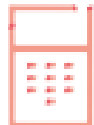


סדרות חשבוניות

פתרונות לבחינות בגרות



התוכנית החדשה במתמטיקה
נפתר ע"י עפר ילון

(בגרות עד מרס 14 מועד מיוחד שאלון 35805)

נתונה סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא 3, והפרש הסדרה הוא 5.
בסדרה $2n$ איברים.

א. תבע באמצעות n את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

ב. תבע באמצעות n את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. האיבר במקום ה' $1 - 2n$ בסדרה הנתונה שווה ל-193.

מצא את סכום האיברים במקומות הזוגיים.

א. נתונה סדרה חשבונית, שבה $d = 5$, $a_1 = 3$.

בסדרה $2n$ איברים.

נוכיח שסדרת האיברים במקומות האי-זוגיים, וגם סדרת האיברים במקומות הזוגיים, היא חשבונית, ונמצא את הפרש שלה.

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= a_n + 2d - a_n \\ a_{n+2} - a_n &= 2d \end{aligned}$$

לכן שתי סדרות אלו חשבוניות, כי הפרש קבוע (אינו תלוי ב- n)
הפרש הסדרות הוא $2d = 2 \cdot 5 = 10$

נארגן את הנתונים בטבלה מתאימה.

מקומות זוגיים	מקומות אי-זוגיים	
$a_2 = a_1 + d = 3 + 5 = 8$	$a_1 = 3$	a_1
$2d = 10$	$2d = 10$	d
$\frac{2n}{2} = n$	$\frac{2n}{2} = n$	n

נציב את נתוני הטור הראשון בנוסחת הסכום $S_n = \frac{n[2a_1 + d(n-1)]}{2}$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n[2 \cdot 3 + 10(n-1)]}{2} \\ S_n &= \frac{n[6 + 10(n-1)]}{2} \\ S_n &= n[3 + 5(n-1)] \\ S_n &= n(3 + 5n - 5) \\ S_n &= n(5n - 2) \\ \boxed{S_n} &= \boxed{5n^2 - 2n} \end{aligned}$$

תשובה: סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים הוא $5n^2 - 2n$.

ב. נציב את נתוני הטור השני בנוסחת הסכום $S_n = \frac{n[2a_1 + d(n-1)]}{2}$.

$$S_n = \frac{n[2 \cdot 8 + 10(n-1)]}{2}$$

$$S_n = \frac{n[16 + 10(n-1)]}{2}$$

$$S_n = n[8 + 5(n-1)]$$

$$S_n = n(8 + 5n - 5)$$

$$S_n = n(5n + 3)$$

$$\boxed{S_n = 5n^2 + 3n}$$

תשובה: סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא $5n^2 + 3n$.

ג. נתון $a_{2n-1} = 193$.

נשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 + (2n-1-1)d = 193$$

$$3 + (2n-2) \cdot 5 = 193$$

$$5(2n-2) = 190$$

$$2n-2 = 38$$

$$2n = 40$$

$$n = 20$$

(בסדרה 40 איברים.)

נציב $n = 20$ בביטוי הסכום שקיבלנו בסעיף ב.

$$5 \cdot 20^2 + 3 \cdot 20 = 2060$$

תשובה: סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא 2060.

(בגרות עד אפריל 14 דוגמאות שאלון 35805)

- מחשב שמחירו 10,000 שקלים נמכר בתשלומים חודשיים לא שווים.
כל תשלום חודשי גדול בסכום קבוע מהתשלום של החודש שלפניו.
הסכום של עשרת התשלומים הראשונים הוא 25% ממחיר המחשב.
הסכום של חמשת התשלומים שאחריהם הוא 20% ממחיר המחשב.
- א. מצא את התשלום הראשון.
- ב. מצא בכמה תשלומים חודשיים נמכר המחשב.

א. מדובר בסדרת תשלומים המהווים סדרה חשבונית עולה, כי כל תשלום גדול בסכום קבוע מזה שלפניו.

מחיר המחשב הוא 10,000 שקלים.

סכום עשרת התשלומים הראשונים הוא 25% ממחיר המחשב, כלומר 2500 שקלים $= 0.25 \cdot 10000$.

סכום חמשת התשלומים הבאים הוא 20% ממחיר המחשב, כלומר 2000 שקלים $= 0.2 \cdot 10000$.

נרשום את מערכת המשוואות המתאימה, ונפתח כל אחת מהמשוואות לחוד:

$$\begin{cases} S_{1-10} = 2500 \\ S_{11-15} = 2000 \end{cases}$$

$$S_{1-10} = 2500$$

$$2500 = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2}$$

$$2500 = 5(a_1 + a_1 + 9d) \quad / :5$$

$$\boxed{500 = 2a_1 + 9d}$$

$$S_{11-15} = 2000$$

$$2000 = \frac{5(a_{11} + a_{15})}{2}$$

$$2000 = 2.5(a_1 + 10d + a_1 + 14d) \quad / :2.5$$

$$\boxed{800 = 2a_1 + 24d}$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 500 = 2a_1 + 9d \\ 800 = 2a_1 + 24d \end{cases}$$

$$-300 = -15d \quad / :14$$

$$\boxed{d = 20}$$

$$500 = 2a_1 + 9 \cdot 20$$

$$320 = 2a_1 \quad / :2$$

$$\boxed{a_1 = 160}$$

תשובה: התשלום הראשון הוא 160 שקלים.

