

חוברת בנושא

בעיות גדילה ודעיכה

תכנית חדשה, שאלון 472

כיתה יב', 4 יח"ל

אריק דז'לדטי, יואל גבע

בעיות גדילה ודעיכה

קיימים תהליכים רבים המוכרים לנו מהמציאות שבהם כמות גדלה או קטנה במשך הזמן. לדוגמה: **תהליכי גדילה** כמו ריבוי של אוכלוסייה במדינה מסוימת, התרבות של חיידקים, או **תהליכי דעיכה** כמו התפרקות של חומר רדיואקטיבי. תהליכים רבים כאלה ניתנים לתיאור על ידי פונקציה מעריכית.

$$\text{הנוסחה: } f(t) = f(0) \cdot q^t$$

$f(0)$ - הכמות ההתחלתית (הכמות בזמן אפס).

q - מקדם הגדילה (או הדעיכה) של התהליך.

q קובע פי כמה גדלה (או קטנה) הכמות ביחידת זמן אחת.

שימו לב ! q תמיד חיובי.

אם $q > 1$, אז הכמות הולכת וגדלה במשך הזמן (תהליך גדילה).

אם $0 < q < 1$, אז הכמות הולכת וקטנה במשך הזמן (תהליך דעיכה).

t - משך הזמן שחלף מהמועד שהוגדר כזמן אפס.

נשים לב: t יכול לקבל גם ערכים חיוביים וגם ערכים שליליים.

כאשר t חיובי, הכוונה היא לזמן שאחרי זמן אפס.

כאשר t שלילי, הכוונה היא לזמן לפני זמן אפס.

$f(t)$ - הכמות אחרי t יחידות זמן.

נסביר את משמעות כל אחד מארבעת הגורמים באמצעות דוגמה העוסקת בתהליך גדילה (התרבות) של כמות האצות באגם.

דוגמה:

כמות האצות באגם גדלה פי 1.4 בכל שנה לעומת השנה שלפניה.

ידוע כי היום יש באגם 4,000 אצות.

א. חשבו את כמות האצות שתהיה באגם בעוד 4 שנים.

ב. חשבו את כמות האצות שהייתה באגם לפני 3 שנים.

פתרון:

א. כמות האצות הנוכחית היא $f(0) = 4000$.

הכמות גדלה בכל שנה פי 1.4 לעומת השנה שלפניה ולכן בסיס השינוי הוא $q = 1.4$.

עלינו לחשב את כמות האצות שתהיה באגם בעוד 4 שנים,

כלומר נציב $t = 4$ ונחשב את $M(4)$. הנוסחה היא $f(t) = f(0) \cdot q^t$

נציב $f(0) = 4000$, $q = 1.4$, $t = 4$. נקבל: $f(4) = 4000 \cdot 1.4^4$

$$f(4) = 15366$$

בעוד 4 שנים תהיה באגם כמות של 15,366 ק"ג אצות.

ב. עלינו לחשב את כמות האצות שהייתה באגם לפני 3 שנים,

כלומר נציב $t = -3$ ונחשב את $f(-3)$. הנוסחה היא $f(t) = f(0) \cdot q^t$.

נציב $f(0) = 4000$, $q = 1.4$, $t = -3$. נקבל: $f(-3) = 4000 \cdot 1.4^{-3}$

$$f(-3) = 1458$$

לפני 3 שנים הייתה באגם כמות של 1,458 ק"ג אצות.

שימוש באחוזים

קיימים מקרים שבהם הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים ונרצה לחשב את מקדם הגדילה (או הדעיכה) q . במקרים אלה נסמן ב- p את אחוז השינוי ונחשב את המקדם q באחת משתי הצורות הבאות:

א. אם מדובר בתהליך גדילה נחשב את q לפי הנוסחה: $q = 1 + \frac{p}{100}$ **מקדם הגדילה**

ב. אם מדובר בתהליך דעיכה נחשב את q לפי הנוסחה: $q = 1 - \frac{p}{100}$ **מקדם הדעיכה**

דוגמה:

כמות העץ ביער גדלה בכל שנה ב-20%.

מהו מקדם הגדילה השנתי של כמות העץ ביער?

פתרון:

כמות העץ הולכת וגדלה, כלומר לפנינו בעיית גדילה ולכן נחשב את מקדם הגדילה q

לפי הנוסחה: $q = 1 + \frac{p}{100}$ **מקדם הגדילה**

הכמות גדלה בכל שנה ב-20% ולכן נציב $p = 20$.

נקבל: $q = 1 + \frac{20}{100} = 1.2$. מקדם הגדילה הוא $q = 1.2$.

משמעות התוצאה היא שכמות העץ ביער בכל שנה גדולה פי 1.2 מהכמות בשנה שלפניה.

דוגמה:

חומר רדיואקטיבי מאבד 16% ממשקלו בכל שעה.

מהו מקדם הדעיכה השנתי של החומר?

פתרון:

כמות החומר הולכת וקטנה, כלומר לפנינו בעיית דעיכה ולכן נחשב

את בסיס השינוי q לפי הנוסחה: $q = 1 - \frac{p}{100}$ **מקדם הדעיכה**

הכמות קטנה בכל שעה ב-16% לכן נציב $p = 16$. נקבל: $q = 1 - \frac{16}{100} = 0.84$.

מקדם הדעיכה הוא $q = 0.84$,

כלומר בכל שעה כמות החומר שווה ל-0.84 מהכמות בשעה שלפניה.

דוגמה:

בשמורת טבע יש היום 3,400 עופות דורסים.

כמות העופות הדורסים גדלה בכל חודש ב-6%.

א. כמה עופות דורסים יהיו בשמורה בעוד 8 חודשים?

ב. כמה עופות דורסים היו בשמורה לפני 5 חודשים?

פתרון:

א. בשלב הראשון נחשב את המקדם q .

כמות העופות הדורסים הולכת וגדלה במשך הזמן, כלומר לפנינו בעיית גדילה,

ולכן נחשב את המקדם (q) לפי הנוסחה $q = 1 + \frac{p}{100}$.

הכמות גדלה בכל חודש ב-6% לכן $p = 6$. נקבל: $q = 1 + \frac{6}{100} = 1.06$.

המקדם הוא $q = 1.06$.

עלינו לחשב את מספר העופות הדורסים בעוד 8 חודשים, כלומר נרצה לחשב את $f(8)$.

הנוסחה היא $f(t) = f(0) \cdot q^t$.

נציב $f(0) = 3400$, $q = 1.06$, $t = 8$. נקבל: $f(8) = 3400 \cdot (1.06)^8 = 5419$.

בעוד 8 חודשים יהיו בשמורה 5,419 עופות דורסים.

ב. עלינו לחשב את כמות העופות הדורסים שהייתה לפני 5 חודשים,

כלומר נרצה לחשב את $f(-5)$.

נציב $f(0) = 3400$, $q = 1.06$, $t = -5$. נקבל: $f(-5) = 3400 \cdot (1.06)^{-5}$.

$f(-5) = 2541$

לפני 5 חודשים היום בשמורה 2,541 עופות דורסים.

דוגמה:

מחיר מכונית חדשה הוא 60,000 שקלים.

ערכה של המכונית יורד בכל שנה ב-8%.

א. מה יהיה מחיר המכונית לאחר שנה?

ב. מה יהיה מחיר המכונית לאחר 2.5 שנים?

פתרון:

א. בשלב הראשון נחשב את המקדם (q).

ערכה של המכונית הולך ויורד עם הזמן כלומר לפנינו בעיית דעיכה,

ולכן נחשב את המקדם (q) לפי הנוסחה $q = 1 - \frac{p}{100}$.

ערכה של המכונית יורד בכל שנה ב-8% ולכן נציב $p = 8$.

נקבל: $q = 1 - \frac{8}{100} = 0.92$. המקדם הוא $q = 0.92$.

עלינו לחשב את ערכה של המכונית כעבור שנה אחת, כלומר נרצה לחשב את $f(1)$.

הנוסחה היא $f(t) = f(0) \cdot q^t$ ולכן $f(1) = f(0) \cdot q^1$.

ידוע כי הערך ההתחלתי הוא $f(0) = 60000$. כמו כן $q = 0.92$.

נציב ונקבל: $f(1) = 60000 \cdot (0.92)^1$.

$f(1) = 55200$

ערכה של המכונית כעבור שנה הוא 55,200 שקלים.

ב. עלינו לחשב את ערכה של המכונית אחרי 2.5 שנים, כלומר נרצה לחשב את $f(2.5)$.

נציב $t = 2.5$ בנוסחה ונקבל: $f(2.5) = f(0) \cdot q^{2.5}$.

ידוע כי $q = 0.92$ ו- $f(0) = 60000$. נציב ונקבל: $f(2.5) = 60000 \cdot (0.92)^{2.5}$.

$f(2.5) = 48710$

ערכה של המכונית לאחר 2.5 שנים יהיה 48,710 שקלים.

דוגמה:

חומר רדיואקטיבי מפסיד רבע ממשקלו בכל חודש.

מהו מקדם הדעיכה החודשי (q) של משקל החומר?

פתרון:

החומר מפסיד בכל חודש רבע ממשקלו, כלומר בכל חודש משקלו מהווה $\frac{3}{4}$ ממשקלו

בחודש שלפניו ולכן מקדם הדעיכה הוא $q = \frac{3}{4}$.

דוגמה:

במדינה מסוימת מספר התושבים גדל ב-2% בכל שנה.
פי כמה גדלה האוכלוסייה בתוך 17 שנה?

פתרון:

$$\begin{aligned} \text{לפנינו בעיית גדילה ולכן נמצא את } (q) \text{ לפי הנוסחה } q = 1 + \frac{p}{100} \\ \text{מספר התושבים גדל בכל שנה ב-2\% ולכן נציב } p = 2 \text{ . נקבל: } q = 1 + \frac{2}{100} = 1.02 \\ \text{הנוסחה היא } f(t) = f(0) \cdot q^t \text{ ולכן } f(17) = f(0) \cdot q^{17} \\ \text{נציב } q = 1.02 \text{ ונקבל: } f(17) = f(0) \cdot 1.02^{17} \\ f(17) = 1.4 \cdot f(0) \\ \frac{f(17)}{f(0)} = 1.4 \end{aligned}$$

לסיכום, מספר התושבים גדל בתוך 17 שנה פי 1.4.

מציאת הכמות $f(t)$ - בעיות גדילה

1. כמות האצות באגם מתרבה בצורה מעריכית.
בכל שנה גדלה הכמות פי 3 לעומת השנה שקדמה לה. היום יש באגם 7,000 ק"ג אצות.
א. מהי כמות האצות שתהיה באגם בעוד שנה?
ב. מהי כמות האצות שתהיה באגם בעוד שנתיים?
2. כמות העץ ביער מסוים גדלה בכל שנה בצורה מעריכית.
עכשיו יש ביער 100,000 טונות עץ וידוע שכמות זו גדלה בכל שנה פי 1.08 לעומת השנה שקדמה לה.
א. מה תהיה כמות העץ ביער בעוד שנה?
ב. מה תהיה כמות העץ ביער בעוד שבע שנים?
3. כמות המכוניות במדינה מסוימת גדלה בכל שנה ב-5%.
במדינה יש היום 334,000 מכוניות.
א. פי כמה גדלה כמות המכוניות בכל שנה לעומת השנה שלפניה?
ב. כמה מכוניות יהיו בעיר בעוד 2.5 שנים?
ג. כמה מכוניות יהיו בעיר בעוד שנה ו-9 חודשים?
ד. כמה מכוניות יהיו בעיר בעוד 5 שנים ו-3 חודשים?
4. אדם מפקיד 8,000 שקלים בתכנית חיסכון לפי ריבית של 10% לשנה.
א. איזה סכום יעמוד לרשותו אחרי 6 שנים?
ב. איזה סכום יעמוד לרשותו אחרי 3 שנים ו-4 חודשים?

5. כמות העץ ביער גדלה בכל שנה ב- 2.6% .
 כיום יש ביער 6,000 טונות של עץ.
 א. כמה טונות של עץ היו ביער לפני 4 שנים?
 ב. כמה טונות של עץ היו ביער לפני 10 שנים?

