים $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$,

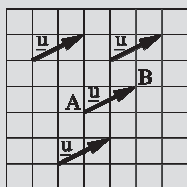
הכוונה היא שהם **שווים באורכם וגם בכיוונם**.

במרובע $ABDC$ המתואר משמאל,

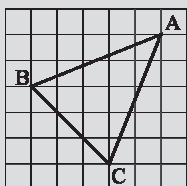
אם נתון $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, אז $AB = CD$ ו- $AB \parallel CD$, והמרובע $ABDC$ הוא מקבילית.



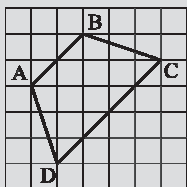
(3) כאשר שני וקטורים שווים זה לזה ($\underline{u} = \underline{v}$), אז הם שווים באורכם וגם בכיוונם, ולהיפך – אם שני וקטורים שווים באורכם ובכיוונם, אז הם נקראים וקטורים שווים.



(4) אם נתון וקטור $\vec{AB}$ המסומן $\underline{u}$, כלומר $\vec{AB} = \underline{u}$, קיימים אינסוף וקטורים אחרים השווים לו, כלומר חצים השווים לו באורך ובכיוון. בציור מתוארים מספר וקטורים השווים כולם ל- $\underline{u}$.



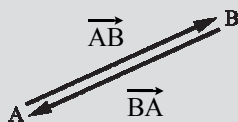
(5) אם שני וקטורים הם בעלי אותו אורך, אך אינם בעלי אותו כיוון, הם אינם וקטורים שווים. בציור מתואר משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$). שני הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ הם בעלי אותו אורך, כלומר $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$, אך בעלי כיוון שונה, ולכן הם אינם וקטורים שווים.



(6) אם שני הווקטורים הם בעלי אותו כיוון, אך אינם בעלי אותו אורך, הם אינם וקטורים שווים. בציור מתואר טרפז ABCD ($AB \parallel DC$). שני הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ הם בעלי אותו כיוון, אך בעלי אורך שונה, ולכן הם אינם וקטורים שווים.

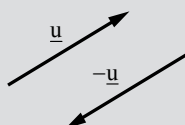
וקטורים נגדיים

ראינו שכאשר מסמנים קטעים, אין הבדל בין הקטע AB לקטע BA. שני הסימונים מייצגים בדרך כלל את אותו הקטע המחבר את הנקודות A ו-B, ומתקיים $BA = AB$.



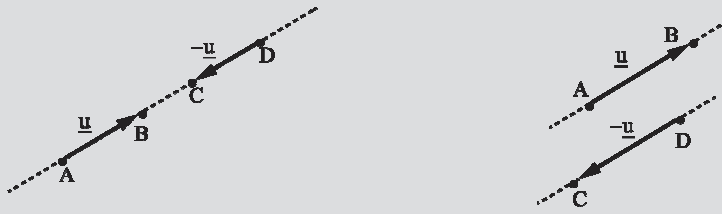
לעומת זאת, למדנו שכאשר מסמנים וקטורים, קיימת חשיבות לסדר הכתיבה. הווקטור $\vec{AB}$ מייצג חץ שתחילתו ב-A וסופו ב-B. לעומת זאת, הווקטור $\vec{BA}$ מייצג חץ שתחילתו ב-B וסופו ב-A.

האורך של $\vec{BA}$ שווה לאורך של $\vec{AB}$, אך הכיוון של $\vec{BA}$ מנוגד לכיוון של $\vec{AB}$. וקטורים בעלי אותו אורך אבל בעלי כיוון הפוך נקראים וקטורים נגדיים. (וקטורים נגדיים אינם וקטורים שווים).



הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{BA}$ נקראים וקטורים נגדיים. רושמים זאת $\vec{BA} = -\vec{AB}$. הווקטור הנגדי לווקטור $\underline{u}$ מסומן על ידי $-\underline{u}$. אם נסמן $\vec{AB} = \underline{u}$, אז $\vec{BA} = -\underline{u}$.

בדומה לווקטורים שווים, גם וקטורים נגדיים ($\underline{u}$ ו- $-\underline{u}$) נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.



דוגמה:

במקבילית ABCD האלכסונים נחתכים בנקודה M.

נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$.

א. מצאו בציור וקטור נוסף השווה ל- $\underline{v}$.

ב. מצאו בציור וקטור השווה ל- $\overrightarrow{DM}$.

ג. מצאו בציור שני וקטורים נגדיים ל- $\overrightarrow{MC}$.

פתרון:

א. נתון כי $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$. הווקטור $\overrightarrow{DC}$ זהה בכיוונו לווקטור $\overrightarrow{AB}$, שהרי שני הווקטורים נמצאים על ישרים מקבילים ומצביעים לאותו כיוון. כמו כן, הקטעים AB ו-DC שווים אורך (צלעות נגדיות שוות אורך במקבילית). נקבל ש- $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ הם שווים אורך וכיוון ולכן הם וקטורים שווים, כלומר $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \underline{v}$.

ב. הווקטור $\overrightarrow{MB}$ זהה בכיוונו לווקטור $\overrightarrow{DM}$, שהרי שני הווקטורים נמצאים על אותו ישר ומצביעים לאותו כיוון.

כמו כן, הקטעים MB ו-DM שווים אורך (אלכסוני המקבילית חוצים זה את זה). נקבל ש- $\overrightarrow{MB}$ ו- $\overrightarrow{DM}$ הם שווים אורך וכיוון ולכן הם וקטורים שווים, כלומר $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM}$.

ג. הווקטור $\overrightarrow{CM}$ שווה באורכו לווקטור $\overrightarrow{MC}$, אך מנוגד לו בכיוון והם וקטורים נגדיים. הווקטור $\overrightarrow{MA}$ שווה באורכו לווקטור $\overrightarrow{MC}$, אך מנוגד לו בכיוון והם וקטורים נגדיים.

דוגמה:

המשולש ABC הוא שווה-שוקיים ($AB = AC$).

הנקודות D, E ו-F הן אמצעי הצלעות AB, AC ו-BC,

בהתאמה (ראו ציור). נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AE} = \underline{v}$.

א. מצאו שני וקטורים נוספים השווים לווקטור $\underline{u}$.

ב. מצאו שלושה וקטורים השווים ל- $-\underline{v}$.

ג. האם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ הם וקטורים שווים? נמקו.

ד. האם הווקטורים $\overrightarrow{DE}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ הם וקטורים שווים? נמקו.

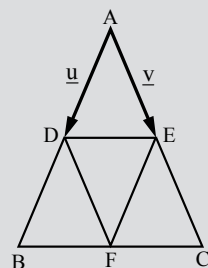
פתרון:

א. נתון כי $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$. הווקטור $\overrightarrow{DB}$ זהה בכיוונו לווקטור $\overrightarrow{AD}$,

שהרי שני הווקטורים נמצאים על אותו ישר ומצביעים לאותו כיוון.

כמו כן, הקטעים AD ו-DB שווים אורך, שהרי נתון שהנקודה D היא אמצע הקטע AB.

נקבל ש- $\overrightarrow{AD}$ ו- $\overrightarrow{DB}$ הם שווים אורך וכיוון ולכן הם וקטורים שווים, כלומר $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} = \underline{u}$.



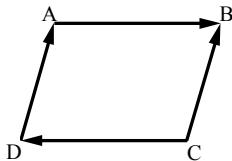
נמצא וקטור נוסף השווה לווקטור $\underline{u}$. על פי הנתונים, הקטע EF הוא קטע אמצעים במשולש ABC, לכן הוא מקביל לצלע AB ושווה למחצית אורכה, ומכאן ש- EF שווה באורכו ל- AD. מאחר ש- EF גם מקביל ל- AD, הרי $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} = \underline{u}$ ומכאן ש- $\overrightarrow{EF} = \underline{u}$.

ב. נתון $\overrightarrow{AE} = \underline{v}$. הווקטור $-\underline{v}$ שווה באורכו לווקטור $\underline{v}$, אך נגדי לו בכיוונו ולכן $\overrightarrow{EA} = -\underline{v}$. הנקודה E היא אמצע הקטע AC, ולכן הווקטורים $\overrightarrow{EA}$ ו- $\overrightarrow{CE}$ הם שווים אורך וכיוון, כלומר הם וקטורים שווים, ומתקיים $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CE} = -\underline{v}$.

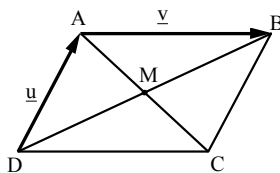
על פי הנתונים, הקטע DF הוא קטע אמצעים במשולש ABC, לכן הוא מקביל לצלע AC ושווה למחצית אורכה, ומכאן ש- DF שווה באורכו ל- AE. מאחר ש- DF מקביל ל- AE, הרי $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} = \underline{v}$ ו- $\overrightarrow{FD} = -\underline{v}$. נקבל ש- $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} = \underline{v}$ ומכאן ש- $\overrightarrow{FD} = -\underline{v}$. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים ($AB = AC$), ולכן הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ שווים אורך, אך שונים בכיוונם, ולכן הם אינם וקטורים שווים. הערה: את שוויון האורך בין הווקטורים נכתוב כך: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

ד. הווקטורים $\overrightarrow{DE}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ נמצאים על ישרים מקבילים ($DE \parallel BC$), ולכן שווים-כיוון, אך אינם שווים אורך (BC כפול באורכו מ- DE), ולכן הם אינם וקטורים שווים.

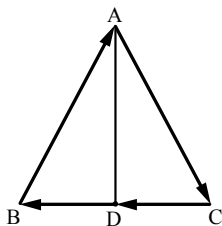
תרגילים



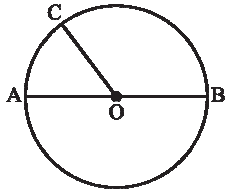
1. בציור שלפניכם נתונה מקבילית ABCD. קבעו האם הווקטורים המסומנים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{CD}$ הם וקטורים שווים או וקטורים נגדיים. קבעו האם הווקטורים המסומנים $\overrightarrow{DA}$ ו- $\overrightarrow{CB}$ הם וקטורים שווים או וקטורים נגדיים.



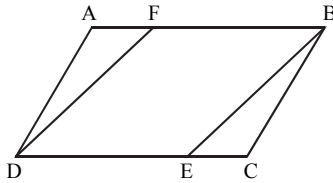
2. במקבילית ABCD האלכסונים נחתכים בנקודה M. נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$.
א. מצאו בציור וקטור נוסף השווה ל- $\underline{u}$.
ב. מצאו בציור שני וקטורים השווים ל- $-\underline{v}$.
ג. (1) מצאו בציור וקטור השווה ל- $\overrightarrow{AM}$.
(2) מצאו בציור שני וקטורים נגדיים ל- $\overrightarrow{BM}$.



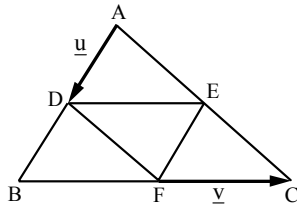
3. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים ($AB = AC$). הנקודה D היא אמצע הבסיס BC. קבעו אילו מארבעת הווקטורים המסומנים בציור: (1) הם וקטורים שווים. (2) הם וקטורים שונים השווים באורכם. ב. מה אפשר לומר על הווקטורים $\overrightarrow{DB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$?



4. לפניכם מעגל שמרכזו בנקודה O.
 AB הוא קוטר במעגל. הנקודה C נמצאת על היקף המעגל.
 א. מצאו בציור וקטור השווה ל- $\overrightarrow{OB}$.
 ב. האם $\overrightarrow{OA}$ ו- $\overrightarrow{OC}$ הם וקטורים שווים או וקטורים נגדיים?
 ג. נסמן: $\overrightarrow{OB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{v}$.
 (1) האם מתקיים $\underline{u} = \underline{v}$? (2) האם מתקיים $|\underline{u}| = |\underline{v}|$?



5. המרובע ABCD הוא מקבילית.
 הנקודות F ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-DC, בהתאמה. נתון: $AF = CE$.
 א. הסבירו מדוע $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC}$.
 ב. האם $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{ED}$ או $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{ED}$?
 ג. הסבירו מדוע $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB}$.
 ד. עידו טוען שהשוויון $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB}$ מספיק כדי להוכיח שהמרובע DEBF הוא מקבילית?
 האם הוא צודק? נמקו.



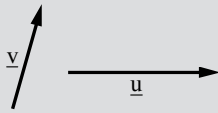
6. במשולש ABC, הנקודות D, E, F הן אמצעי הצלעות AB, AC ו-BC, בהתאמה. נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{FC} = \underline{v}$.
 א. הסבירו מדוע EF הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
 ב. מצאו בציור שני וקטורים נוספים השווים ל- $\underline{u}$.
 ג. מצאו בציור שלושה וקטורים השווים ל- $-\underline{v}$.
 ד. נתון שהמשולש ABC הוא שווה-שוקיים ($AB = BC$).
 (1) האם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שווים באורכם? (2) האם $\underline{u} = \underline{v}$?

תשובות:

- א. נגדיים, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. ב. שווים, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.
- א. $\overrightarrow{CB} = \underline{u}$. ב. $\overrightarrow{BA} = -\underline{v}$, $\overrightarrow{CD} = -\underline{v}$. ג. (1) $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$ (2) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{BM}$.
- א. (1) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$ (2) $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{BA}$. ב. וקטורים נגדיים.
- א. $\overrightarrow{AO}$. ב. נגדים, $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$. ג. (1) לא. (2) כן, $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$.
- א. שני הווקטורים שווים אורך וכיוון. ב. $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{ED}$. שני הווקטורים שווים אורך ונגדיים בכיוון.
 ג. שני הווקטורים שווים אורך וכיוון.
- א. קטע המחבר אמצעי שתי צלעות של משולש הוא קטע אמצעים במשולש.
 ב. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EF} = \underline{u}$. ג. (1) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{ED} = -\underline{v}$ (2) לא. ד. כן, $|\underline{u}| = |\underline{v}|$.

חיבור וחיסור וקטורים

חיבור וקטורים

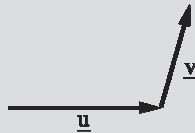


נדון עכשיו בחיבור וקטורים.

נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

לכל וקטור אורך וכיוון משלו.

נרצה להגדיר מה זה חיבור וקטורים, ולשרטט את הווקטור $\underline{u} + \underline{v}$.



נשרטט את הווקטור $\underline{u}$. אחר כך נעתיק את הווקטור $\underline{v}$

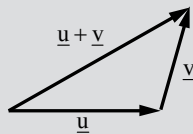
(בתנועה השומרת על אורכו וכיוונו)

כך שמוצאו **יתלכד** עם הסוף של הווקטור $\underline{u}$.

כלומר נקודת ההתחלה של הווקטור $\underline{v}$

נמצאת בדיוק בנקודת הסוף של וקטור $\underline{u}$.

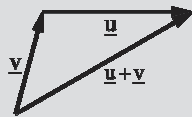
(מותר להעתיק וקטור בצורה השומרת על אורכו וכיוונו).



הווקטור שמוצאו בנקודת המוצא של $\underline{u}$

וסופו בנקודת הסוף של $\underline{v}$,

מוגדר כסכום הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ והוא הווקטור $\underline{u} + \underline{v}$.



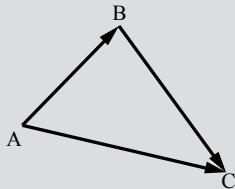
הערה: אפשר גם לשרטט קודם את הווקטור $\underline{v}$.

אחר כך להעתיק את הווקטור $\underline{u}$ (בתנועה השומרת

על אורכו וכיוונו) כך שמוצאו **יתלכד** עם הסוף של הווקטור $\underline{v}$.

הווקטור שמוצאו בנקודת המוצא של $\underline{v}$,

וסופו בנקודת הסוף של $\underline{u}$ הוא הווקטור $\underline{v} + \underline{u}$.



נתבונן לדוגמה במשולש ABC, המתואר משמאל.

נתונים שני וקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ (ראו ציור).

נרצה לחבר את שני הווקטורים, כלומר להציג

את הווקטור $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. מוצא הווקטור $\overrightarrow{BC}$

הוא הסוף של הווקטור $\overrightarrow{AB}$, וניתן לקבל $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

מסקנה: לכל שלוש נקודות (במישור או במרחב) מתקיים: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

השימוש עיקרי: אם מסמנים לנו $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ו- $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, אז $\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$.

הערות:

(1) כדי לחבר שני וקטורים נעזרנו בסימן + (פלוס).

סימן זה משמש אותנו לשתי מטרות שונות: חיבור של וקטורים וחיבור של מספרים.

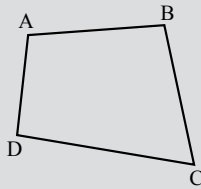
נדגיש שלמרות שסכום הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ שווה לווקטור $\overrightarrow{AC}$,

סכום אורכי הקטעים AB ו-BC אינו שווה לאורך הקטע AC

(אלא אם נקודה B נמצאת על הקטע AC).

(2) אפשר גם לחבר שני וקטורים שווים. לדוגמה: אם נחבר $\underline{u} + \underline{u}$, נקבל וקטור זהה בכיוון

לווקטור $\underline{u}$ ואורכו פי 2 מהאורך של $\underline{u}$. בהמשך נראה שווקטור זה מסומן על ידי $2\underline{u}$.



(3) אפשר לחבר גם יותר משני וקטורים.

לדוגמה: בציור שמשמאל,
 סכום הווקטורים $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
 שווה ל- $\overrightarrow{AD}$.

(4) על פי ההגדרה של חיבור וקטורים מתקיים: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.
 כדי לשמור על ההגדרה של חיבור וקטורים חייבים שגם $\overrightarrow{AA}$ יהיה וקטור.
 כפי שראינו, וקטור זה נקרא וקטור האפס ומסומן $\overrightarrow{AA} = \underline{0}$.

כללי החיבור בווקטורים

חיבור של וקטורים זו פעולה שונה מחיבור של מספרים. למרות זאת, כללי החיבור בווקטורים דומים לכללי החיבור במספרים. נציג את כללי החיבור:

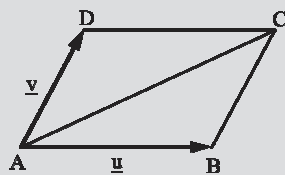
(1) **חוק החילוף:** לכל שני וקטורים מתקיים: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$.

(2) **חוק הקיבוץ של החיבור:**

לכל שלושה וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ מתקיים: $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$.

שימו לב! במקרים רבים נרצה להביע וקטור באמצעות וקטורים אחרים.
בשלב הראשון נבחר מסלול כלשהו שתחילתו בנקודת המוצא של הווקטור המבוקש, וסופו בנקודת הסוף של הווקטור המבוקש. **בשלב השני נחבר** את כל הווקטורים במסלול שבחרנו: נתחיל מווקטור כלשהו שנקודת המוצא שלו היא מוצא הווקטור המבוקש. בסופו של וקטור זה נמצא המוצא של הווקטור שנחבר אליו, ונמשיך בשיטת "ראש זנב" עד שנקודת הסוף של הווקטור האחרון במסלול מתלכדת עם נקודת הסוף של הווקטור המבוקש. סכום הווקטורים שנקבל הוא הווקטור המבוקש. נסביר זאת באמצעות דוגמה.

דוגמה:



במקבילית ABCD נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$.
 הביעו את הווקטור $\overrightarrow{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

פתרון:

כדי להביע את הווקטור $\overrightarrow{AC}$,

נבחר מסלול שתחילתו בנקודה A, וסופו בנקודה C.

דרך א: נצא מנקודה A לנקודה B, ומנקודה B ננוע לנקודה C.

נביע את הווקטור $\overrightarrow{AC}$ על פי המסלול שבחרנו: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

נתון כי $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. בנוסף, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \underline{v}$. נקבל: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{u} + \underline{v}$.

דרך ב: נצא מנקודה A לנקודה D, ומנקודה D ננוע לנקודה C.

נביע את הווקטור $\overrightarrow{AC}$ על פי המסלול שבחרנו: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

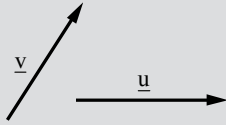
נקבל: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \underline{v} + \underline{u}$.

על פי חוק החילוף, התשובה $\underline{u} + \underline{v}$ זהה לתשובה $\underline{v} + \underline{u}$ שקיבלנו בדרך א.

חשוב לציין שכל עוד נצא מנקודה מסוימת A ונבחר מסלול שבסופו נגיע לנקודה אחרת B, הווקטור $\overrightarrow{AB}$ שנקבל יהיה זהה בכל המסלולים האפשריים.

חיסור וקטורים

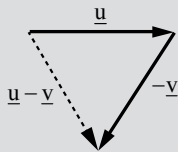
נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. נרצה להגדיר מה זה חיסור גאומטרי של שני הווקטורים. כדי לבצע את החיסור $\underline{u} - \underline{v}$, נחבר ל- $\underline{u}$ את הווקטור $-\underline{v}$ (הווקטור הנגדי ל- $\underline{v}$). כלומר נגדיר את פעולת החיסור באופן הבא: $\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$.



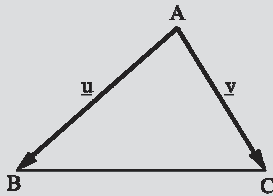
נתונים משמאל שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. נרצה לבצע את החיסור $\underline{u} - \underline{v}$, כלומר $\underline{u} + (-\underline{v})$.



הווקטור $\underline{u}$ נתון לנו. נשרטט את הווקטור $-\underline{v}$ (ראו משמאל).



כעת נעתיק את הווקטור $-\underline{v}$ (בתנועה השומרת על אורכו וכיוונו) כך שמוצאו **יתלכד** עם הסוף של הווקטור $\underline{u}$. כעת נחבר לווקטור $\underline{u}$ את הווקטור $-\underline{v}$. הווקטור המקווקו שמתחיל בנקודה שבה מתחיל וקטור $\underline{u}$ ומסתיים בנקודה שבה מסתיים הווקטור $-\underline{v}$ הוא הווקטור $\underline{u} - \underline{v}$.



דוגמה:

במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

- הביעו את הווקטור $\overrightarrow{BC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
- הביעו את הווקטור $\overrightarrow{CB}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. פתרו בשתי דרכים.

פתרון:

א. כדי להביע את הווקטור $\overrightarrow{BC}$, נבחר מסלול שתחילתו בנקודה B, וסופו בנקודה C. בשאלה זו המסלול די ברור. נצא מנקודה B לנקודה A, ומנקודה A ננוע לנקודה C. נביע את הווקטור $\overrightarrow{BC}$ על פי המסלול שבחרנו: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. נתון כי $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, ולכן $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$. בנוסף, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$. נציב ונקבל: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\underline{u} + \underline{v}$. אפשר להיעזר בחוק החילוף ולקבל $\overrightarrow{BC} = \underline{v} - \underline{u}$. הווקטור שקיבלנו ($\underline{v} - \underline{u}$) מוצג כחיסור וקטורים, אבל למעשה חיברנו וקטורים, כאשר הווקטור $\underline{u}$ היה נגדי לווקטור $\overrightarrow{BA}$ שבכיוון המסלול שבחרנו ומכאן סימן המינוס.

ב. דרך א': כדי להביע את הווקטור $\overrightarrow{CB}$, נבחר מסלול שתחילתו בנקודה C, וסופו בנקודה B. נצא מנקודה C לנקודה A, ומנקודה A ננוע לנקודה B.

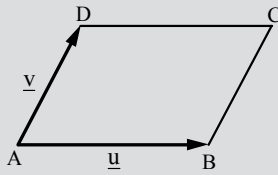
נביע את הווקטור $\overrightarrow{CB}$ על פי המסלול שבחרנו: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$.

נתון כי $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. בנוסף, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, ולכן $\overrightarrow{CA} = -\underline{v}$. נציב ונקבל: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\underline{v} + \underline{u}$.

דרך ב': ניעזר בתוצאה של סעיף א' ובהגדרה של וקטורים נגדיים.

בסעיף א' קיבלנו $\overrightarrow{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$. ידוע כי $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$. נקבל: $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -(-\underline{u} + \underline{v}) = \underline{u} - \underline{v}$.

על פי חוק החילוף, התשובה $\underline{u} - \underline{v}$ זהה לתשובה $-\underline{v} + \underline{u}$ שקיבלנו בדרך א.



דוגמה:

- לפניכם מקבילית ABCD. נסמן: $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
- הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{AC}$.
 - הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{DB}$.
 - הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{CA}$.
 - הביעו את סכום הווקטורים $\vec{BD} + \vec{DC}$.

פתרון:

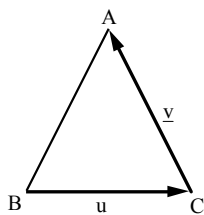
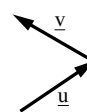
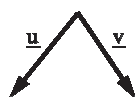
- א. כדי להביע את הווקטור $\vec{AC}$, נבחר מסלול כלשהו שתחילתו בנקודה A, וסופו בנקודה C. לדוגמה: נצא מנקודה A לנקודה B, ומנקודה B לנוע לנקודה C. המסלול שבחרנו מתחיל בנקודה A, עובר דרך נקודה B ומסתיים בנקודה C. נביע את הווקטור $\vec{AC}$ על פי המסלול שבחרנו: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.
 על פי הנתון $\vec{AB} = \underline{u}$. כמו כן, $\vec{BC} = \vec{AD} = \underline{v}$.
 נציב ונקבל: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \underline{u} + \underline{v}$.

נדגיש כי אפשר לבחור גם מסלול אחר.