ב. נמצא את מספר התשלומים, כאשר $S_n = 10,000$

$$\frac{n(2 \cdot 160 + 20 \cdot (n-1))}{2} = 10000 \quad / \cdot 2$$

$$n(320 + 20n - 20) = 20000$$

$$20n^2 + 300n - 20000 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-300 \pm 1300}{40} \rightarrow \boxed{n = 25}$$

הפתרון השני שלילי ולכן נפסל.

תשובה: המחשב נמכר ב- 25 תשלומים.

פתרון משרד החינוך

א. נסמן ב- a_n את התשלום בחודש ה- n .

נתון שהסדרה היא חשבונית עולה.

הסכום של עשרת התשלומים הראשונים

מהווה 25% ממחיר המחשב, לכן:

$$S_{10} = 0.25 \cdot 10,000 = 2500 \text{ שקלים}$$

דרך I:

הסכום של חמשת התשלומים הבאים אחריהם

מהווה 20% ממחיר המחשב, לכן:

$$S_{15} - S_{10} = 0.2 \cdot 10,000 = 2000 \text{ שקלים}$$

$\Downarrow$

$$S_{15} = 4500 \text{ שקלים}$$

הסכום של חמשה-עשר התשלומים הראשונים הוא:

$$\text{I} \quad S_{10} = \frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 2500$$

$\Downarrow$

$$2a_1 + 9d = 500$$

$$\text{II} \quad S_{15} = \frac{(2a_1 + 14d) \cdot 15}{2} = 4500$$

$\Downarrow$

$$2a_1 + 14d = 600$$

$\Downarrow$

$$a_1 = 160, \quad d = 20$$

מ- I ו- II נקבל:

$$a_1 = 160 \text{ שקלים}$$

התשלום הראשון הוא:

דרך II:

הסכום של חמשת התשלומים הבאים אחריהם

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 2000 \text{ שקלים} \quad \text{מהווה 20\% ממחיר המחשב, לכן:}$$

הסכום של עשרת התשלומים הראשונים

הוא:

$$\text{I} \quad S_{10} = \frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 2500$$

הסכום של חמשת התשלומים

הבאים אחריהם הוא:

$$\text{II} \quad S_{\substack{\text{5 הבאים} \\ \text{אחריהם}}} = \frac{(2a_{11} + 4d) \cdot 5}{2} = 2000$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 9d = 500 \\ 2a_1 + 24d = 800 \end{cases}$$

מ- I ו- II נקבל:

↓

$$d = 20$$

$$a_1 = 160$$

160 שקלים

התשלום הראשון הוא:

$$S_n = \frac{(2 \cdot 160 + (n - 1) \cdot 20)n}{2} = 10,000 \quad \text{ב. סכום כל התשלומים מקיים:}$$

↓

$$n^2 + 15n - 1000 = 0$$

$$n = -40 \quad \text{או} \quad n = 25$$

המחשב נמכר ב- 25 תשלומים

$n > 0$, לכן:

- אדם קיבל שתי הצעות לקניית שואב אבק בתשלומים חודשיים, הצעה I והצעה II.
- בשתי ההצעות היה לשואב האבק אותו המחיר.
- הצעה I: התשלום הראשון הוא 180 שקלים, וכל תשלום נוסף גדול ב־ 15 שקלים מהתשלום שקדם לו.
- הצעה II: התשלום הראשון הוא 195 שקלים, וכל תשלום נוסף קטן ב־ 15 שקלים מהתשלום שקדם לו.
- מספר התשלומים בהצעה II היה גדול ב־ 2 ממספר התשלומים בהצעה I.
- א. מצא את מספר התשלומים בהצעה II.
- ב. מצא את המחיר של שואב האבק.

א. בשתי הצעות המחיר מדובר בסדרות חשבוניות, באחת עולה ובשנייה יורדת.
מספר התשלומים בהצעה II גדול ב- 2 מזה שבהצעה I.
נרכז הנתונים בטבלה מתאימה.

הצעה II	הצעה I	
195	180	A_1
-15	+15	D
$n+2$	n	N

בשתי ההצעות היה לשואב האבק אותו המחיר, לכן: $S_{n+2}^{\text{II}} = S_n^{\text{I}}$

$$\frac{(n+2)[2 \cdot 195 - 15(n+2-1)]}{2} = \frac{n[2 \cdot 180 + 15(n-1)]}{2} \quad / \cdot 2$$
$$(n+2)(390 - 15(n+1)) = n(360 + 15n - 15)$$
$$(n+2)(375 - 15n) = 360n + 15n^2 - 15n$$
$$375n - 15n^2 + 750 - 30n = 15n^2 + 345n$$
$$0 = 30n^2 - 750$$
$$25 = n^2$$
$$n = 5 \quad \cancel{n = -5}$$

הפתרון השני שלילי ולכן נפסל.
לכן מספר התשלומים בהצעה I הוא חמישה בהצעה II הוא שבעה.
תשובה: שבעה תשלומים.

ב. נמצא את מחירו של שואב האבק, כלומר את S_5^{I} .

$$S_5^{\text{I}} = \frac{5(2 \cdot 180 + 15 \cdot (5-1))}{2}$$

$S_5^{\text{I}} = 1,050$

תשובה: מחירו של שואב האבק הוא 1,050 שקלים.