6. בתרבות של חיידקים מתחלק כל חיידק לשניים בכל דקה.
 בשעה 08:00 הכילה התרבות $2.56 \cdot 10^9$ חיידקים.
 א. חשבו כמה חיידקים היו בתרבות בשעה 08:07.
 ב. חשבו כמה חיידקים היו בתרבות בשעה 07:56.

מציאת הכמות $f(t)$ – בעיות דעיכה

7. מחיר מכונת ייצור חדשה הוא 180,000 שקלים.
 ערכה של מכונת ייצור יורד בכל שנה ב- 16%.
 א. חשב את מקדם הדעיכה השנתי (q) המתאים לתהליך.
 ב. מה יהיה מחיר המכונה לאחר 4 שנים?
 ג. מה יהיה מחיר המכונה לאחר $6\frac{1}{2}$ שנים?
8. ידוע כי חומר רדיואקטיבי מסוים מפסיד בכל שנה 2.846% ממשקלו.
 משקל החומר היום הוא 800 גרם.
 א. מה יהיה משקלו של החומר בעוד 10 שנים?
 ב. מה היה משקלו של החומר לפני 4 שנים?
9. מחירה של דירה חדשה הוא 760,000 שקל והוא יורד בכל שנה ב- 9%.
 א. רשמו פונקציה מהצורה $f(t) = f(0) \cdot q^t$, המתארת באמצעות t את מחיר הדירה בעוד t שנים.
 ב. מה יהיה מחיר הדירה לאחר 4 שנים ושלושה חודשים?
 ג. מה יהיה מחיר הדירה לאחר 6 שנים ושמונה חודשים?
10. חומר רדיואקטיבי מפסיד בכל חודש חמישית ממשקלו.
 משקל החומר היום הוא 625 גרם.
 א. מה יהיה משקל החומר בעוד שנה?
 ב. מה היה משקל החומר לפני חצי שנה?
11. כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בכל שנה פי 2 לעומת השנה שקדמה לה.
 משקל החומר כיום הוא 640 גרם.
 בכמה גרם יפחת משקל החומר ב- 4 השנים הקרובות?

מציאת הכמות $f(t)$ – שאלות נוספות

12. בתאריך 1.1.2012 הפקיד אדם סכום של 100,000 שקלים בריבית דריבית שנתית קבועה.
ב- 6 השנים הראשונות הייתה הריבית 9.5% לשנה,
וב- 6 השנים הבאות הייתה הריבית 11.5% לשנה.
א. מהו הסכום שהיה בפיקדון בתאריך 1.1.2018?
ב. מהו הסכום שהיה בפיקדון בתאריך 1.1.2024?
13. דירה חדשה נקנתה ב- 674,000 שקלים.
בכל אחת מ- 4 השנים הראשונות מאבדת הדירה 2% מערכה.
לאחר מכן בכל אחת מ- 7 השנים הבאות מאבדת הדירה 1% מערכה.
מהו מחירה של הדירה 11 שנים לאחר שנקנתה?
14. משק מגדל דגים בבריכות. כמות הדגים גדלה ב- 14% בכל חודש.
בתאריך מסוים היו בבריכות 13 טון דגים.
הדגים גודלו במשך 6 חודשים ואז נמכרו 10 טון דגים.
הדגים הנותרים גודלו במשך 6 חודשים נוספים באותו קצב גדילה ואז נמכרו כל הדגים
שבבריכות. כמה טון דגים נמכרו בפעם השנייה?
15. אדם מפקיד 45,000 שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית דריבית של 8% בשנה.
לאחר 4 שנים משך האדם 20,000 שקלים, ואת שאר הכסף הותיר בתוכנית החיסכון
באותם תנאים.
א. מצאו איזה סכום יעמוד לזכותו 10 שנים מיום ההפקדה הראשונה.
ב. בכמה אחוזים גבוה הסכום שמצאת בסעיף א' מהסכום המקורי שהופקד?
16. ערכה של דירה יורד ב- 8% בכל 5 שנים.
מחירה של דירה חדשה הוא 900,000 שקלים.
מה יהיה מחירה של הדירה בעוד 20 שנה?
בתשובתכם עגל את התוצאה לאלפי שקלים.
17. במעבדה מתבצע ניסוי של תרופה חדשה.
בתרבות חיידקים בזמן תחילת הניסוי היו $8 \cdot 10^7$ חיידקים.
כאשר הוסיפו את התרופה הניסיונית לתרבות, קטן מספר החיידקים ב- 5% בכל חצי שעה.
כמה חיידקים נותרו בתרבות כעבור שתיים וחצי?

18. מספר התושבים בעיר מסוימת גדל בכל שנה ב- 3.1%. כיום יש בעיר 505,361 תושבים. א. בחרו במשפט הנכון מבין שלושת המשפטים (1)-(3) שלפניכם, ונמק את תשובתכם (אין צורך בחישוב).
 (1) 5% ממספר בתושבים שיש כיום בעיר שווים ל- 5% ממספר התושבים שיהיו בעיר בעוד שנה.
 (2) 5% ממספר בתושבים שיש כיום בעיר הם פחות מ- 5% ממספר התושבים שיהיו בעיר בעוד שנה.
 (3) 5% ממספר בתושבים שיש כיום בעיר הם יותר מ- 5% ממספר התושבים שיהיו בעיר בעוד שנה.
 ב. מצאו מה יהיה גודל האוכלוסייה בעיר בעוד 8 שנים מהיום. בתשובתכם עגלו את התוצאה למספר שלם.
19. בשמורת טבע סופרים את מספר העופות הדורסים מדי שנתיים באותו תאריך, כדי לעקוב אחר גודל אוכלוסייתם. אוכלוסיית העופות הדורסים בשמורה גדלה בכל שנתיים באחוז קבוע. בספירה הראשונה נספרו 1,156 עופות. בספירה שנערכה כעבור שנתיים נספרו 1,503 עופות. א. חשבו פי כמה גדלה אוכלוסיית העופות הדורסים בשמורה בכל שנתיים. ב. על פי הנתונים, מצא ירון שאוכלוסיית העופות הדורסים גדלה בשנתיים הראשונות ב- 347 עופות, ולכן טען שבכל שנתיים נוספות תגדל אוכלוסיית העופות הדורסים ב- 347 עופות. האם ירון צודק? נמקו.
20. במדינה מסוימת מספר התושבים גדל ב- 4% בכל שנה. פי כמה גדלה האוכלוסייה בתוך 7 שנים?
21. כמות האצות באגם גדלה בכל שנה ב- 10%. א. פי כמה גדלה כמות האצות בתוך 3 שנים? ב. בכמה אחוזים גדלה כמות האצות בתוך 3 שנים?
22. מדד המחירים לצרכן עולה בכל חודש ב- 1.5%. מצאו בכמה אחוזים יעלה המדד במשך שנה שלמה.
23. בעיר מסוימת גדל מספר התושבים בכל שנה בצורה מעריכית כך שעל כל 8 תושבים מתווסף בממוצע תושב אחד. בכמה אחוזים יעלה מספר התושבים בעיר בתוך 3 שנים?
24. מכונה מסוימת מאבדת בכל שנה 10% מערכה. מצאו איזה אחוז מערכה היום יהיה ערכה בעוד 5 שנים.

25. חומר רדיואקטיבי מאבד 3% ממשקלו בכל שעה.
א. כמה אחוזים ממשקלו מאבד החומר בתוך 10 שעות?
ב. האם בכל אחת מ-10 השעות אבדה אותה כמות של חומר? נמק.
26. אברהם מפקיד סכום כסף מסוים בתוכנית חיסכון ל-3 שנים לפי ריבית דריבית של 6% לשנה. בתום התקופה, נוטל אברהם את מלוא הסכום שהצטבר בתקופה ורוכש בו מכונית המאבדת 6% מערכה בכל שנה. 3 שנים לאחר מועד רכישת המכונית בדק אברהם מהו ערכה של המכונית. בכמה אחוזים יהיה מחיר המכונית נמוך מהסכום המקורי שהופקד?
27. מחירו של מוצר נקבע בכל שנה בתאריך 1.1 ונשאר קבוע למשך כל אותה שנה. בתאריך 1.1.90 נקבע מחירו של המוצר. בכל אחת מ-5 השנים הבאות עלה מחירו של המוצר ב-7.5% לעומת המחיר בשנה הקודמת. לאחר מכן, בכל אחת מ-4 השנים הבאות ירד מחירו של המוצר ב-6.5% לעומת המחיר בשנה הקודמת. בכמה אחוזים עלה מחירו של המוצר בתקופה: 1.1.99 – 1.1.90.

תשובות:

1. א. 21,000 ק"ג. ב. 63,000 ק"ג. 2. א. 108,000 טונות. ב. 171,382.4 טונות.
3. א. 1.05. ב. 377,329. ג. 363,771. ד. 431,509. 4. א. 14,172.5 שקלים. ב. 10,991.7 שקלים.
5. א. 5,414.5. ב. 4,641.7. 6. א. $3.2768 \cdot 10^{11}$ חיידקים. ב. $1.6 \cdot 10^8$ חיידקים.
7. א. 0.84. ב. 89,616.8 שקלים. ג. 57,954.6 שקלים. 8. א. 599.4 גרם. ב. 897.9 גרם.
9. א. $M(t) = 760000 \cdot 0.91^t$. ב. 50,9025.5 שקלים. ג. 405,280.97 שקלים.
10. א. 42.95 גרם. ב. 2,384.19 גרם. 11. 600 גרם. 12. א. 172,379 שקלים. ב. 331,233 שקלים.
13. 579,443 שקלים. 14. 40.683 טון דגים. 15. א. 65,414.1 שקלים. ב. 45.36%.
16. 645,000 שקלים. 17. $6.19 \cdot 10^7$ חיידקים. 18. א. משפט (2). ב. 645,165 תושבים.
19. א. פי 1.3. ב. ירון לא צודק. 20. 1.316. 21. א. 1.331. ב. 33.1%. 22. 19.56%.
23. 42.38%. 24. 59.05%. 25. א. 26.26%. ב. לא. 26. 1.076%. 27. 9.72%.

מציאת הכמות $f(0)$

הערה חשובה:

כאשר נתון ערכו של $f(t)$ נציב אותו לפי הנוסחה $f(t) = f(0) \cdot q^t$.
למשל, אם נתון $f(4) = 600$ נרשום $f(0) \cdot q^4 = 600$.
אם נתון $f(7) = 3500$ נרשום $f(0) \cdot q^7 = 3500$.

דוגמה:

אדם מפקיד סכום כסף בתוכנית חיסכון לפי ריבית דריבית של 12% בשנה.
איזה סכום עליו להפקיד אם הוא רוצה לקבל בעוד 6 שנים סכום של 120,000 שקלים?

פתרון:

על פי הנתונים סכום הכסף הולך וגדל כלומר לפנינו בעיית גדילה,
ולכן נחשב את בסיס השינוי לפי הנוסחה הבאה: $q = 1 + \frac{p}{100}$.
סכום הכסף גדל בכל שנה ב-12% ולכן נציב $p = 12$.

$$\text{נקבל: } q = 1 + \frac{12}{100} = 1.12$$

על פי הנתון האדם רוצה שבעוד 6 שנים הסכום יהיה 120,000 שקלים.
הסכום בעוד 6 שנים הוא $f(6)$ ולכן מתקיים $f(6) = 120000$.
נציב את $M(6)$ לפי הנוסחה ונקבל $f(0) \cdot q^6 = 120000$.
נציב $q = 1.12$. נקבל: $f(0) \cdot 1.12^6 = 120000$, כלומר $f(0) = 60,796$.
לסיכום, עליו להפקיד סכום של 60,796 שקלים.