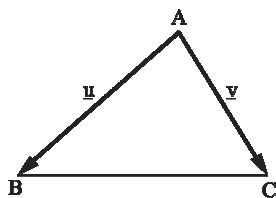
- לדוגמה: אפשר לצאת מנקודה A לנקודה D ומנקודה D לנוע לנקודה C. במקרה כזה נקבל: $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$. על פי הנתון $\vec{AD} = \underline{v}$. כמו כן, $\vec{DC} = \vec{AB} = \underline{u}$.
 נציב ונקבל $\vec{AC} = \underline{v} + \underline{u}$. תוצאה זו זהה ל- $\underline{u} + \underline{v}$, על פי חוק החילוף.
- ב. כדי להביע את הווקטור $\vec{DB}$, נבחר מסלול כלשהו שתחילתו בנקודה D, וסופו בנקודה B. לדוגמה: נצא מנקודה D לנקודה A ומנקודה A לנוע לנקודה B. נביע את הווקטור $\vec{DB}$ על פי המסלול שבחרנו: $\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB}$.
 על פי הנתון $\vec{AD} = \underline{v}$, לכן $\vec{DA} = -\underline{v}$. נציב ונקבל: $\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB} = -\underline{v} + \underline{u}$.
- גם כאן אפשר לבחור מסלול אחר. אפשר לצאת מנקודה D לנקודה C, ומנקודה C לנוע לנקודה B. במקרה כזה נקבל: $\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{CB}$.
 ידוע $\vec{DC} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \vec{DA} = -\underline{v}$. נציב ונקבל: $\vec{DB} = \underline{u} + (-\underline{v}) = \underline{u} - \underline{v}$.
 תוצאה זו זהה ל- $-\underline{v} + \underline{u}$, על פי חוק החילוף.
- ג. נביע את הווקטור $\vec{CA}$ באופן הבא: $\vec{CA} = \vec{CD} + \vec{DA} = -\underline{u} - \underline{v}$.
 גם כאן אפשר לבחור מסלול אחר: $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA} = -\underline{v} - \underline{u}$.
 כמו כן, אפשר להיעזר בתוצאה של סעיף א' ובהגדרה של וקטורים נגדיים. בסעיף א' קיבלנו $\vec{AC} = \underline{u} + \underline{v}$. ידוע כי $\vec{CA} = -\vec{AC}$.
 נציב ונקבל: $\vec{CA} = -\vec{AC} = -(\underline{u} + \underline{v}) = -\underline{u} - \underline{v}$.
- ד. דרך א': ניתן לראות כי $\vec{BD} = -\underline{u} + \underline{v}$ ו- $\vec{DC} = \underline{u}$. נקבל: $\vec{BD} + \vec{DC} = -\underline{u} + \underline{v} + \underline{u} = \underline{v}$.
 דרך ב': נקודת הסוף של הווקטור $\vec{BD}$ היא נקודת ההתחלה של הווקטור $\vec{DC}$, ולכן סכום שני הווקטורים הוא וקטור שנקודת ההתחלה שלו היא נקודת ההתחלה של $\vec{BD}$, כלומר B, ונקודת הסוף שלו היא נקודת הסוף של $\vec{DC}$, כלומר C. נקבל שסכום הווקטורים הוא הווקטור $\vec{BC}$, כלומר $\underline{v}$.

תרגילים

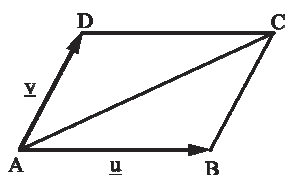
1. בשרטוטים הבאים נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
העתיקו את הווקטורים למחברתכם, ושרטטו את הווקטור $\underline{u} + \underline{v}$ בכל אחד מהמקרים האלה:



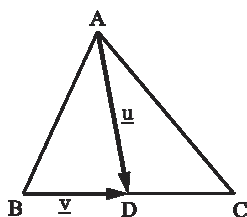
2. במשולש ABC נתון: $\overrightarrow{CA} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{u}$.
הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:
א. את הווקטור $\overrightarrow{BA}$.
ב. את הווקטור $\overrightarrow{AB}$.



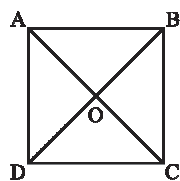
3. במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:
א. את הווקטור $\overrightarrow{BC}$.
ב. את הווקטור $\overrightarrow{CB}$.



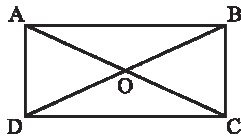
4. במקבילית ABCD נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
א. הביעו את $\overrightarrow{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
ב. הביעו את $\overrightarrow{BD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
ג. הסבירו מדוע $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.



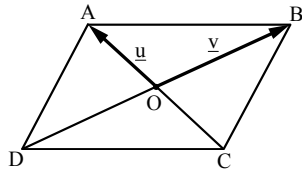
5. במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.
נסמן: $\overrightarrow{BD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$.
א. הביעו את $\overrightarrow{AB}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
ב. הביעו את $\overrightarrow{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



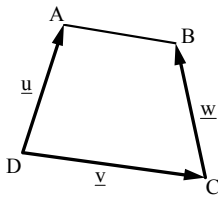
6. לפניכם ריבוע ABCD.
א. השלימו: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$.
ב. הסבירו מדוע מתקיים: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
ג. השלימו: $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} = \underline{\hspace{2cm}}$.
ד. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה: (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ (2) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.



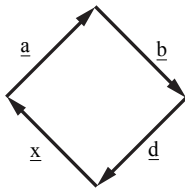
7. לפניכם מלבן ABCD.
- השלימו: $\vec{AB} + \vec{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$
 - השלימו: $\vec{BO} + \vec{OA} + \vec{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$
 - השלימו: $\vec{AO} - \vec{CO} = \underline{\hspace{2cm}}$
 - קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה: (1) $\vec{OA} = \vec{OD}$ (2) $|\vec{OA}| = |\vec{OD}|$



8. במקבילית ABCD האלכסונים נחתכים בנקודה O.
- נתון: $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OA} = \underline{u}$
- הביעו את הווקטורים $\vec{DC}$ ו- $\vec{CB}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 - הוכיחו: $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO} = 0$



9. לפניכם מרובע ABCD.
- נסמן: $\vec{CB} = \underline{w}$, $\vec{DC} = \underline{v}$, $\vec{DA} = \underline{u}$
- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים הבאים: (1) $\vec{AC}$ (2) $\vec{BD}$ (3) $\vec{AB}$
 - מצאו בציור וקטור השווה ל- $\underline{v} + \underline{w}$.

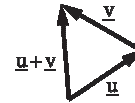
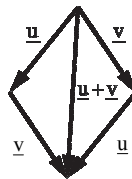


10. בציור מתואר מרובע ועליו מסומנים הווקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{d}$ ו- $\underline{x}$.
- הסבירו מדוע $\underline{x} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{d} = 0$
 - הביעו את הווקטור $\underline{x}$ באמצעות הווקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{d}$.

תשובות:

1. א.

ב.



2. א. $\vec{BA} = \underline{u} + \underline{v}$ ב. $\vec{AB} = -(\underline{u} + \underline{v}) = -\underline{u} - \underline{v}$

3. א. $\vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$ ב. $\vec{CB} = \underline{u} - \underline{v}$ 4. א. $\vec{AC} = \underline{u} + \underline{v}$ ב. $\vec{BD} = \underline{v} - \underline{u}$

5. א. $\vec{AB} = \underline{u} - \underline{v}$ ב. $\vec{AC} = \underline{u} + \underline{v}$ 6. א. $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ ג. $\vec{BC} - \vec{DC} = \vec{BD}$ ד. לא נכונה. (2) נכונה.

7. א. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ב. $\vec{BO} + \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{BD}$ ג. $\vec{AO} - \vec{CO} = \vec{AC}$ ד. (1) לא נכונה. (2) נכונה.

8. א. $\vec{CB} = \underline{v} + \underline{u}$, $\vec{DC} = \underline{v} - \underline{u}$ 9. א. (1) $\vec{AC} = \underline{v} - \underline{u}$ (2) $\vec{DB} = \underline{v} + \underline{w}$ (3) $\vec{AB} = \underline{v} + \underline{w} - \underline{u}$

10. ב. $\underline{x} = -\underline{a} - \underline{b} - \underline{d}$

הווקטור הגאומטרי – כפל של וקטור בסקלר

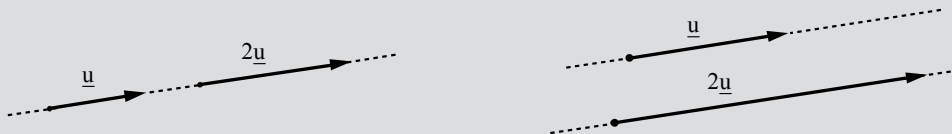
נדון עכשיו בכפל של וקטור בסקלר.

סקלר הוא מספר ממשי כלשהו (חיובי, שלילי או אפס).

דוגמאות לכפל של וקטור $\underline{u}$ בסקלר: $\underline{u}$, $2 \cdot \underline{u}$, $\frac{1}{4} \cdot \underline{u}$, $-3 \cdot \underline{u}$, $-\frac{1}{2} \cdot \underline{u}$, $1.5 \cdot \underline{u}$, $-0.4 \cdot \underline{u}$.

מהי המשמעות הגאומטרית של הווקטור $2 \cdot \underline{u}$?

הווקטור $2 \cdot \underline{u}$ הוא וקטור בכיוונו של הווקטור $\underline{u}$, ואורכו גדול פי 2 מהאורך של $\underline{u}$.
הווקטורים $\underline{u}$ ו- $2 \cdot \underline{u}$ יכולים להיות על אותו ישר (ראו ציור שמאלי),
או על ישרים מקבילים (ראו ציור ימני).



בווקטור $2 \cdot \underline{u}$, המספר 2 המופיע משמאל ל- $\underline{u}$ נקרא **סקלר**.

נהוג לכתוב את הסקלר משמאל לווקטור. אפשר לרשום כפל כזה ללא נקודה, כלומר $2\underline{u}$.

כאשר כופלים וקטור בסקלר **חיובי**, הווקטור המתקבל הוא בכיוון של הווקטור הנתון.
לעומת זאת, כאשר כופלים וקטור בסקלר **שלילי**, הווקטור המתקבל הוא בכיוון **נגדי**
לכיוון הווקטור הנתון. נסביר זאת.

נניח כי נתון וקטור $\underline{u}$ ונרצה לתאר את הווקטור $-3 \cdot \underline{u}$.

נצייר תחילה את הווקטור $3 \cdot \underline{u}$, שכיוונו **זהה** לכיוון של הווקטור $\underline{u}$,

ואורכו גדול פי 3 מהאורך של $\underline{u}$.

לאחר מכן נצייר את הווקטור $-3 \cdot \underline{u}$,

שהוא הווקטור הנגדי לווקטור $3 \cdot \underline{u}$.

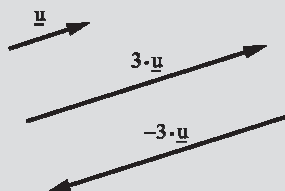
המשמעות הגאומטרית היא שהווקטור $-3 \cdot \underline{u}$

הוא וקטור בכיוון **נגדי** לכיוון של $\underline{u}$,

ואורכו גדול פי 3 מהאורך של $\underline{u}$ (ולא כפול -3).

הערה: ניתן כמובן לצייר את הווקטור $-3 \cdot \underline{u}$ ישירות על פי הווקטור $\underline{u}$,

בלי לצייר את הווקטור $3 \cdot \underline{u}$.



נסכם: כאשר כופלים וקטור בסקלר (חיובי או שלילי),

הווקטור המתקבל הוא וקטור בכיוונו של הווקטור המקורי או בכיוון מנוגד לו,

ונמצא על אותו ישר עליו נמצא הווקטור המקורי, או על ישר מקביל לו.

דוגמה:

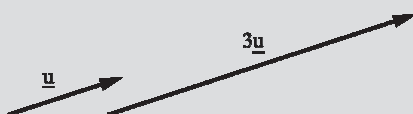
נתון הווקטור $\underline{u}$. מה תוכלו לומר על אורכם וכיוונם של הווקטורים הבאים:

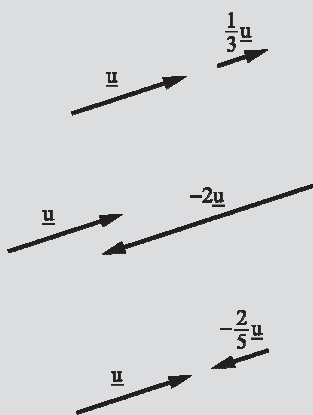
א. $3\underline{u}$. ב. $\frac{1}{3}\underline{u}$. ג. $-2\underline{u}$. ד. $-\frac{2}{5}\underline{u}$.

פתרון:

א. הווקטור $3\underline{u}$ הוא וקטור בכיוון של $\underline{u}$

ואורכו גדול פי 3 מהאורך של $\underline{u}$.





ב. הווקטור $\frac{1}{3}\underline{u}$ הוא וקטור בכיוון של $\underline{u}$, ואורכו מהווה $\frac{1}{3}$ מהאורך של $\underline{u}$ (כלומר הוא קטן באורכו מ- $\underline{u}$).

ג. הווקטור $-2\underline{u}$ הוא בכיוון מנוגד לכיוון של $\underline{u}$, ואורכו גדול פי 2 מהאורך של $\underline{u}$ (כלומר הוא גדול באורכו מ- $\underline{u}$).

ד. הווקטור $-\frac{2}{5}\underline{u}$ הוא בכיוון מנוגד לכיוונו של $\underline{u}$, ואורכו מהווה $\frac{2}{5}$ מהאורך של $\underline{u}$ (כלומר הוא קטן באורכו מ- $\underline{u}$).

נדגיש כי כל ארבעת הווקטורים שקיבלנו בסעיפים א-ד הם כפל של וקטור $\underline{u}$ בסקלר, ולכן הם בעלי אותו כיוון של $\underline{u}$, או בכיוון מנוגד לו, ונמצאים על הישר שעליו נמצא הווקטור $\underline{u}$ או על ישר מקביל לו.

נסכם את האפשרויות לגבי כפל של וקטור בסקלר:

לכל מספר ממשי t ולכל וקטור $\underline{u}$ השונה מווקטור האפס, הווקטור $t \cdot \underline{u}$ מוגדר כך:

א. אם $t > 0$, אז הווקטור $t \cdot \underline{u}$ הוא וקטור בכיוון של $\underline{u}$ (על אותו הישר או על ישר המקביל לו) ואורכו t פעמים האורך של הווקטור $\underline{u}$.

עבור $t > 0$ קיימים 3 מצבים כלליים:

- (1) אם $t > 1$, אז האורך של $t \cdot \underline{u}$ גדול מהאורך של $\underline{u}$.
- (2) אם $t = 1$, אז האורך של $t \cdot \underline{u}$ שווה לאורך של $\underline{u}$ (וקטורים שווים).
- (3) אם $0 < t < 1$, אז האורך של $t \cdot \underline{u}$ קטן מהאורך של $\underline{u}$.

ב. אם $t < 0$, אז הווקטור $t \cdot \underline{u}$ הוא וקטור בכיוון מנוגד לכיוון של $\underline{u}$ (על אותו הישר או על ישר המקביל לו) ואורכו $|t|$ פעמים האורך של הווקטור $\underline{u}$.

עבור $t < 0$ קיימים 3 מצבים כלליים:

- (1) אם $t < -1$, אז האורך של $t \cdot \underline{u}$ גדול מהאורך של $\underline{u}$.
 - (2) אם $t = -1$, אז האורך של $t \cdot \underline{u}$ שווה לאורך של $\underline{u}$ (וקטורים נגדיים).
 - (3) אם $-1 < t < 0$, אז האורך של $t \cdot \underline{u}$ קטן מהאורך של $\underline{u}$.
- ג. אם $t = 0$, אז מגדירים $t \cdot \underline{u} = \underline{0}$, כלומר $t \cdot \underline{u}$ הוא וקטור האפס.

נרשום את הכללים לכפל של וקטור בסקלר:

(1) חוק הקיבוץ של כפל בסקלר.

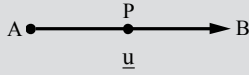
$$\text{לכל וקטור } \underline{u} \text{ ושני מספרים } t \text{ ו- } s \text{ מתקיים: } t \cdot (s \cdot \underline{u}) = (t \cdot s) \cdot \underline{u} \text{ לדוגמה: } 2 \cdot (3\underline{u}) = (2 \cdot 3) \cdot \underline{u} = 6 \cdot \underline{u} = 6\underline{u}.$$

(2) חוק הפילוג בסקלרים:

$$\text{לכל וקטור } \underline{u} \text{ ושני מספרים } t \text{ ו- } s \text{ מתקיים: } (t+s)\underline{u} = t\underline{u} + s\underline{u}.$$

(3) חוק הפילוג בווקטורים:

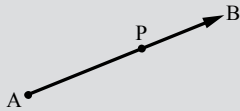
$$\text{לכל שני וקטורים } \underline{u} \text{ ו- } \underline{v} \text{ ומספר } t \text{ מתקיים: } t(\underline{u} + \underline{v}) = t\underline{u} + t\underline{v} \text{ דוגמה: } 4(\underline{u} + \underline{v}) = 4\underline{u} + 4\underline{v}.$$

דוגמה:

הנקודה P נמצאת באמצע הקטע AB. נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$.
 הביעו באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים הבאים:
 א. $\vec{AP}$. ב. $\vec{PB}$. ג. $\vec{PA}$. ד. $\vec{BP}$.

פתרון:

א. הנקודה P נמצאת באמצע הקטע AB, ולכן מתקיים: $AP = PB = \frac{1}{2}AB$.
 הווקטור $\vec{AP}$ הוא וקטור בכיוון של $\vec{AB}$ ואורכו $\frac{1}{2}$ מאורך הווקטור $\vec{AB}$.
 לכן מתקיים $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, ומכאן $\vec{AP} = \frac{1}{2}\underline{u}$.
 ב. הווקטור $\vec{PB}$ הוא בכיוון של $\vec{AB}$ ואורכו $\frac{1}{2}$ מהווקטור $\vec{AB}$.
 לכן מתקיים $\vec{PB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, ומכאן $\vec{PB} = \frac{1}{2}\underline{u}$ (הערה: $\vec{AP} = \vec{PB}$).
 ג. הווקטור $\vec{PA}$ הוא וקטור נגדי ל- $\vec{AP}$. נקבל: $\vec{PA} = -\vec{AP} = -\frac{1}{2}\underline{u}$.
 ד. הווקטור $\vec{BP}$ הוא וקטור נגדי ל- $\vec{PB}$. נקבל: $\vec{BP} = -\vec{PB} = -\frac{1}{2}\underline{u}$.

דוגמה:

הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $\vec{AP} = \frac{3}{5}\vec{AB}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 א. הביעו את הווקטורים $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$ באמצעות $\underline{u}$.
 ב. באיזה יחס הנקודה P מחלקת את הקטע AB?

פתרון:

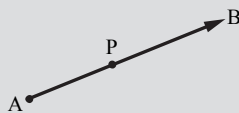
א. על פי הנתון $\vec{AB} = \underline{u}$ ו- $\vec{AP} = \frac{3}{5}\vec{AB}$. נציב ונקבל: $\vec{AP} = \frac{3}{5}\vec{AB} = \frac{3}{5}\underline{u}$.
 נביע את $\vec{PB}$: אם $\vec{AP} = \frac{3}{5}\underline{u}$, אז $\vec{PB} = (1 - \frac{3}{5})\underline{u} = \frac{2}{5}\underline{u}$.
 דרך נוספת – נביע את $\vec{PB}$ על ידי כך שנצא מנקודה P לנקודה A, וממנה לנקודה B:
 $\vec{PB} = \vec{PA} + \vec{AB} = -\frac{3}{5}\underline{u} + \underline{u} = \frac{2}{5}\underline{u}$.
 ב. מאחר ש- $\vec{AP} = \frac{3}{5}\vec{AB}$, אז $AP = \frac{3}{5}AB$. באופן דומה נקבל $PB = \frac{2}{5}AB$.
 נחשב את היחס המבוקש: $\frac{AP}{PB} = \frac{\frac{3}{5}AB}{\frac{2}{5}AB} = \frac{3}{2}$.

הערות:

(1) אם נקודה P נמצאת על הקטע AB, ומקיימת $\vec{AP} = t \cdot \vec{AB}$ ($0 < t < 1$),

נוכל להיעזר בכלל הבא: אם $\vec{AP} = t \cdot \vec{AB}$, אז $\vec{PB} = (1 - t)\vec{AB}$.

(2) אם נסמן את אורך הווקטור $\vec{AB}$ ב- $|\underline{u}|$, אז מתקיים: $|\vec{AP}| = \frac{3}{5}|\underline{u}|$, $|\vec{PB}| = \frac{2}{5}|\underline{u}|$.



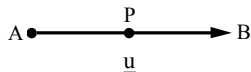
דוגמה:

הנקודה P נמצאת על הקטע AB, כך ש- $AP:PB=3:4$.
נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הביעו את $\overrightarrow{AP}$ ואת $\overrightarrow{PB}$ באמצעות $\underline{u}$.

פתרון:

נתון $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, ולכן כדי להביע את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ נרצה להבין איזה חלק מהווה הקטע AP מהקטע AB, כלומר לחשב את היחס $AP:AB$.
על פי הנתון $AP:PB=3:4$, לכן $AP:AB=3:7$, כלומר $AP = \frac{3}{7}AB$.
הווקטור $\overrightarrow{AP}$ הוא וקטור בכיוון של $\overrightarrow{AB}$ ואורכו $\frac{3}{7}$ מהווקטור $\overrightarrow{AB}$.
לכן מתקיים $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$, ומכאן $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\underline{u}$.
מאחר ש- $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$, אז מתקיים $\overrightarrow{PB} = (1 - \frac{3}{7})\overrightarrow{AB} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$, ומכאן נקבל $\overrightarrow{PB} = \frac{4}{7}\underline{u}$.

תרגילים

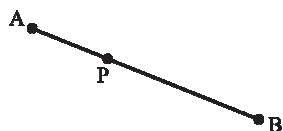


1. הנקודה P נמצאת באמצע הקטע AB.

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הביעו באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AP}$ ב. $\overrightarrow{PB}$ ג. $\overrightarrow{PA}$ ד. $\overrightarrow{BP}$

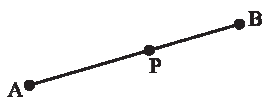


2. הנקודה P נמצאת על הקטע AB, כך ש- $AP = \frac{1}{3}AB$.

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הביעו באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AP}$ ב. $\overrightarrow{PB}$ ג. $\overrightarrow{BP}$



3. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודה P מקיימת: $\overrightarrow{PB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.

הביעו באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים הבאים:

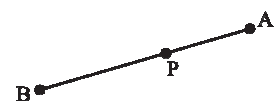
א. $\overrightarrow{PB}$ ב. $\overrightarrow{AP}$



4. הנקודה P נמצאת על הקטע AB, כך ש- $AP:PB=3:1$.

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

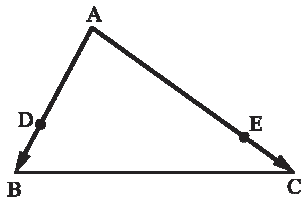
הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$ באמצעות $\underline{u}$.



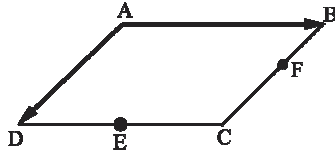
5. הנקודה P נמצאת על הקטע AB,

כך ש- $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

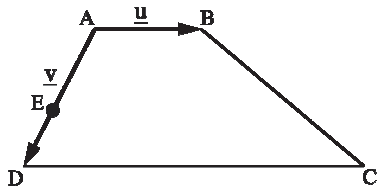
הביעו באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.



6. במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.
 הנקודה D נמצאת על הצלע AB, כך ש- $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
 הנקודה E נמצאת על הצלע AC, כך ש- $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ את $\overrightarrow{AD}$ ו- $\overrightarrow{BD}$.
 ב. הביעו באמצעות $\underline{v}$ את $\overrightarrow{AE}$.



7. במקבילית ABCD נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$.
 הנקודה E היא אמצע הצלע DC.
 הנקודה F נמצאת על הצלע BC, כך ש- $BF:FC = 2:3$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ את $\overrightarrow{ED}$.
 ב. הביעו באמצעות $\underline{v}$ את $\overrightarrow{FC}$.



8. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).
 נתון: $DC = 3 \cdot AB$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ את $\overrightarrow{DC}$ ואת $\overrightarrow{CD}$.
 ב. הנקודה E נמצאת על הצלע AD, כך ש- $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$. הביעו באמצעות $\underline{u}$ את $\overrightarrow{DE}$.

תשובות:

1. א. $\frac{1}{2}\underline{u}$. ב. $\frac{1}{2}\underline{u}$. ג. $-\frac{1}{2}\underline{u}$. ד. $-\frac{1}{2}\underline{u}$. 2. א. $\frac{1}{3}\underline{u}$. ב. $\frac{2}{3}\underline{u}$. ג. $-\frac{2}{3}\underline{u}$.
3. א. $\frac{3}{7}\underline{u}$. ב. $\frac{4}{7}\underline{u}$. 4. $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\underline{u}$, $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{4}\underline{u}$. 5. $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{8}\underline{u}$, $\overrightarrow{PB} = \frac{5}{8}\underline{u}$.
6. א. $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\underline{u}$. ב. $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\underline{v}$. 7. א. $\overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}\underline{u}$. ב. $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{5}\underline{v}$.
8. א. $\overrightarrow{DC} = 3\underline{u}$, $\overrightarrow{CD} = -3\underline{u}$. ב. $\overrightarrow{DE} = -\frac{2}{5}\underline{v}$.

וקטורים קולינאריים

נכיר את המושג וקטורים קולינאריים.

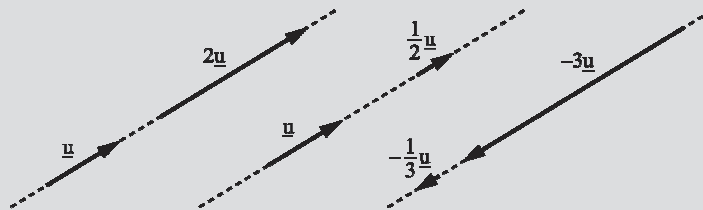
וקטורים קולינאריים הם וקטורים הנמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.
(הסיבה לכך שהם נקראים קולינאריים היא שאפשר לצייר אותם על אותו ישר).