פתרון משרד החינוך

א. סדרת התשלומים בשתי ההצעות היא סדרה חשבונית.

$$a_1 = 180$$

בהצעה I התשלום הראשון בשקלים הוא:

$$d_1 = 15$$

ההפרש הקבוע בשקלים הוא:

$$S_n^I = \frac{[(2 \cdot 180 + (n-1) \cdot 15)]n}{2} = \frac{(345 + 15n)n}{2}$$

נגדיר ב- n את מספר התשלומים החודשיים בהצעה I, לכן מתקיים:

$$b_1 = 195$$

בהצעה II התשלום הראשון בשקלים הוא:

$$d_2 = -15$$

ההפרש הקבוע בשקלים הוא:

$$n+2$$

מספר התשלומים החודשיים בהצעה II הוא:

$$S_{n+2}^{II} = \frac{[(2 \cdot 195 + (n+1)(-15))(n+2)]}{2} = \frac{(375 - 15n)(n+2)}{2}$$

לכן מתקיים:

מחירו של שואב האבק זהה בשתי ההצעות,

$$S_n^I = S_{n+2}^{II}$$

לכן מתקיים:

$$\Downarrow$$
$$\frac{(345 + 15n)n}{2} = \frac{(375 - 15n)(n+2)}{2}$$

$\Downarrow$

$$30n^2 = 750$$

$\Downarrow$

$$n = \pm 5$$

$$n = 5$$

$n > 0$, לכן:

$$n+2 = 7$$

א. מספר התשלומים בהצעה II הוא:

$$S_5^I = \frac{(345 + 15 \cdot 5)}{2} \cdot 5 = 1050$$

ב. נציב בנוסחה:

1050 שקלים

המחיר של שואב האבק הוא:

(בגרות עד אוגוסט 14 מועד קיץ ג שאלון 35805)

נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים.

נתון: $d = 6$, $a_1 = -74$.

האיבר האחרון בסדרה קטן ב־ 190 מסכום כל האיברים שלפניו.

א. מצא כמה איברים יש בסדרה.

ב. מצא כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

א. בסדרה a_n יש n איברים.

נתון: $d = 6$, $a_1 = -74$.

האיבר האחרון בסדרה קטן ב- 190 מסכום כל האיברים שלפניו, כלומר מ- S_{n-1} .

המשוואה המתאימה היא: $a_n + 190 = S_{n-1}$.

נפתח את המשוואה ונמצא את מספר איברי הסדרה.

$$a_n + 190 = S_{n-1}$$

$$a_1 + (n-1)d + 190 = \frac{(n-1)[2a_1 + (n-1-1)d]}{2}$$

$$-74 + 6(n-1) + 190 = \frac{(n-1)[2 \cdot (-74) + 6(n-2)]}{2}$$

$$116 + 6n - 6 = (n-1)[-74 + 3(n-2)]$$

$$110 + 6n = (n-1)(-74 + 3n - 6)$$

$$110 + 6n = (n-1)(3n - 80)$$

$$110 + 6n = 3n^2 - 80n - 3n + 80$$

$$0 = 3n^2 - 89n - 30$$

$$n_{1,2} = \frac{89 \pm 91}{6}$$

$$\boxed{n = 30} \leftarrow n > 0, \text{natural}$$

תשובה: בסדרה 30 איברים.

ב. נמצא את מקומו של האיבר החיובי הראשון בסדרה.

$$a_n > 0$$

$$a_1 + (n-1)d > 0$$

$$-74 + 6(n-1) > 0 \quad / +74$$

$$6(n-1) > 74 \quad / :6 > 0$$

$$n-1 > 12\frac{1}{3} \quad / +1$$

$$n > 13\frac{1}{3}$$

$$\boxed{n = 14} \leftarrow n \text{ natural}$$

בסדרה 30 איברים, כאשר האיבר ה- 14 הוא האיבר החיובי הראשון.

כלומר 13 איברים אינם חיוביים, ולכן יש בסדרה 17 איברים חיוביים.

תשובה: בסדרה יש 17 איברים חיוביים.

(בגרות עו יולי 16 מועד קיץ ב שאלון 35805/35482)

נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1} = a_n - 4$ לכל n טבעי.

האיבר השלישי בסדרה הוא 12.

א. מצא את האיבר הראשון.

בסדרה זו 71 איברים.

ב. חשב את הסכום של 10 האיברים האחרונים בסדרה.

ג. מצא את האיבר האמצעי בסדרה.

א. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1} = a_n - 4$, לכל n טבעי.
מכאן ש: $a_{n+1} - a_n = -4$ והסדרה היא חשבונית, כאשר $d = -4$,
כי ההפרש בין כל שני איברים עוקבים קבוע (לא תלוי ב- n).

$$a_3 = 12$$

$$a_1 + 2d = 12$$

$$a_1 + 2 \cdot (-4) = 12$$

$$\boxed{a_1 = 20}$$

תשובה: האיבר הראשון של הסדרה הוא 20.