28. כמות העץ ביער גדלה בכל שנה ב-2.6%.
נתון כי בעוד 6 שנים יהיו ביער 60,000 טונות של עץ.
מהי כמות העץ ביער היום?
29. האוכלוסייה בעיר מסוימת מתרבה בצורה מעריכית בכל שנה ב-4%.
ידוע שבעוד 14 שנים יהיו בעיר 800,000 תושבים.
כמה תושבים יש בעיר היום?
30. אדם מפקיד סכום כסף בתוכנית חיסכון בריבית דריבית של 11% לשנה.
א. איזה סכום יעמוד לרשותו אחרי 6 שנים, אם יפקיד 20,000 שקלים?
ב. איזה סכום עליו להפקיד, אם ברצונו לקבל בעוד 10 שנים 70,000 שקלים?
31. יש ברשותי מכונית בדיוק 5 שנים. מחירה היום הוא 57,742 שקלים.
המחיר של מכונית משומשת יורד בכל שנה ב-7%.
א. מהו הסכום ששילמתי עבור המכונית?
ב. מה יהיה ערך המכונית 11 שנים לאחר שנרכשה?
ג. כמה אחוזים מערכה ההתחלתי מאבדת המכונית בתוך 11 שנים?

32. אוכלוסיית תושבים בעיר מסוימת מתרבה בצורה מעריכית לפי 8% בשנה. ידוע כי לפני 3 שנים היו בעיר 250,000 תושבים. כמה תושבים יהיו בעיר בעוד 5 שנים?
33. בבריכת דגים הייתה כמות מסוימת של דגים. ידוע שכמות הדגים בבריכה גדלה בצורה מעריכית בכל חודש ב-12%. 10 חודשים לאחר התחלת הפעלת הבריכה היו בה 18,635 טונות דגים. מה הייתה כמות הדגים בבריכה 17 חודשים לאחר הפעלתה?
34. ערכה של מכונית יורד בכל שנה ב-5%. ידוע כי מחירה של מכונית לאחר 3 שנים נמוך ב-17,115 שקלים ממחירה של מכונית חדשה. מצאו את מחירה של מכונית חדשה.
35. דני מפקיד 15,000 שקל לתקופה של 6 שנים לפי ריבית דריבית של 8% לשנה, כדי שיעמוד לזכותו סכום מסוים בתום התקופה. איזה סכום התחלתי צריך שלומי להפקיד לתקופה של 5 שנים לפי ריבית דריבית של 10% לשנה אם הוא רוצה שבתום תקופה זו יעמוד לרשותו אותו הסכום שיעמוד לזכותו של דני?

תשובות:

28. 51,436 טונות. 29. 461,980 תושבים. 30. א. 37,408.3 שקלים. ב. 24,652.9 שקלים.
31. א. 83,000 שקלים. ב. 37,358.5 שקלים. ג. 55%. 32. 462,733 תושבים. 33. 41,196 טונות.
34. 120,000 שקלים. 35. בערך 14,780 שקלים.

מציאת מקדם הגדילה (או הדעיכה) q , מציאת האחוז

דוגמה:

כמות האצות באגם מתרבה בצורה מעריכית. במדידה הראשונה היו באגם 30,000 ק"ג אצות. 5 שנים אחר כך היו באגם 74,650 ק"ג אצות. א. חשבו את מקדם הגדילה (q). ב. כמה ק"ג אצות היו באגם 9 שנים לאחר המדידה הראשונה?

פתרון:

א. במדידה הראשונה היו באגם 30,000 ק"ג אצות ולכן $f(0) = 30000$. 5 שנים אחר כך היו באגם 74,650 ק"ג אצות ולכן $f(5) = 74650$. נביע את $f(5)$ על פי הנוסחה ונקבל: $f(0) \cdot q^5 = 74650$
נציב $f(0) = 30000$ ונקבל: $30,000 \cdot q^5 = 74650$
 $q^5 = 2.4883$

נוציא שורש חמישי באמצעות מחשבון. נקבל $q = \sqrt[5]{2.4883}$, ומכאן $q = 1.2$. מקדם הגדילה הוא $q = 1.2$.

ב. עלינו לחשב את כמות האצות 9 שנים לאחר המדידה הראשונה, כלומר נרצה לחשב את $f(9)$. הנוסחה היא $f(t) = f(0) \cdot q^t$ ולכן $f(9) = f(0) \cdot q^9$. נציב $f(0) = 30000$ ו- $q = 1.2$ ונקבל: $f(9) = 30000 \cdot (1.2)^9$
 $f(9) = 154793$

כעבור 9 שנים היו באגם 154,793 ק"ג אצות.

דוגמה:

מחירה של מכונה יורד כל שנה באחוז קבוע לעומת מחירה בשנה שלפניה. בשנה מסוימת היה מחיר המכונה 300,000 שקלים. 6 שנים אחר כך היה מחירה 194,097 שקלים. א. חשב את מקדם הגדילה (q). ב. בכמה אחוזים יורד מחיר המכונה בכל שנה?

פתרון:

א. המחיר ההתחלתי של המכונה הוא 300,000 ולכן $f(0) = 300000$. מחיר המכונה 6 שנים אחר כך הוא 194,097 שקלים ולכן $f(6) = 194097$. נציב בנוסחה ונקבל $f(0) \cdot q^6 = 194097$. נציב $f(0) = 300000$ ונקבל: $300000 \cdot q^6 = 194097$
 $q^6 = 0.64699$
 $q = \sqrt[6]{0.64699} = 0.93$

מקדם הגדילה הוא $q = 0.93$.

ב. ערכה של המכונה הולך ויורד ולכן לפנינו בעיית דעיכה.

כתוצאה מכך נחשב את אחוז השינוי (p) לפי הנוסחה $q = 1 - \frac{p}{100}$.

נציב $q = 0.93$ ונקבל: $0.93 = 1 - \frac{p}{100}$. פתרון המשוואה הוא $p = 7$ ולכן ערכה של המכונה יורד בכל שנה ב- 7%.

דוגמה:

אחוז הגדילה השנתי של כמות העץ ביער הוא כזה שכמות העץ גדלה פי 6 בתוך 21 שנה. מצאו את אחוז הגדילה השנתי בכמות העץ ביער.

פתרון:

נסמן ב- $f(0)$ את כמות העץ בבדיקה הראשונה.

כמו כן, נסמן ב- $f(21)$ את כמות העץ לאחר 21 שנה.

על פי הנתון כמות העץ לאחר 21 שנה גדולה פי 6 מהכמות שבבדיקה הראשונה,

כלומר $f(21) = 6 \cdot f(0)$. נציב את $f(21)$ לפי הנוסחה ונקבל: $f(0) \cdot q^{21} = 6 \cdot f(0)$

נצמצם $f(0)$. נקבל: $q^{21} = 6$ ומכאן $q = \sqrt[21]{6} = 1.0891$.

מקדם הגדילה הוא $q = 1.0891$

עלינו לחשב את אחוז השינוי השנתי (p). מכיוון שהכמות הולכת וגדלה לפנינו בעיית

גדילה ולכן נחשב את אחוז השינוי (p) לפי הנוסחה $q = 1 + \frac{p}{100}$.

נציב $q = 1.0891$ ונקבל: $1.0891 = 1 + \frac{p}{100}$

פתרון המשוואה הוא $p = 8.91$ ולכן אחוז הגידול השנתי הוא 8.91%.

תרגילים

1. כמות האצות באגם גדלה בכל שנה בצורה מעריכית. חוקר מבצע שתי מדידות של כמות האצות באגם. במדידה הראשונה היו באגם 2,000 ק"ג אצות. 3 שנים לאחר המדידה הראשונה היו באגם 3,456 ק"ג אצות. חשבו את מקדם הגדילה השנתי (q) בכמות האצות באגם.
2. בשמורת טבע בוצעו שתי ספירות של העופות הדורסים. בספירה הראשונה נספרו 2,400 עופות. בספירה השנייה, שבוצעה 5 חודשים אחר כך, נספרו 8,911 עופות. ידוע שאוכלוסיה זו מתרבה בכל חודש בצורה מעריכית. א. חשב את מקדם הגדילה החודשי (q) המתאים לתהליך. ב. כמה עופות היו בשמורה 9 חודשים לאחר הספירה הראשונה?
3. כמות האצות באגם מתרבה בכל שנה בצורה מעריכית. במדידה ראשונה היו באגם 30,000 אצות. שנתיים לאחר מדידה זו היו באגם 800,000 אצות. איזו כמות אצות תהיה באגם :
א. כעבור 5 שנים מהמדידה הראשונה?
ב. כעבור 3 שנים ו-4 חודשים מהמדידה הראשונה?
4. בבריקה בוצעו 2 ספירות של כמות הדגים. בספירה ראשונה היו בבריקה $4 \cdot 10^5$ ק"ג דגים. לאחר שנה נערכה ספירה שנייה ונמצאו בה $4.6 \cdot 10^5$ ק"ג דגים. כמה ק"ג דגים יהיו בבריקה 10 שנים לאחר הספירה השנייה? הניחו גדילה מעריכית.
5. כמות העץ ביער גדלה בכל שנה פי q לעומת השנה שלפניה. בזמן מסוים היו ביער 30,000 ק"ג עץ. כעבור שנתיים, היו ביער 43,200 ק"ג עץ. א. חשבו את q .
ב. בכמה אחוזים גדלה כמות העץ ביער בכל שנה?
6. הכמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בכל שעה בצורה מעריכית. מדען שקל את החומר פעמיים באותו יום. בשעה 14:00 היה משקל החומר 600 גרם. בשעה 17:00 היה משקל החומר 437.4 גרם. א. מצאו את מקדם הדעיכה (q) בפונקציה $f(t) = f(0)q^t$, המתארת את כמות החומר כתלות במספר השעות t שחלף מהשעה 14:00. ב. מצאו איזה אחוז ממשקלו מפסיד החומר בכל שעה.

7. בעיר מסוימת ערכו מפקד אוכלוסין בכל שנה. בתאריך 1.1.2016 היו בעיר 300,000 תושבים, ובתאריך 1.1.2017 היו בה 6,000 תושבים נוספים. בהנחה שהאוכלוסייה גדלה באחוז קבוע בכל שנה, מהו מספר התושבים שהיו בעיר בתאריך 1.1.2005?
8. מברכה מלאה שבה 800 מ"ק מים מוציאים מים. כמות המים יורדת בצורה מעריכית. לאחר 6 שעות נשארים בברכה 540 מ"ק מים. מצאו את כמות המים שהוצאו מהברכה בשעתיים הראשונות.
9. בתרבות המתרבה באופן מעריכי גדל מספר החיידקים ב- $p\%$ בכל שעה. בשעה 7:00 בבוקר הכילה התרבות 35,000 חיידקים. ארבע שעות לאחר מכן, בשעה 11:00, הכילה התרבות 43,031 חיידקים. א. מצאו את אחוז הגדילה p . ב. בשעה 11:00 הוסיפו לתרבות חומר שמגדיל את אחוז גדילת החיידקים פי 2 מהאחוז p שמצאתם בסעיף א'. כמה חיידקים היו בתרבות בשעה 16:00?
10. אדם מפקיד 6,000 שקלים בתכנית חסכון לפי ריבית דריבית שנתית, כך שבתוך 5 שנים עמדו לרשותו 10,000 שקלים. במשך 5 השנים הבאות היה אחוז הריבית השנתית גבוה ב- 2% לעומת אחוז הריבית הקודם. א. מצאו איזה סכום יעמוד לרשותו 10 שנים מההפקדה הראשונה. ב. אדם אחר מפקיד סכום של 6,000 שקלים לתקופה של 10 שנים כך שבסוף התקופה עומד לרשותו הסכום שמצאת בסעיף א'. מהו אחוז הריבית השנתית במקרה זה?
11. בתרבות א' היו בשעה 11:00 בבוקר 60,000 חיידקים, ומספרם גדל ב- 3% בכל שעה. בתרבות ב' היו בשעה 9:00 בבוקר 48,000 חיידקים. ידוע כי בשעה 14:00 היו כמויות שוות של חיידקים בשתי התרבויות. בכמה אחוזים גדלה כמות החיידקים בתרבות ב' בכל שעה?
12. כמות העץ ביער גדלה בצורה מעריכית. ביער א' יש כיום $3 \cdot 10^4$ ק"ג עץ וכמות העץ בו גדלה בכל שנה ב- 3.2%. ביער ב' יש כיום $2 \cdot 10^4$ ק"ג עץ וכמות העץ בו גדלה בכל שנה באחוז קבוע. מצאו בכמה אחוזים גדלה כמות העץ ביער ב' בכל שנה, אם ידוע כי בעוד 7 שנים כמות העץ ביער זה תהיה כפולה מהכמות שתהיה באותו זמן ביער א'.
13. כמות העץ ביער גדלה בכל שנה פי q לעומת השנה שלפניה, כך שכמות העץ גדלה פי 6 בתוך 21 שנה. א. חשבו את q . ב. מצאו את אחוז הגדילה השנתי בכמות העץ ביער.