למדנו ששני וקטורים שהם כפל בסקלר אחד של השני נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים, ולכן הם וקטורים קולינאריים. גם וקטורים שווים ווקטורים נגדיים נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים, ולכן גם הם וקטורים קולינאריים.

אם נתונים שני וקטורים קולינאריים $\vec{AB}$ ו- $\vec{CD}$ (נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים), הם מקיימים תמיד $\vec{CD} = t \cdot \vec{AB}$, כלומר הם כפל בסקלר אחד של השני (סקלר שאינו אפס).

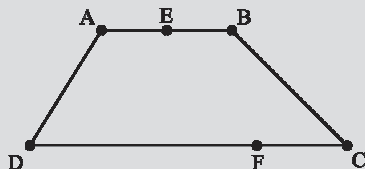
הסקלר יכול להיות כל מספר, ולכן וקטורים קולינאריים אינם בהכרח שווי אורך. אם הסקלר הוא חיובי הם בעלי אותו כיוון, ואם הסקלר שלילי הם בעלי כיוונים מנוגדים. כאשר $t=1$ נקבל שהווקטורים הקולינאריים הם וקטורים שווים ($\vec{CD} = \vec{AB}$). כאשר $t=-1$ נקבל שהווקטורים הקולינאריים הם וקטורים נגדיים ($\vec{CD} = -\vec{AB}$). במילים אחרות, וקטורים שווים הם סוג מסוים של וקטורים קולינאריים, וגם וקטורים נגדיים הם סוג מסוים של וקטורים קולינאריים.

בציור מתוארים שלושה ישרים המקבילים זה לזה. על כל ישר ישנם שני וקטורים, כלומר לפנינו שישה וקטורים. כל שני וקטורים שבציור נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים, כלומר כל שני וקטורים בציור הם קולינאריים. ניתן לראות שכל שני וקטורים הנמצאים על אותו ישר הם כפל בסקלר אחד של השני, וגם כל שני וקטורים הנמצאים על ישרים מקבילים הם כפל בסקלר אחד של השני.



דוגמה:

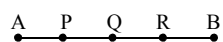
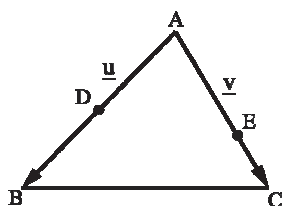
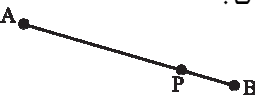
- בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) נתון: $DC = 2AB$. הנקודה E נמצאת באמצע הבסיס AB.
- האם $\vec{AB}$ ו- $\vec{CD}$ הם וקטורים קולינאריים?
האם הם וקטורים שווים?
 - האם $\vec{AE}$ ו- $\vec{EB}$ הם וקטורים קולינאריים?
האם הם וקטורים שווים?
 - האם $\vec{AD}$ ו- $\vec{BC}$ הם וקטורים קולינאריים?
 - הנקודה F נמצאת על הצלע DC ומקיימת $DF:FC = 3:1$. נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$.
(1) הביעו באמצעות $\underline{u}$ את $\vec{AE}$, $\vec{DC}$, $\vec{DF}$.
(2) האם $\vec{AE}$ ו- $\vec{DF}$ הם וקטורים קולינאריים? האם הם וקטורים שווים?



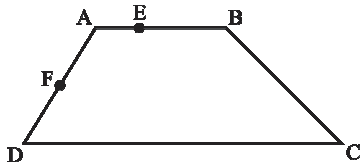
פתרון:

- א. נתון $AB \parallel DC$, כלומר הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ נמצאים על ישרים מקבילים, ולכן הם וקטורים קולינאריים. שני הווקטורים אינם שווים באורכם (ומנוגדים בכיוונם), ולכן הם לא וקטורים שווים.
- ב. הווקטורים $\vec{AE}$ ו- $\vec{EB}$ נמצאים על אותו ישר ולכן הם וקטורים קולינאריים. מאחר שהנקודה E נמצאת באמצע הבסיס AB, אז הקטעים AE ו- EB שווים אורך. נקבל ש- $\vec{AE}$ ו- $\vec{EB}$ הם וקטורים בעלי אותו אורך וכיוון ולכן הם וקטורים שווים.
- ג. $\vec{AD}$ ו- $\vec{BC}$ אינם על אותו ישר או על ישרים מקבילים ולכן אינם וקטורים קולינאריים.
- ד. (1) הנקודה E נמצאת באמצע הבסיס AB. הווקטור $\vec{AE}$ הוא בכיוון של $\vec{AB}$ ואורכו $\frac{1}{2}$ מאורך הווקטור $\vec{AB}$. נקבל: $\vec{AE} = \frac{1}{2} \vec{AB} = \frac{1}{2} \underline{u}$.
- נתון $AB \parallel DC$, כלומר הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ הם קולינאריים, וכל אחד מהם הוא כפל בסקלר אחד של השני. נתון $DC = 2 \cdot AB$ ולכן $\vec{DC} = 2 \cdot \vec{AB} = 2 \underline{u}$.
- נתון $DF:FC = 3:1$, לכן $\vec{DF} = \frac{3}{4} \vec{DC} = \frac{3}{4} \cdot 2 \underline{u} = 1 \frac{1}{2} \underline{u}$. נציב ונקבל: $\vec{DF} = \frac{3}{4} \vec{DC} = 1 \frac{1}{2} \underline{u}$.
- (2) ניתן לראות ש- $\vec{AE}$ ו- $\vec{DF}$ נמצאים על ישרים מקבילים ולכן הם וקטורים קולינאריים. קיבלנו $\vec{AE} = \frac{1}{2} \underline{u}$, $\vec{DF} = 1 \frac{1}{2} \underline{u}$, ולכן הם לא וקטורים שווים.

תרגילים

1. הנקודות A ו- B הן קצות הקטע AB. את הקטע AB חילקו ל- 4 קטעים שווים. נקודות החלוקה הן P, Q, R, ראו ציור. א. האם $\vec{AP}$ ו- $\vec{PR}$ הם וקטורים קולינאריים? האם הם וקטורים שווים? ב. (1) כתבו שני וקטורים השווים ל- $\vec{AQ}$. (2) תנו מספר דוגמאות לווקטור קולינארי ל- $\vec{AQ}$, אך שאינו שווה לו.
- 
2. במשולש ABC הנקודה D נמצאת באמצע הצלע AB. הנקודה E נמצאת על הצלע AC, כך ש- $AE:EC = 2:1$. א. האם $\vec{AE}$ ו- $\vec{CE}$ הם וקטורים קולינאריים? האם הם וקטורים שווים? ב. (1) כתבו וקטור שווה ל- $\vec{AD}$. (2) תנו דוגמה למספר וקטורים קולינאריים ל- $\vec{AD}$, אך אינם שווים לו.
- 
3. הנקודה P נמצאת על הקטע AB, כך ש- $AP = 3PB$. א. האם $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$ הם וקטורים קולינאריים? האם הם וקטורים שווים? ב. נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$. הביעו את הווקטורים $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$ באמצעות $\underline{u}$.
- 

4. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).



הנקודה E נמצאת על הבסיס AB ומקיימת $AE:EB=1:2$.

הנקודה F נמצאת באמצע השוק AD

א. האם $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ הם וקטורים קולינאריים?

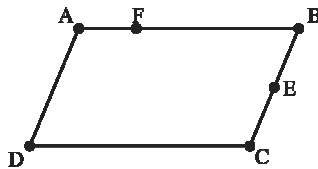
האם הם וקטורים שווים?

ב. האם $\vec{AE}$ ו- $\vec{BE}$ הם וקטורים קולינאריים? האם הם וקטורים שווים?

ג. האם $\vec{AF}$ ו- $\vec{FD}$ הם וקטורים קולינאריים? האם הם וקטורים שווים?

ד. נתון: $DC = 2 \cdot AB$. נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$. הביעו באמצעות $\underline{u}$ את $\vec{AE}$, $\vec{DC}$.

5. במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת באמצע הצלע BC.



הנקודה F נמצאת על הצלע AB ומקיימת $\vec{AF} = \frac{1}{4} \vec{AB}$.

א. האם $\vec{AF}$ ו- $\vec{FB}$ הם וקטורים קולינאריים?

האם הם וקטורים שווים?

ב. (1) כתבו וקטור שווה ל- $\vec{DC}$.

(2) תנו דוגמאות לווקטורים קולינאריים ל- $\vec{DC}$, אך אינם שווים לו.

ג. (1) כתבו וקטור שווה ל- $\vec{BE}$.

(2) תנו דוגמאות לווקטור קולינארי ל- $\vec{BE}$, אך אינו שווה לו.

תשובות:

1. א. $\vec{AP}$ ו- $\vec{PR}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על אותו ישר), אך אינם וקטורים שווים.

ב. (1) $\vec{QB} = \vec{AQ}$, $\vec{PR} = \vec{AQ}$. (2) $\vec{AP}$, $\vec{PB}$, $\vec{RA}$, $\vec{QA}$.

2. א. $\vec{AE}$ ו- $\vec{CE}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על אותו ישר), אך אינם וקטורים שווים.

ב. (1) $\vec{DB} = \vec{AD}$. (2) $\vec{BD}$, $\vec{DA}$, $\vec{BA}$, $\vec{AB}$.

3. א. $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על אותו ישר), אך אינם וקטורים שווים.

ב. $\vec{AP} = \frac{3}{4} \underline{u}$, $\vec{PB} = \frac{1}{4} \underline{u}$.

4. א. $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ הם וקטורים קולינאריים (נמצאים על ישרים מקבילים), אך אינם וקטורים שווים.

ב. $\vec{AE}$ ו- $\vec{BE}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על אותו ישר), אך אינם וקטורים שווים.

ג. $\vec{AF}$ ו- $\vec{FD}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על אותו ישר), והם וקטורים שווים.

ד. $\vec{DC} = 2\underline{u}$, $\vec{AE} = \frac{1}{3} \underline{u}$.

5. א. $\vec{AF}$ ו- $\vec{FB}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על אותו ישר), אך אינם וקטורים שווים.

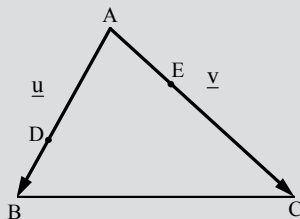
ב. (1) $\vec{AB} = \vec{DC}$. (2) $\vec{AF}$, $\vec{FB}$, $\vec{BA}$, $\vec{BF}$, $\vec{FA}$, $\vec{CD}$.

ג. (1) $\vec{EC} = \vec{BE}$. (2) $\vec{BC}$, $\vec{CB}$, $\vec{CE}$, $\vec{EB}$, $\vec{AD}$, $\vec{DA}$.

שילובים של כפל בסקלר עם חיבור וחסור וקטורים

נראה עכשיו מקרים המשלבים כפל בסקלר עם חיבור וחסור וקטורים.

דוגמה:

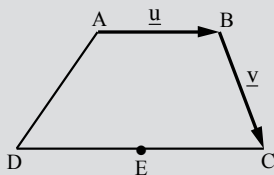


במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.
 הנקודה D נמצאת על הצלע AB, והנקודה E נמצאת על הצלע AC, כך ש- $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{BE}$ ו- $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הביעו את $\overrightarrow{ED}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

פתרון:

א. נתון כי $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. נציב $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ונקבל $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\underline{v}$.
 כדי להביע את הווקטור $\overrightarrow{BE}$ נצא מנקודה B לנקודה A וממנה ננוע לנקודה E.
 נקבל: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$.
 ב. נביע את הווקטור $\overrightarrow{ED}$ במסלול הבא: $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$.
 מצאנו $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\underline{v}$ ולכן $\overrightarrow{EA} = -\frac{2}{5}\underline{v}$.
 נביע את $\overrightarrow{AD}$. נתון $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, ולכן $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\underline{u}$.
 נקבל: $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{5}\underline{v} + \frac{3}{4}\underline{u}$.

דוגמה:

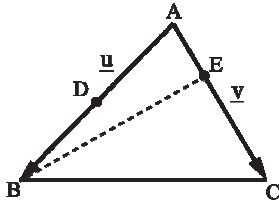


המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).
 נתון: $DC = 2 \cdot AB$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{DC}$ ו- $\overrightarrow{BD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הנקודה E היא אמצע הבסיס DC.
 ג. מצאו בציור שני וקטורים נוספים שווים ל- $\underline{u}$.
 ד. הסבירו מדוע המרובע ABCE הוא מקבילית.

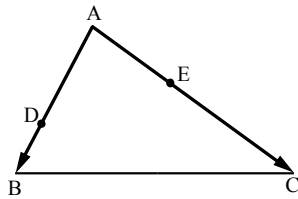
פתרון:

א. נתון $AB \parallel DC$, כלומר הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ הם וקטורים קולינאריים, ולכן הם כפל בסקלר אחד של השני.
 נתון $DC = 2 \cdot AB$ ולכן $\overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. נקבל $\overrightarrow{DC} = 2\underline{u}$.
 כדי להביע את הווקטור $\overrightarrow{BD}$ נצא מנקודה B ונגיע לנקודה D דרך הנקודה C.
 נקבל: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \underline{v} + (-2\underline{u}) = \underline{v} - 2\underline{u}$.
 ב. הנקודה E היא אמצע הבסיס DC, ולכן $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \cdot 2\underline{u} = \underline{u}$.
 ג. בסעיף ב' קיבלנו $\overrightarrow{EC} = \underline{u}$. כמו כן, נתון $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, ולכן $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{EC}$ הם וקטורים שווים.
 כלומר, הם בעלי אותו אורך ואותו כיוון, ולכן במרובע ABCE יש זוג צלעות נגדיות שוות באורך ומקבילות והמרובע הוא מקבילית.

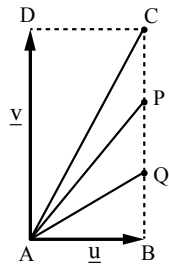
תרגילים



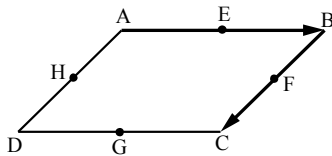
1. במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
 הנקודה D נמצאת באמצע הצלע AB.
 הנקודה E נמצאת על הצלע AC, כך ש- $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.
 הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:
 א. את הווקטורים $\vec{BE}$ ו- $\vec{EB}$.
 ב. את הווקטורים $\vec{CD}$ ו- $\vec{DE}$.



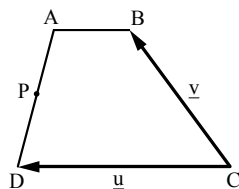
2. במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
 הנקודות D ו- E נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו- AC.
 נתון: $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, $\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AC}$.
 הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים
 הבאים: א. $\vec{BE}$. ב. $\vec{DC}$. ג. $\vec{DE}$.



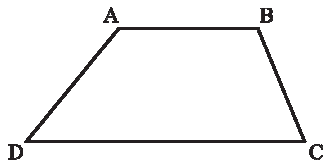
3. במלבן ABCD נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$.
 הנקודות P ו- Q נמצאות על הצלע BC, כך ש- $BQ = QP = PC$ (ראו ציור).
 א. הביעו את $\vec{BQ}$ ו- $\vec{BP}$ באמצעות $\underline{v}$.
 ב. הביעו את $\vec{AQ}$, $\vec{AP}$ ו- $\vec{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



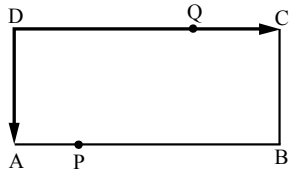
4. במקבילית ABCD נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{BC} = \underline{v}$. הנקודות E, F, G ו- H הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD ו- AD בהתאמה.
 הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים
 הבאים: (1) $\vec{CE}$. (2) $\vec{EF}$.
 ב. הוכיחו: $\vec{HG} = \vec{EF}$.
 ג. האם רק על פי הטענה שהוכחתם בסעיף ב',
 נובע שהמרובע EFGH הוא מקבילית? נמקו.



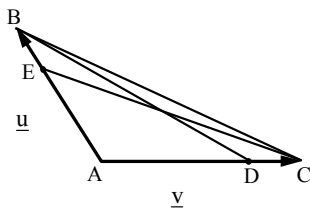
5. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) נסמן: $\vec{CD} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$.
 הנקודה P היא אמצע הצלע AD.
 נתון: $AB = \frac{1}{3} \cdot DC$.
 א. הביעו את $\vec{AD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הביעו את $\vec{CP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



6. במרובע ABCD נתון: $\overrightarrow{DC} = 1.8 \cdot \overrightarrow{AB}$.
 א. האם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ הם קולינאריים?
 האם הם וקטורים שווים? נמקו.
 ב. הסבירו מדוע המרובע ABCD הוא טרפז.
 ג. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$.
 הביעו את $\overrightarrow{BD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



7. במלבן ABCD נסמן: $\overrightarrow{DA} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{u}$.
 הנקודה Q מקיימת $\overrightarrow{QC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$.
 הנקודה P נמצאת על הצלע AB, כך ש- $AP:PB = 1:3$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$.
 ב. הנקודה R מקיימת $\overrightarrow{DR} = \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v}$. הסבירו היכן נמצאת הנקודה R.



8. במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-AB, בהתאמה. נתון: $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CE}$.
 ב. הנקודה F מקיימת $\overrightarrow{BF} = -\underline{u} + \frac{1}{3} \underline{v}$.
 הסבירו היכן נמצאת הנקודה F.

תשובות:

1. א. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \underline{v}$, $\overrightarrow{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{3} \underline{v}$, $\overrightarrow{EB} = \underline{u} - \frac{1}{3} \underline{v}$. ב. $\overrightarrow{CD} = -\underline{v} + \frac{1}{2} \underline{u}$. ג. $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{3} \underline{v}$.
2. א. $\overrightarrow{BE} = -\underline{u} + \frac{2}{3} \underline{v}$. ב. $\overrightarrow{DC} = -\frac{2}{3} \underline{u} + \underline{v}$. ג. $\overrightarrow{DE} = -\frac{2}{3} \underline{u} + \frac{2}{3} \underline{v}$.
3. א. $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3} \underline{v}$, $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3} \underline{v}$. ב. $\overrightarrow{AQ} = \underline{u} + \frac{1}{3} \underline{v}$, $\overrightarrow{AP} = \underline{u} + \frac{2}{3} \underline{v}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$.
4. א. (1) $\overrightarrow{CE} = -\underline{v} - \frac{1}{2} \underline{u}$. (2) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v}$. ג. כן. 5. א. (1) $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \underline{u} - \underline{v}$. (2) $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2} \underline{v} + \frac{2}{3} \underline{u}$.
6. א. $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ הם וקטורים קולינאריים (נמצאים על ישרים מקבילים), אך אינם שווים.
 ב. הצלעות AB ו-DC מקבילות ושונות באורכן. ג. $\overrightarrow{BD} = \underline{v} - 1.8 \underline{u}$.
7. א. $\overrightarrow{AQ} = -\underline{v} + \frac{2}{3} \underline{u}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4} \underline{u}$, $\overrightarrow{DP} = \underline{v} + \frac{1}{4} \underline{u}$. ב. הנקודה R נמצאת באמצע הצלע BC.
8. א. $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4} \underline{v}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \underline{u}$, $\overrightarrow{BD} = -\underline{u} + \frac{3}{4} \underline{v}$, $\overrightarrow{CE} = -\underline{v} + \frac{2}{3} \underline{u}$. ב. F נמצאת על המשך AC (מהצד של C).

נראה עכשיו מקרים שבהם נביע וקטורים באמצעות כפל בסקלר ונשתמש בחוק הפילוג של וקטורים, לפיו כל שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ ומספר t מקיימים: $t(\underline{u} + \underline{v}) = t\underline{u} + t\underline{v}$.

דוגמה:



נתון קטע שקצותיו בנקודות A ו-B. הנקודה C נמצאת על הקטע ומקיימת ש- $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{CB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

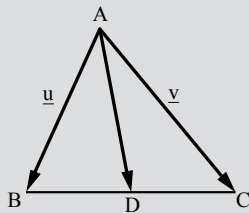
פתרון:

על פי הנתון $\overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$ ו- $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

נציב ונקבל: $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}(\underline{u} + \underline{v})$. אפשר לפתוח סוגריים ולקבל: $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\underline{u} + \frac{1}{5}\underline{v}$.

אם $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, אז $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}(\underline{u} + \underline{v})$. אפשר לפתוח סוגריים ולקבל: $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{5}\underline{u} + \frac{4}{5}\underline{v}$.

דוגמה:



במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

AD הוא תיכון לצלע BC.

א. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{BC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{AD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

פתרון:

א. נביע את $\overrightarrow{BC}$ על פי המסלול הבא: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\underline{u} + \underline{v}$.

נביע את $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$.

ב. נביע את הווקטור $\overrightarrow{AD}$ על פי המסלול הבא: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

על פי הנתון $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. כדי להביע את $\overrightarrow{BD}$, ניעזר בכך שנקודה D היא אמצע הקטע BC.

נקבל: $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$.

נביע את $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \underline{u} + (-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}) = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$.

ניתן להשתמש בתוצאה שקיבלנו בסעיף ב' גם במקרים אחרים.

בכל משולש ABC, וקטור התיכון היוצא מקדקוד A

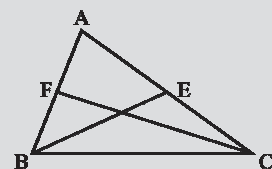
שווה למחצית סכומם של וקטורי הצלעות

שמוצאים בקדקוד A, כלומר $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

בדוגמה האחרונה, נתון $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$,

ולכן ניתן להסיק $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$.

אין חובה לזכור בעל פה כלל זה, אבל זה יכול לקצר ולפשט חלק מהשאלות.

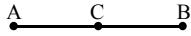


באותו אופן,

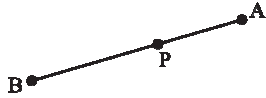
וקטור התיכון היוצא מקדקוד B שווה ל- $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

וקטור התיכון היוצא מקדקוד C שווה ל- $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

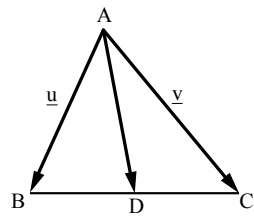
תרגילים



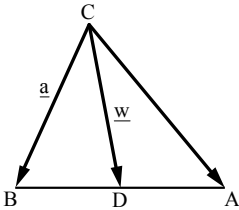
9. הנקודה C נמצאת באמצע הקטע AB. נתון: $\vec{AB} = \underline{u} + \underline{v}$.
 א. הביעו את הווקטור $\vec{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הביעו את הווקטור $\vec{BC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



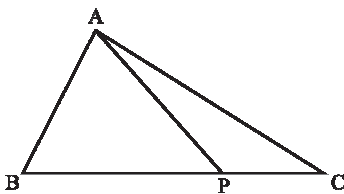
10. הנקודה P נמצאת על הקטע AB, נסמן: $\vec{AB} = -\underline{u} + \underline{v}$. נתון: $\vec{AP} = \frac{3}{7}\vec{AB}$.
 הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$.



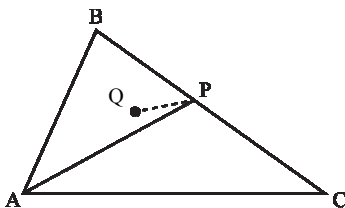
11. במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$. AD הוא תיכון לצלע BC.
 א. הביעו את $\vec{BC}$ ו- $\vec{BD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הוכיחו: $\vec{AD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$.



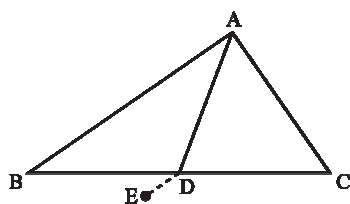
12. במשולש ABC, הנקודה D נמצאת על הצלע AB.
 נתון: $\vec{BD} = \vec{DA}$, $\vec{CD} = \underline{w}$, $\vec{CB} = \underline{a}$.
 הביעו את הווקטורים $\vec{BA}$ ו- $\vec{CA}$ באמצעות $\underline{a}$ ו- $\underline{w}$.



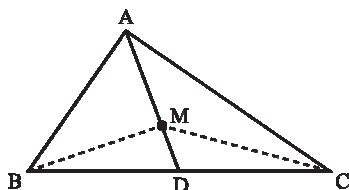
13. במשולש ABC נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$. הנקודה P נמצאת על הצלע BC, כך ש- $\vec{BP} = 2\vec{PC}$. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:
 א. את הווקטורים $\vec{BC}$ ו- $\vec{BP}$.
 ב. את הווקטור $\vec{AP}$.



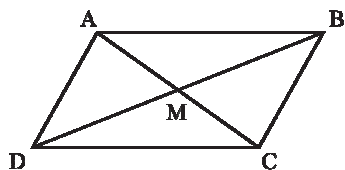
14. במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$. P היא נקודה על הצלע BC, כך ש- $BP:PC = 3:4$.
 א. הביעו את $\vec{BP}$ ו- $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הנקודה Q מקיימת: $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$.
 (1) הביעו את $\vec{AQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 (2) הביעו את $\vec{QP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



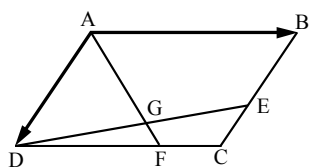
15. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC.
 נסמן: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{x}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{u}$.
 א. הביעו את $\underline{x}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הנקודה E מקיימת: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
 הביעו את $\overrightarrow{AE}$ ו- $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



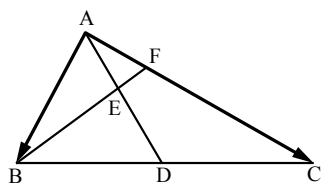
16. במשולש ABC, AD הוא תיכון לצלע BC.
 M היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC.
 נסמן: $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{AD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 (2) הוכיחו: $\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.
 ב. הוכיחו: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \underline{0}$.



17. הנקודה M היא נקודת המפגש של אלכסוני מקבילית ABCD.
 נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{MB}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הראו כי $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \underline{0}$. תוכלו להסביר גם מילולית.
 ג. הוכיחו: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \underline{0}$.