ב. נתון כי בסדרה 71 איברים.
האיבר הראשון, בעשרת האיברים האחרונים,
הוא a_{62} $(71 - 10 + 1 = 62)$.

$$a_{62} = a_1 + (62 - 1) \cdot d$$

$$a_{62} = 20 + 61 \cdot (-4)$$

$$a_{62} = -224$$

$$S_{last\ 10} = \frac{10[2 \cdot (-224) + (10 - 1) \cdot (-4)]}{2}$$

$$S_{last\ 10} = 5[-448 - 36]$$

$$\boxed{S_{last\ 10} = -2,420}$$

תשובה: סכום 10 האיברים האחרונים בסדרה הוא -2,420.

ג. נתון כי בסדרה 71 איברים. האיבר האמצעי הוא a_{36} $(\frac{71+1}{2} = 36)$.

$$a_{36} = a_1 + (36 - 1) \cdot d$$

$$a_{36} = 20 + 35 \cdot (-4)$$

$$\boxed{a_{36} = -120}$$

תשובה: האיבר האמצעי בסדרה הוא -120.

הדר מתאמנת לקראת מרוץ שאורך המסלול שלו הוא 22 ק"מ.
 במהלך השבוע הראשון לאימונים רצה הדר 2 ק"מ, ותכננה להוסיף בכל שבוע 500 מטרים
 לריצה, כדי שבשבוע האחרון לאימונים היא תרוץ 22 ק"מ.
 א. כמה שבועות הדר מתכננת להתאמן למרוץ?

לאחר 24 שבועות שבהם התאמנה כמתוכנן, הודיעו על הקדמת המרוץ.
 בשבוע ה־ 25 היא רצה כמתוכנן, ולאחר מכן היא החליטה לשנות את תכנית האימונים שלה:
 לרוץ בכל שבוע 800 מטרים יותר מבשבוע שלפניו (ולא 500 מטרים יותר, כפי שתכננה
 בהתחלה). כך, בשבוע האחרון לאימונים היא תרוץ 22 ק"מ.
 ב. בכמה שבועות תקצר הדר את האימונים שלה?
 ג. כמה קילומטרים תרוץ הדר סך הכול במהלך האימונים שלה?

א. תוכנית האימון של הדר, מתוארת על ידי סדרה חשבונית, $a_1 = 2$, $d = 0.5$, ו- $a_n = 22$.

נשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית.

$$22 = 2 + 0.5(n-1)$$

$$20 = 0.5(n-1) \quad / : 0.5$$

$$40 = n-1$$

$$\boxed{n = 41}$$

תשובה: הדר מתכננת להתאמן למרוץ במשך 41 שבועות.

ב. נמצא, תחילה, את המרחק אותו רצה הדר בשבוע ה- 25.

$$a_{25} = a_1 + 24d$$

$$a_{25} = 2 + 24 \cdot 0.5$$

$$\boxed{a_{25} = 14}$$

כלומר, הדר רצה 14 ק"מ בשבוע ה- 25.

לאור הקדמת המרוץ, שינתה הדר את תוכנית האמון, ובשבוע ה- 26 רצה 14.8 ק"מ $= 14 + 0.8$.

וגם הפעם זו סדרה חשבונית, שבה $b_1 = 14.8$, $d = 0.8$, ו- $b_n = 22$.

$$22 = 14.8 + 0.8(n-1)$$

$$7.2 = 0.8(n-1) \quad / : 0.8$$

$$9 = n-1$$

$$\boxed{n = 10}$$

מכאן שיש עוד 10 שבועות אימון על פי התוכנית החדשה, ובסך הכול 35 שבועות אימון.

הדר תקצר את האימונים שלה ב- 6 שבועות $= 41 - 35$.

תשובה: הדר תקצר את האימונים שלה ב- 6 שבועות.

ג. נחשב, בשני שלבים, את סך כול הקילומטרים אותם תרוץ הדר.

$$S_{1-25} = \frac{25[2 \cdot 2 + 0.5 \cdot (25-1)]}{2} = 200$$

$$S_{26-35} = \frac{10[2 \cdot 14.8 + 0.8 \cdot (10-1)]}{2} = 184$$

סך הכול: 384 קילומטרים $= 200 + 184$.

תשובה: הדר תרוץ סך הכול 384 קילומטרים במהלך האימונים שלה.

נתונות שתי סדרות חשבוניות, a_n ו- b_n .

נתון: $a_1 = b_1$.

הפרש הסדרה a_n הוא d , והפרש הסדרה b_n הוא $d + 1$.

נתון: a_4 גדול ב-2 מ- b_3 .

א. מצא את d .

ב. הראה כי: $b_n = a_n + n - 1$.

בכל אחת מן הסדרות a_n ו- b_n יש n איברים.

ג. הבע באמצעות n את ההפרש בין סכום כל האיברים בסדרה b_n ובין סכום כל האיברים בסדרה a_n .

נתון: ההפרש בין סכום כל האיברים בסדרה b_n ובין סכום כל האיברים בסדרה a_n הוא 780.

סכום כל האיברים בסדרה a_n הוא 3,040.

ד. מצא את a_1 .

א. נסדר את הנתונים בטבלה נוחה.

b_n	a_n	
$b_1 = a_1$	a_1	האיבר הראשון
$d+1$	d	הפרש הסדרה
n	n	מספר האיברים

נתון כי a_4 גדול ב- 2 מ- b_3 , והמשוואה המתאימה היא: $b_3 + 2 = a_4$.

$$b_3 + 2 = a_4$$

$$b_1 + 2d_b + 2 = a_1 + 3d_a$$

$$a_1 + 2(d+1) + 2 = a_1 + 3d$$

$$2d + 4 = 3d$$

$$\boxed{d = 4}$$

תשובה: $d = 4$.