14. בתוך 10 שעות נותרה מחומר רדיואקטיבי 80% מהכמות המקורית.
 א. חשבו את מקדם הדעיכה השעתי (q) המתאים לתהליך.
 ב. אם כמות החומר כעת היא 600 גרם, כמה גרם יוותרו בתוך 6 שעות?
 ג. האם בכל אחת מ-6 השעות איבד החומר אותה כמות של גרמים? נמקו.
15. מספר הדגים בבריכה גדל בכל חודש בצורה מעריכית.
 ידוע כי בתוך 10 חודשים גדל מספר הדגים ב-48%.
 א. בכמה אחוזים גדל מספר הדגים בכל חודש לעומת החודש שלפניו?
 ב. נתון כי בחודש מסוים גדל מספר הדגים ב-400.
 האם מספר הדגים בחודש שאחריו יגדל ביותר מ-400, פחות מ-400, או בדיוק ב-400? נמקו ללא חישובים.
16. ערכה של מכונה מסוימת קטן בכל שנה באחוז קבוע מערכה בשנה הקודמת.
 ידוע שלאחר שהפעילו את המכונה במשך 6 שנים, היה ערכה רק $\frac{7}{10}$ מערכה ההתחלתית.
 מהו אחוז הפחת השנתי בערכה של המכונה?
17. מדד המחירים לצרכן עולה בכל חודש באחוז קבוע.
 מצאו את אחוז העלייה החודשי אם במהלך כל השנה עלה המדד סך הכול ב-30%.
18. ברשותי סכום כסף. מציעים לי שתי תכניות חיסכון:
 תכנית אחת ל-5 שנים שבסופן אקבל את הקרן עם 50% רווח מסכום הקרן.
 תכנית שנייה ל-6 שנים שבסופן אקבל את הקרן עם 60% רווח מסכום הקרן.
 בשתי התכניות יש ריבית שנתית קבועה. באיזו תכנית יש ריבית שנתית גבוהה יותר?
19. אברהם מעוניין להפקיד סכום כסף בבנק לתקופה של 10 שנים.
 מציעים לו שתי תכניות. בתכנית א' הוא מקבל בכל שנה ריבית של 4%.
 בתכנית ב' הוא מקבל בכל שנתיים ריבית של 8%. איזו תכנית עדיפה עבור אברהם? נמקו.
20. ערכה של מכונית יורד בכל שנה באחוז קבוע מערכה בשנה הקודמת.
 לאחר 5 שנים ירד ערכה של המכונית ב- $\frac{1}{4}$ מערכה ההתחלתית.
 א. חשבו את מקדם הדעיכה השנתי (q) בפונקציה $f(t) = f(0)q^t$, המתארת את ערכה של המכונית כתלות במספר השנים t שחלפו.
 ב. אם ערכה של המכונית בזמן מסוים היה 50,000 שקלים, מה יהיה ערכה כעבור 8 שנים מזמן זה.
21. חומר רדיואקטיבי מפסיד $\frac{2}{5}$ ממשקלו תוך 12 שנים.
 א. מהו החלק שהוא מפסיד ממשקלו בכל שנה לעומת השנה הקודמת?
 ב. איזה חלק נותר ממשקלו של החומר כעבור 8 שנים?

22. במדינה מסוימת נערך לראשונה מפקד אוכלוסין.
6 שנים אחרי מפקד האוכלוסין הראשון נערך מפקד שני, ונמצא שהאוכלוסייה גדלה פי 1.5.
הניחו שהאוכלוסייה גדלה בצורה מעריכית.
פי כמה גדלה האוכלוסייה 13 שנים אחרי מפקד האוכלוסין הראשון?
23. ערכה של דירה יורד בכל שנה באחוז מסוים.
ידוע כי לאחר 4 שנים ירד ערך הדירה ב-32% לעומת ערכה ההתחלתי.
א. מצאו איזה אחוז מערכה מאבדת הדירה בכל שנה.
ב. מצאו איזה אחוז מערכה מאבדת הדירה תוך 7 שנים.
24. משקלו של חומר רדיואקטיבי קטן פי 2 תוך 8 שנים.
כמות החומר קטנה בכל שנה בצורה מעריכית.
א. כמה אחוזים ממשקלו מפסיד החומר בתוך 5 שנים?
ב. אם משקל החומר כיום הוא 40 גרם, מה היה משקלו לפני 24 שנים?
25. אדם קנה אופנוע חדש. ערך האופנוע יורד בצורה מעריכית.
כעבור 6 שנים מיום הקנייה ירד ערך האופנוע ב-40%.
א. בכמה אחוזים ירד ערך המכונית כעבור 4 שנים מיום הקנייה?
ב. 8 שנים לאחר הקנייה היה מחיר האופנוע 20,242 שקלים.
מה היה מחיר האופנוע בזמן קנייתו?
26. בינואר 2013 קנה אדם מגרש לבנייה. עד ינואר 2017 ירד מחיר המגרש
בכל שנה באחוז קבוע, ובסך הכול בתקופה זו ירד מחיר המגרש ב-45.3%.
א. מצאו את האחוז הקבוע שבו ירד מחיר המגרש מדי שנה.
ב. בינואר 2017 התקבל אישור לתכניות בנייה על המגרש.
החל בתאריך זה חלה מדי שנה עלייה במחיר המגרש באחוז קבוע הגדול פי 1.5
מהאחוז שמצאתם בסעיף א'.
מצאו בכמה אחוזים היה גבוה מחיר המגרש בינואר 2021 לעומת מחירו בינואר 2003.

תשובות:

1. 1.2. 2. א. 1.3. ב. 25,451 עופות. 3. א. 110,164,860. ב. 7,140,618.1. 4. $1.861 \cdot 10^6$.
5. א. 1.2. ב. 20%. 6. א. 0.9. ב. 10%. 7. 241,279 תושבים. 8. 98.24 מ"ק.
9. א. 5.3%. ב. 71,213 חידקים. 10. א. 18,226.8 שקלים. ב. 11.75%. 11. 6.435%.
12. 20.74%. 13. א. 1.0891. ב. 8.91%. 14. א. 0.978. ב. 525 גרם. ג. לא.
15. א. 4%. ב. יותר מ-400. 16. 5.77%. 17. 2.21%. 18. בתכנית ל-5 שנים, כי $8.15\% > 8.45\%$.
19. תכנית א'. 20. א. 0.9441. ב. 31,555 שקלים. 21. א. 0.0417 (4.17%). ב. 0.7113.
22. 2.407. 23. א. 9.191%. ב. 49.08%. 24. א. 35.16%. ב. 320 גרם.
25. א. 28.86%. ב. 40,000 שקלים. 26. א. 14%. ב. 17.25%.

דוגמה:

אדם הפקיד סכום כסף בבנק. סכום זה גדל באחוז קבוע בכל שנה.
4 שנים מיום ההפקדה היה הסכום 1,645 שקלים, וכעבור 3 שנים נוספות היה הסכום 1,850.5 שקלים.
בכמה אחוזים גדל בכל שנה סכום הכסף?

פתרון:

דרך א' – נסמן ב- $f(0)$ את הסכום שהופקד בתחילה.
4 שנים אחר כך היה הסכום 1,645 שקלים ולכן $f(4) = 1645$.
כעבור 3 שנים נוספות (כלומר 7 שנים מיום ההפקדה הראשונה) היה הסכום 1,850.5 שקלים ולכן $f(7) = 1850.5$.

$$\begin{cases} f(7) = 1850.5 \\ f(4) = 1645 \end{cases}$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$\begin{cases} f(0) \cdot q^7 = 1850.5 \\ f(0) \cdot q^4 = 1645 \end{cases}$$

$$\text{נבצע חילוק משוואות: } \frac{f(0) \cdot q^7}{f(0) \cdot q^4} = \frac{1850.5}{1645}$$

נקבל: $q^3 = 1.1249$ ומכאן $q = \sqrt[3]{1.1249} = 1.04$. מקדם הגדילה הוא $q = 1.04$.

עלינו לחשב את אחוז הריבית השנתי. נציב בנוסחה $q = 1 + \frac{p}{100}$.

$$\text{נקבל: } 1.04 = 1 + \frac{p}{100} \text{ ומכאן } p = 4.$$

לסיכום, סכום הכסף גדל בכל שנה ב-4%.

דרך ב' – נסמן ב- $f(0)$ את סכום הכסף 4 שנים מיום ההפקדה, כלומר $f(0) = 1645$.
כעבור 3 שנים היה הסכום 1,850.5 שקלים, כלומר $f(3) = 1850.5$.
נפרק את $f(3)$ לפי הנוסחה ונקבל: $f(3) = f(0) \cdot q^3$.
נציב ונקבל: $1850.5 = 1645 \cdot q^3$, כלומר $q^3 = 1.1249$ ומכאן $q = 1.04$.
גם בדרך זו נקבל שסכום הכסף גדל בכל שנה ב-4%.

27. אוכלוסיית תושבים בעיר מסוימת מתרבה באחוז קבוע בכל שנה.
נתון כי בעוד 3 שנים יהיו בעיר 34,000 תושבים ובעוד 8 שנים יהיו בעיר 49,960 תושבים.
א. חשבו את מקדם הגדילה השנתי (q) בפונקציה $f(t) = f(0) \cdot q^t$, המתארת את כמות התושבים בעיר t שנים מהיום.
ב. כמה תושבים יש בעיר כיום?

28. ערכה של מכונית יורד בכל שנה באחוז קבוע.
ידוע כי מחירה של המכונית לפני 4 שנים היה 84,600 שקלים, ומחירה של המכונית בעוד 5 שנים יהיה 64,315 שקלים.
א. מהו מחירה הנוכחי של המכונית?
ב. בכמה אחוזים יורד מחיר המכונית בכל שנה?

29. חומר רדיואקטיבי מאבד בכל יום חלק מסוים ממשקלו. נתון כי בעוד שלושה ימים יהיה משקלו כפול מאשר בעוד שמונה ימים. מצאו איזה חלק ממשקלו מאבד החומר מדי יום.
30. כמות האצות באגם מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי במדידה שנערכה לפני 5 שנים היו באגם 8,000 ק"ג אצות, ובמדידה שנערכה לפני שנה התברר כי כמות האצות באגם גדלה ב- 1,724 ק"ג. כמה ק"ג אצות יש באגם כיום?
31. אדם הפקיד בשני בנקים, A ו-B, באותו יום את אותו סכום כסף. בכל אחד מהבנקים הסכום גדל באחוז קבוע כל שנה. כעבור 6 שנים מיום ההפקדה היה הסכום בבנק A 177,156 שקלים, ובבנק B היה הסכום 231,306 שקלים. כעבור 4 שנים נוספות היה הסכום בבנק A 259,374 שקלים. מצאו כמה שקלים היו בבנק B כעבור 4 שנים נוספות (כלומר 10 שנים לאחר ההפקדה הראשונה).
32. כמות החיידקים בשתי תרביות, א' ו-ב', קטנה בצורה מעריכית. בשעה 9:00 בבוקר היה בתרבית א' מספר מסוים של חיידקים, ובשעה 11:00 בבוקר נותרו בה $\frac{1}{3}$ ממספר החיידקים שהיו בשעה 9:00. בשעה 9:00 בבוקר היו בתרבית ב' 10,000 חיידקים, ובשעה 11:00 נותרו בה 8,100 חיידקים. א. מצאו איזה חלק ממספר החיידקים המקורי נותר בתרבית א' בשעה 13:00 בצהריים. ב. בשעה 13:00 בצהריים היה מספר החיידקים בשתי התרביות שווה. מצאו את מספר החיידקים שהיה בתרבית א' בשעה 9:00 בבוקר.
33. מחומר רדיואקטיבי נותרה (כעבור מספר שנים) 70% מהכמות המקורית, וכעבור שנתיים נוספות נותרה כמות של 44.8% מהכמות המקורית. כמה אחוזים מאבד החומר ממשקלו בכל שנה?
34. מחירה של מכונית יורד בכל שנה באחוז קבוע. כעבור מספר שנים היה ערכה $\frac{2}{3}$ מערכה המקורי וכעבור שנתיים נוספות היה ערכה $\frac{2}{5}$ מערכה המקורי. בכמה אחוזים יורד ערכה של המכונית בכל שנה?