18. במקבילית ABCD נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה E נמצאת על הצלע BC, ומקיימת: $BE:EC = 2:1$. נתון: $\overrightarrow{DF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{AF}$ ו- $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. נתון: $\overrightarrow{AG} = \frac{9}{11}\overrightarrow{AF}$.
 הביעו את $\overrightarrow{AG}$ ו- $\overrightarrow{DG}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



19. במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. AD הוא תיכון לצלע BC.
 הנקודה F נמצאת על הצלע AC, כך ש- $AF:FC = 1:3$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{BF}$ ו- $\overrightarrow{AD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הנקודה E היא נקודת המפגש של AD ו-BF. נתון: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.
 הביעו את $\overrightarrow{AE}$ ו- $\overrightarrow{BE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

תשובות:

$$\vec{BC} = -\frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \vec{AC} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v}) = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{א.} \quad .9$$

$$\vec{AP} = \frac{4}{7}(-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{4}{7}\underline{u} + \frac{4}{7}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \vec{AP} = \frac{3}{7}(-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{3}{7}\underline{u} + \frac{3}{7}\underline{v} \quad \text{א.} \quad .10$$

$$\vec{CA} = 2\underline{w} - \underline{a} \quad , \quad \vec{BA} = 2\underline{w} - 2\underline{a} \quad .12 \quad \vec{BD} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad , \quad \vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v} \quad \text{א.} \quad .11$$

$$\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \vec{BP} = -\frac{2}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad , \quad \vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v} \quad \text{א.} \quad .13$$

$$\vec{QP} = \frac{1}{14}\underline{u} + \frac{5}{28}\underline{v} \quad (2) \quad \vec{AQ} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} \quad (1) \quad \text{ב.} \quad \vec{AP} = \frac{4}{7}\underline{u} + \frac{3}{7}\underline{v} \quad , \quad \vec{BP} = -\frac{3}{7}\underline{u} + \frac{3}{7}\underline{v} \quad \text{א.} \quad .14$$

$$\vec{AD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad (1) \quad \text{א.} \quad .16 \quad \vec{DE} = -\frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{6}\underline{v} \quad , \quad \vec{AE} = -\frac{2}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \underline{x} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{א.} \quad .15$$

$$\vec{DG} = \frac{6}{11}\underline{u} - \frac{2}{11}\underline{v} \quad , \quad \vec{AG} = \frac{6}{11}\underline{u} + \frac{9}{11}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \vec{DE} = \underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} \quad , \quad \vec{AF} = \underline{v} + \frac{2}{3}\underline{u} \quad \text{א.} \quad .18 \quad \vec{MB} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{א.} \quad .17$$

$$\vec{BE} = -\frac{4}{5}\underline{u} + \frac{1}{5}\underline{v} \quad , \quad \vec{AE} = \frac{1}{5}\underline{u} + \frac{1}{5}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \vec{AD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad , \quad \vec{BF} = -\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} \quad \text{א.} \quad .19$$

הוכחה ששני וקטורים הם קולינאריים

למדנו ששני וקטורים קולינאריים הם שני וקטורים שכל אחד מהם הוא כפל בסקלר של הווקטור השני. נדון עכשיו במקרים שבהם ידועים שני וקטורים ונרצה להוכיח ששני הווקטורים הם כפל בסקלר אחד של השני. באמצעות הוכחה כזו נדע ששני הווקטורים הם **קולינאריים**, ולכן נמצאים על אותו ישר, או על ישרים מקבילים. על פי נתוני השאלה נקבע האם הם על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

נתבונן בדוגמה:

נתון הווקטור $\vec{AB} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$, וידוע $\vec{DC} = 6 \cdot \vec{AB}$, כלומר $\vec{DC}$ הוא כפל בסקלר של $\vec{AB}$.

נביע את $\vec{DC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$: $\vec{DC} = 6 \cdot (\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}) = 6 \cdot \frac{1}{2}\underline{u} + 6 \cdot \frac{2}{3}\underline{v}$

נקבל: $\vec{DC} = 3\underline{u} + 4\underline{v}$. ניתן לראות שהמקדם של $\underline{u}$ והמקדם של $\underline{v}$ בווקטור $\vec{AB}$,

הוכפלו **באותו מספר** 6 כדי לקבל את המקדם של $\underline{u}$ והמקדם של $\underline{v}$ בווקטור $\vec{DC}$.

נתבונן בדשני הווקטורים שקיבלנו $\vec{AB} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$ ו- $\vec{DC} = 3\underline{u} + 4\underline{v}$,

ונוכיח שהם קולינאריים על ידי כך שנראה שאחד מהם הוא כפל בסקלר של השני. כיצד נעשה זאת?

נחשב את **היחס** בין המקדם של $\underline{u}$ בווקטור $\vec{DC}$ למקדם של $\underline{u}$ בווקטור $\vec{AB}$: $\frac{3}{(\frac{1}{2})} = 6$

נחשב את **היחס** בין המקדם של $\underline{v}$ בווקטור $\vec{DC}$ למקדם של $\underline{v}$ בווקטור $\vec{AB}$: $\frac{4}{(\frac{2}{3})} = 6$

היחס שווה, ולכן שני הווקטורים הם כפל בסקלר אחד של השני ומתקיים $\vec{DC} = 6 \cdot \vec{AB}$.

נסיק ששני הווקטורים הם קולינאריים, כלומר שני הווקטורים נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

הערה: אם היחס אינו שווה, הווקטורים אינם קולינאריים.

הוכחה ששני וקטורים נמצאים על ישרים מקבילים

דוגמה:

במרובע ABCD שלפניכם נתון: $\vec{AB} = \underline{u} + \underline{v}$, $\vec{DC} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.

א. הוכיחו שהווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ הם קולינאריים.

ב. הראו ש- $AB \parallel DC$.

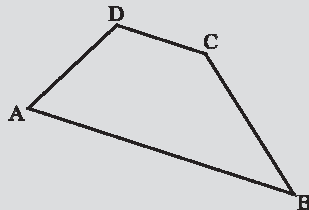
ג. הסבירו מדוע המרובע ABCD הוא טרפז.

פתרון:

א. כדי להוכיח שהווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ הם קולינאריים,

נראה שהווקטור $\vec{DC}$ מתקבל על ידי כפל בסקלר של הווקטור $\vec{AB}$,

כלומר שקיים t שעבורו $\vec{DC} = t \cdot \vec{AB}$. נתון: $\vec{AB} = \underline{u} + \underline{v}$, $\vec{DC} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.



דרך א' - נבדוק את היחס בין המקדמים של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בווקטור $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$

לבין המקדמים שלהם בהתאמה בווקטור $\overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$.

היחס בין המקדמים של $\underline{u}$ הוא $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$. היחס בין המקדמים של $\underline{v}$ הוא $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$.

היחס שווה ולכן $\overrightarrow{DC}$ מתקבל על ידי כפל בסקלר של $\overrightarrow{AB}$, ומתקיים $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

דרך ב' - הוצאת גורם משותף: $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} = \frac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

קיבלנו $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, כלומר שני הווקטורים הם כפל בסקלר אחד של השני.

ב. בסעיף א' קיבלנו שהווקטור $\overrightarrow{DC}$ מתקבל על ידי כפל ב- $\frac{1}{3}$ של הווקטור $\overrightarrow{AB}$,

כלומר שני הווקטורים הם קולינאריים ונמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

ABCD הוא מרובע, לכן הצלעות הנגדיות AB ו-DC אינן על אותו ישר,

ומכאן שהן נמצאות על ישרים מקבילים, כלומר $AB \parallel DC$.

ג. הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ נמצאים על ישרים מקבילים, אך אינם בעלי אותו אורך.

כלומר, במרובע ABCD יש זוג צלעות נגדיות מקבילות שאינן שוות אורך,

ומכאן שהמרובע ABCD הוא טרפז.

דוגמה:

במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הנקודה E נמצאת על הצלע BC ומקיימת $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

א. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{BE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

הנקודה D שבתוך המשולש מקיימת: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$.

ב. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ג. (1) הוכיחו ש- $DE \parallel AB$.

(2) קבעו פי כמה גדול האורך של $\overrightarrow{AB}$ מהאורך של $\overrightarrow{DE}$.

פתרון:

א. נתון $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. נביע תחילה את הווקטור $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\underline{u} + \underline{v}$

נביע את הווקטור $\overrightarrow{BE}$. נקבל: $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}(-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$

ב. נביע את הווקטור $\overrightarrow{DE}$ על פי המסלול הבא: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

נציב: $\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$

נקבל: $\overrightarrow{DE} = -\left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}\right) + \underline{u} + \frac{2}{5}(-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{2}{5}\underline{v} + \underline{u} - \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} = \frac{4}{15}\underline{u}$

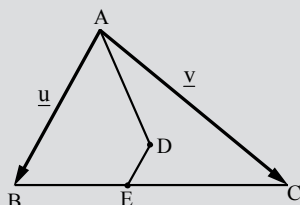
ג. (1) על פי הנתון $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. בסעיף א' קיבלנו $\overrightarrow{DE} = \frac{4}{15}\underline{u}$, לכן $\overrightarrow{DE} = \frac{4}{15}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{DE}$ מתקבל על ידי כפל בסקלר של $\overrightarrow{AB}$, כלומר $\overrightarrow{DE}$ ו- $\overrightarrow{AB}$ הם וקטורים קולינאריים,

ולכן נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

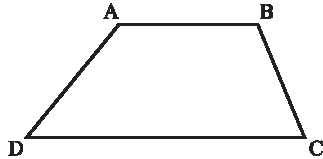
הנקודה D אינה נמצאת על הישר AB (שהרי נתון שהיא בתוך המשולש),

לכן הווקטורים $\overrightarrow{DE}$ ו- $\overrightarrow{AB}$ נמצאים על ישרים מקבילים, ומכאן ש- $DE \parallel AB$.

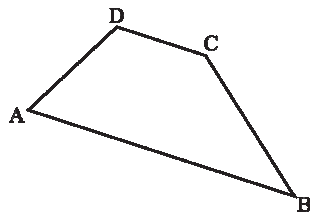


(2) ראינו כי $\overrightarrow{DE} = \frac{4}{15}\overrightarrow{AB}$, ולכן מתקיים $DE = \frac{4}{15}AB$.
 נקבל $AB = \frac{15}{4}DE$ ומכאן שהאורך של הווקטור $\overrightarrow{AB}$ גדול פי $\frac{15}{4}$ (כלומר פי 3.75)
 מהאורך של הווקטור $\overrightarrow{DE}$.

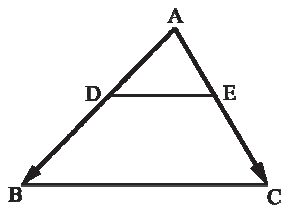
תרגילים



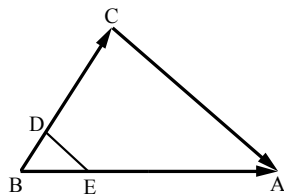
1. במרובע ABCD נתון: $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{9}\underline{u} + \frac{5}{9}\underline{v}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{u} + \underline{v}$.
 א. הראו ש- $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ הם וקטורים קולינאריים.
 ב. הסבירו מדוע הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ נמצאים על ישרים מקבילים.
 ג. הסבירו מדוע המרובע ABCD הוא טרפז.



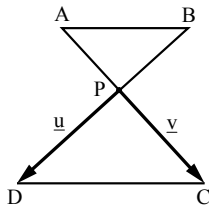
2. במרובע ABCD נתון: $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{u} + \underline{v}$.
 א. הראו ש- $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ הם וקטורים קולינאריים.
 ב. הסבירו מדוע הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ נמצאים על ישרים מקבילים.
 ג. (1) הסבירו מדוע המרובע ABCD הוא טרפז.
 (2) פי כמה גדול אורך הבסיס AB מאורך הבסיס DC?



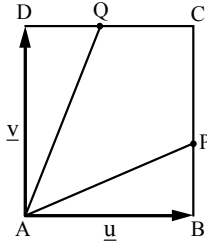
3. במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.
 נתון: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{BC}$ ואת $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הראו ש- $\overrightarrow{DE}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ הם וקטורים קולינאריים.
 ג. הסבירו מדוע $\overrightarrow{DE}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ נמצאים על ישרים מקבילים.



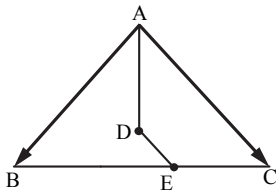
4. במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{BC} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{v}$.
 נתון: $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$, $BD:DC = 1:3$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BD}$ ו- $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. (1) הראו ש- $\overrightarrow{DE}$ ו- $\overrightarrow{CA}$ הם וקטורים קולינאריים.
 (2) הסבירו מדוע $DE \parallel CA$.
 ג. פי כמה גדול האורך של CA מהאורך של DE?



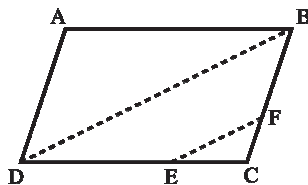
5. בשרטוט שלפניכם הקטעים AC ו-BD נחתכים בנקודה P.
 נתון: $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{PC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{PD} = \underline{u}$.
 א. בטאו את הווקטורים $\overrightarrow{CD}$ ו- $\overrightarrow{BA}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הראו ש- $\overrightarrow{BA}$ ו- $\overrightarrow{CD}$ הם וקטורים קולינאריים.
 ג. הסבירו מדוע $AB \parallel DC$.



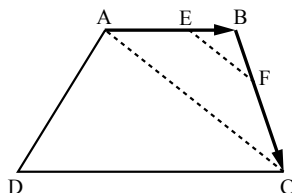
6. במלבן ABCD, הנקודות P ו-Q נמצאות בהתאמה על הצלעות BC ו-DC. נתון: $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QC} = \frac{5}{8}\overrightarrow{DC}$.
 נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{BD}$ ואת $\overrightarrow{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הראו שמתקיים: $PQ \parallel BD$.



7. במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודה E מקיימת: $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. נתון: $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$. הביעו את $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ג. הראו כי $DE \parallel AC$.
 ד. פי כמה גדול האורך $\overrightarrow{AC}$ מהאורך של $\overrightarrow{DE}$?



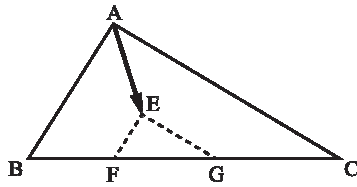
8. נתונה מקבילית ABCD. נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודות E ו-F מקיימות: $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AF} = \underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v}$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{EF}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הוכיחו: $EF \parallel DB$.
 ג. מהו היחס בין שטח המשולש BEF לשטח המשולש BDE?
 הדרכה: לשני המשולשים יש גובה משותף.



9. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) נתון: $DC = 2AB$. נסמן: $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-BC, כך ש- $AE:EB = 2:1$, $BF:FC = 1:2$.
 א. הביעו את $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{EF}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הנקודות G ו-H הן אמצעי הצלעות DC ו-AD בהתאמה. הביעו את $\overrightarrow{HG}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 (2) הוכיחו: $EF \parallel HG$.
 ג. פי כמה גדול הקטע HG מהקטע EF?

10. במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$. הנקודה F נמצאת על הצלע BC, כך ש- $\vec{BF} = \frac{1}{4} \cdot \vec{BC}$.

הנקודה E נמצאת בתוך המשולש ומקיימת: $\vec{AE} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$.



א. הביעו את $\vec{FE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. הראו שמתקיים: $FE \parallel AB$.

ג. הנקודה G נמצאת על הצלע BC, כך ש- $\vec{BG} = \frac{2}{3} \cdot \vec{BC}$.

(1) הביעו את $\vec{EG}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

(2) הראו שמתקיים: $EG \parallel AC$.

תשובות:

1. א. $\vec{AB} = \frac{5}{9}\vec{DC}$. ב. וקטורים קולינאריים נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

צלעות נגדיות במרובע לא נמצאות על אותו ישר ולכן $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ נמצאים על ישרים מקבילים.
ג. מרובע שבו זוג צלעות נגדיות הן מקבילות ושונות אורך הוא טרפז.

2. א. $\vec{AB} = 3\vec{DC}$. ב. וקטורים קולינאריים נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.
צלעות נגדיות במרובע לא נמצאות על אותו ישר ולכן $\vec{AB}$ ו- $\vec{DC}$ נמצאים על ישרים מקבילים.
ג. (1) מרובע שבו זוג צלעות נגדיות הן מקבילות ושונות אורך הוא טרפז. (2) פי 3.

3. א. $\vec{DE} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$, $\vec{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$. ב. $\vec{DE} = \frac{2}{5}\vec{BC}$.

ג. וקטורים קולינאריים נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

צלעות נגדיות במרובע לא נמצאות על אותו ישר ולכן $\vec{DE}$ ו- $\vec{BC}$ נמצאים על ישרים מקבילים.

4. א. $\vec{CA} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\vec{BE} = \frac{1}{4}\underline{v}$, $\vec{BD} = \frac{1}{4}\underline{u}$, $\vec{DE} = -\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$. ב. (1) $\vec{DE} = \frac{1}{4}\vec{CA}$. ג. פי 4.

5. א. $\vec{CD} = \underline{u} - \underline{v}$, $\vec{BA} = \frac{2}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v}$. ב. (1) $\vec{BA} = \frac{2}{3}\vec{CD}$. 6. א. $\vec{BD} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\vec{PQ} = -\frac{5}{8}\underline{u} + \frac{5}{8}\underline{v}$.

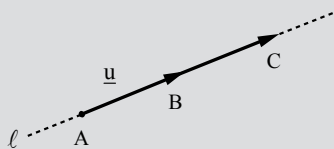
7. א. $\vec{AE} = \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v}$. ב. $\vec{DE} = \frac{4}{15}\underline{u}$. ד. פי $\frac{15}{4}$ (פי 3.75). 8. א. $\vec{EF} = \frac{2}{5}\underline{u} - \frac{2}{5}\underline{v}$. ג. פי $\frac{2}{5}$.

9. א. $\vec{AC} = \underline{u} + \underline{v}$, $\vec{EF} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$. ב. (1) $\vec{HG} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$. ג. פי $1\frac{1}{2}$.

10. א. $\vec{FE} = -\frac{5}{12}\underline{u}$. ג. (1) $\vec{EG} = \frac{5}{12}\underline{v}$.

הוכחה ששני וקטורים נמצאים על אותו ישר

נראה עכשיו כיצד מוכיחים ששני וקטורים נמצאים על אותו ישר.



נניח כי הנקודות A ו-B נמצאות על הישר ℓ ו- $\vec{AB} = \underline{u}$. אם נתון שנקודה C נמצאת על הישר ℓ , אז הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ נמצאים על אותו ישר (וקטורים קולינאריים), ולכן קיים מספר (יחיד) t שעבורו $\vec{AC} = t \cdot \vec{AB}$.

בצורה דומה, אם קיים מספר t שעבורו $\vec{AC} = t \cdot \vec{AB}$,

אז הווקטורים הם כפל בסקלר אחד של השני (וקטורים קולינאריים).

מאחר שיש לשני הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ נקודה משותפת A, הם נמצאים על אותו ישר, ומכאן ששלוש הנקודות A, B ו-C נמצאות על אותו ישר.

דוגמה:



נתונים שני הווקטורים $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \frac{1}{2}\underline{u}$.

א. הסבירו מדוע הנקודות A, B ו-C נמצאות על אותו ישר.

ב. מהו סדר שלוש הנקודות על הישר שעליו הן נמצאות?

ג. נתון גם $\vec{AD} = 1\frac{1}{2}\underline{u}$. הסבירו מדוע הנקודה D נמצאת גם היא על אותו ישר,

וקבעו היכן ממוקמת נקודה D על הישר לעומת שלוש הנקודות האחרות.

פתרון:

א. על פי הנתון $\vec{AB} = \underline{u}$. מאחר ש- $\vec{AC} = \frac{1}{2}\underline{u}$, אז $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ הם כפל בסקלר אחד של השני, ולכן הם נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים (וקטורים קולינאריים). מאחר ששני הווקטורים יוצאים מאותה נקודה A, הרי שהם נמצאים על אותו ישר.

נובע מכך שהנקודות A, B ו-C נמצאות על אותו ישר.

ב. ראינו כי $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. שני הווקטורים יוצאים מנקודה A,

ובאותו כיוון. האורך של AC הוא $\frac{1}{2}$ מהאורך של AB,

ולכן נקודה C נמצאת על הקטע AB (באמצע הקטע AB).

סדר הנקודות מתואר בציור.

ג. נתון $\vec{AD} = 1\frac{1}{2}\underline{u}$, כלומר $\vec{AD} = 1\frac{1}{2}\vec{AB}$.

הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AD}$ הם כפל בסקלר אחד של השני, כלומר הם קולינאריים, ולכן הם נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים. מאחר ששניהם יוצאים מאותה נקודה A, הרי שהם נמצאים על אותו ישר (שהוא הישר שבסעיף א).

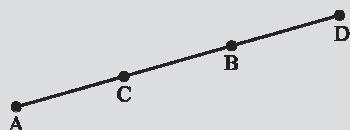
ראינו ש- $\vec{AD} = 1\frac{1}{2}\vec{AB}$.

שני הווקטורים יוצאים מנקודה A ובאותו כיוון.

האורך של AD הוא פי $1\frac{1}{2}$ מהאורך של AB,

ולכן נקודה D נמצאת מחוץ לקטע AB (מהצד של B).

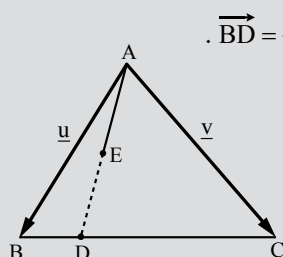
סדר הנקודות הוא A, C, B, D (ראו ציור משמאל).



נסכים:

- כאשר נתון $\vec{AC} = t \cdot \vec{AB}$, מיקומה של הנקודה C ביחס לקטע AB נקבע על פי הערך של t:
- אם $t > 1$, אז הנקודה C נמצאת מחוץ לקטע AB (מהצד של B).
 - אם $t = 1$, אז הנקודה C מתלכדת עם הנקודה B.
 - אם $0 < t < 1$, אז הנקודה C נמצאת על הקטע AB.
 - אם $t = 0$, אז הנקודה C מתלכדת עם הנקודה A.
 - אם $t < 0$, אז הנקודה C נמצאת מחוץ לקטע AB (מהצד של A).

דוגמה:



במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$. הנקודה D מקיימת $\vec{BD} = \frac{1}{4} \vec{BC}$.

הנקודה E מקיימת: $\vec{AE} = \frac{3}{8} \underline{u} + \frac{1}{8} \underline{v}$.

- הביעו את הווקטור $\vec{AD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
- הוכיחו שהנקודות A, D ו-E נמצאות על אותו ישר.
- באיזה יחס מחלקת הנקודה E את הקטע AD?

פתרון:

א. נביע את הווקטור $\vec{AD}$ באופן הבא: $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$

נתון $\vec{AB} = \underline{u}$, לכן עלינו להביע את הווקטור $\vec{BD}$.

נתון כי $\vec{BD} = \frac{1}{4} \vec{BC}$, לכן נביע קודם את $\vec{BC}$.

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\underline{u} + \underline{v} \quad \text{נביע את } \vec{BC}$$

$$\vec{BD} = \frac{1}{4} \vec{BC} = \frac{1}{4} (-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} \quad \text{נביע את } \vec{BD}$$

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \underline{u} - \frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} = \frac{3}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} \quad \text{נביע את } \vec{AD}$$

$$\vec{AD} = \frac{3}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} \quad \text{נסכים}$$

- כדי להוכיח שהנקודות A, D ו-E נמצאות על אותו ישר, יש להראות שהווקטורים $\vec{AE}$ ו- $\vec{AD}$ נמצאים על אותו ישר. מאחר ש- $\vec{AE}$ ו- $\vec{AD}$ עוברים דרך אותה נקודה A, הרי שאם נראה שהם כפל בסקלר אחד של השני (ווקטורים קולינאריים), נדע שהם נמצאים על אותו ישר.

$$\text{בסעיף א קיבלנו } \vec{AD} = \frac{3}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v}. \text{ כמון כן, נתון: } \vec{AE} = \frac{3}{8} \underline{u} + \frac{1}{8} \underline{v}.$$

נבדוק האם היחס בין המקדמים של $\underline{u}$ בשני הווקטורים

שווה ליחס בין המקדמים של $\underline{v}$ בשני הווקטורים.

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{היחס בין המקדמים של } \underline{u} \text{ הוא } \frac{3}{1} = 3. \quad \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{היחס בין המקדמים של } \underline{v} \text{ הוא } \frac{1}{2}.$$

היחס שווה בשניהם ל- $\frac{1}{2}$, כלומר הווקטורים קולינאריים ומתקיים $\vec{AE} = \frac{1}{2} \vec{AD}$.

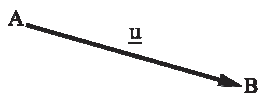
מאחר ש- $\vec{AE}$ ו- $\vec{AD}$ עוברים דרך נקודה משותפת A, הרי הם נמצאים על אותו ישר, ומכאן שהנקודות A, D ו-E נמצאות על אותו ישר.

ג. קיבלנו $\vec{AE} = \frac{1}{2} \vec{AD}$, כלומר $AE = \frac{1}{2} AD$, ומכאן שנקודה E היא אמצע הקטע AD.

(יחס הקטעים הוא $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$. נקבל ש- $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{1}$, ומכאן שנקודה E היא אמצע הקטע AD).

תרגילים

1. נתונים שני וקטורים: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = 2\underline{u}$.



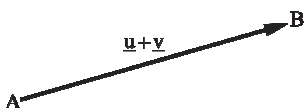
א. (1) הסבירו מדוע הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ הם קולינאריים.

(2) הסבירו מדוע הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ נמצאים על אותו ישר.

(3) הסבירו מדוע הנקודות A, B ו-C נמצאות על אותו ישר.

ב. איזו מבין הנקודות (A, B או C) נמצאת בין שתי האחרות? נמקו.

2. נתונים שני וקטורים: $\vec{AB} = \underline{u} + \underline{v}$, $\vec{AC} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.