ב. נראה כי $b_n = a_n + n - 1$ (ניעזר בסימן שקילות $(\Leftrightarrow)$, בדומה להוכחת זהויות בטריגו).

$$b_n = a_n + n - 1$$

$$\Leftrightarrow b_1 + d_b(n-1) = a_1 + d_a(n-1) + n - 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 5(n-1) = a_1 + 4(n-1) + n - 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 5n - 5 = a_1 + 4n - 4 + n - 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 5n - 5 = a_1 + 5n - 5 \quad o.k.$$

תשובה: הוכח ש- $b_n = a_n + n - 1$.

ג. נתון כי בכל אחת מהסדרות יש n איברים.

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot [b_1 + b_n]}{2} - \frac{n \cdot [a_1 + a_n]}{2}$$

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot [b_1 + b_n - (a_1 + a_n)]}{2}$$

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot (a_1 + b_n - a_1 - a_n)}{2}$$

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot (b_n - a_n)}{2}$$

$$\boxed{S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot (n-1)}{2}}$$

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot [2 \cdot b_1 + 5 \cdot (n-1)]}{2} - \frac{n \cdot [2 \cdot a_1 + 4 \cdot (n-1)]}{2}$$

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot \{ [2 \cdot a_1 + 5 \cdot (n-1)] - [2a_1 + 4 \cdot (n-1)] \}}{2}$$

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot [2a_1 + 5n - 5 - (2a_1 + 4n - 4)]}{2}$$

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot (2a_1 + 5n - 5 - 2a_1 - 4n + 4)}{2}$$

$$\boxed{S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot (n-1)}{2}}$$

או, עפ"י סעיף ב:

$$S_n^b - S_n^a = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \quad \text{תשובה:}$$

ד. נתון: $S_n^b - S_n^a = 780$.

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 780$$

$$n^2 - n = 1560$$

$$n^2 - n - 1560 = 0$$

$$\boxed{n = 40} \text{ o.k.}$$

$$n = -39 \text{ false, } n \text{ is natural}$$

נתון: $S_n^a = 3,040$.

$$\frac{40 \cdot [2 \cdot a_1 + 4 \cdot (40-1)]}{2} = 3040$$

$$2a_1 + 156 = 152$$

$$2a_1 = -4$$

$$\boxed{a_1 = -2}$$

תשובה: $a_1 = -2$.

נתונים האיברים הכלליים של שתי סדרות: $a_n = -8n + 5$, $b_n = -4n + 3$.

א. מצא את a_1 ואת b_1 .

נתונה סדרה חדשה, c_n , כך ש- $c_n = a_n + b_n$.

ב. הוכח כי הסדרה c_n היא סדרה חשבונית, ומצא את האיבר הראשון שלה, c_1 , ואת ההפרש שלה.

ג. נתון: $a_k = -75$.

חשב את סכום k האיברים הראשונים של הסדרה החדשה, c_n .

א. נתונים האיברים הכללים של שתי סדרות:

$$a_1 = -8 \cdot 1 + 5 \rightarrow \boxed{a_1 = -3} - a_n = -8n + 5$$

$$b_1 = -4 \cdot 1 + 3 \rightarrow \boxed{b_1 = -1} - b_n = -4n + 3$$

$$\text{תשובה: } a_1 = -3, b_1 = -1.$$

ב. נתונה סדרה חדשה c_n : כך ש- $c_n = a_n + b_n$.

נוכיח שהסדרה c_n היא סדרה חשבונית, ונמצא את האיבר הראשון שלה ואת ההפרש שלה.

$$c_n = a_n + b_n$$

$$c_n = -8n + 5 + (-4n + 3)$$

$$c_n = -8n + 5 - 4n + 3$$

$$\boxed{c_n = -12n + 8}$$

$$c_1 = -12 \cdot 1 + 8 = -4 \rightarrow \boxed{c_1 = -4}$$

$$c_{n+1} - c_n = -12(n+1) + 8 - (-12n + 8)$$

$$c_{n+1} - c_n = -12n - 12 + 8 + 12n - 8$$

$$c_{n+1} - c_n = -12 \rightarrow \boxed{d_c = -12}$$

ולכן הסדרה c_n חשבונית, כי קיים הפרש קבוע בין כל שני איברים עוקבים (הפרש שלא תלוי ב- n).

תשובה: הראינו שהסדרה c_n חשבונית $c_1 = -4$, הפרש הסדרה הוא -12 .

ג. נתון: $a_k = -75$.

$$-8k + 5 = -75$$

$$-8k = -80 \quad / : (-8)$$

$$\boxed{k = 10}$$

נארגן את נתוני הסדרה c_n בטבלה מתאימה.

c_n	
$c_1 = -12$	האיבר הראשון
$d = -12$	הפרש הסדרה
$k = 10$	מספר האיברים שיש לסכום

$$S_{10}^c = \frac{10 \cdot [2 \cdot (-4) - 12 \cdot (10 - 1)]}{2}$$

$$S_{10}^c = 5 \cdot (-8 - 108)$$

$$\boxed{S_{10}^c = -580}$$

תשובה: סכום $k = 10$ האיברים הראשונים בסדרה החדשה c_n הוא -580 .