תשובות:

27. א. $q = 1.08$. ב. 26,990. 28. א. 74,896 שקלים. ב. 3%. 29. 0.1294 (12.94%). 30. 10,210 ק"ג. 31. 404,555.8 שקלים. 32. א. $\frac{1}{9}$. ב. 59,049 חיידקים. 33. 20%. 34. 22.54%.

מציאת הזמן t

בחלק זה נעסוק בבעיות שהנעלים בהן יהיה הזמן t . מכיוון ש- t מופיע במעריך החזקה נקבל משוואות מהצורה $q^t = b$ כאשר הנעלם הוא t .

נמצא את t לפי הכלל: אם $q^t = b$ אז $t = \frac{\ln b}{\ln q}$.

את הערך המספרי של t נמצא בעזרת מחשבון.

דוגמה:

אדם מפקיד סכום של 20,000 שקלים בריבית שנתית של 12%. מצאו לאחר כמה שנים יעמוד לרשותו סכום של 44,214 שקלים.

פתרון:

האדם הפקיד סכום התחלתי של 20,000 שקלים ולכן $f(0) = 20000$.

נחשב את מקדם הגדילה (q) לפי הנוסחה $q = 1 + \frac{p}{100}$.

הריבית השנתית היא 12% ולכן $p = 12$. נקבל: $q = 1 + \frac{12}{100} = 1.12$.

הסכום הסופי הוא 44,214 שקלים ולכן $f(t) = 44214$.

נציב את $f(t)$ לפי הנוסחה ונקבל: $f(0) \cdot q^t = 44214$.

נציב $f(0) = 20000$, $q = 1.12$ ונקבל: $20000 \cdot (1.12)^t = 44214$.

$$1.12^t = 2.2107$$

נמצא את t בעזרת המחשבון: $t = \frac{\ln 2.2107}{\ln 1.12} = 7$.

לסיכום, לאחר 7 שנים יעמוד לרשותו סכום של 44,214 שקלים.

דוגמה:

חומר רדיואקטיבי מאבד $\frac{1}{4}$ ממשקלו בתוך 7 שעות.

כמות החומר הנוכחית היא 580 גרם.

א. בעוד כמה שעות תהיה כמות החומר 492 גרם?

ב. לפני כמה שעות הייתה כמות החומר 680 גרם?

פתרון:

א. **שלב א'** – נמצא את מקדם הדעיכה (q). על פי הנתון, החומר מאבד $\frac{1}{4}$ ממשקלו

בתוך 7 שעות כלומר כמות החומר כעבור 7 שעות מהווה $\frac{3}{4}$ מהכמות ההתחלתית.

נסמן ב- $f(0)$ את הכמות ההתחלתית וב- $f(7)$ את הכמות כעבור 7 שעות,

ונוכל לרשום $f(7) = \frac{3}{4} \cdot f(0)$. נציב את $f(7)$ לפי הנוסחה ונקבל: $f(0) \cdot q^7 = \frac{3}{4} f(0)$.

נצמצם $f(0)$ ונקבל: $q^7 = \frac{3}{4}$ ומכאן $q = \sqrt[7]{\left(\frac{3}{4}\right)} = 0.9597$.

שלב ב' – הכמות הנוכחית היא $f(0) = 580$. עלינו למצוא בעוד כמה שעות תהיה כמות

החומר 492 גרם ולכן נסמן $f(t) = 492$.

נפרק את $f(t)$ לפי הנוסחה. נקבל: $f(0) \cdot q^t = 492$.

נציב ונקבל $580 \cdot 0.9597^t = 492$, ומכאן $0.9597^t = 0.8483$.

הפתרון הוא $t = \frac{\ln 0.8483}{\ln 0.9597} = 4$. לסיכום, כמות החומר תהיה 492 גרם בעוד 4 שעות.

ב. עלינו למצוא לפני כמה שעות הייתה כמות החומר 680 גרם ולכן נסמן $f(t) = 680$.

נפרק את $M(t)$ לפי הנוסחה ונקבל: $f(0) \cdot q^t = 680$

$$580 \cdot 0.9597^t = 680$$

$$0.9597^t = 1.1724$$

$$t = \frac{\ln 1.1724}{\ln 0.9597} = -3.867$$

כמות של 680 גרם התקבלה עבור $t = -3.867$. מכיוון ש- t שלילי, הרי שכמות זו התקבלה 3.867 שעות לפני הזמן שמוגדר כזמן אפס. לסיכום, כמות החומר הייתה 680 גרם לפני 3.867 שעות.

דוגמה:

חומר רדיואקטיבי מאבד בכל שעה 2% ממשקלו.

מצאו בתוך כמה שעות מאבד החומר 29% ממשקלו.

פתרון:

החומר מאבד בכל שעה 2% ממשקלו ולכן לפנינו בעיית דעיכה.

נחשב את מקדם הדעיכה (q) לפי הנוסחה $q = 1 - \frac{p}{100}$.

$$\text{נציב } p = 2 \text{ ונקבל: } q = 1 - \frac{2}{100} = 0.98$$

עלינו לחשב בתוך כמה שעות מאבד החומר 29% ממשקלו.

כדי שהחומר יאבד 29% ממשקלו צריך שמשקלו הסופי $f(t)$

יהיה נמוך ב- 29% ממשקלו ההתחלתי $f(0)$.

$100\% - 29\% = 71\%$ ולכן צריך שמשקלו הסופי יהווה 71% ממשקלו ההתחלתי.

$f(t)$ מהווה 71% מ- $f(0)$, כלומר $f(t) = \frac{71}{100} \cdot f(0)$ ומכאן $f(t) = 0.71 \cdot f(0)$.

נציב את $f(t)$ לפי הנוסחה ונקבל: $f(0) \cdot q^t = 0.71 \cdot f(0)$

נצמצם ב- $f(0)$ ונקבל: $0.98^t = 0.71$

$$t = \frac{\ln 0.71}{\ln 0.98} = 16.95$$

לסיכום, החומר מאבד 29% ממשקלו בתוך 16.95 שעות.

דוגמה:

ערכה של מכונה א' 80,000 שקלים, וערכה של מכונה ב' 60,000 שקלים.

מכונה א' מאבדת 8% מערכה בכל שנה.

מכונה ב' מאבדת 3% מערכה בכל שנה.

מצאו בעוד כמה שנים יהיה ערכן של שתי המכונות שווה.

פתרון:

נסמן ב- $f(0)$ את ערכה ההתחלתי של מכונה א', כלומר $f(0) = 80000$.

מכונה זו מאבדת 8% מערכה בכל שנה ולכן מקדם הדעיכה שלה הוא $q = 1 - \frac{8}{100} = 0.92$.

נסמן ב- $g(0)$ את ערכה ההתחלתי של מכונה ב', כלומר $g(0) = 60000$.

מכונה זו מאבדת 3% מערכה בכל שנה ולכן מקדם הדעיכה שלה הוא $a = 1 - \frac{3}{100} = 0.97$.

כדי שערכן של שתי המכונות יהיה שווה לאחר t שנים,

צריך שיתקיים $f(t) = g(t)$.

על פי הנוסחה $f(t) = f(0) \cdot q^t$ נקבל: $f(t) = 80000 \cdot 0.92^t$.

על פי הנוסחה $g(t) = g(0) \cdot q^t$ נקבל: $g(t) = 60000 \cdot 0.97^t$.

נשווה ונקבל: $80000 \cdot (0.92)^t = 60000 \cdot (0.97)^t$

$$\frac{(0.92)^t}{(0.97)^t} = \frac{60000}{80000}$$

$$\left(\frac{0.92}{0.97}\right)^t = 0.75$$

$$0.9485^t = 0.75$$

$$t = \frac{\ln 0.75}{\ln 0.9485} = 5.44$$

לסיכום, ערכן של שתי המכונות יהיה שווה כעבור 5.44 שנים.

תרגילים

1. כמות האצות באגם גדלה פי 2 בכל שנה לעומת הכמות בשנה שקדמה לה. היום יש בבריכה 2,400 ק"ג אצות. מצאו בעוד כמה שנים יהיו באגם 76,800 ק"ג אצות.
2. כמות המים בבריכה קטנה בכל חודש ב-10% לעומת החודש שקדם לו. בתוך כמה חודשים ירדה כמות המים מ-400,000 מ"ק ל-236,196 מ"ק?
3. כמות העופות הדורסים בשמורת טבע גדלה בכל שנה פי 1.5. בספירה הראשונה נספרו 27,200 עופות בשמורה. הפונקציה $f(t) = f(0) \cdot q^t$ מתארת את מספר העופות בשמורה t שנים מאז הספירה הראשונה. א. הבע את $f(t)$ באמצעות t בלבד. ב. נתון שבעוד t שנים יהיו בשמורה 309,825 עופות. מצא את הערך של t .
4. במדינה מסוימת יש היום 30,000,000 תושבים. בכל שנה גדל מספר התושבים ב-2.8%. לפני כמה שנים היו במדינה 20,000,000 תושבים?
5. כמות העץ ביער גדלה בכל שנה ב-14.2%. כיום יש ביער $5 \cdot 10^4$ טונות של עץ. א. בעוד כמה שנים יהיו ביער 10^7 טונות של עץ? ב. לפני כמה שנים היו ביער 10^3 טונות של עץ?
6. בשמורת טבע בוצעו שתי ספירות של אוכלוסיית העופות הדורסים. בספירה הראשונה נספרו 1,100 עופות. בספירה השנייה, שבוצעה 8 חודשים אחר כך, נספרו 1,510 עופות. כעבור כמה חודשים מהספירה הראשונה יהיו בשמורה 4,800 עופות דורסים? הניחו גדילה מעריכית.

7. מכונה מאבדת בכל שנה אחוז קבוע מערכה. ערכה של המכונה היום הוא 72,500 שקל. ערך המכונה בעוד 3 שנים יהיה 56,455 שקלים. מצאו בעוד כמה שנים יהיה ערך המכונה 31,493 שקלים.
8. אדם הפקיד ב-1.1.93 סכום של 470,000 שקלים בריבית שנתית של 8%. ב-1.1.99 העלו את הריבית השנתית ל-9.5%. מצאו באיזה תאריך יעמדו לרשותו 1,174,116 שקלים.
9. חומר רדיואקטיבי מאבד בכל שעה 4% ממשקלו. ביום א' בשעה 7:00 בבוקר הייתה כמות החומר 625 גרם. באיזה יום בשבוע ובאיזו שעה יהיה משקלו של החומר 143.76 גרם?
10. בתרבות חיידקים המתרבה באופן מעריכי גדל מספר החיידקים ב- $p\%$ בכל שעה. בשעה 7:00 בבוקר הכילה התרבות 45,000 חיידקים. לאחר שלוש שעות, בשעה 10:00 בבוקר, הכילה התרבות 51,500 חיידקים. א. מצא את אחוז הגדילה p בשלוש השעות הראשונות. ב. בשעה 10:00 בבוקר הוסיפו לתרבות חומר, כך שאחוז גדילת החיידקים הוא $2p\%$. מצאו באיזו שעה יהיו בתרבות 95,360 חיידקים.
11. ערכה של מכונת ייצור שנרכשה ב-17,200 שקלים ירד בתוך 6 שנים עד 12,400 שקלים. בשנים הבאות קטן אחוז הפחת ב-2% לעומת אחוז הפחת הקודם. כעבור כמה שנים מרגע הרכישה הגיע ערך המכונה ל-8,000 שקלים?
12. בעיר מסוימת שבה האוכלוסייה מונה 300,000 תושבים ומספר התושבים גדל בכל שנה ב-4%, הוחלט שכאשר יעלה מספר התושבים על 400,000 ייצא לפועל "פרויקט רכבת תחתית". א. בתוך כמה שנים אמור הפרויקט לצאת לפועל? ב. מתברר כי הפרויקט עדיין לא בוצע, וכיום מתגוררים בעיר 600,000 תושבים. לפני כמה שנים אמור היה הפרויקט לצאת לפועל?
13. כמות הדגים בבריכה גדלה בכל חודש פי 1.08. מצא בתוך כמה חודשים תגדל כמות הדגים פי 2.
14. ערכה של תמונה מסוימת עולה בכל שנה ב-6%. מצא בתוך כמה שנים יגדל ערך התמונה פי 4.
15. כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בכל שעה ב-6.4% לעומת השעה שלפניה. מצא בתוך כמה שעות תקטן כמות החומר פי 2.