א. (1) הראו שכל אחד משני הווקטורים הנתונים

הוא כפל בסקלר של הווקטור השני.

(2) הסבירו מדוע הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ נמצאים על אותו ישר.

ב. הסבירו מדוע הנקודות A, B ו-C נמצאות על אותו ישר.

ג. איזה מבין הנקודות (A, B או C) נמצאות בין שתי אחרות.

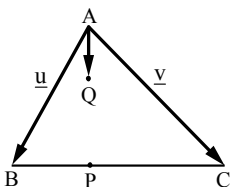
3. נתונים שני וקטורים: $\vec{AB} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{AC} = 2\underline{u} + 3\underline{v}$.

א. הסבירו מדוע הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ נמצאים על אותו ישר.

ב. הראו שהנקודה B נמצאת על הקטע AC.

ג. באיזה יחס מחלקת הנקודה B את הקטע AC?

4. במשולש ABC, הנקודה P נמצאת על הצלע BC. נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{BP} = \frac{1}{4}\vec{BC}$.



א. הביעו את $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. נתון: $\vec{AQ} = \frac{3}{20}\underline{u} + \frac{1}{20}\underline{v}$.

(1) הראו ש- $\vec{AQ}$ ו- $\vec{AP}$ הם וקטורים קולינאריים.

(2) הסבירו מדוע הווקטורים $\vec{AQ}$ ו- $\vec{AP}$ נמצאים על אותו ישר.

(3) הסבירו מדוע הנקודות A, Q ו-P נמצאות על ישר אחד.

ג. באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הקטע AP?

5. במשולש ABC, הנקודה P היא אמצע הצלע BC. נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.

א. הביעו את $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

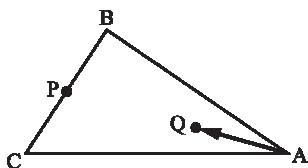
ב. Q היא נקודה בתוך המשולש, כך ש- $\vec{AQ} = \frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{AC}$.

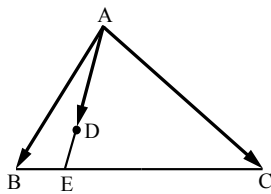
הביעו את $\vec{AQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

(1) הוכיחו שהווקטורים $\vec{AQ}$ ו- $\vec{AP}$ נמצאים על אותו ישר.

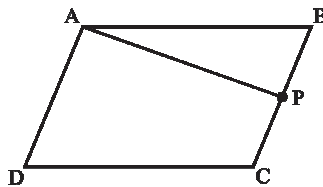
(2) הראו שהנקודות A, Q ו-P נמצאות על אותו ישר.

(3) באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הקטע AP?

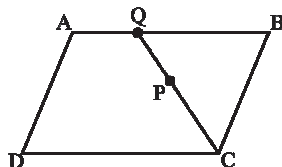




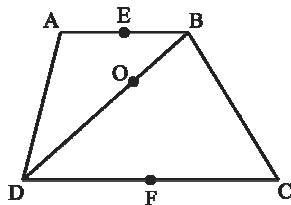
6. במשולש ABC נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.
 הנקודה E נמצאת על הצלע BC ומקיימת $BE:EC=1:3$.
 א. הביעו את $\vec{AE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הנקודה D נמצאת בתוך המשולש ומקיימת: $\vec{AD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{6}\underline{v}$.
 הראו שהווקטורים $\vec{AD}$ ו- $\vec{AE}$ נמצאים על אותו ישר.
 ג. באיזה יחס מחלקת הנקודה D את הקטע AE?
 ד. חשבו את היחס בין שטח המשולש CDA לשטח המשולש CDE.



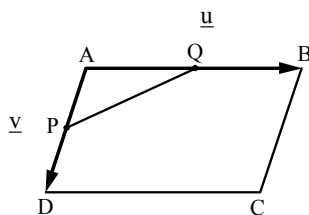
7. P היא נקודת האמצע של הצלע BC במקבילית ABCD. נסמן: $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{DC} = \underline{u}$.
 א. הביעו את $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הנקודה Q מקיימת $\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$.
 (1) הביעו את $\vec{AQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 (2) הראו שהנקודה Q נמצאת על הקטע AP.
 (3) באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הקטע AP?



8. במקבילית ABCD נסמן: $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה Q נמצאת על AB, כך שמתקיים $\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.
 הנקודה P נמצאת על CQ, כך שמתקיים $\vec{CP} = \frac{3}{5}\vec{CQ}$.
 א. הביעו את $\vec{CP}$, $\vec{CQ}$ ו- $\vec{BP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הוכיחו שהנקודה P נמצאת על האלכסון BD.



9. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) נתון $DC = 2AB$. נסמן: $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 הנקודות E ו-F הן אמצעי הבסיסים (ראו ציור).
 הנקודה O נמצאת על האלכסון BD ומקיימת $BO:OD=1:2$.
 א. הביעו את $\vec{BD}$, $\vec{BO}$, $\vec{EO}$ ו- $\vec{EF}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. הוכיחו שהנקודה O נמצאת על הקטע EF.



10. במקבילית ABCD נסמן: $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.
 P היא אמצע הצלע AD ו-Q היא אמצע הצלע AB.
 א. הביעו את $\vec{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. נקודה M היא אמצע הקטע PQ.
 הביעו את $\vec{AM}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ג. (1) הוכיחו כי הנקודה M נמצאת על האלכסון AC.
 (2) באיזה יחס מחלקת הנקודה M את האלכסון AC?

11. במקבילית ABCD נסמן: $\vec{CD} = \underline{u}$, $\vec{CB} = \underline{v}$. הנקודה Q נמצאת על הצלע DC.

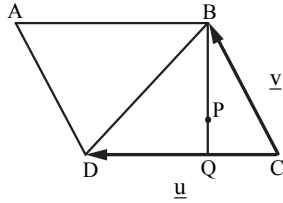
א. נתון: $\vec{CQ} = \frac{1}{3}\vec{CD}$. הביעו את $\vec{QB}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. P היא נקודה על הקטע BQ, כך ש- $QP = \frac{1}{4}\vec{QB}$.

הביעו את $\vec{CP}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ג. הוכיחו שהנקודה P נמצאת על האלכסון AC.

ד. באיזה יחס מחלקת הנקודה P את האלכסון AC?



תשובות:

1. א. (1) $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ (2) וקטורים קולינאריים נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.
מאחר ששני הווקטורים הנתונים יוצאים מאותה נקודה A, הם נמצאים על אותו ישר. ב. B.

2. א. (1) $\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ (2) וקטורים קולינאריים נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.
מאחר ששני הווקטורים הנתונים עוברים דרך אותה נקודה A, הם נמצאים על אותו ישר.

ב. $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ נמצאים על אותו ישר, ולכן הנקודות A, B ו-C נמצאות על אותו ישר. ג. C.

3. א. $\vec{AC} = 6\vec{AB}$, כלומר הווקטורים הם כפל בסקלר אחד של השני (וקטורים קולינאריים)
ולכן נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים. מאחר ששני הווקטורים הנתונים עוברים דרך אותה נקודה A, הם נמצאים על אותו ישר. ב. הנקודות A, B ו-C נמצאות על אותו ישר. מאחר ש- $AC > AB$, הנקודה B נמצאת על הקטע AC. ג. $AB:BC = 1:5$.

4. א. $\vec{AP} = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$ (1) ב. $\vec{AQ} = \frac{1}{5}\vec{AP}$ (2) שני הווקטורים הם כפל בסקלר אחד של השני
ולכן נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים. מאחר ששני הווקטורים עוברים דרך

אותה נקודה A, הם נמצאים על אותו ישר. (3) $\vec{AC}$ ו- $\vec{AB}$ נמצאים על אותו ישר,
ולכן הנקודות A, B ו-C נמצאות על אותו ישר. ג. $AQ:QP = 1:4$.

5. א. $\vec{AP} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$ (1) ב. $\vec{AQ} = \frac{1}{5}\underline{u} + \frac{1}{5}\underline{v}$ (2) ג. $\vec{AQ} = \frac{2}{5}\vec{AP}$ (או $\vec{AP} = 2.5\vec{AQ}$) שני הווקטורים הם
כפל בסקלר אחד של השני ולכן נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים. מאחר ששני
הווקטורים עוברים דרך אותה נקודה A, הם נמצאים על אותו ישר. (2) $\vec{AP}$ ו- $\vec{AQ}$ נמצאים
על אותו ישר, ולכן הנקודות A, Q ו-P נמצאות על אותו ישר. (3) $AQ:QP = 2:3$.

6. א. $\vec{AE} = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$ (1) ב. $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AE}$ (2) ג. $AD:DE = 2:1$ ד. $2:1$.

7. א. $\vec{AP} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$ (1) ב. $\vec{AQ} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$ (2) ג. $\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AP}$ (3) $AQ:QP = 2:1$.

8. א. $\vec{CQ} = -\frac{2}{3}\underline{u} - \underline{v}$, $\vec{CP} = -\frac{2}{5}\underline{u} - \frac{2}{5}\underline{v}$, $\vec{BP} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$ ב. $\vec{BP} = \frac{2}{5}\vec{BD}$.

9. א. $\vec{BD} = \underline{v} - 2\underline{u}$, $\vec{BO} = \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{u}$, $\vec{EO} = \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{6}\underline{u}$ ג. $\vec{EO} = \frac{1}{3}\vec{EF}$.

10. א. $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$ (1) ב. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$ (2) ג. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ (3) $AM:MC = 1:3$.

11. א. $\vec{QB} = -\frac{1}{3}\underline{u} + \underline{v}$ (1) ב. $\vec{CP} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$ (2) ג. $\vec{CP} = \frac{1}{4}\vec{CA}$ (3) ד. $CP:PA = 1:3$.

הכרת גופים במרחב ותכונותיהם

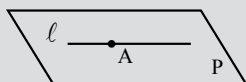
מבוא

בפרק זה נכיר גופים תלת-ממדיים במרחב. תחילה נדון במושגים היסודיים ישר ומישור.



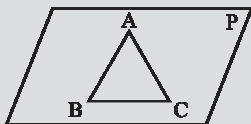
קו ישר הוא אוסף אינסופי של נקודות המסודרות בשורה אחת, ללא רוחב או עובי, ומתפשטות לשני הכיוונים ללא גבול. כאשר נתונות שתי נקודות (במישור או במרחב) עובר דרכן קו ישר אחד בלבד. אם נתונה נקודה אחת עוברים דרכה אינסוף ישרים שונים. בציורים המתארים שאלות במישור או במרחב רואים רק חלק מהישר, קטע ממנו. נהוג לסמן ישר באמצעות אות קטנה.

מישור הוא משטח דו ממדי שטוח לחלוטין, אינסופי. דוגמה למישור: דף נייר שנמשך עד אינסוף לכל הכיוונים ואינו מתעקם. בכל מישור נמצאים אינסוף ישרים שונים. בכל מישור יש אינסוף נקודות שונות.

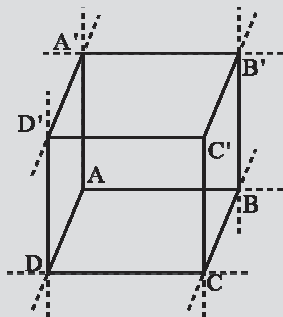


כל נקודה יכולה להימצא באינסוף מישורים שונים. כמו כן, כל ישר יכול להימצא באינסוף מישורים שונים. כל נקודה הנמצאת על ישר, נמצאת בכל מישור שבו נמצא הישר. בציור שממאל מתואר מישור P , ועליו ישר ℓ הנמצא במישור. הנקודה A נמצאת על הישר ℓ , ולכן נמצאת גם על המישור P .

בציורים המתארים שאלות במישור או במרחב, רואים רק חלק מהמישור. לדוגמה: בציור שממאל מתואר מישור P , והמשולש ABC הנמצא במישור. המישור הוא אינסופי, ולכן המשולש מונח על **חלק** מהמישור.



צלעות המשולש ABC הן קטע מישורים אינסופיים. לדוגמה: הצלע AB היא קטע מישור אינסופי, העובר דרך הנקודות A ו- B .



גם כאשר מציירים גוף תלת ממדי (ראו תיבה משמאל), רואים רק קטעים מתוך הישרים עליהם מונחות הצלעות. בציור משמאל מתוארת תיבה, אותה כבר הכרנו בעבר. ניתן לראות שצלעות ששת המלבנים הן חלק מישורים. כאשר נתאר תיבה, נצייר רק את הצלעות ולא מעבר לכך.

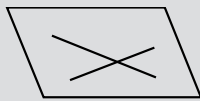
ישרים, מישורים והמצב ההדדי ביניהם

נדון עכשיו במצבים ההדדיים הקשורים לישרים ומישורים.
נתחיל ממצב הדדי בין שני ישרים שונים.

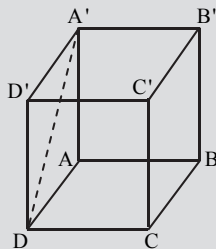
מצב הדדי בין שני ישרים שונים

כאשר למדנו גאומטריה, ראינו שכאשר שני ישרים שונים נמצאים באותו מישור דו ממדי, הם יכולים להיות נחתכים או מקבילים.
כאשר שני ישרים שונים נמצאים במרחב תלת ממדי, קיימות שלוש אפשרויות למצב ההדדי בין שני הישרים: ישרים נחתכים, ישרים מקבילים וישרים מצטלבים.

(1) ישרים נחתכים.



במקרה כזה לשני הישרים יש נקודה אחת משותפת.
כמו כן, ישנו מישור אחד המכיל את שני הישרים,
כלומר ישנו מישור אחד ויחיד ששני הישרים נמצאים בו.



נדגים מצב הדדי זה באמצעות התיבה $ABCD A'B'C'D'$.

כל אחד מבסיסי התיבה הוא חלק ממישור,
וכל אחת מפאות התיבה היא חלק ממישור.

הישרים AB ו- BC הם שני ישרים נחתכים.

נקודת החיתוך שלהם היא הנקודה B .

שני הישרים נמצאים במישור הבסיס $ABCD$.

על מישור זה נמצאים ישרים נוספים.

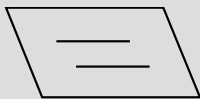
לדוגמה: AD , DC , ועוד אינסוף ישרים שאינם מצוירים (לדוגמה: AC , BD).

הישרים AD ו- $A'D'$ גם הם שני ישרים נחתכים. נקודת החיתוך שלהם היא הנקודה D .

שני הישרים נמצאים במישור הפאה $ADD'A'$.

הערה: הישרים שבהם אנו דנים מיוצגים בציור באמצעות קטעים.

(2) ישרים מקבילים.



במקרה כזה לשני הישרים אין אף נקודה משותפת.
כמו כן, קיים מישור אחד המכיל את שני הישרים,
כלומר ישנו מישור אחד ויחיד ששני הישרים נמצאים בו.

נדגים מצב הדדי זה באמצעות התיבה הנ"ל $ABCD A'B'C'D'$.

הישרים AB ו- DC הם שני ישרים מקבילים, כלומר $AB \parallel DC$.

שני הישרים נמצאים במישור הבסיס $ABCD$ ואין להם אף נקודה משותפת.

הישרים AB ו- $A'B'$ הם שני ישרים מקבילים, כלומר $AB \parallel A'B'$.

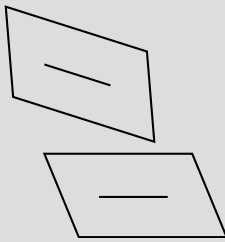
שני הישרים נמצאים במישור הפאה $ABB'A'$, ואינם להם אף נקודה משותפת.

הערה: מאחר ש- $AB \parallel DC$ ו- $AB \parallel A'B'$, נובע ש- $DC \parallel A'B'$.

כלומר, DC ו- $A'B'$ הם שני ישרים מקבילים במרחב.

(3) ישרים מצטלבים.

זהו מצב הדדי שקיים בין שני ישרים במרחב, אך לא קיים בין שני ישרים הנמצאים באותו מישור. מדובר במצב שבו הישרים לא חותכים זה את זה, כלומר אין להם אף נקודה משותפת, אבל הם גם לא מקבילים זה לזה.



נדגים באמצעות התיבה $ABCD A'B'C'D'$.

שני הישרים $A'D'$ ו- AB אינם נחתכים

וגם אינם מקבילים. הם **ישרים מצטלבים**.

כך גם זוג הישרים BD ו- $A'D'$,

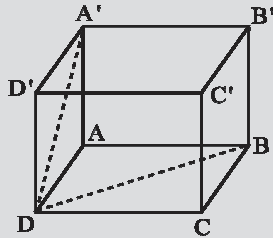
וזוג הישרים DC ו- $B'C'$.

כאשר שני ישרים הם **ישרים מצטלבים**,

לא קיים אף מישור ששני הישרים נמצאים בו.

לדוגמה: הישרים $A'D'$ ו- AB הם ישרים מצטלבים,

ולכן לא קיים מישור ששניהם נמצאים בו.



דרכים לקביעת מישור

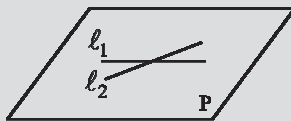
כאשר דנים במרחב תלת ממדי, ישנן ארבע דרכים באמצעותן ניתן לקבוע מישור.

(1) שני ישרים נחתכים קובעים מישור אחד ויחיד.

כלומר, אם שני הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2

הם ישרים נחתכים, יש רק מישור

אחד שבו שניהם נמצאים.

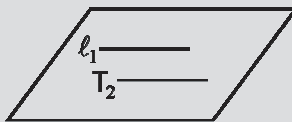


(2) שני ישרים מקבילים קובעים מישור אחד ויחיד.

כלומר, אם שני הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2

הם ישרים מקבילים, יש רק מישור

אחד שבו שניהם נמצאים.



(3) שלוש נקודות שאינן על ישר אחד קובעות מישור אחד ויחיד.

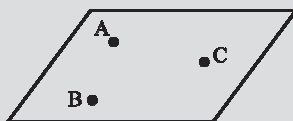
כלומר, אם שלוש הנקודות A, B ו- C

אינן נמצאות על ישר אחד, יש רק מישור

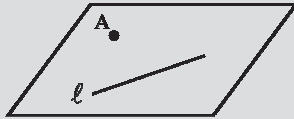
אחד שבו שלוש הנקודות נמצאות.

הערה: אם שלוש הנקודות נמצאות על ישר אחד,

ישנם אינסוף מישורים ששלוש הנקודות נמצאות עליהם.



(4) ישר ונקודה הנמצאת מחוץ לישר קובעים מישור אחד ויחיד.

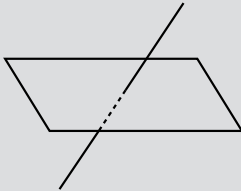


כלומר, יש רק מישור אחד שהישר והנקודה נמצאים עליו.

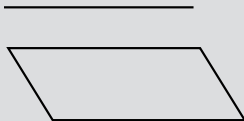
הערה: אם הנקודה נמצאת על הישר, יש אינסוף מישורים שהישר והנקודה נמצאים עליהם.

מצב הדדי בין ישר ומישור

קיימות שלוש אפשרויות למצב ההדדי של ישר ומישור:



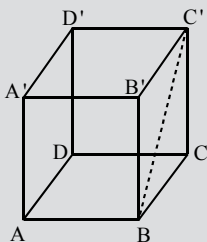
אפשרות א' – הישר חותך את המישור.
במקרה כזה לישר ולמישור יש רק נקודה אחת משותפת.



אפשרות ב' – הישר מקביל למישור.
במקרה כזה, לישר ולמישור אין אף נקודה משותפת.

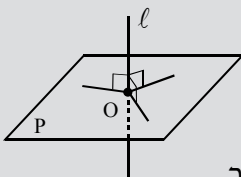


אפשרות ג' – הישר מוכל במישור.
במקרה כזה הישר כולו נמצא במישור, לישר ולמישור יש אינסוף נקודות משותפות. כל הנקודות על הישר נמצאות גם על המישור.



נמחיש את שלוש האפשרויות למצב הדדי בין ישר למישור באמצעות התיבה $ABCD A'B'C'D'$.
הישר $A'B'$ מקביל למישור הבסיס $ABCD$, שהרי אין להם אף נקודה משותפת.
באופן דומה, הישר BC מקביל למישור הפאה $ADD'A'$.
הישר BC' חותך את המישור $DCC'D'$ בנקודה C' .
הישר $D'D$ חותך את מישור הבסיס $ABCD$ בנקודה D .
הישר DC מוכל במישור הבסיס $ABCD$ ומוכל גם במישור הפאה $DCC'D'$.

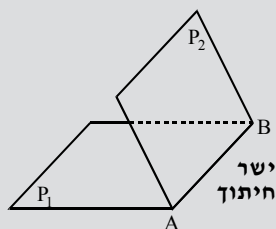
הערה: מקרה פרטי של ישר החותך מישור הוא מקרה שבו הישר מאונך למישור.



אם ישר l חותך מישור P בנקודה O , ויוצר זווית ישרה עם כל ישר במישור העובר דרך הנקודה O , אז הישר l נקרא ישר ניצב (מאונך) למישור.
לדוגמה: הישר $A'A$ חותך את מישור הבסיס $ABCD$ בנקודה A , ומאונך למישור. בהמשך נרחיב על ישר המאונך למישור.

מצב הדדי בין שני מישורים שונים

קיימות שתי אפשרויות למצב ההדדי בין שני מישורים שונים:



אפשרות א' – המישורים נחתכים.

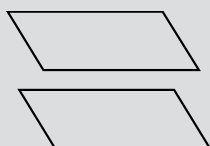
במקרה כזה לשני המישורים יש ישר חיתוך משותף.

בציור שמשמאל המישורים P_1 ו- P_2

הם מישורים נחתכים.

הישר AB הוא ישר החיתוך

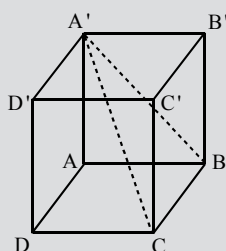
בין שני המישורים.



אפשרות ב' – המישורים מקבילים.

במקרה כזה לשני המישורים

אין אף נקודה משותפת.



נמחיש את שתי האפשרויות למצב הדדי בין שני מישורים

באמצעות התיבה $ABCD A'B'C'D'$.

מישור הבסיס ABCD מקביל למישור הבסיס $A'B'C'D'$.

מישור הפאה $BCC'B'$ מקביל למישור הפאה $ADD'A'$.

מישור הבסיס ABCD ומישור הפאה $ADD'A'$

הם מישורים נחתכים. ישר החיתוך שלהם הוא הישר AD.

המישורים ABCD ו- $A'BC$ הם מישורים נחתכים.

ישר החיתוך שלהם הוא הישר BC.

תרגילים

השאלות הבאות כוללות את המצבים ההדדיים הבאים:

מצב הדדי בין שני ישרים שונים, מצב הדדי בין ישר ומישור, מצב הדדי בין שני מישורים שונים.

1. לפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

א. (1) מהו המצב ההדדי בין הישר $A'B'$ לישר $B'C'$?

(2) מהו המצב ההדדי בין הישר BC לישר AD?

(3) מהו המצב ההדדי בין הישר AD' לישר DC?

(4) מהו המצב ההדדי בין הישר AA' לישר CC' ?

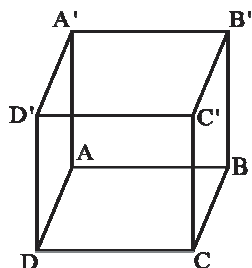
ב. (1) מהו המצב ההדדי בין הישר CC' למישור ABCD?

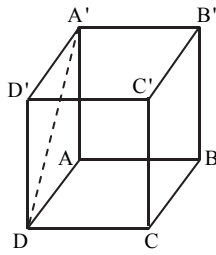
(2) מהו המצב ההדדי בין הישר $D'C'$ למישור ABCD?

(3) מהו המצב ההדדי בין הישר AD' למישור $ADD'A'$?

ג. כתבו שלושה מישורים שהנקודה C נמצאת עליהם.

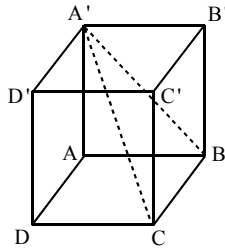
ד. מה המצב ההדדי בין המישור ABCD למישור $A'B'C'D'$?





2. לפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

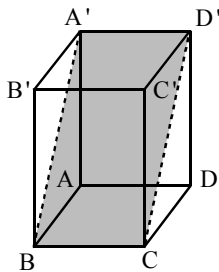
- א. (1) מהו המצב ההדדי בין הישר $A'D$ לישר AB ?
- (2) מהו המצב ההדדי בין הישר $A'B'$ לישר DC ?
- ב. (1) מהו המצב ההדדי בין הישר $A'D$ למישור $ABCD$?
- (2) מהו המצב ההדדי בין הישר AB למישור $ABB'A'$?
- ג. מהו המצב ההדדי בין המישור $BCC'B'$ למישור $ABB'A'$?
- ד. מהו המישור שמגדירים הישרים הנחתכים $A'D$ ו- AD ?



3. לפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

- א. מה המצב ההדדי בין המישור $ABB'A'$ למישור $CDD'C'$?
- ב. כתבו מישור המקביל למישור $ABCD$.
- ג. (1) כתבו שני מישורים שהישר AD נמצא עליהם.
- (2) מה המצב ההדדי בין המישור $ADD'A'$ למישור $ABCD$?
- אם המישורים נחתכים – מהו ישר החיתוך?
- ד. מהו ישר החיתוך בין המישורים $A'BC$ ו- $ABCD$?
- ה. רוצים להגדיר את המישור $ABCD$ באמצעות הישר DC , ובאמצעות נקודה נוספת המסומנת בציור. כתבו את שתי האפשרויות לנקודה זו.

4. לפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$. בונים את מישור המלבן $A'D'CB$ (צבוע באפור, ראו ציור).