- בחלון ראווה של חנות סמארטפונים מוצגים מכשירים המסודרים בשורה ולכל מכשיר מוצמד מחיר. המכשיר הראשון משמאל בשורה הוא הזול ביותר.
- ככל שמתקדמים משמאל לימין בשורה, מחיר כל מכשיר גדל בסכום קבוע מזה שלפניו.
- מחירים של הסמארטפון הימני ביותר והסמארטפון השמאלי ביותר יחד הוא 6,400 ש"ח.
- בנוסף ידוע כי המחיר של המכשיר היקר ביותר גדול פי 3 מהמחיר של המכשיר הזול ביותר.
- א. מצא את המחיר של המכשיר הזול ביותר הנמצא בחלון הראווה.
- ב. סכום מחירי כל הסמארטפונים שבחלון הראווה שווה ל- 54,400 ש"ח.
- כמה מכשירים מוצגים בחלון הראווה?

א. מדובר בסדרה חשבונית עולה, כי מחיר כל מכשיר גדול בסכום קבוע מזה שמשמאל לו בשורה.

מחירם, של הסמארטפון הימני ביותר והסמארטפון השמאלי ביותר יחד, הוא 6,400 ₪.

נסמן ב- n את מספר המכשירים המוצגים בחלון הראווה, והמשוואה המתאימה היא: $a_1 + a_n = 6400$.

בנוסף, ידוע כי המחיר של המכשיר היקר ביותר גדול פי 3 מהמחיר של המכשיר הזול ביותר,

והמשוואה המתאימה היא: $a_n = 3a_1$.

נרשום את מערכת המשוואות המתאימה, ונפתור אותה:

$$\begin{cases} a_1 + a_n = 6400 \\ a_n = 3a_1 \end{cases}$$

$$a_1 + 3a_1 = 6400$$

$$4a_1 = 6400 \quad / : 4$$

$$\boxed{a_1 = 1600} \rightarrow \boxed{a_n = 4800}$$

מכאן שהמחיר של הסמארטפון הזול ביותר הוא 1,600 ₪, ושל הסמארטפון היקר ביותר הוא 4,800 ₪.

תשובה: המחיר של המכשיר הזול ביותר, הנמצא בחלון הראווה, הוא 1,600 ₪.

ב. נמצא את מספר המכשירים, כאשר נתון שסכום מחיריהם הכולל הוא 54,400, כלומר: $S_n = 54400$.

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$54400 = \frac{n \cdot (6400)}{2}$$

$$54400 = 3200n \quad / : 3200$$

$$\boxed{n = 17}$$

תשובה: 17 מכשירים מוצגים בחלון הראווה.

נתונות שתי סדרות חשבוניות:

$$a_n: 3, 10, 17, 24, \dots$$

$$b_n: 17, 38, 59, 80, \dots$$

- א. (1) חשב את b_{30} .
- (2) עבור איזה ערך של n מתקיים $a_n = b_{30}$? נמק. (n הוא מספר טבעי).
- ב. עבור כל אחד משני ההיגדים II-I שלפניך כתוב אם הוא נכון או לא נכון. נמק את קביעותיך.
- I. לכל n טבעי $3a_n = b_n$.
- II. לכל n טבעי $a_{3n} = b_n$.
- ג. נתון כי ההפרש בין סכום k האיברים הראשונים בסדרה b_n ובין סכום k האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא 924 (k הוא מספר טבעי). מצא את k .

א. נסדר את הנתונים בטבלה נוחה.

b_n	a_n	
17	3	האיבר הראשון
21	7	הפרש הסדרה

(1) נחשב את b_{30} .

$$b_{30} = b_1 + 29d_b$$

$$b_{30} = 17 + 29 \cdot 21$$

$$\boxed{b_{30} = 626}$$

תשובה: $b_{30} = 626$.

(2) נמצא לאיזה ערך של n מתקיים $a_n = b_{30}$.

$$a_n = a_1 + d_a(n-1)$$

$$626 = 3 + 7(n-1)$$

$$623 = 7(n-1) \quad / : 7$$

$$89 = n-1$$

$$\boxed{n = 90}$$

תשובה: $n = 90$.

ב. נבדוק את ההיגדים המובאים.

I. לכל n טבעי מתקיים $3a_n = b_n$.

להפרכת טענה, מספיקה דוגמה אחת.

$a_1 = 3$, $b_1 = 17$, ולכן $3a_1 \neq b_1$ והטענה לא נכונה.

תשובה: היגד I. לא נכון.

II. לכל n טבעי מתקיים $a_{3n} = b_n$.

$$a_{3n} = b_n \quad ?$$

$$a_1 + d_a(3n-1) = b_1 + d_b(n-1) \quad ?$$

$$3 + 7(3n-1) = 17 + 21(n-1) \quad ?$$

$$3 + 21n - 7 = 17 + 21n - 21 \quad ?$$

$$21n - 4 = 21n - 4 \quad o.k.$$

תשובה: היגד II. נכון.