16. כמות העץ ביער גדלה בכל שנה ב- 7.1%.
מצא בתוך כמה שנים תגדל כמות העץ ב- 53%.
17. מכונה מאבדת בכל שנה $\frac{1}{8}$ מערכה.
בתוך כמה שנים יהיה מחיר המכונה $\frac{1}{3}$ מערכה המקורי?
18. חומר רדיואקטיבי מפסיד בכל שנה $\frac{1}{10}$ ממשקלו.
א. מצא בתוך כמה שנים יפסיד החומר $\frac{2}{3}$ ממשקלו.
ב. איזה חלק ממשקלו יפסיד החומר בתוך 6 שנים?
19. ההכנסה הלאומית במדינה מסוימת גדלה בתוך 6 שנים ב- 14%.
מצא בתוך כמה שנים תוכפל ההכנסה הלאומית.
20. מספר התושבים במדינה מסוימת גדל בכל שנה בצורה מעריכית.
ידוע כי במהלך העשור האחרון גדל מספר התושבים פי 1.5.
א. מצאו את אחוז הגדילה השנתי באוכלוסייה.
ב. מצאו בתוך כמה שנים יגדל מספר התושבים פי 4.
21. אחוז הריבוי הטבעי של תושבים במדינה מסוימת הוא כזה, שמספר התושבים גדל פי 3 במשך 40 שנה. אם אחוז הריבוי הטבעי הזה נשמר קבוע מצא בתוך כמה שנים יגדל מספר התושבים במדינה זו פי 5.
22. כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בכל שעה בצורה מעריכית כך שמ- 4 ק"ג חומר נותרו אחרי 7 שעות 770 גרם חומר.
מצאו בתוך כמה שעות מאבד החומר 61% ממשקלו.
23. חומר רדיואקטיבי מאבד $\frac{1}{8}$ ממשקלו בתוך 15 שנה.
א. איזה חלק ממשקל החומר נותר בכל שנה לעומת השנה שלפניה?
ב. בתוך כמה שנים מאבד החומר $\frac{3}{5}$ ממשקלו?
24. כמות העץ ביער גדלה בתוך 7 שנים ב- 31.6%. בהנחה שאחוז הגדילה השנתי הוא קבוע, מצאו בתוך כמה שנים גדלה כמות העץ ב- 54%.
25. חומר רדיואקטיבי מאבד $\frac{1}{5}$ ממשקלו בתוך 10 שנים.
מצא בתוך כמה שנים מאבד החומר $\frac{2}{5}$ ממשקלו.

26. מכונת ליטוש מאבדת $\frac{1}{4}$ מערכה בתוך 3 שנים.
ידוע כי כאשר מאבדת המכונה 90% מערכה היא מפורקת ונמכרת בחלקים.
בתוך כמה שנים (בערך) תפורק המכונה?
27. תרופה מסוימת הנלקחת מדי יום בכמות קבועה, הורגת במשך 6 ימים שליש מחיידקי מחלה. הרס החיידקים נעשה בצורה מעריכית.
כאשר כמות החיידקים יורדת ל- 50% מהכמות ההתחלתית, ניתן להפחית את כמות התרופה היומית מבלי לפגוע בקצב הרס החיידקים.
לאחר כמה ימים בערך ניתן להפחית את כמות התרופה היומית?
28. במדינה מסוימת נערך לראשונה מפקד אוכלוסין. 7 שנים לאחר מפקד האוכלוסין הראשון נערך מפקד שני, ונמצא שהאוכלוסייה גדלה פי 2.
א. פי כמה גדלה האוכלוסייה 17 שנים לאחר המפקד הראשון?
ב. כמה שנים לאחר המפקד הראשון גדלה האוכלוסייה ב- 65%?
29. כמות חומר רדיואקטיבי פוחתת בצורה מעריכית. מ- 1/10/2021 עד 1/10/2024 פחתה הכמות של החומר הרדיואקטיבי ב- 30%.
א. חשבו בכמה אחוזים פוחתת כמות החומר הרדיואקטיבי בכל שנה.
ב. כמה אחוזים מהחומר הרדיואקטיבי שהיה ב- 1/10/2021 נשארו ב- 1/10/2023?
ג. כעבור כמה שנים כמות החומר שהייתה ב- 1/10/2024 תפחת ב- 36%?
30. בתאריך 1/1/2012 התפרסמה תחזית בנוגע לגודל האוכלוסייה בעיר מסוימת.
לפי תחזית זו, ב- 10 השנים הקרובות יקטן כל שנה מספר התושבים בעיר ב- 4%,
וכעבור שנים אלה יגדל כל שנה מספר התושבים ב- 3%.
בהנחה שהתחזית תתממש, כעבור כמה שנים מיום התחזית יהיה מספר התושבים בעיר שווה למספר התושבים שהיו בעיר ביום התחזית?
31. ערך הקרקע באזור מסוים בארץ עלה באחוז קבוע בכל שנה במשך 4 שנים, החל מינואר שנת 2000 עד ינואר שנת 2004. בינואר שנת 2004 היה ערך הקרקע גבוה ב- 36% מערכה בינואר שנת 2000. מינואר שנת 2004 והלאה ירד ערך הקרקע בכל שנה באחוז הגדול פי 1.5 מאחוז העלייה שלו מדי שנה ב- 4 השנים הקודמות.
מתי הגיע ערך הקרקע ל- 48.9% מערכה בינואר שנת 2000?
32. כמות העצים ביער נבדקה לראשונה בתחילת הקיץ.
החל מבדיקה זו גדלה הכמות ב- 6% בכל שבוע.
כעבור 4 שבועות כרתו 40% מכמות העצים שהייתה בתחילת הקיץ.
בהנחה שכמות העצים המשיכה לגדול באותו קצב,
מצאו כעבור כמה שבועות נוספים הייתה כמות העצים שווה לכמות שבתחילת הקיץ.

33. חומר רדיואקטיבי מאבד בכל שעה 4% ממשקלו. כעבור 7 שעות הוסיפו לחומר 60% מהכמות המקורית שלו והוא המשיך להתפרק באותו קצב. כעבור כמה שעות נוספות היה משקלו של החומר מחצית ממשקלו המקורי?
34. מחירה של דירת גן הוא 900,000 שקלים. מחירה של דירת גג הוא 750,000 שקלים. כל אחת מהדירות מאבדת בכל שנה 5% מערכה. א. מצאו בעוד כמה שנים יהיה ערכן של שתי הדירות יחד 891,594 שקלים? ב. מצאו את ערכה של כל אחת מהדירות במועד שמצאת בסעיף א'.
35. כמות הדגים באגם א' גדלה בכל שנה פי 2. כמות הדגים באגם ב' גדלה בכל שנה פי 4. בזמן מסוים היו 3,000 דגים באגם א' ו-4,000 דגים באגם ב'. כעבור כמה שנים מהזמן המסוים יהיו בשני האגמים יחד 280,000 דגים?
36. חומר א' מאבד בכל שעה 75% ממשקלו וחומר ב' מאבד בכל שעה 50% ממשקלו. נתונה תערובת הכוללת 48 ק"ג חומר א' ו-64 ק"ג חומר ב'. כעבור כמה שעות סכום הכמויות של שני החומרים בתערובת יהיה 8.75 ק"ג?
37. בקיבוץ יש שתי בריכות. בבריכה הראשונה יש היום 7,000 טונות דגים, ובבריכה השנייה יש היום 5,000 טונות דגים. קצב התרבות הדגים בבריכה הראשונה הוא 10% בחודש, וקצב התרבות הדגים בבריכה השנייה הוא 12% בחודש. מצאו בעוד כמה חודשים תהיה כמות הדגים בבריכה הראשונה שווה לכמות הדגים בבריכה השנייה.
38. ערכה של מכונה א' 120,000 שקלים, וערכה של מכונה ב' 90,000 שקלים. מכונה א' מאבדת 6% מערכה בכל שנה. מכונה ב' מאבדת 3% מערכה בכל שנה. א. מצאו בעוד כמה שנים יהיה ערכן של שתי המכונות שווה. ב. מצאו את ערכה של כל מכונה, כשערך שתי המכונות יהיה שווה.
39. בקיבוץ יש שתי בריכות דגים שהתרבות הדגים בהן היא מעריכית. משקלם של הדגים בבריכה א' גדול ב-16.5% ממשקלם של הדגים בבריכה ב'. משקלם של הדגים שבבריכה א' גדל ב-2.3% בכל שבוע. משקלם של הדגים שבבריכה ב' גדל ב-3.4% בכל שבוע. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים בבריכה 2 גדולה פי 1.2 מכמות הדגים בבריכה א'?
40. ביער א' היו בתאריך 1.1.2001 $4 \cdot 10^3$ טון של עץ, וב-1.1.2002 היו בו $6 \cdot 10^3$ טון של עץ. ביער ב' היו בתאריך 1.1.2001 $8 \cdot 10^3$ טון של עץ, וב-1.1.2002 היו בו $9 \cdot 10^3$ טון של עץ. מצאו כמה שנים לאחר 1.1.2001 הייתה כמות שווה של עץ בשני היערים.

41. ביום הקמת מדינה היו בשמורת טבע א' 480 ציפורים, ובשמורת טבע ב' היו 600 ציפורים. לאחר 10 שנים היו בשמורה א' 720 ציפורים. קצב הגדילה השנתי של מספר הציפורים בשמורה א' גדול פי 1.03 מקצב הגדילה השנתי של מספר הציפורים בשמורה ב'. בשתי השמורות הגדילה היא מעריכית. מצאו כעבור כמה שנים מיום הקמת המדינה יהיה מספר הציפורים בשמורה א' גדול פי 2 ממספר הציפורים בשמורה ב'.
42. בתאריך 1/12/2009 היו בבריכה אחת 120,000 דגים, שכמותם גדלה כל שבוע ב-3%. בבריכה שנייה היו בתאריך זה 100,000 דגים, שכמותם גדלה כל שבוע ב-5%.
א. אחרי כמה שבועות מהתאריך 1/12/2009 יהיו כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
ב. אחרי כמה שבועות מהיום שבו היו כמויות הדגים שוות, תהיה כמות הדגים בבריכה השנייה גדולה פי 3 מכמות הדגים בבריכה הראשונה?
43. נתונות כמויות שוות של שני חומרים רדיואקטיביים, חומר I וחומר II. החומרים מתפרקים בצורה מעריכית. כמות חומר I פחתה ב-15% במשך 6 שנים. כמות חומר II פחתה ב-25% במשך 5 שנים. מצאו כעבור כמה שנים כמות חומר II תהיה קטנה פי 2 מכמות חומר I. (מהרגע שבו היו הכמויות שוות).