- א. קבעו האם ניתן לקבוע את המישור האפור:
 - (1) באמצעות הישרים $A'D'$ ו- BC .
 - (2) באמצעות הישרים BC ו- CD' .
 - (3) באמצעות הנקודות A' , B ו- C .
 - (4) באמצעות הישר $A'B$ והנקודה D' .
- ב. מהו ישר החיתוך בין המישורים $A'D'CB$ ו- $CDD'C'$?
- ג. (1) מה המצב ההדדי בין הישרים BC ו- DD' ?
- (2) הסבירו מדוע לא קיים מישור שבו נמצאים הישרים BC ו- DD' .

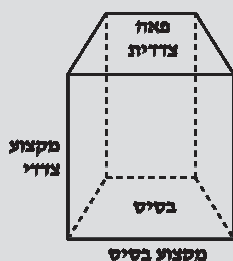
תשובות:

1. א. (1) הישרים נחתכים. (2) הישרים מקבילים. (3) הישרים מצטלבים. (4) הישרים מקבילים.
 - ב. (1) הישר חותך את המישור בנקודה C . (2) הישר מקביל למישור. (3) הישר מוכל במישור.
 - ג. המישורים $ABCD$, $BCC'B'$ ו- $DCC'D'$. ד. המישורים מקבילים.
2. א. (1) הישרים מצטלבים. (2) הישרים מקבילים. ב. (1) הישר חותך את המישור בנקודה D .
 - (2) הישר מוכל במישור. ג. המישורים נחתכים. ישר החיתוך הוא BB' . ד. המישור $ADD'A'$.
3. א. המישורים מקבילים זה לזה. ב. $A'B'C'D'$. ג. (1) $ADD'A'$ ו- $ABCD$.
 - (2) המישורים נחתכים. ישר החיתוך הוא AD . ד. הישר BC . ה. A או B .
4. א. (1) כן. (2) כן. (3) כן. (4) כן. ב. ישר החיתוך הוא CD' .
 - ג. (1) מצטלבים. (2) לישרים מצטלבים אין מישור משותף עליו שניהם נמצאים.

גופים במרחב תלת ממדי

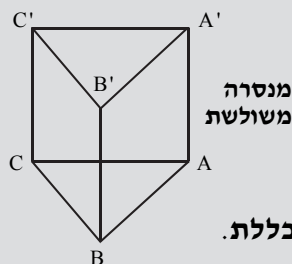
נכיר גופים תלת ממדיים הנכללים בתכנית הלימודים של 4 יח"ל: מנסרה, מקבילון, תיבה, קובייה, פירמידה. חלק מהגופים הכרנו כבר בעבר. כל הגופים שבהם נדון מורכבים מפאות ונקראים פאונים.

מנסרה



מנסרה היא גוף תלת-ממדי החסום על ידי שני מצולעים חופפים הנמצאים על מישורים מקבילים (הנקראים **בסיסי המנסרה**) ועל ידי מקביליות המחברות את זוגות הצלעות המתאימות של המצולעים ונקראות **פאות צדדיות**. כל פאה צדדית היא חלק ממישור, וכל בסיס הוא חלק ממישור. צלעות הבסיסים נקראות **מקצועות הבסיס**. ישרי החיתוך בין כל שתי פאות צדדיות סמוכות נקראים **מקצועות צדדיים**. קדקודים של הבסיסים או של הפאות נקראים קדקודי המנסרה. במנסרה קיימים שלושה סוגים של אלכסונים: אלכסון בסיס - קיים במידה והבסיס כולל לפחות ארבע צלעות. אלכסון פאה - זהו אלכסון במקבילית המהווה פאה צדדית. אלכסון המנסרה - זהו קטע המחבר שני קדקודים שאינם על אותה פאה, אבל אינו אלכסון בסיס או אלכסון פאה (קיים אם הבסיס כולל לפחות ארבע צלעות).

הערות:

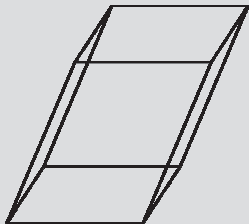


- (1) המנסרה נקראת על שם מספר הצלעות בבסיס. כאשר הבסיס הוא משולש, המנסרה נקראת מנסרה משולשת. כאשר הבסיס הוא מרובע, המנסרה נקראת מנסרה מרובעת וכו'.
- (2) כאשר בסיס המנסרה הוא מצולע משוכלל (לדוגמה משולש שווה-צלעות), המנסרה נקראת **מנסרה משוכללת**.
- (3) דוגמאות למצבים הדדיים במנסרה המשולשת שמשמאל: הישרים AB ו- $B'C'$ הם ישרים מצטלבים. הישר BC חותך את המישור $ABB'A'$ בנקודה B . המישורים $BCC'B'$ ו- $ACC'A'$ הם מישורים נחתכים, וישר החיתוך הוא CC' .
- (4) **מנסרה ישרה** היא מנסרה שבה הפאות הצדדיות הם **מלבנים** המאונכים לבסיסים. במנסרה ישרה כל מקצוע צדדי הוא גובה המנסרה.

שטח מעטפת של מנסרה שווה לסכום השטחים של כל הפאות הצדדיות.
שטח פנים של מנסרה שווה לסכום השטחים של הבסיסים ושל כל הפאות הצדדיות.
גובה של מנסרה הוא המרחק בין שני המישורים המקבילים של בסיסי המנסרה. במנסרה ישרה הגובה הוא המקצוע הצדדי.

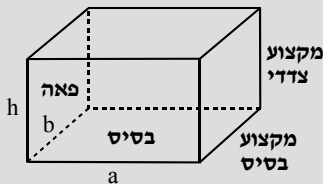
נפח של גוף תלת ממדי הוא החלק מהמרחב אותו תופס הגוף.
נפח מנסרה שווה למכפלה של שטח הבסיס בגובה המנסרה. אם שטח בסיס המנסרה הוא S וגובה המנסרה הוא h , אז נפח המנסרה V הוא: $V = S \cdot h$ נפח מנסרה

מקבילון



מקבילון הוא גוף תלת ממדי הכולל שש פאות.
 כל שש הפאות הן מקבילות, כאשר כל שתי פאות נגדיות חופפות זו לזו.
 המקבילון הוא למעשה מנסרה מרובעת ששני בסיסה מקבילות.
 כמו במנסרה מרובעת, גם במקבילון יש שלושה סוגי אלכסונים (אלכסוני בסיס, אלכסוני פאה ואלכסוני מקבילון).
 אלכסוני המקבילון חוצים זה את זה.

תיבה

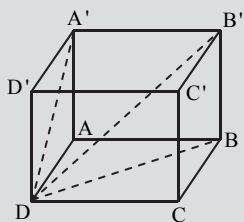


תיבה היא גוף המורכב משישה מלבנים:
 שני מלבנים חופפים הנמצאים על מישורים מקבילים, הנקראים בסיסים (עליון ותחתון), וארבעה מלבנים העוברים דרך צלעות הבסיסים, מאונכים לבסיסים ונקראים **פאות צדדיות**.
 ישרי החיתוך של כל שתי פאות צדדיות סמוכות נקראים **מקצועות צדדיים** והם **מאונכים** למישורי הבסיסים.
 בתיבה, כל המקצועות הצדדיים שווים זה לזה.
 צלעות הבסיסים נקראות **מקצועות הבסיס**. כל מקצוע בסיס מאונך לשתי הפאות אותן הוא חותך בקצותיו (בדומה לכך שגובה התיבה מאונך לבסיסה התיבה).
 תיבה היא למעשה מנסרה ישרה שבסיסה מלבן.
 תיבה ריבועית היא תיבה שבסיסה ריבוע.
 קטע המחבר את הבסיסים ומאונך להם נקרא גובה התיבה.
 בתיבה, הגובה שווה באורכו למקצוע הצדדי.

שטח מעטפת (M) של תיבה הוא סכום השטחים של כל הפאות הצדדיות.

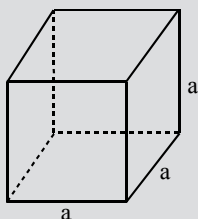
שטח פנים של תיבה הוא סכום השטחים של הבסיסים ושל כל הפאות הצדדיות.
 הנוסחה לשטח פנים (F) של תיבה ששטח בסיסה S ושטח המעטפת שלה M היא: $F = M + 2 \cdot S$ שטח פנים

נפח תיבה שווה למכפלה של שטח הבסיס בגובה התיבה.
 הנוסחה לנפח תיבה ששטח בסיסה S וגובהה h היא: $V = S \cdot h$ נפח



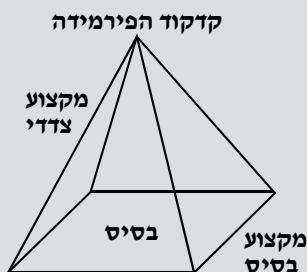
בתיבה ישנם שלושה סוגים של אלכסונים. נתבונן בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שמשמאל. הקטע BD נקרא אלכסון בסיס. גם הקטעים AC , $A'C'$ ו- $B'D'$ נקראים אלכסוני בסיס. הקטע המקווקו $A'D$ נקרא אלכסון פאה. בכל פאה יש שני אלכסונים. לדוגמה: $B'C$ ו- BC' הם אלכסוני הפאה $BCC'B'$. הקטע המקווקו $B'D$ נקרא אלכסון התיבה, וכך גם הקטעים BD' , $A'C$ ו- AC' . אלכסוני התיבה שווים זה לזה וחוצים זה את זה.

קובייה

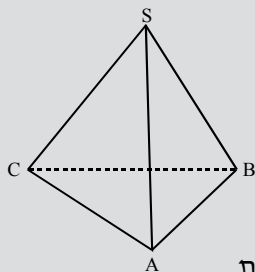


קובייה היא תיבה שכל המקצועות שלה (מקצועות הבסיס והמקצועות הצדדיים) שווים באורכם זה לזה. הקובייה בנויה משש פאות חופפות. כל פאה היא ריבוע. אלכסוני הקובייה שווים באורכם, חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה. אם אורך צלע הקובייה הוא a , אז הנוסחאות הן:
 $M = 4a^2$ שטח מעטפת, $P = 6a^2$ שטח פנים, $V = a^3$ נפח.

פירמידה



קדקוד הפירמידה הוא הנקודה מן המצולע על ידי מצולע הנקרא **בסיס** הפירמידה, ועל ידי מספר משולשים הנקראים **פאות צדדיות**. משולשים אלה עוברים כל אחד דרך צלע אחת של מצולע הבסיס ונחתכים כולם בנקודה אחת הנמצאת מחוץ למישור הבסיס ונקראת **קדקוד** הפירמידה. הישרים המחברים את קדקוד הפירמידה עם קדקודי הבסיס נקראים **מקצועות צדדיים**. **גובה הפירמידה** הוא האנך המורד מקדקוד הפירמידה למישור בסיס הפירמידה.

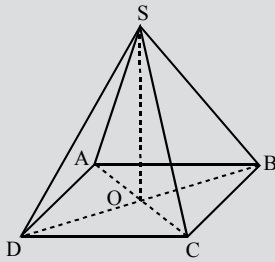


הערות:

א. אם הבסיס הוא משולש, הפירמידה נקראת פירמידה משולשת (ראו ציור). אם הבסיס הוא מרובע, הפירמידה נקראת פירמידה מרובעת וכו'.
 ב. אם הבסיס הוא מצולע משוכלל, הפירמידה נקראת פירמידה משוכללת.
שטח מעטפת של פירמידה שווה לסכום השטחים של הפאות הצדדיות.
שטח פנים של פירמידה שווה לסכום השטחים של המעטפת והבסיס.
נפח פירמידה שווה **לשליש** מכפלת שטח הבסיס בגובה הפירמידה.
 אם שטח הבסיס הוא B וגובה הפירמידה הוא h , הנפח הוא: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ נפח הפירמידה.

פירמידה ישרה

פירמידה ישרה היא פירמידה שמתקיימות בה גם התכונות הבאות:



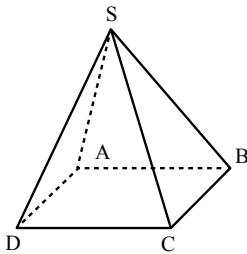
- (1) כל המקצועות הצדדיים שווים באורכם זה לזה.
- (2) גובה הפירמידה חותך את בסיס הפירמידה בנקודה שהיא מרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה. נדגיש שכאשר הבסיס של פירמידה ישרה הוא מלבן או ריבוע, גובה הפירמידה חותך את בסיס הפירמידה בנקודת מפגש האלכסונים של המלבן או הריבוע (ראו ציור משמאל).

שימו לב!

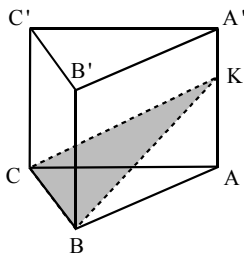
אם נתונה פירמידה ומתקיימת בה אחת מהתכונות (1) או (2), אז הפירמידה היא ישרה.

תרגילים

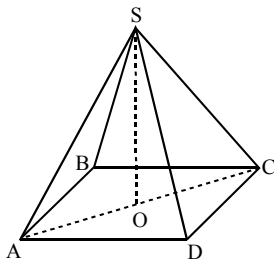
השאלות הבאות כוללות את מצבים ההדדיים הבאים: מצב הדדי בין שני ישרים שונים, מצב הדדי בין ישר ומישור, מצב הדדי בין שני מישורים שונים.



1. לפניכם פירמידה SABCD, שבסיסה מרובע ABCD.
 - א. מהו המצב ההדדי בין הישר DC למישור SBC?
 - ב. מה המצב ההדדי בין מישור SAD למישור ABCD?
 - אם המישורים נחתכים – מהו ישר החיתוך?
 - ג. מהו ישר החיתוך בין המישורים SAB ו-SBC?
 - ד. מהו המישור שמגדירים הישרים הנחתכים SC ו-SD?
 - ה. האם הישרים המקבילים AB ו-DC מגדירים מישור? אם כן – כתבו את המישור.
 - ו. רוצים להגדיר את המישור ABCD באמצעות הישר BC, ובאמצעות נקודה נוספת המסומנת בציור. כתבו את שתי האפשרויות לנקודה זו.



2. לפניכם מנסרה משולשת ABCA'B'C'. הנקודה K נמצאת על המקצוע AA'.
 - בונים את המישור KBC (צבוע באפור, ראו ציור).
 - א. מה המצב ההדדי בין המישור KBC למישור ABC?
 - אם המישורים נחתכים – מהו ישר החיתוך?
 - ב. האם ניתן לקבוע מישור באמצעות הנקודות A, B ו-B'?
 - אם כן – כתבו את המישור.
 - ג. האם ניתן לקבוע מישור באמצעות הנקודות A, K ו-A'?
 - אם כן – כתבו את המישור.



3. לפניכם פירמידה $SABCD$, שבסיסה מלבן $ABCD$. הנקודה O נמצאת על האלכסון AC של הבסיס.
- מהו המצב ההדדי בין הישר AD לישר SC ? האם קיים מישור ששני הישרים נמצאים בו?
 - האם ניתן לקבוע מישור באמצעות הנקודות S, A ו- C ? אם כן – כתבו את המישור.
 - האם ניתן לקבוע מישור באמצעות הנקודות A, O ו- C ?
 - מהו ישר החיתוך בין המישורים SAC ו- $ABCD$?
- ה. קבעו האם הטענה הבאה נכונה: המישור שמגדירים הישר AB והנקודה C הוא אותו מישור המוגדר על ידי שלוש הנקודות A, O ו- D .

תשובות:

- א. הישר חותך את המישור בנקודה C . ב. המישורים נחתכים. ישר החיתוך הוא AD . ג. SB . ד. SDC . ה. כן, את המישור $ABCD$. ו. A או D .
- א. המישורים נחתכים. ישר החיתוך הוא BC . ב. ניתן לקבוע מישור מאחר ששלוש הנקודות אינן נמצאות על אותו ישר. המישור הוא $ABB'A'$. ג. לא ניתן לקבוע מישור מאחר ששלוש הנקודות הנתונות נמצאות על אותו ישר AA' .
- א. הישרים מצטלבים, ולכן לא קיים מישור ששניהם נמצאים בו. ב. ניתן לקבוע מישור מאחר ששלוש הנקודות אינן נמצאות על אותו ישר. המישור הוא ASC . ג. לא ניתן לקבוע מישור מאחר ששלוש הנקודות הנתונות נמצאות על אותו ישר AC . ד. הישר AC . ה. הטענה נכונה. בשני המקרים המישור המוגדר הוא המישור $ABCD$.

חישוב שטח מעטפת, שטח פנים ונפח של גופים

נזכיר את המושגים שטח מעטפת, שטח פנים ונפח ואת הדרך לחשב אותם.

שטח מעטפת שווה לסכום השטחים של הפאות הצדדיות.

שטח פנים שווה לסכום השטחים של המעטפת והבסיס.

נפח תיבה שווה למכפלה של שטח בסיס התיבה בגובה התיבה.

הנוסחה לנפח תיבה ששטח בסיסה B וגובהה h היא: $V = B \cdot h$ נפח

הערה: נפח מנסרה, מקבילון וקובייה מחושב באותה צורה.

נפח פירמידה שווה לשליש מכפלת שטח בסיס הפירמידה בגובה הפירמידה.

אם שטח הבסיס הוא B וגובה הפירמידה הוא h , הנפח הוא: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ נפח הפירמידה.

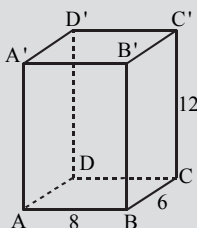
דוגמה:

בסיסה של תיבה הוא מלבן שאורכו 8 ס"מ ורוחבו 6 ס"מ.

גובה התיבה הוא 12 ס"מ.

א. חשבו את נפח התיבה.

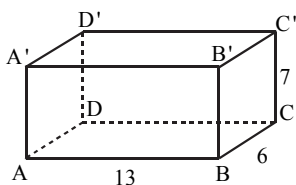
ב. חשבו את שטח הפנים של התיבה.



פתרון:

א. בסיס התיבה הוא מלבן שאורכי צלעותיו 8 ס"מ ו- 6 ס"מ, ולכן שטחו הוא $6 \times 8 = 48$, כלומר 48 סמ"ר. גובה התיבה 12 ס"מ, ולכן נפחה $48 \times 12 = 576$, כלומר 576 סמ"ק.
 ב. הפאה $BCC'B'$ היא מלבן שאורכי צלעותיו 6 ס"מ ו- 12 ס"מ, ולכן שטחו הוא 6×12 , כלומר 72 סמ"ר. הפאה $ABB'A'$ היא מלבן שאורכי צלעותיו 8 ס"מ ו- 12 ס"מ, ולכן שטחו הוא 8×12 , כלומר 96 סמ"ר. שטח פנים של תיבה הוא סכום השטחים של כל 6 פאות התיבה. מכיוון שפאות נגדיות שוות בשטחן נכפול כל שטח ב- 2.
 נקבל: $P = 2 \cdot 48 + 2 \cdot 72 + 2 \cdot 96 = 432$ שטח פנים. שטח הפנים של התיבה הוא 432 סמ"ר.

תרגילים



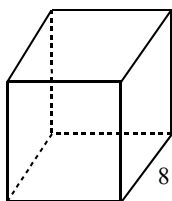
1. בסיסה של תיבה הוא מלבן ABCD.

נתון: $AB = 13$, $BC = 6$, $CC' = 7$.

א. חשבו את שטח המעטפת של התיבה.

ב. חשבו את שטח הפנים של התיבה.

ג. חשבו את נפח התיבה.

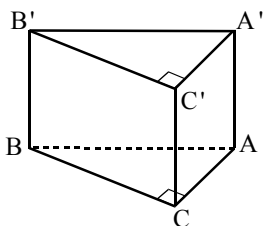


2. נתונה קובייה שאורך כל מקצוע שלה הוא 8 ס"מ.

א. חשבו את שטח המעטפת של הקובייה.

ב. חשבו את שטח הפנים של הקובייה.

ג. חשבו את נפח הקובייה.



3. הבסיס של מנסרה משולשת וישרה

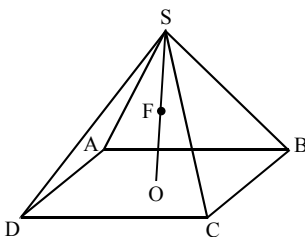
הוא משולש ישר-זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$).

נתון: $AC = 6$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $CC' = 7$ ס"מ.

א. חשבו את השטח של בסיס המנסרה.

ב. חשבו את נפח המנסרה.

ג. חשבו את שטח המעטפת ואת שטח הפנים של המנסרה.



4. נתונה פירמידה SABCD שבבסיסה ABCD

הוא ריבוע שאורך צלעו 10.

הגובה SO של הפירמידה הוא 12.

א. חשבו את נפח הפירמידה SABCD.

ב. הנקודה F היא אמצע הגובה SO.

חשבו את נפח הפירמידה FABCD.

תשובות:

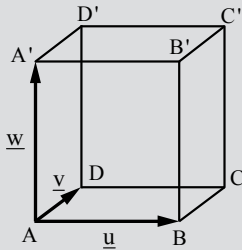
1. א. 266. ב. 422. ג. 546. 2. א. 256 סמ"ר. ב. 384 סמ"ר. ג. 512 סמ"ק.

3. א. 24 סמ"ר. ב. 168 סמ"ק. ג. 168 סמ"ר, 216 סמ"ר. 4. א. 400. ב. 200.

וקטורים – גופים במרחב

ראינו דוגמאות לווקטור גאומטרי בצורות מישוריות.
נציג דוגמאות ותרגילים לשימוש בווקטורים בגופים תלת ממדיים שהכרנו.

דוגמה:



בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נסמן:

$$\overrightarrow{AA'} = \underline{w}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AB} = \underline{u}$$

א. מצאו וקטורים נוספים השווים ל- $\underline{u}$.

ב. מצאו וקטורים השווים ל- $-\underline{w}$.

ג. האם מתקיים $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{BC}$? נמקו.

ד. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים

הבאים: (1) $\overrightarrow{AB'}$, (2) $\overrightarrow{AC'}$, (3) $\overrightarrow{D'B}$.

פתרון:

א. על פי תכונות התיבה הקטעים DC , $A'B'$ ו- $D'C'$ שווים באורכם ובכיוונם ל- AB ,

ולכן אם $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, אז $\overrightarrow{DC} = \underline{u}$, $\overrightarrow{A'B'} = \underline{u}$ ו- $\overrightarrow{D'C'} = \underline{u}$.

ב. נתון כי $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, לכן $\overrightarrow{A'A} = -\underline{w}$.

על פי תכונות התיבה הווקטור $\overrightarrow{A'A}$ שווה באורך ובכיוון לווקטורים $\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{C'C}$

ו- $\overrightarrow{D'D}$, ולכן $\overrightarrow{B'B} = -\underline{w}$, $\overrightarrow{C'C} = -\underline{w}$ ו- $\overrightarrow{D'D} = -\underline{w}$.

ג. על פי תכונות התיבה AD שווה ומקביל ל- $A'D'$, ובנוסף הוא שווה ומקביל ל- BC .

נקבל ש- $A'D'$ שווה ומקביל ל- BC , ומכאן ש- $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{BC}$.

ד. (1) כדי להביע את הווקטור $\overrightarrow{AB'}$ נצא מנקודה A לנקודה B וממנה ננוע לנקודה B' .

נקבל: $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$. נתון כי $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. כמן כן, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

נציב ונקבל: $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \underline{u} + \underline{w}$.

נזכיר שאפשר גם לבחור מסלול אחר. לדוגמה: $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} = \underline{w} + \underline{u}$.

הערה: AB' הוא אחד מאלכסוני הפאה $ABB'A'$.

(2) כדי להביע את הווקטור $\overrightarrow{AC'}$ נצא מנקודה A לנקודה D ,

מנקודה D ננוע לנקודה C וממנה לנקודה C' .

נקבל: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC'}$.

ידוע $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$. כמו כן, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

נציב ונקבל: $\overrightarrow{AC'} = \underline{v} + \underline{u} + \underline{w}$.

אפשר גם לבחור במסלול אחר. לדוגמה: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \underline{u} + \underline{w} + \underline{v}$.

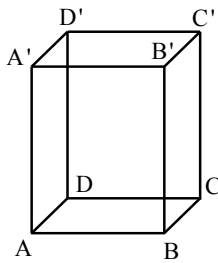
הערה: AC' הוא אחד מאלכסוני התיבה.

(3) נביע את הווקטור $\overrightarrow{D'B}$ על פי המסלול הבא: $\overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\underline{w} - \underline{v} + \underline{u}$.

אפשר גם לבחור מסלול אחר. לדוגמה: $\overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'B} = \underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$.

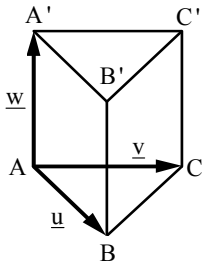
הערה: גם $D'B$ הוא אחד מאלכסוני התיבה.

תרגילים



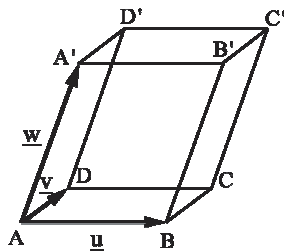
1. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

- קבעו האם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{A'B'}$ הם וקטורים שווים או וקטורים נגדיים.
- קבעו האם הווקטורים $\overrightarrow{DD'}$ ו- $\overrightarrow{C'C}$ הם וקטורים שווים או וקטורים נגדיים.
- מה אפשר לומר על הווקטורים $\overrightarrow{B'C'}$ ו- $\overrightarrow{DA}$?
- קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה:
 - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (1)
 - $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ (2)



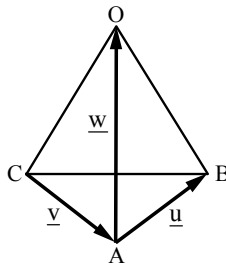
2. במנסרה משולשת $ABCA'B'C'$ וישרה $ABCA'B'C'$

- נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
- מצאו וקטורים השווים לווקטורים הבאים:
 - $\underline{u}$ (1)
 - $\underline{v}$ (2)
 - $-\underline{w}$ (3)
 - האם $\overrightarrow{AB'}$ ו- $\overrightarrow{A'B}$ שווי אורך?
 - האם $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'B}$? נמקו.