ג. נתון: $S_k^b - S_k^a = 924$. נמצא את k .

$$\frac{k \cdot [2 \cdot b_1 + d_b \cdot (k-1)]}{2} - \frac{k \cdot [2 \cdot a_1 + d_a \cdot (k-1)]}{2} = 924 \quad / \cdot 2$$

$$k[2 \cdot 17 + 21 \cdot (k-1) - (2 \cdot 3 + 7 \cdot (k-1))] = 1848$$

$$k(34 + 21k - 21 - 6 - 7k + 7) = 1848$$

$$k(14k + 14) = 1848$$

$$14k^2 + 14k - 1848 = 0$$

$$\boxed{k=11} \leftarrow k \text{ is natural} \rightarrow \cancel{k \geq 12}$$

תשובה: $k=11$.

נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_n = 2n + 3$.
 א. הוכח כי הסדרה היא חשבונית ומצא את הפרש הסדרה.

באולם קולנוע הכיסאות סודרו בשורות כך שהכלל a_n מתאר את מספר
 הכיסאות בשורה n .

ב. באיזו שורה יש 19 כיסאות?

בעקבות מגבלות הקורונה מותר להושיב צופים כאשר יש ביניהם רווח של כיסא
 אחד. לכן בשורה הראשונה אפשר להושיב 3 צופים, ובכל שורה נוספת אפשר
 להושיב צופה אחד יותר מאשר בשורה הקודמת.
 מתברר שבאופן זה מספר הצופים הכולל שאפשר להושיב באולם קטן ב- 90
 ממספר הצופים בתפוסה מלאה לפני מגבלות הקורונה.
 ג. מצא את מספר השורות באולם.

א. הסדרה a_n מקיימת את הכלל $a_n = 2n + 3$ לכל n טבעי.

נראה שהסדרה היא חשבונית ונמצא את הפרשה.

$$a_{n+1} - a_1 = 2(n+1) + 3 - (2n + 3)$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 2 + 3 - 2n - 3$$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = 2} \rightarrow \boxed{d = 2}$$

הראינו שההפרש בין כל שני איברים סמוכים בסדרה קבוע (לא תלוי ב- n), ולכן הסדרה היא חשבונית,

$$\text{כאשר } d = 2 \text{ ו- } \boxed{a_1 = 5} \rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

תשובה: הוכחנו שהסדרה היא חשבונית, והפרש הסדרה הוא 2 .

ב. באולם הקולנוע, מסודרים הכיסאות לפי הכלל $a_n = 2n + 3$,

$$\text{כלומר זו סדרה חשבונית } d = 2 \text{ ו- } a_1 = 5$$

נמצא באיזו שורה יש 19 כיסאות.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$19 = 5 + 2(n-1)$$

$$14 = 2(n-1) \quad / : 2$$

$$7 = n - 1$$

$$\boxed{8 = n} \rightarrow \boxed{a_8 = 19}$$

תשובה: בשורה ה- 8 יש 19 כיסאות.

ג. נמצא את מספר השורות באולם, כאשר בסידור החדש (עקב הקורונה) $d = 1$ ו- $a_1 = 3$.

מספר הצופים הכולל שאפשר להושיב באולם,

קטן ב- 90 ממספר הצופים בתפוסה מלאה לפני מגבלות הקורונה.

$$S_n^* + 90 = S_n$$

$$\frac{n \cdot [2 \cdot 3 + 1(n-1)]}{2} + 90 = \frac{n \cdot [2 \cdot 5 + 2(n-1)]}{2} \quad / \cdot 2$$

$$n \cdot (6 + n - 1) + 180 = n \cdot (10 + 2n - 2)$$

$$n \cdot (5 + n) + 180 = n \cdot (8 + 2n)$$

$$5n + n^2 + 180 = 8n + 2n^2$$

$$0 = n^2 + 3n - 180$$

$$\boxed{n = 12} \leftarrow n \text{ is natural} \rightarrow \cancel{n = 15}$$

תשובה: מספר השורות באולם הוא 12.

נתונות שתי סדרות: $b_n = 9 - 2n$, $a_n = 4n + 1$.

א. (1) מצא את a_1 ואת b_1 .

(2) הוכח כי שתי הסדרות הן סדרות חשבוניות, ומצא את הפרשיהן.

סכום k האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא 860.

ב. (1) מצא את k .

(2) מצא את סכום k האיברים הראשונים בסדרה b_n .

נתונה סדרה חדשה המקיימת לכל n : $c_n = a_n - b_n$.

ג. האם c_n היא סדרה חשבונית? הוכח את תשובתך.

ד. מהו סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה c_n ? הסבר את תשובתך.

א. נתונות שתי סדרות: $a_n = 4n + 1$, $b_n = 9 - 2n$.

(1) נחשב את a_1 .

$$a_n = 4n + 1$$

$$a_1 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$\boxed{a_1 = 5}$$

נחשב את a_1 .

$$b_n = 9 - 2n$$

$$b_1 = 9 - 2 \cdot 1$$

$$\boxed{b_1 = 7}$$

תשובה: $a_1 = 5$, $b_1 = 7$.

(2) נוכיח ששתי הסדרות הן חשבוניות ונמצא את ההפרש שלהן.

$$a_n = 4n + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 4(n+1) + 1 - (4n + 1)$$

$$a_{n+1} - a_n = 4n + 4 + 1 - 4n - 1$$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = 4}$$

$$b_n = 9 - 2n$$

$$b_{n+1} - b_n = 9 - 2(n+1) - (9 - 2n)$$

$$b_{n+1} - b_n = 9 - 2n - 2 - 9 + 2n$$

$$\boxed{b_{n+1} - b_n = -2}$$

הוכחנו שהסדרה חשבונית, כי ההפרש בין כל שני איברים עוקבים בסדרה קבוע, והפרשה הוא 4.