תשובות:

1. 5 שנים. 2. 5 חודשים. 3. א. $M(t) = 27200 \cdot 1.5^t$. ב. 6. 4. 14.68 שנים.
5. א. 39.90 שנים. ב. 29.46 שנים. 6. 37.2 חודשים. 7. 10 שנים. 8. 1.1.2004.
9. יום ב' בשעה 19:00. 10. א. 4.6%. ב. בשעה 17:00. 11. 19.03 שנים.
12. א. 7.335 שנים. ב. 10.34 שנים. 13. 9 חודשים. 14. 23.79. 15. 10.48 שעות. 16. 6.2 שנים.
17. 8.227 שנים. 18. א. 10.43 שנים. ב. 0.4686. 19. 31.85 שנים. 20. א. 4.138%. ב. 34.19 שנים.
21. 58.6 שנים. 22. 4 שעות. 23. א. 0.9911 (99.11%). ב. 102.5 שנים. 24. בערך 11 שנים.
25. 22.89 שנים. 26. 24 שנים. 27. 10.26 ימים. 28. א. 5.384. ב. 5.057 שנים.
29. א. 11.21%. ב. 78.84%. ג. 3.754 שנים. 30. 23.81 שנים. 31. ינואר 2012. 32. 2.539 שבועות.
33. 24.36 שעות. 34. א. 12 שנים. ב. 486,324 שקלים, 405,270 שקלים. 35. 3 שנים.
36. 3 שעות. 37. 18.67 חודשים. 38. א. 9.157 שנים. ב. 68,094 שקלים. 39. 31.33 שבועות.
40. 2.41 שנים. 41. 31 שנים. 42. א. 9.48 שבועות. ב. 57.13 שבועות. 43. 22.76 שנים.

זמן מחצית החיים

זמן מחצית החיים של חומר הוא הזמן שעובר עד שמכמות מסוימת של חומר נותרת מחצית הכמות.

דוגמה:

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 10 שנים. מצאו את מקדם הדעיכה (q).

פתרון:

נסמן ב- $f(0)$ את הכמות ההתחלתית של החומר. כמו כן, נסמן ב- $f(10)$ את כמות החומר לאחר 10 שנים. על פי הנתון, זמן מחצית החיים הוא 10 שנים, כלומר $f(10) = \frac{1}{2}f(0)$.

נציב את $f(10)$ לפי הנוסחה ונקבל: $f(0) \cdot q^{10} = \frac{1}{2}f(0)$

נצמצם $f(0)$. נקבל: $q^{10} = \frac{1}{2}$ ומכאן $q = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt[10]{0.5} = 0.933$

לסיכום, בסיס השינוי הוא $q = 0.933$.

דוגמה:

חומר רדיואקטיבי מאבד בכל שנה 2.284% ממשקלו. מהו זמן מחצית החיים של החומר?

פתרון:

החומר מאבד בכל שנה 2.284% ממשקלו. מקדם הדעיכה הוא $q = 1 - \frac{p}{100} = 1 - \frac{2.284}{100} = 0.97716$. עלינו למצוא את זמן מחצית החיים.

זמן מחצית החיים הוא הזמן שעובר עד שמכמות מסוימת של חומר נותרת מחצית הכמות. אם נסמן ב- $f(0)$ את הכמות ההתחלתית, אז זמן מחצית החיים הוא הזמן t שעובר עד שהכמות $f(t)$ תהיה שווה מחצית מהכמות $f(0)$ כלומר יתקיים: $f(t) = \frac{1}{2}f(0)$.

נציב את $f(t)$ לפי הנוסחה ונקבל: $f(0) \cdot q^t = \frac{1}{2}f(0)$.

נציב $q = 0.97716$: $f(0) \cdot 0.97716^t = \frac{1}{2}f(0)$. נצמצם $M(0)$ ונקבל: $0.97716^t = 0.5$

נקבל $t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.97716} = 30$. לסיכום, זמן מחצית החיים של החומר הוא 30 שנה.

תרגילים

1. הכמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. נתון כי זמן מחצית החיים של החומר הוא 15 שנים. מצאו את מקדם הדעיכה השנתי (q) המתאים לתהליך.
2. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מסוים הוא 30 שנה. כמות החומר קטנה בצורה מעריכית.
א. מצאו את מקדם הדעיכה השנתי (q) המתאים לתהליך.
ב. מצאו כמה גרם יישארו מ-100 גרם של חומר זה:
(1) כעבור 10 שנים. (2) כעבור 55 שנים.

3. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מסוים הוא 40 שנה. כמות החומר קטנה בצורה מעריכית. אם משקל החומר היום הוא 1,000 גרם, תוך כמה שנים יהיה משקלו של החומר 600 גרם?
4. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 18 שנה. כמות החומר קטנה בצורה מעריכית. מצאו איזה אחוז מאבד החומר בכל שנה.
5. חומר רדיואקטיבי מסוים מאבד בכל שנה 2.284% ממשקלו. כמות החומר קטנה בצורה מעריכית. מהו זמן מחצית החיים של החומר?
6. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 6 שנים.
א. כמה אחוזים ממשקלו מאבד החומר בתוך 10 שנים?
ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של פחות מ- 4% מהכמות המקורית?
7. מ- 80 גרם של חומר רדיואקטיבי א' נותרים 59 גרם בתוך 10 שנים. ידוע כי זמן מחצית החיים של חומר א' שווה לזמן שבו חומר ב' מאבד 20% ממשקלו. מהו זמן מחצית החיים של חומר ב'?
8. חומר רדיואקטיבי א' מאבד $\frac{1}{3}$ ממשקלו בתוך 6 שנים. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי ב' הוא 15 שנים. א. מהו זמן מחצית החיים של חומר א'?
ב. כמה אחוזים ממשקלו מאבד חומר ב' בזמן שחומר א' מאבד מחצית ממשקלו?
9. במעבדה יש עכשיו 600 גרם חומר A שזמן מחצית החיים שלו הוא 6 שנים, ו- 450 גרם חומר B שזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שנים. מצאו בעוד כמה שנים תהיה כמות החומר A שווה לכמות החומר B.
10. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מסוג A הוא 12 שנים, וזמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מסוג B הוא 27 שנים. משקלו הנוכחי של החומר מסוג A כפול ממשקלו של החומר מסוג B. מצאו בעוד כמה שנים משקלו של החומר מסוג B יהיה כפול ממשקלו של החומר מסוג A.

תשובות:

1. 0.9548. 2. א. 0.97716. ב. (1) 79.37 גרם. (2) 28.06 גרם. 3. 29.48 שנים.
4. 3.778%. 5. 30 שנים. 6. א. 68.5%. ב. יותר מ- 27.863 שנים.
7. 70.71 שנים. 8. א. 10.26 שנים. ב. 37.76%. 9. 6.23 שנים. 10. 43.2 שנים.

שאלות לחזרה – גדילה ודעיכה

1. כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית כך שכל יום מאבד החומר $p\%$ ממשקלו. ביום מסוים היו 800 גרם חומר. החומר נשמר במעבדה במשך 3 ימים ואז הוסיפו 200 גרם חומר לכמות הקיימת. כעבור 3 ימים נוספים היו 532 גרם חומר. חשב את p .
2. כמות העצים ביער מסוים גדלה בכל שנה, החל מינואר שנת 1980, באחוז מסוים, כך שכמות העצים הוכפלה עד ינואר 1986. לאחר 6 שנים אלה חל שינוי במזג אוויר וכמות העצים קטנה בכל שנה באחוז הקטן פי 2 מהאחוז שבו גדלה הכמות בשנים 1980–1986. באיזו שנה תגיע כמות העצים לכדי $\frac{1}{3}$ מהכמות שהייתה בינואר 1980?
3. ראובן לקח מהבנק הלוואה של N שקלים בריבית של 6% לשנה. כעבור 3 שנים הוא שילם לבנק תשלום ראשון של 15,730.48 שקלים. יתרת החוב המשיכה לשאת אותה ריבית, וכעבור שנתיים היא הסתכמה ב- 22,472 שקלים. א. (1) הביעו באמצעות N את יתרת החוב לאחר שראובן שילם לבנק את התשלום הראשון. (2) מה היה סכום ההלוואה שלקח ראובן מהבנק? ב. אם ראובן לא היה מחזיר חלק מההלוואה, כעבור כמה שנים היה החוב שלו לבנק גדול פי 1.58 מסכום ההלוואה שלקח?
4. כמות החיידקים בשתי תרביות, א' ו-ב', קטנה בצורה מעריכית. בשעה 9:00 בבוקר היה בתרבית א' מספר מסוים של חיידקים, ובשעה 11:00 בבוקר נותרו בה $\frac{1}{3}$ ממספר החיידקים. א. שלומית טענה כי בשעה 10:00 נותרו בתרבית א' $\frac{2}{3}$ ממספר החיידקים. האם שלומית צודקת? נמקו. ב. מצאו איזה חלק ממספר החיידקים המקורי נותר בתרבית א' בשעה 13:00 בצהריים. ג. בשעה 9:00 בבוקר היו בתרבית ב' 10,000 חיידקים, ובשעה 11:00 נותרו בה 8,100 חיידקים. בשעה 13:00 בצהריים היה מספר החיידקים בשתי התרביות שווה. מצאו את מספר החיידקים שהיה בתרבית א' בשעה 9:00 בבוקר.
5. מ-100 גרם חומר רדיואקטיבי I נשארו כעבור 6 שנים 73.5 גרם שלא התפרקו. א. מצא את זמן מחצית החיים של חומר I. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי II גדול פי 2 מזמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי I. ב. מצאו באיזה אחוז קטנה כל שנה כמות החומר II. ג. מצאו את הכמות של חומר II שממנה יישארו 80 גרם כעבור 6 שנים.

6. כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בכל שעה בצורה מעריכית.
מדען שקל את החומר הרדיואקטיבי שלוש פעמים באותו יום:
בשעה 6:00, בשעה 09:00 ובשעה 12:00.
מהשעה 6:00 עד השעה 9:00 איבד החומר 10 גרם ממשקלו.
א. סיגל טענה כי מהשעה 9:00 ועד השעה 12:00 מאבד החומר 10 גרם נוספים.
האם סיגל צודקת? נמקו.
ב. יעל טענה כי סיגל צודקת בתנאי שהכמות קטנה מעריכית בכל דקה.
האם יעל צודקת?
7. תרופה מסוימת הנלקחת מדי יום בכמות קבועה, הורגת במשך 7 ימים חמישית מחיידקי מחלה. הרס החיידקים נעשה בצורה מעריכית.
כאשר כמות החיידקים מגיעה ל- 50% מהכמות ההתחלתית, ניתן להפחית את כמות התרופה היומית מבלי לפגוע בקצב הרס החיידקים.
א. לאחר כמה ימים בערך ניתן להפחית את כמות התרופה היומית?
ב. כאשר כמות החיידקים מגיעה ל- 10% מהכמות ההתחלתית ניתן להפסיק את התרופה, והחיידקים הנותרים יומתו בעזרת שאריות התרופה שנשארה בגוף.
לאחר כמה ימים בערך אפשר להפסיק את מתן התרופה?
8. אדם קנה בית והחליט לשפץ אותו. לאחר סיום השיפוצים החל מחיר הבית לעלות בצורה מעריכית באחוז קבוע בכל שנה. כעבור 7 שנים היה מחיר הבית גבוה ב- 50% ממחירו לאחר סיום השיפוצים.
א. כעבור כמה שנים היה מחיר הבית גבוה פי 1.966 ממחירו לאחר סיום השיפוצים?
ב. בכמה אחוזים התייקר הבית 5 שנים אחרי סיום השיפוצים?
9. מספר העופות בשמורה גדל ב- 4% בכל חודש. בספירה ראשונה נספרה כמות מסוימת של עופות. לאחר 7 חודשים הוסיפו לשמורה כמות השווה ל- 40% מכמות העופות המקורית. כמה חודשים לאחר הספירה הראשונה תהיה בשמורה כמות עופות הגדולה ב- 134.9% מהכמות המקורית? הניחו שכמות העופות המשיכה לגדול באותו הקצב.
10. מחומר רדיואקטיבי נותרו 64% ממשקלו בתוך פרק זמן מסוים ו- 48% ממשקלו כעבור שעה נוספת.
א. מהו זמן מחצית החיים של החומר?
ב. כמה אחוזים ממשקלו מאבד החומר בתוך 8 שעות?
11. ביום הקמת מדינה כמות הציפורים שבשמורת טבע א' הייתה $\frac{2}{3}$ מכמות הציפורים שבשמורת טבע ב'.
קצב הגדילה השנתי של מספר הציפורים בשמורה א' גדול פי 1.06 מקצב הגדילה השנתי של מספר הציפורים בשמורה ב'. בשתי השמורות הגידול הוא מעריכי.
מצאו כעבור כמה שנים מיום הקמת המדינה יהיה מספר הציפורים בשמורה א' גדול פי 1.6 ממספר הציפורים בשמורה ב'.