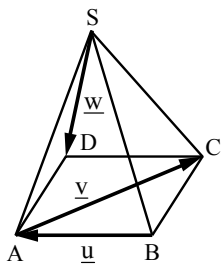
3. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

- מצאו וקטורים השווים לווקטורים הבאים:
 - $\underline{u}$ (1)
 - $\underline{w}$ (2)
 - $-\underline{v}$ (3)
- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים הבאים:
 - $\overrightarrow{AB'}$ (1)
 - $\overrightarrow{B'C}$ (2)
 - $\overrightarrow{AC'}$ (3)
 - $\overrightarrow{D'B}$ (4)
- האם תשובותיכם לסעיפים קודמים היו משתנות, אם היה נתון שהגוף הוא תיבה במקום מקבילון?



4. נתונה פירמידה משולשת ABCO.

- נסמן: $\overrightarrow{AO} = \underline{w}$, $\overrightarrow{CA} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
- הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ את $\overrightarrow{OB}$.
 - הביעו באמצעות $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את $\overrightarrow{OC}$.
 - רשמו בעזרת קדקודי הפירמידה וקטור השווה ל- $-\underline{u} + \underline{v}$.



5. בפירמידה מרובעת ABCDS, שבסיסה מקבילית ABCD,

נתון: $\vec{BA} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{SD} = \underline{w}$.

א. הביעו את $\vec{SB}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. רשמו בעזרת קדקודי הפירמידה

וקטור השווה לווקטור $\underline{w} - \underline{u} - \underline{v}$.

ג. מה המצב ההדדי בין הישרים BC ו- SA.

תשובות:

1. א. וקטורים שווים. ב. וקטורים נגדיים. ג. וקטורים נגדיים. ד. (1) לא. (2) כן.

2. א. (1) $\vec{A'B'} = \vec{AB} = \underline{u}$ (2) $\vec{A'C'} = \vec{AC} = \underline{v}$ (3) $\vec{A'A} = \vec{B'B} = \vec{C'C} = -\underline{w}$. ב. (1) כן. (2) לא.

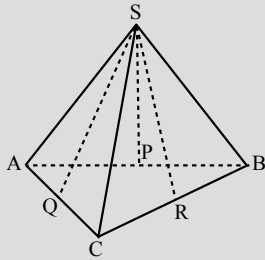
3. א. (1) $\vec{DC} = \vec{A'B'} = \vec{D'C'} = \underline{u}$ (2) $\vec{BB'} = \vec{CC'} = \vec{DD'} = \underline{w}$ (3) $\vec{DA} = \vec{CB} = \vec{D'A'} = \vec{C'B'} = -\underline{v}$.

ב. (1) $\vec{AB'} = \underline{u} + \underline{w}$ (2) $\vec{B'C} = \underline{v} - \underline{w}$ (3) $\vec{AC'} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ (4) $\vec{D'B} = \underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$. ג. לא.

4. א. $\vec{OB} = \underline{u} - \underline{w}$. ב. $\vec{OC} = -\underline{v} - \underline{w}$. ג. $\vec{BC}$.

5. א. $\vec{SB} = -2\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}$. ב. $\vec{SA}$. ג. הישרים מצטלבים.

גופים במרחב – כפל של וקטור בסקלר



דוגמה:

נתונה פירמידה משולשת SABC, שבסיסה משולש ABC.

הנקודה Q ו-R נמצאות בהתאמה באמצעי

מקצועות הבסיס AC ו-BC. הנקודה P נמצאת

על המקצוע AB ומקיימת: $AP:PB = 5:4$.

נתון: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ (במידת הצורך)

את הווקטורים הבאים: $\vec{SP}$, $\vec{SR}$, $\vec{SQ}$, $\vec{SB}$.

ב. הוכיחו: $\vec{QR} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

ג. האם $\vec{QR}$ ו- $\vec{AP}$ הם וקטורים קולינאריים? נמקו.

פתרון:

א. נביע את הווקטור $\vec{SB}$: $\vec{SB} = \vec{SA} + \vec{AB} = -\underline{w} + \underline{u}$

נביע את הווקטור $\vec{SQ}$: $\vec{SQ} = \vec{SA} + \vec{AQ} = \vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = -\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}$

נביע את הווקטור $\vec{SR}$: $\vec{SR} = \vec{SA} + \vec{AR} = \vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$

נקבל: $\vec{SR} = -\underline{w} + \underline{v} + \frac{1}{2}(-\underline{v} + \underline{u}) = -\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$

הערה: הווקטור $\vec{SR}$ הוא וקטור התיכון מקדוד S במשולש SBC,

ולכן אפשר למצוא אותו גם על פי הכלל של וקטור התיכון של משולש:

$$\vec{SR} = \frac{1}{2}\vec{SB} + \frac{1}{2}\vec{SC} = \frac{1}{2}(-\underline{w} + \underline{u}) + \frac{1}{2}(-\underline{w} + \underline{v}) = -\frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{w} - \frac{1}{2}\underline{v} = -\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$$

נעבור להביע את הווקטור $\vec{SP}$: $\vec{SP} = \vec{SA} + \vec{AP}$

נתון $AP:PB = 5:4$, ולכן $\vec{AP} = \frac{5}{9}\vec{AB} = \frac{5}{9}\underline{u}$. נקבל: $\vec{SP} = -\underline{w} + \frac{5}{9}\underline{u}$

ב. דרך א': נביע את שני הווקטורים.

נביע את $\vec{QR}$: $\vec{QR} = \vec{QC} + \vec{CR} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}(-\underline{v} + \underline{u}) = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u} = \frac{1}{2}\underline{u}$

קיבלנו $QR = \frac{1}{2}\underline{u}$. נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, ולכן $\vec{QR} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

דרך ב': QR הוא קטע אמצעים במשולש ABC, כלומר מקביל לצלע AB ושווה למחצית

אורכה. נקבל שהווקטור $\vec{QR}$ הוא בכיוון של הווקטור $\vec{AB}$ ושווה למחצית אורכו,

ומכאן שמתקיים $\vec{QR} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

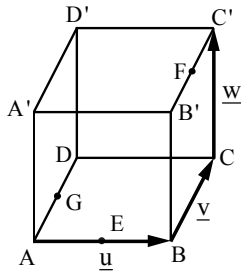
ג. וקטורים קולינאריים הם וקטורים הנמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

ראינו כי $QR \parallel AB$ ולכן $QR \parallel AP$, ומכאן ש- $\vec{QR}$ ו- $\vec{AP}$ הם וקטורים קולינאריים.

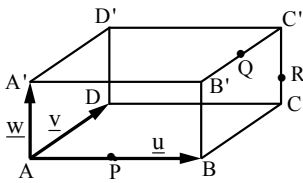
דרך נוספת: קיבלנו $\vec{QR} = \frac{1}{2}\underline{u}$ ו- $\vec{AP} = \frac{5}{9}\underline{u}$. הווקטורים הם כפל בסקלר אחד של השני,

ולכן הם קולינאריים. אפשר לחשב את היחס בין המקדמים של $\underline{u}$ בשני הווקטורים.

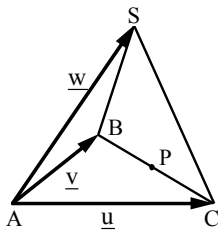
נקבל: $\frac{1}{2} : \frac{5}{9} = \frac{9}{10}$, ומכאן ש- $\vec{QR} = \frac{9}{10}\vec{AP}$. ניתן לראות שהווקטורים קולינאריים.



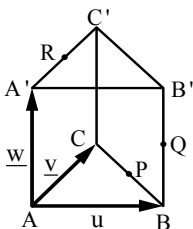
6. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{CC'} = \underline{w}$. הנקודות E ו-G הן נקודות האמצע של מקצועות הקובייה, AB ו-AD (ראו ציור). הנקודה F נמצאת על המקצוע $B'C'$, כך ש- $\vec{B'F} = \frac{3}{7} \cdot \vec{B'C'}$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\vec{AE}$ ו- $\vec{BE}$.
 ב. הביעו באמצעות $\underline{v}$ את הווקטור $\vec{GD}$.
 ג. הביעו באמצעות $\underline{v}$ את הווקטורים $\vec{B'F}$ ו- $\vec{FC'}$.
 ד. הביעו באמצעות $\underline{w}$ את הווקטור $\vec{D'D}$.



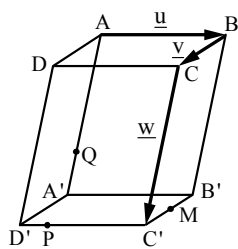
7. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$. הנקודות P ו-Q הן אמצעי המקצועות AB ו- $B'C'$, בהתאמה. הנקודה R נמצאת על המקצוע CC' , כך ש- $CR:RC' = 1:2$.
 א. האם $\vec{AP}$ ו- $\vec{DC}$ הם וקטורים קולינאריים?
 ב. האם $\vec{B'Q}$ ו- $\vec{QC'}$ הם וקטורים קולינאריים?
 האם הם וקטורים שווים?
 ג. האם $\vec{AD}$ ו- $\vec{CB}$ הם וקטורים קולינאריים?
 האם הם וקטורים שווים?
 ד. תנו דוגמה למספר וקטורים קולינאריים ל- $\vec{AD}$, אך אינם שווים לו ואינם נגדיים לו.
 ה. (1) האם $\vec{AA'}$ ו- $\vec{CR}$ הם וקטורים קולינאריים?
 (2) הביעו את הווקטורים $\vec{CR}$ ו- $\vec{C'R}$ באמצעות $\underline{w}$.



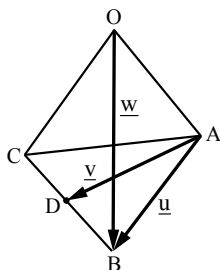
8. בפיрамиדה משולשת ABCS שבסיסה משולש ABC, נתון: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AC} = \underline{u}$. הנקודה P היא אמצע המקצוע BC. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ (במידת הצורך):
 א. את הווקטורים $\vec{SB}$ ו- $\vec{SC}$.
 ב. את הווקטורים $\vec{AP}$ ו- $\vec{SP}$.



9. במנסרה משולשת $ABCA'B'C'$ נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$. הנקודות Q ו-R הן נקודות האמצע של המקצועות BB' ו- $A'C'$, בהתאמה. הנקודה P נמצאת על BC ומקיימת $\vec{BP} = \frac{2}{3} \vec{BC}$.
 א. האם $\vec{BP}$ ו- $\vec{B'C'}$ הם וקטורים קולינאריים?
 ב. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים הבאים: $\vec{BA'}$, $\vec{BC'}$, $\vec{RQ}$, $\vec{BP}$ ו- $\vec{A'P}$.



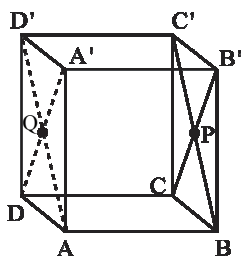
10. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{CC'} = \underline{w}$. נתון: $\vec{B'M} = \frac{1}{2} \vec{B'C'}$, $\vec{PC'} = \frac{4}{5} \vec{D'C'}$. הנקודה Q נמצאת על המקצוע AA' ומקיימת $AQ:QA' = 3:1$. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ (במידת הצורך) את הווקטורים הבאים: $\vec{AM}$, $\vec{D'P}$, $\vec{BP}$, $\vec{A'Q}$, $\vec{C'Q}$, $\vec{MQ}$ ו- $\vec{QP}$.



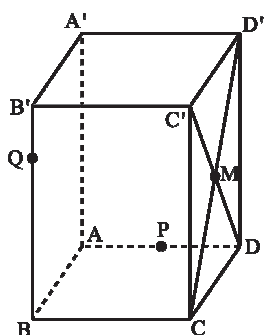
11. בפירמידה משולשת ABCO נתון:

$$\vec{OB} = \underline{w}, \vec{AD} = \underline{v}, \vec{AB} = \underline{u}.$$

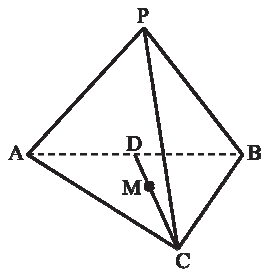
AD הוא תיכון לצלע BC.
הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים $\vec{BD}$ ו- $\vec{OC}$.



12. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. P היא נקודת המפגש של אלכסוני הפאה $BB'C'C$.
א. הביעו את $\vec{AP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
ב. הנקודה Q היא נקודת המפגש של אלכסוני הפאה $ADD'A'$.
(1) הביעו את $\vec{AQ}$ ואת $\vec{PC'}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
(2) הוכיחו: המרובע $APC'Q$ הוא מקבילית.



13. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. הנקודה P היא אמצע המקצוע AD, הנקודה M היא נקודת המפגש של אלכסוני הפאה $CDD'C'$, והנקודה Q נמצאת על המקצוע BB' כך ש- $\vec{BQ} = 3\vec{QB'}$.
א. האם $\vec{BQ}$ ו- $\vec{B'Q}$ הם וקטורים קולינאריים?
ב. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים הבאים: (1) $\vec{MP}$, (2) $\vec{PQ}$, (3) $\vec{QM}$.



14. נתונה פירמידה משולשת PABC שבסיסה ABC.

CD הוא תיכון במשולש ABC,

הנקודה M היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC.

נסמן: $\vec{PA} = \underline{u}$, $\vec{PB} = \underline{v}$, $\vec{PC} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ (במידת הצורך) את $\vec{CB}$ ו- $\vec{CA}$.

ב. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ (במידת הצורך) את $\vec{CM}$ ו- $\vec{PM}$.

תשובות:

6. א. $\vec{AE} = \frac{1}{2}\underline{u}$, $\vec{BE} = -\frac{1}{2}\underline{u}$. ב. $\vec{GD} = \frac{1}{2}\underline{u}$. ג. $\vec{BF} = \frac{3}{7}\underline{v}$, $\vec{FC} = \frac{4}{7}\underline{v}$. ד. $\vec{D'D} = -\underline{w}$.

7. א. $\vec{AP}$ ו- $\vec{DC}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על ישרים מקבילים).

ב. $\vec{B'Q}$ ו- $\vec{QC'}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על אותו ישר) והם גם וקטורים שווים.

ג. $\vec{AD}$ ו- $\vec{CB}$ הם וקטורים קולינאריים (הם נמצאים על ישרים מקבילים), אך אינם וקטורים שווים.

ד. $\vec{B'Q}$, $\vec{QC'}$, $\vec{QB'}$, $\vec{C'Q}$.

ה. (1) $\vec{CR}$ ו- $\vec{AA'}$ הם וקטורים קולינאריים (נמצאים על ישרים מקבילים). (2) $\vec{CR} = \frac{1}{3}\underline{w}$, $\vec{C'R} = -\frac{2}{3}\underline{w}$.

8. א. $\vec{SB} = \underline{v} - \underline{w}$, $\vec{SC} = \underline{u} - \underline{w}$. ב. $\vec{AP} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{SP} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$.

9. א. כן. הם נמצאים על ישרים מקבילים.

ב. $\vec{BA'} = -\underline{u} + \underline{w}$, $\vec{BC'} = \underline{w} + \underline{v} - \underline{u}$, $\vec{RQ} = \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w}$, $\vec{BP} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$, $\vec{A'P} = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v} - \underline{w}$.

10. $\vec{AM} = \underline{u} + \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{D'P} = \frac{1}{5}\underline{u}$, $\vec{BP} = \underline{w} + \underline{v} - \frac{4}{5}\underline{u}$, $\vec{A'Q} = -\frac{1}{4}\underline{w}$, $\vec{C'Q} = -\underline{u} - \underline{v} - \frac{1}{4}\underline{w}$.

$\vec{MQ} = -\frac{1}{2}\underline{v} - \underline{u} - \frac{1}{4}\underline{w}$, $\vec{QP} = \frac{1}{4}\underline{w} + \underline{v} + \frac{1}{5}\underline{u}$.

11. $\vec{BD} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\vec{OC} = 2\underline{v} - 2\underline{u} + \underline{w}$.

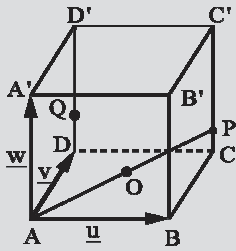
12. א. $\vec{AP} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$. ב. (1) $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\vec{PC'} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$.

13. א. כן. ב. (1) $\vec{MP} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w}$. (2) $\vec{PQ} = \underline{u} + \frac{3}{4}\underline{w} - \frac{1}{2}\underline{v}$. (3) $\vec{QM} = \underline{v} - \frac{1}{4}\underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u}$.

14. א. $\vec{CB} = -\underline{w} + \underline{v}$, $\vec{CA} = -\underline{w} + \underline{u}$. ב. $\vec{CM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$, $\vec{PM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.

דוגמה:

בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{BO}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. הנקודה Q נמצאת על המקצוע DD', ומקיימת $DQ:QD' = 1:4$.

הביעו את $\overrightarrow{BQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ג. הוכיחו שהנקודה O נמצאת על הישר BQ.

ד. באיזה יחס מחלקת הנקודה O את הקטע BQ?

פתרון:

א. נביע את הווקטור $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CC'} = \underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{5}\underline{w}$

נביע את הווקטור $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = -\underline{u} + \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{5}\underline{w})$

$$\overrightarrow{BO} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{10}\underline{w} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{10}\underline{w}$$

ב. הנקודה Q מקיימת $DQ:QD' = 1:4$, ולכן $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{5}\underline{w}$

נביע את הווקטור $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = -\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{5}\underline{w}$

ג. כדי להוכיח שהנקודה O נמצאת על הישר BQ, נראה שהווקטורים $\overrightarrow{BO}$ ו- $\overrightarrow{BQ}$

נמצאים על אותו ישר. מאחר ש- $\overrightarrow{BO}$ ו- $\overrightarrow{BQ}$ עוברים דרך אותה נקודה B,

הרי שאם נראה שהם כפל בסקלר אחד של השני (ווקטורים קולינאריים),

נדע שהם נמצאים על אותו ישר.

בסעיפים קודמים קיבלנו $\overrightarrow{BQ} = -\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{5}\underline{w}$, $\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{10}\underline{w}$

דרך א': נמצא t, שעבורו $\overrightarrow{BO} = t \cdot \overrightarrow{BQ}$, כלומר $-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{10}\underline{w} = t \cdot (-\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{5}\underline{w})$

ניתן לראות שעבור $t = \frac{1}{2}$ שני האגפים שווים, כלומר $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BQ}$

דרך ב': נבדוק האם היחס בין המקדמים של $\underline{u}$ בשני הווקטורים

שווה ליחס בין המקדמים של $\underline{v}$ בשני הווקטורים, ושווה ליחס בין המקדמים

של $\underline{w}$ בשני הווקטורים.

היחס בין המקדמים של $\underline{u}$ הוא $\frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$. היחס בין המקדמים של $\underline{v}$ הוא $\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

היחס בין המקדמים של $\underline{w}$ הוא $\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$. היחס שווה בשלושתם ל- $\frac{1}{2}$,

כלומר הווקטורים קולינאריים ומתקיים $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BQ}$.

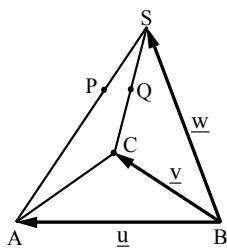
דרך ג': נוציא גורם משותף: $\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{10}\underline{w} = \frac{1}{2} \cdot (-\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{5}\underline{w}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BQ}$

הראינו ש- $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BQ}$. מאחר ש- $\overrightarrow{BO}$ ו- $\overrightarrow{BQ}$ עוברים דרך אותה נקודה B,

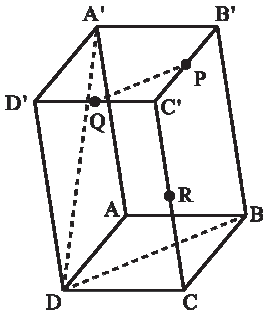
הרי שהם נמצאים על אותו ישר, ומכאן שהנקודה O נמצאת על הישר BQ.

ד. קיבלנו $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BQ}$, כלומר $BO = \frac{1}{2} \cdot BQ$, ומכאן שנקודה O היא אמצע הקטע BQ.

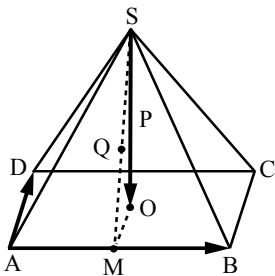
(יחס הקטעים הוא $\frac{BO}{BQ} = \frac{1}{2}$. נקבל ש- $\frac{BO}{OQ} = \frac{1}{1}$, ומכאן ש-O היא אמצע הקטע BQ.)



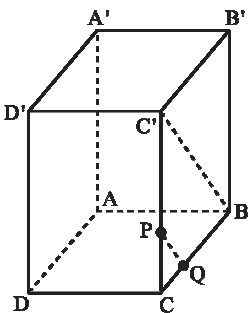
15. בפירמידה משולשת SABC נתון: $\overrightarrow{BA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SA}$. הנקודה Q נמצאת על המקצוע SC ומקימת $SQ:QC=1:3$.
 א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 ב. (1) הראו ש- $\overrightarrow{PQ}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ הם וקטורים קולינאריים.
 (2) הוכיחו: $PQ \parallel AC$.
 ג. פי כמה גדול AC מ- PQ?



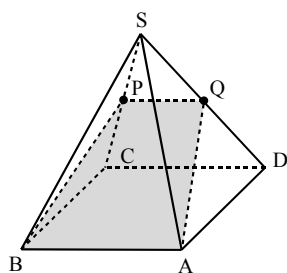
16. במקבילון ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודה P היא אמצע המקצוע B'C', הנקודה Q היא אמצע המקצוע D'C' והנקודה R היא אמצע המקצוע CC'.
 א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{RA'}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{PQ}$ ו- $\overrightarrow{BD}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ג. הוכיחו ש- $PQ \parallel BD$, וקבעו את סוג המרובע PQDB.
 ד. הוכיחו: $PR \parallel A'D$.



17. בפירמידה SABCD, הבסיס ABCD הוא מקבילית. O היא נקודת המפגש של אלכסוני המקבילית. M היא נקודת האמצע של AB, P היא נקודת האמצע של SM, ו-Q היא נקודת האמצע של SO.
 נסמן: $\overrightarrow{SO} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SM}$ ו- $\overrightarrow{OQ}$ על ידי $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. (1) הראו כי $\overrightarrow{PQ}$ ו- $\overrightarrow{CB}$ הם וקטורים קולינאריים.
 (2) הסבירו מדוע PQ מקביל ל- CB.



18. בתיבה ABCDA'B'C'D' נסמן: $\overrightarrow{AC'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. הנקודות P ו- Q מקיימות $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC'}$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים הבאים: $\overrightarrow{A'Q}$, $\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{BC'}$ ו- $\overrightarrow{QP}$.
 ב. (1) הראו ש- $\overrightarrow{QP}$ ו- $\overrightarrow{BC'}$ הם וקטורים קולינאריים.
 (2) הוכיחו כי $QP \parallel BC'$.
 (3) פי כמה גדול BC' מ- QP?



19. נתונה פירמידה שבסיסה מקבילית ABCD וקדקודה S.

נסמן: $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הנקודה P היא אמצע המקצוע SC,

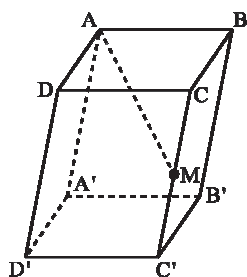
והנקודה Q היא אמצע המקצוע SD.

א. הביעו באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$

את הווקטורים הבאים: $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AQ}$.

ב. (1) הסבירו מדוע $PQ \parallel AB$.

(2) איזה סוג מרובע הוא ABPQ? נמקו.



20. במקבילון ABCD A'B'C'D', נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$.

הנקודה M היא אמצע המקצוע $\overline{CC'}$.

הנקודה P מקיימת $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

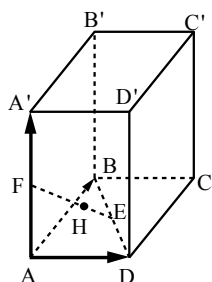
א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ואת $\overrightarrow{AM}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$.

ב. (1) הראו שהווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ואת $\overrightarrow{AM}$

הם כפל בסקלר אחד של השני.

(2) הסבירו מדוע הנקודה P נמצאת על AM.

(3) באיזה יחס הנקודה P מחלקת את הקטע AM?



21. בתיבה ABCD A'B'C'D' הנקודות E ו-F

הן אמצעי הקטעים BD ו-AA' בהתאמה.

נקודה H היא אמצע הקטע EF (ראה ציור).

נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$.

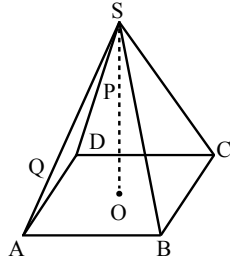
א. הביעו את $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{EF}$ ו- $\overrightarrow{AH}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$.

ב. (1) הראו ש- $\overrightarrow{AC'}$ ו- $\overrightarrow{AH}$ הם וקטורים קולינאריים.

(2) הוכיחו שהנקודה H נמצאת על AC'.

ג. באיזה יחס מחלקת הנקודה H את הקטע AC'?

22. בפירמידה מרובעת SABCD, שבסיסה מקבילית ABCD, נתון: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. הנקודה O נמצאת במפגש אלכסונו המקבילית ABCD. הביעו את הגובה $\vec{SO}$ לבסיס הפירמידה באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.



- ב. הנקודה P נמצאת על הגובה SO, כך ש- $\vec{SP} = \frac{1}{3}\vec{SO}$.
 הנקודה Q נמצאת על המקצוע AS, כך ש- $\vec{AQ} = \frac{1}{4}\vec{AS}$.

- הביעו את $\vec{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ג. הנקודה R מקיימת $\vec{SR} = \frac{3}{14}\vec{SC}$.

- (1) הביעו את $\vec{QR}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 (2) הוכיחו שהנקודה P נמצאת על הקטע QR.

15. א. $\vec{AC} = \underline{v} - \underline{u}$, $\vec{PQ} = \frac{1}{4}\underline{v} - \frac{1}{4}\underline{u}$. ג. פי 4.