תשובה: הוכחנו ששתי הסדרות הן סדרות חשבוניות.

הפרש הסדרה a_n הוא 4 , הפרש הסדרה b_n הוא (-2).

ב. נכין טבלה מתאימה

b_n	a_n	
7	5	האיבר הראשון
-2	4	הפרש הסדרה

נתון: סכום k האיברים הראשונים בסדרה a_n הוא 860, או בקיצור $S_k^a = 860$. נמצא את k .

$$S_k^a = 860$$

$$\frac{k \cdot [2a_1 + d_a \cdot (k-1)]}{2} = 860 \quad / \cdot 2$$

$$k \cdot [2 \cdot 5 + 4 \cdot (k-1)] = 1720$$

$$k(10 + 4k - 4) = 1720$$

$$k(4k + 6) = 1720$$

$$4k^2 + 6k - 1720 = 0$$

$$\boxed{k = 20} \quad \leftarrow k \text{ is natural} \rightarrow \cancel{k = 21.5}$$

תשובה: $k = 20$.

(2) נמצא את S_{20}^b .

$$S_{20}^b = \frac{20 \cdot [2b_1 + d_b \cdot (20-1)]}{2}$$

$$S_{20}^b = 10 \cdot (2 \cdot 7 - 2 \cdot 19)$$

$$\boxed{S_{20}^b = -240}$$

תשובה: סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא (-240) .

ג. נתונה סדרה חדשה: $c_n = a_n - b_n$.

$$c_n = 4n + 1 - (9 - 2n)$$

$$c_n = 4n + 1 - 9 + 2n$$

$$\boxed{c_n = 6n - 8} \rightarrow c_1 = 6 \cdot 1 - 8 = -2 \rightarrow \rightarrow \boxed{c_1 = -2}$$

$$c_{n+1} - c_n = 6(n+1) - 8 - (6n - 8)$$

$$c_{n+1} - c_n = 6n + 6 - 8 - 6n + 8$$

$$c_{n+1} - c_n = 6 \rightarrow \boxed{d_c = 6}$$

הוכחנו שהסדרה c_n חשבונית, כי ההפרש בין כל שני איברים עוקבים בסדרה קבוע, והפרשה הוא 6.

תשובה: הוכחנו שהסדרה c_n חשבונית.

ד. נמצא את S_{20}^c , בשתי דרכים.

$$\frac{S_{20}^c \cdot 20 \cdot [2c_1 + d_c \cdot (20-1)]}{2}$$

$$S_{20}^c = S_{20}^a - S_{20}^b = 860 - (-240) = 1100 \quad \text{או:}$$

$$S_{20}^c = 10 \cdot (2 \cdot (-2) + 6 \cdot 19)$$

$$\boxed{S_{20}^c = 1100}$$

תשובה: סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה c_n הוא 1,100.

נתונה סדרה חשבונית: $-70, \dots, 78, 82, 86$.

א. מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. (1) כמה איברים חיוביים יש בסדרה?

(2) מהו האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה?

(3) חשב את סכום האיברים החיוביים.

בסדרה הנתונה החליפו את הסימנים של כל איברי הסדרה.

באופן זה התקבלה סדרה חדשה: $70, \dots, -78, -82, -86$.

ג. חשב את סכום הסדרה החדשה.

א. נתונה סדרה חשבונית: $-70, 78, 82, 86, \dots$, ובהתאם: $d = -4$. $d = 2$ ו- $a_1 = 86$.

נמצא את מספר האיברים בסדרה.

$$a_n = -70$$

$$a_1 + (n-1)d = -70$$

$$86 - 4(n-1) = -70$$

$$-4(n-1) = -156$$

$$n-1 = 39$$

$$n = 40$$

תשובה: מספר האיברים בסדרה הוא 40 .

ב. נחקור את האיברים החיוביים בסדרה.

(1) נמצא כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

$$a_n > 0$$

$$86 - 4(n-1) > 0$$

$$-4(n-1) > -86 \quad / : (-4 < 0)$$

$$n-1 < 21.5$$

$$n < 22.5$$

$$n = 22$$

תשובה: בסדרה יש 22 איברים חיוביים.

(2) נמצא את האיבר החיובי הקטן ביותר.

$$a_{22} = 86 - 4(22-1)$$

$$a_{22} = 2$$

תשובה: האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה הוא $a_{22} = 2$.

(3) נמצא סכום האיברים החיוביים.

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{22} = \frac{22 \cdot (86 + 2)}{2}$$

$$S_{22} = 968$$

תשובה: סכום האיברים החיוביים בסדרה הוא 968 .

ג. בסדרה הנתונה החליפו את הסימנים של כל איברי הסדרה.

הסדרה שנוצרה היא: $-86, -82, -78, \dots, +70$.

נחשב את סכום איברי הסדרה, שמספר איבריה זהה לסדרה המקורית (כמובן).

$$\begin{aligned} -86 + (-82) + (-78) + \dots + 70 &= \\ &= -(86 - 82 - 78 + \dots + (-70)) = \\ &= -S_{40} = -\frac{40 \cdot (86 + (-70))}{2} = \boxed{(-320)} \end{aligned}$$

תשובה: סכום הסדרה החדשה הוא (-320) .