12. בקיבוץ יש בריכת דגים. ביום מסוים בדקו ומצאו שיש בבריכה 60 טון דגים. ידוע כי כמות הדגים בבריכה גדלה ב- 6.5% בכל חודש. הדגים גודלו במשך 4 חודשים ואז נמכרו 20 טון דגים. הדגים הנותרים גודלו 4 חודשים נוספים באותו קצב גדילה ואז נמכרו שוב 20 טון דגים. מצאו תוך כמה חודשים נוספים יהיו בבריכה שוב 60 טון דגים.
13. מספר האנשים הנוכחי בעיר מסוימת הוא 192,000. בכל שנה גדל מספר התושבים ב- 5%. הפונקציה $f(x)$ מתארת את כמות האנשים בעיר כתלות בזמן x החל מהיום. א. רשמו את הפונקציה $f(x)$. ב. שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$.
14. מכונה לייצור דבק מאבדת $\frac{1}{7}$ מערכה בכל שנה. א. באיזה מחיר נקנתה המכונה אם בתוך 6 שנים הגיע מחירה ל- 79,314 שקלים? ב. הפונקציה $f(x)$ מתארת את מחיר המכונה כתלות בזמן x שעבר מהרגע שנקנתה. שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$.
15. בתרביית אחת היו בשעה 08:00 בבוקר 20,000 חיידקים, ובשעה 10:00 היו בתרביית 28,800 חיידקים. בתרביית שנייה היו בשעה 08:00 בבוקר 6,000 חיידקים, ובשעה 10:00 היו בתרביית 10,140 חיידקים. בכל אחת מהתרביות הגדילה היא מעריכית. א. באיזו שעה בקירוב יהיה מספר החיידקים בתרביית הראשונה גדול פי 1.9 ממספר החיידקים בתרביית השנייה? ב. בכמה אחוזים מספר החיידקים שהיו בשתי התרביות יחד בשעה 09:00 גדול ממספר החיידקים שהיו בשתי התרביות יחד בשעה 08:00?
16. כמות הדגים בבריכה גדלה בכל חודש ב- 8%. בזמן מסוים בדקו ומצאו שיש בבריכה 900 ק"ג דגים. כעבור t חודשים מכרו 900 ק"ג דגים. כעבור t חודשים נוספים היו בבריכה 5,400 ק"ג דגים. מצאו את t .
17. אדם הפקיד 120,000 שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית דריבית של 6% בשנה. לאחר t שנים משך מחשבונו 40,000 שקלים ואת יתרת הכסף הפקיד באותם תנאים. כעבור t שנים נוספות היו בתכנית 405,384 שקלים. א. מצא את t . ב. מהו סכום הכסף שהיה עומד לרשותו לאחר t השנים הנוספות לו לא משך את 40,000 השקלים?

18. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי א' הוא $\frac{1}{2}$ שעה.
 זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי ב' הוא שעה אחת.
 חומר א' דועך כל שעה פי q_1 , וחומר ב' דועך כל שעה פי q_2 .
 א. מצאו את q_1 ואת q_2 .
 ב. נתונה תערובת המכילה 8 ק"ג חומר א' ו-10 ק"ג חומר ב'.
 (בתערובת מתרחשת רק התפרקות רדיואקטיבית).
 כעבור כמה זמן סכום הכמויות של שני החומרים בתערובת יהיה 9 ק"ג?
19. כמויות של שני חומרים רדיואקטיביים, חומר א' וחומר ב', קטנות בצורה מעריכית.
 מ-300 גרם של חומר ב' נשארו 120 גרם כעבור 4 שנים.
 א. מצאו בכמה אחוזים קטנה הכמות של חומר ב' בכל שנה.
 ב. פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מהכמות ההתחלתית של חומר א' שווה לפרק הזמן שבסופו נשארת חמישית מהכמות ההתחלתית של חומר ב'.
 מצאו בכמה אחוזים קטנה הכמות של חומר א' בכל שנה.
 ג. פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מהכמות ההתחלתית של חומר ב' גדול ב-20% מפרק הזמן שבסופו מאבד חומר ג' חמישית מהכמות שלו.
 מהו זמן מחצית החיים של חומר ג'? הניחו שכמות חומר ג' קטנה בצורה מעריכית.
20. משקל העץ בשני יערות, יער I ויער II, גדל עם הזמן לפי פונקציות מעריכיות $f(x) = N_0 \cdot a^x$ ו- $g(x) = M_0 \cdot b^x$, בהתאמה. העצים בשני היערות ניטעו באותו תאריך.
 ביום הנטיעה היו ביער I 10,000 טון עץ, וכעבור שנה היו בו 15,000 טון עץ.
 ביום הנטיעה היו ביער II 40,000 טון עץ, וכעבור שנה היו בו 45,000 טון עץ.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ ואת הפונקציה $g(x)$.
 ב. מצאו כעבור כמה זמן מיום הנטיעה יהיה משקל העץ ביער I גדול ממשקל העץ ביער II.
 ג. שרטטו בקו מלא סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, ובאותה מערכת צירים שרטטו בקו מרוסק סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, החל מיום הנטיעה.
21. הכמויות של חומר רדיואקטיבי א' ושל חומר רדיואקטיבי ב' קטנות לפי פונקציות מעריכיות $f(x) = N_0 \cdot a^x$ ו- $g(x) = M_0 \cdot b^x$, בהתאמה.
 שני החומרים נשקלו באותו תאריך.
 בשעת השקילה היו 400 גרם של חומר א' וכעבור שתיים היו 324 גרם של חומר א'.
 כמו כן, בשעת השקילה היו 600 גרם של חומר ב' וכעבור 3 שעות היו 307.2 גרם של חומר ב'.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ ואת הפונקציה $g(x)$.
 ב. מצאו כעבור כמה זמן מרגע השקילה תהיה הכמות של חומר א' שווה לכמות של חומר ב'.
 ג. שרטטו בקו מלא סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, ובאותה מערכת צירים שרטטו בקו מרוסק סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, החל משעת השקילה.

22. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 6 שנים.
 א. כמה זמן חולף מהרגע שכמות החומר היא 60% מהכמות המקורית, ועד שנותרים רק 20% מהכמות המקורית?
 ב. האם פרק הזמן שמצאת בסעיף א' יהיה גדול, קטן, או שווה לפרק הזמן שבו מאבד החומר 40% מכמותו? נמקו.
 ג. נתונים 3 ק"ג של החומר הנ"ל. האם פרק הזמן שחולף עד שנותרת כמות של 1 ק"ג חומר יהיה גדול, קטן או שווה לפרק הזמן שמצאתם בסעיף א'? נמקו ללא חישובים.
23. אחוז הריבוי הטבעי של התושבים במדינה מסוימת הוא כזה, שמספר התושבים גדל פי 3 בתוך t שנים. אם אחוז ריבוי זה נשמר:
 א. מצאו פי כמה גדל מספר התושבים בתוך $2t$ שנים.
 ב. אם כיום ישנם במדינה 3,000,000 תושבים, כמה תושבים (בערך) היו במדינה לפני $\frac{1}{2}t$ שנים?
24. בעיר מסוימת מחיר דירה חדשה עולה ב-4% בכל אחת מחמש השנים הראשונות שחולפות מיום קנייתה.
 אחר כך יורד המחיר בכל שנה ב-2% לעומת השנה שלפניה.
 כמה שנים לאחר קנייתה היה מחיר הדירה גבוה ב-10% ממחיר קנייתה? רשמו את שני הפתרונות.
25. סכומי כסף הופקדו באותו זמן בשני חשבונות בנק. הסכומים גדלים בכל שנה באחוז קבוע.
 בחשבון I הופקדו a שקלים שגדלים ב- $p\%$ בשנה.
 כעבור שנתיים היו בחשבון 29,160 שקלים,
 וכעבור 5 שנים נוספות היו בחשבון 42,845.6 שקלים.
 א. (1) מצאו את p , אחוז הגדילה לשנה בחשבון I.
 (2) מצאו את הערך של a .
 ב. גם בחשבון II הופקדו a שקלים, והם גדלים ב- $m\%$ בשנה.
 כעבור שנתיים היו בחשבון II 29,702.5 שקלים.
 כעבור כמה שנים מיום ההפקדה, יהיה בחשבון II סכום הגדול ב-15% מהסכום שיהיה באותו זמן בחשבון I?
26. כמות העצים ביער א' גדלה בכל שנה פי q_1 לעומת השנה שלפניה, כך שבתוך t שנים היא מכפילה את עצמה.
 כמות העצים ביער ב' גדלה בכל שנה פי q_2 לעומת השנה שלפניה, כך שבתוך $2t$ שנים היא מכפילה את עצמה.
 א. הוכיחו: $q_1 = q_2^2$.
 ב. נתון כי ביער ב' כמות העצים גדלה ב-30% בתוך 4 שנים. חשבו את הערך של t .

תשובות:

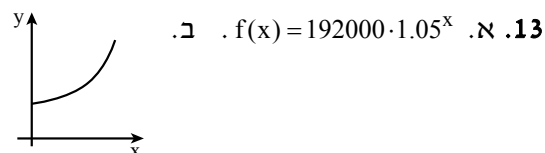
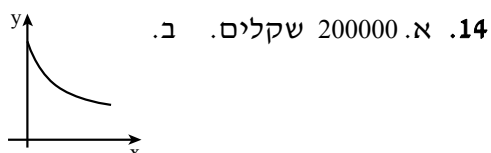
1. 11.21% .2. 2014 .3. א. (1) $1.191016N - 15730.48$. (2) 30,000 שקלים. ב. 7.85 שנים.

4. א. לא. ב. $\frac{1}{9}$. ג. 59,049 חיידקים. 5. א. 13.51 שנים. ב. 2.533% . ג. 93.31 גרם.

6. א. לא. ב. לא. 7. א. 21.74 ימים. ב. 72.23 ימים. 8. א. 11.67 שנים. ב. 33.59% .

9. 15 חודשים. 10. א. 2.409 שעות. ב. 90% .

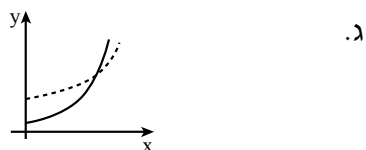
11. 15.02 שנים. 12. 1.8 חודשים.



15. א. בשעה 15:00 . ב. 22.31% .

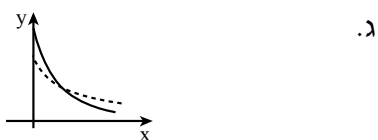
16. 14.275 .17. א. $t = 12$. ב. 485,872 שקלים. 18. א. $q_1 = 0.25$, $q_2 = 0.5$. ב. 43.34 דקות.

19. א. 20.47% . ב. 9.39% . ג. 7.833 שנים.



20. א. $f(x) = 10000 \cdot 1.5^x$, $g(x) = 40000 \cdot 1.125^x$.

ב. כעבור יותר מ-4.819 שנים.



21. א. $f(x) = 400 \cdot 0.9^x$, $g(x) = 600 \cdot 0.8^x$.

ב. 3.442 שעות.

22. א. 9.51 שנים. ב. גדול. ג. שווה. 23. א. 9 . ב. 1,732,051 .

24. 2.43 שנים או 9.989 שנים.

25. א. (1) $p = 8$. (2) 25,000 שקלים. ב. 15.16 שנים. 26. ב. 5.284 .