16. א. $\vec{AP} = \underline{u} + \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{RA}' = \frac{1}{2}\underline{w} - \underline{v} - \underline{u}$. ב. $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u}$, $\vec{BD} = \underline{v} - \underline{u}$. ג. טרפז.

17. א. $\vec{SC} = \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{SB} = \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{SM} = \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{v}$, $\vec{OQ} = -\frac{1}{4}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w}$.

18. א. $\vec{BC}' = \underline{w} - \underline{u}$, $\vec{A'A} = 2\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\vec{A'Q} = 3\frac{2}{3}\underline{u} + 1\frac{2}{3}\underline{v} - \underline{w}$, $\vec{QP} = \frac{1}{3}\underline{w} - \frac{1}{3}\underline{u}$. ב. (3) פי 3.

19. א. $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\vec{BP} = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\vec{PQ} = -\frac{1}{2}\underline{u}$. ב. (2) טרפז.

20. א. $\vec{AP} = \frac{2}{5}\underline{v} + \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{1}{5}\underline{w}$, $\vec{AM} = \underline{v} + \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}$. ב. (1) $\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AM}$. (3) AP:PM = 2:3.

21. א. $\vec{AC}' = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $\vec{EF} = -\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\vec{AH} = \frac{1}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w}$. ב. (1) $\vec{AH} = \frac{1}{4}\vec{AC}'$. ג. AH:HC' = 1:3.

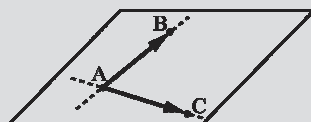
22. א. $\vec{SO} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$. ב. $\vec{PQ} = -\frac{5}{12}\underline{w} - \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{1}{6}\underline{v}$. ג. (1) $\vec{QR} = \frac{15}{28}\underline{w} + \frac{3}{14}\underline{u} + \frac{3}{14}\underline{v}$.

צירוף לינארי של שני וקטורים

נכיר עכשיו את המושג **צירוף לינארי** (או קומבינציה לינארית) של שני וקטורים, ונלמד לקבוע האם יש נמצא במישור או מקביל למישור.

מבוא

נתונים שני וקטורים $\vec{AB} = \underline{u}$ ו- $\vec{AC} = \underline{v}$ בעלי מוצא משותף A. הווקטורים אינם על ישר אחד (כלומר $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ אינם קולינאריים).



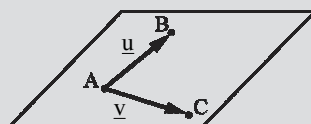
הווקטור $\vec{AB}$ נמצא על הישר AB והווקטור $\vec{AC}$ נמצא על הישר AC.

הישרים AB ו- AC נחתכים בנקודה A.

על פי משפט שלמדנו, שני ישרים נחתכים קובעים מישור יחיד, ולכן הווקטורים $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$ קובעים מישור יחיד.

נסכם:

כאשר שני וקטורים $\vec{AB} = \underline{u}$ ו- $\vec{AC} = \underline{v}$ הם בעלי מוצא משותף ואינם על ישר אחד (אינם קולינאריים) – הם קובעים מישור.



נדגים זאת. נתבונן בתיבה ABCDA'B'C'D'. נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$. הווקטורים $\vec{AB} = \underline{u}$ ו- $\vec{AD} = \underline{v}$ הם בעלי מוצא משותף A,

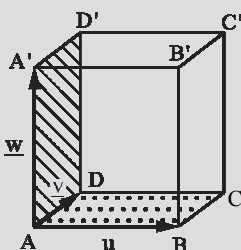
ואינם קולינאריים, ולכן הם קובעים את מישור הבסיס ABCD.

מישור הבסיס ABCD נקבע באמצעות הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. מישור זה הוא אינסופי והבסיס ABCD מונח על חלקו.

לרוב נקרא למישור זה בקיצור "מישור ABCD". באופן דומה:

מישור הפאה ABB'A' נקבע על ידי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$.

מישור הפאה ADD'A' נקבע על ידי הווקטורים $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.



צירוף לינארי של שני וקטורים

נכיר עכשיו את המושג **צירוף לינארי** (או קומבינציה לינארית) של שני וקטורים.

כאשר נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ ושני מספרים (סקלרים) t ו- s, הווקטור $t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$ נקרא **צירוף לינארי** של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

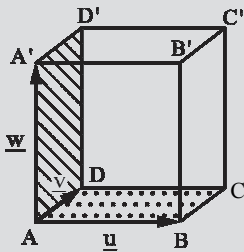
הערה: כאשר t=0, הווקטור $t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$ שווה ל- $s \cdot \underline{v}$, וכאשר s=0, הוא שווה ל- $t \cdot \underline{u}$. גם וקטורים אלה הם צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

על פי הגדרה זו, כל אחד מהווקטורים הבאים הוא צירוף לינארי של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

$$-\frac{5}{6}\underline{u}, 2\underline{v}, \frac{1}{5}\underline{v} - \frac{1}{4}\underline{u}, -\frac{2}{3}\underline{v} + \underline{u}, -4\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}, 2\underline{u} + 3\underline{v}$$

נרשום משפט לגבי צירוף לינארי.

משפט: כל וקטור במישור ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של שני וקטורים לא קולינאריים במישור, וכל צירוף כזה נמצא במישור שנקבע על ידי שני וקטורים לא קולינאריים, או במישור המקביל אליו.



המשפט מורכב משני חלקים. נדגים את החלק הראשון

של המשפט באמצעות התיבה $ABCD A'B'C'D'$.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שני וקטורים לא קולינאריים

במישור הבסיס $ABCD$, ולכן כל וקטור במישור זה

ניתן להצגה יחידה באמצעות צירוף לינארי של

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. במילים אחרות, הווקטורים

הנמצאים על המישור $ABCD$ כוללים שילוב של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$

(לדוגמה: $(\underline{u} + 2\underline{v})$ או כוללים $\underline{u}$ בלבד (לדוגמה: $4\underline{v}$).

באופן דומה, כל וקטור במישור $ABB'A'$ ניתן להצגה יחידה באמצעות צירוף לינארי

של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$, וכל וקטור במישור $ADD'A'$ ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי

של הווקטורים $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

נדגים את החלק השני של המשפט באמצעות התיבה $ABCD A'B'C'D'$.

על פי החלק השני של המשפט, אם נתון וקטור שהוא צירוף לינארי של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$,

אז הוא נמצא במישור שנקבע על ידי $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, או על מישור מקביל לו.

לדוגמה: הווקטור $\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, ולכן נמצא על מישור הבסיס

$ABCD$, או על מישור מקביל לו (הוא לא יכול להימצא על אף מישור אחר).

הערה: יש אינסוף מישורים שמקבילים למישור הבסיס $ABCD$.

אחד מהם הוא מישור הבסיס $A'B'C'D'$.

באופן דומה, הווקטור $\frac{1}{2}\underline{u} + \underline{w}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$,

ולכן נמצא על מישור הפאה הצדדית $ABB'A'$, או על מישור מקביל לו.

לדוגמה: מישור הפאה הנגדית לה, שהיא הפאה $DCC'D'$.

כמו כן, הווקטור $\underline{v} - 3\underline{w}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$, ולכן נמצא על מישור הפאה

הצדדית $ADD'A'$, או על מישור מקביל לו (לדוגמה מישור הפאה הנגדית לה, $BCC'B'$).

הערות:

(1) כאשר וקטור כולל $\underline{u}$ בלבד (כמו $2\underline{u}$) הוא נמצא על כל מישור שאחד משני הווקטורים

הקובעים אותו הוא וקטור $\underline{u}$, או על מישור מקביל לו.

לדוגמה: הווקטור $2\underline{u}$ נמצא על המישור $ABCD$ הנקבע על ידי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$,

או על מישור מקביל לו. בנוסף, הוא נמצא על המישור $ABB'A'$ הנקבע על ידי

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$, או על מישור מקביל לו.

(2) כאשר וקטור אינו מהווה צירוף לינארי של שני וקטורים לא קולינאריים במישור

הוא לא נמצא במישור ולא נמצא על מישור מקביל לו. לדוגמה: הווקטור $\underline{u} + 2\underline{v} - \underline{w}$

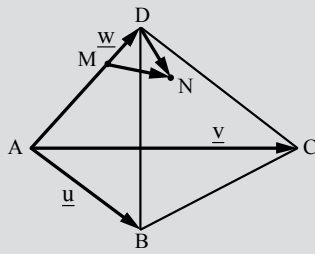
אינו צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ ולכן לא נמצא במישור $ABCD$ ולא במישור מקביל לו.

באופן דומה, הוא לא נמצא במישור $DCC'D'$ ולא על מישור מקביל לו, והוא לא נמצא

במישור $BCC'B'$ ולא על מישור מקביל לו. הוא נמצא על ישר החותך מישורים אלה.

דוגמה:

בפירמידה משולשת ABCD הנקודה N מקיימת $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{DC}$.



א. (1) הסבירו מדוע $\overrightarrow{DN}$ נמצא על מישור הפאה DBC.

(2) הסבירו מדוע נקודה N נמצאת על מישור הפאה DBC.

ב. הנקודה M מקיימת $\overrightarrow{DM} = \frac{7}{24}\overrightarrow{DA}$.

נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

(1) הביעו את $\overrightarrow{MN}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

(2) הוכיחו ש- $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABC.

(3) האם $\overrightarrow{MN}$ מקביל ל- $\overrightarrow{AB}$.

פתרון:

א. (1) הווקטורים $\overrightarrow{DB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$ אינם קולינאריים וקובעים את המישור DBC.

הווקטור $\overrightarrow{DN}$ מקיים $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{DC}$, כלומר הוא צירוף לינארי של $\overrightarrow{DB}$ ו- $\overrightarrow{DC}$,

ולכן ניתן להסיק ש- $\overrightarrow{DN}$ נמצא במישור DBC או על מישור מקביל לו.

מאחר ש- $\overrightarrow{DN}$ עובר דרך נקודה D הנמצאת על המישור DBC,

הרי $\overrightarrow{DN}$ נמצא על המישור DBC.

(2) הווקטור $\overrightarrow{DN}$ נמצא על המישור DBC, ולכן הנקודה N נמצאת על המישור DBC.

הערה: קיבלנו שהנקודות D, C, B, ו-N נמצאות כולן על מישור אחד.

ב. (1) נביע את הווקטור $\overrightarrow{MN}$ באופן הבא: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN}$

נתון $\overrightarrow{DM} = \frac{7}{24}\overrightarrow{DA} = \frac{7}{24}(-\underline{w})$, כלומר $\overrightarrow{DM} = -\frac{7}{24}\underline{w}$, ולכן $\overrightarrow{MD} = \frac{7}{24}\underline{w}$.

נביע את $\overrightarrow{DB}$: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\underline{w} + \underline{u}$

נביע את $\overrightarrow{DC}$: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\underline{w} + \underline{v}$

נביע את $\overrightarrow{DN}$: $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{6}(-\underline{w} + \underline{u}) + \frac{1}{8}(-\underline{w} + \underline{v}) =$

$\overrightarrow{DN} = -\frac{1}{6}\underline{w} + \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{1}{8}\underline{w} + \frac{1}{8}\underline{v} = \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{8}\underline{v} - \frac{7}{24}\underline{w}$

נביע את $\overrightarrow{MN}$: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{7}{24}\underline{w} + \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{8}\underline{v} - \frac{7}{24}\underline{w} = \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{8}\underline{v}$

(2) המישור ABC נקבע על ידי הווקטורים $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ו- $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

הווקטור $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{8}\underline{v}$ מקיים, כלומר הוא צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$,

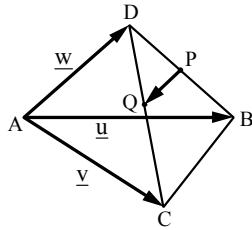
ולכן הוא נמצא על המישור ABC או על מישור מקביל לו.

הנקודה M אינה נמצאת על המישור ABC, לכן $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABC.

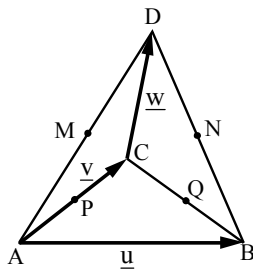
(3) נתון כי $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$. קיבלנו $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{8}\underline{v}$. שני הווקטורים אינם כפל בסקלר אחד

של השני (אינם קולינאריים), ולכן אינם יכולים להימצא על ישרים מקבילים.

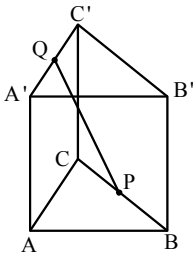
תרגילים



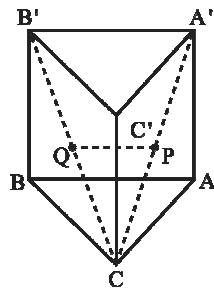
1. בפירמידה משולשת ABCD נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה P היא אמצע המקצוע DB, הנקודה Q היא אמצע המקצוע DC.
 א. הראו כי $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u}$.
 ב. הסבירו מדוע הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.
 ג. האם $\overrightarrow{PQ}$ מקביל ל- $\overrightarrow{BC}$? נמקו.



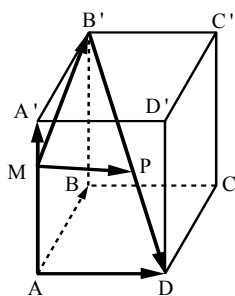
2. בפירמידה משולשת ABCD, שבסיסה ABC נתון: $\overrightarrow{CD} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 P - אמצע מקצוע הבסיס AC, Q - אמצע מקצוע הבסיס BC, M - אמצע המקצוע הצדדי AD, N - אמצע המקצוע הצדדי BD.
 א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{QN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ (במידת הצורך).
 ב. (1) הראו ש- $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABC.
 (2) הראו ש- $\overrightarrow{QN}$ מקביל למישור ACD.
 ג. האם הווקטור $\overrightarrow{DQ}$ מוכל במישור BCD? נמקו.



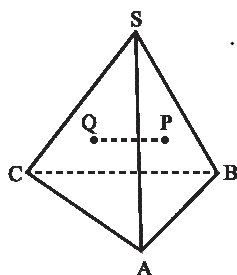
3. במנסרה משולשת ABCA'B'C' נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה P היא אמצע המקצוע CB, והנקודה Q היא אמצע המקצוע A'C'.
 א. הביעו את $\overrightarrow{PQ}$ כצירוף לינארי של $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. הוכיחו כי $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור הפאה ABB'A'.
 ג. האם $\overrightarrow{PQ}$ מקביל ל- $\overrightarrow{A'B}$? נמקו.



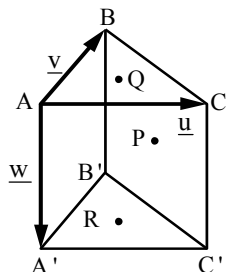
4. במנסרה משולשת ABCA'B'C' נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה P מקיימת $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}$, והנקודה Q מקיימת $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB'}$.
 א. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ב. האם $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ABC?
 ג. האם $\overrightarrow{PQ}$ מקביל ל- $\overrightarrow{A'B}$?
 ד. מהו המצב ההדדי בין הישרים AA' ו-BC?



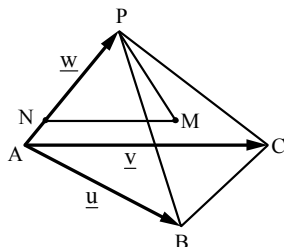
5. בקובייה ABCD A'B'C'D' נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.
 נתון: $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\underline{w}$, $\overrightarrow{B'P} = \frac{1}{4}\overrightarrow{B'D'}$.
 א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את $\overrightarrow{MP}$.
 ב. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה:
 (1) MP מקביל לפאה ABCD.
 (2) MP מקביל לפאה BCC'B'.
 (3) MP מקביל לפאה DCC'D'.



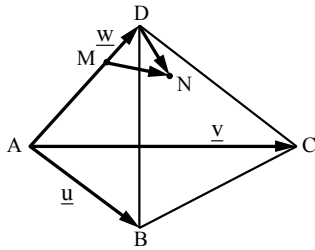
6. בפירמידה משולשת SABC נסמן: $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה P מקיימת $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{w}$, הנקודה Q מקיימת $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}$.
 א. הסבירו מדוע הנקודה P נמצאת על מישור הפאה SAB.
 ב. על המישור של איזו פאה נמצאת הנקודה Q?
 ג. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ד. האם הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ABC?
 ה. האם PQ מקביל ל-AB? נמקו.



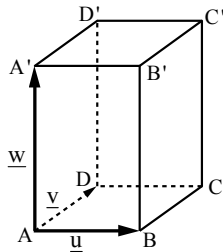
7. במנסרה משולשת ABCA'B'C' נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$.
 א. הנקודה R מקיימת $\overrightarrow{A'R} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.
 הסבירו מדוע הנקודה R נמצאת על המישור A'B'C'.
 ב. הנקודה Q מקיימת $\overrightarrow{BQ} = -\frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}$.
 הסבירו מדוע הנקודה Q נמצאת על המישור ABC.
 ג. (1) הביעו את $\overrightarrow{QR}$ כצירוף לינארי של $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 (2) הוכיחו: $QR \parallel AA'$.
 ד. הנקודה P היא מפגש אלכסוני הפאה BCC'B'.
 הביעו את $\overrightarrow{PR}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.



8. בפירמידה משולשת ABCP נסמן: $\overrightarrow{AP} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 הנקודה M מקיימת: $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$.
 א. הסבירו מדוע הנקודה M נמצאת במישור הפאה PBC.
 הנקודה N מקיימת: $\overrightarrow{NP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AP}$.
 ב. הביעו את $\overrightarrow{NM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.
 ג. הוכיחו כי $\overrightarrow{NM}$ מקביל למישור ABC.

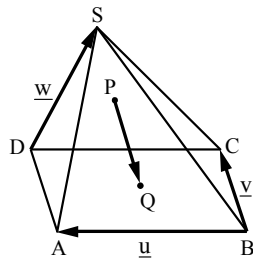


9. בפירמידה משולשת ABCD נסמן $\vec{AD} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. הנקודה N מקיימת $\vec{DN} = \frac{1}{6}(\vec{DB} + \vec{DC})$. א. הסבירו מדוע הנקודה N נמצאת על מישור הפאה BDC. ב. הנקודה M מקיימת $\vec{MD} = \frac{1}{3}\vec{AD}$. הביעו את $\vec{MN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$. ג. נמקו מדוע $\vec{MN}$ מקביל למישור ABC.



10. בתיבה ABCD A'B'C'D' נסמן: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$. הנקודה E מקיימת $\vec{DE} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{w}$. א. הסבירו מדוע הנקודה E נמצאת במישור DCC'D'. ב. האם הישר DE מקביל למישור ABB'A'? ג. הנקודה G מקיימת $\vec{AG} = \underline{v} + \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{w}$. ★ הסבירו מדוע הנקודה G נמצאת על המישור DCC'D'.

11. בפירמידה מרובעת SABCD, שבסיסה מקבילית ABCD, נסמן: $\vec{DS} = \underline{w}$, $\vec{BC} = \underline{v}$, $\vec{BA} = \underline{u}$. הנקודה P מקיימת $\vec{DP} = \frac{1}{2}\underline{w} - \frac{1}{4}\underline{u}$.



- א. הסבירו מדוע הנקודה P נמצאת על מישור הפאה SCD. הנקודה Q מקיימת $\vec{BQ} = \frac{2}{3}(\underline{u} + \underline{v})$. ב. הסבירו מדוע הנקודה Q נמצאת על הבסיס ABCD. ג. הוכיחו: הנקודה Q נמצאת על האלכסון BD. ד. הביעו את הווקטור $\vec{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$. ה. האם הווקטור $\vec{PQ}$ מקביל למישור הפאה SAD? נמקו.

תשובות:

1. ב. המישור ABC נקבע על ידי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ והנקודות P ו-Q נמצאות מחוץ למישור ABC, ולכן $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור.
 - ג. כן, מאחר שהווקטורים $\overrightarrow{PQ}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ הם כפל בסקלר אחד של השני: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. אפשר גם לראות ש-PQ הוא קטע אמצעים במשולש ABC, ולכן מקביל ל-BC.
2. א. $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\underline{u}$.
 - ב. (1) המישור ABC נקבע על ידי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. הווקטור $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\underline{u}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ והנקודות M ו-N נמצאות מחוץ למישור ABC, ולכן $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור.
 - (2) המישור ACD נקבע על ידי הווקטורים $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$. הווקטור $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\underline{w}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ והנקודות Q ו-N נמצאות מחוץ למישור ACD, ולכן $\overrightarrow{QN}$ מקביל למישור.
 - ג. כן, הנקודות D ו-Q נמצאות על המישור BCD ולכן הווקטור $\overrightarrow{DQ}$ מוכל במישור BCD.
3. א. $\overrightarrow{PQ} = \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u}$. ב. המישור ABC נקבע על ידי הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$. $\overrightarrow{PQ} = \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u}$ צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ והנקודות P ו-Q נמצאות מחוץ למישור $ABB'A'$, ולכן $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור.
 - ג. לא, מאחר שהווקטורים $\overrightarrow{PQ} = \underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u}$ ו- $\overrightarrow{A'B} = -\underline{w} + \underline{u}$ הם לא כפל בסקלר אחד של השני.
4. א. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\underline{u}$. ב. כן. ג. כן. ד. מצטלבים.
 5. א. $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v}$. ב. (1) נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה.
6. א. המישור SAB נקבע על ידי $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$. $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{w}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$. נקודה A נמצאת במישור SAB, ולכן $\overrightarrow{AP}$ מוכל במישור זה והנקודה P נמצאת במישור.
 - ב. נתון $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}$. המישור SAC נקבע על ידי $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$. $\overrightarrow{AQ}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$. נקודה A נמצאת במישור SAC, ולכן $\overrightarrow{AQ}$ מוכל במישור זה והנקודה Q נמצאת במישור.
 - ג. $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$. כן. ה. לא, הם לא כפל בסקלר אחד של השני.
7. א. המישור $A'B'C'$ נקבע על ידי $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. $\overrightarrow{A'R} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. נקודה A' נמצאת במישור $A'B'C'$, ולכן $\overrightarrow{A'R}$ מוכל במישור זה והנקודה R נמצאת במישור.
 - ב. המישור ABC נקבע על ידי $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. $\overrightarrow{BQ} = -\frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$. נקודה B נמצאת במישור ABC, ולכן $\overrightarrow{BQ}$ מוכל במישור זה והנקודה Q נמצאת במישור.
 - ג. (1) $\overrightarrow{QR} = \underline{w}$. ד. $\overrightarrow{PR} = -\frac{1}{6}\underline{u} - \frac{1}{6}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$.

8. א. המישור PBC נקבע על ידי $\vec{PB}$ ו- $\vec{PC}$. $\vec{PM} = \frac{1}{2}\vec{PB} + \frac{1}{3}\vec{PC}$ הוא צירוף לינארי של $\vec{PB}$ ו- $\vec{PC}$.
 נקודה P נמצאת במישור PBC, ולכן $\vec{PM}$ מוכל במישור PBC והנקודה M נמצאת במישור.
 ב. $\vec{NM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.
 ג. המישור ABC נקבע על ידי $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$. $\vec{NM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ הוא צירוף לינארי של $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$.
 נקודה N נמצאת מחוץ למישור ABC, ולכן $\vec{NM}$ מקביל למישור ABC.
9. א. המישור BDC נקבע על ידי $\vec{DB}$ ו- $\vec{DC}$. $\vec{DN} = \frac{1}{6}(\vec{DB} + \vec{DC})$ הוא צירוף לינארי של $\vec{DB}$ ו- $\vec{DC}$.
 נקודה D נמצאת במישור BDC, ולכן $\vec{DN}$ מוכל במישור BDC והנקודה N נמצאת במישור.
 ב. $\vec{MN} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v}$.
 ג. המישור ABC נקבע על ידי $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$. $\vec{MN} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v}$ הוא צירוף לינארי של $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$.
 נקודה M נמצאת מחוץ למישור ABC, ולכן $\vec{MN}$ מקביל למישור ABC.
10. א. המישור DCC'D' נקבע על ידי $\vec{u}$ ו- $\vec{w}$. $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{w}$ הוא צירוף לינארי של $\vec{u}$ ו- $\vec{w}$.
 הוא עובר דרך נקודה D הנמצאת במישור DCC'D', לכן $\vec{DE}$ מוכל במישור DCC'D', והנקודה E נמצאת במישור DCC'D'.
 ב. כן. המישור ABB'A' נקבע על ידי $\vec{u}$ ו- $\vec{w}$. $\vec{DE}$ הוא צירוף לינארי של $\vec{u}$ ו- $\vec{w}$.
 הנקודה D נמצאת מחוץ למישור ABB'A', ולכן DE מקביל למישור זה.
 ג. $\vec{AG} = \vec{v} + \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{w}$. מאחר ש- $\vec{AD} = \vec{v}$, הרי $\vec{DG} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{w}$. $\vec{DG}$ הוא צירוף לינארי של $\vec{u}$ ו- $\vec{w}$.
 הנקודה D נמצאת במישור DCC'D', ולכן $\vec{DG}$ מוכל במישור DCC'D', והנקודה G נמצאת במישור DCC'D'.
11. א. המישור SCD נקבע על ידי $\vec{u}$ ו- $\vec{w}$. $\vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{w} - \frac{1}{4}\vec{u}$ הוא צירוף לינארי של $\vec{u}$ ו- $\vec{w}$.
 נקודה D נמצאת במישור SCD, ולכן $\vec{DP}$ מוכל במישור זה והנקודה P נמצאת במישור.
 ב. המישור ABCD נקבע על ידי $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$. $\vec{BQ}$ הוא צירוף לינארי של $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$.
 הנקודה B נמצאת במישור ABCD, ולכן $\vec{BQ}$ מוכל במישור, והנקודה Q נמצאת במישור.
 ג. $\vec{BQ} = \frac{2}{5}\vec{BD}$. ד. $\vec{PQ} = -\frac{7}{20}\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$. ה. לא, הוא לא צירוף לינארי של $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$.