

חוברת בנושא

סדרה חשבונית

תכנית חדשה, שאלון 472

כיתה יב', 4 יח"ל

אריק דז'לדטי, יואל גבע

סדרות

סדרה היא קבוצה מסודרת של מספרים שנבנית בדרך כלל על-פי חוקיות מסוימת. המספרים המרכיבים את הסדרה נקראים איברי הסדרה.

סדר האיברים בסדרה הוא משמאל לימין.

נתבונן למשל בסדרות הבאות:

$$(1) \quad 8, 11, 14, 17, \dots$$

$$(2) \quad 5, 10, 20, 40, \dots$$

$$(3) \quad 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$$

שלוש הנקודות המופיעות מימין לסדרה מציינות שניתן להוסיף איברים לסדרה על פי החוקיות שנקבעה.

בסדרה (1) $8, 11, 14, 17, \dots$ האיבר הראשון הוא 8, האיבר השני הוא 11, האיבר השלישי הוא 14, האיבר הרביעי הוא 17 וכו'.

החוקיות בסדרה היא שכל איבר (פרט לראשון) גדול ב-3 מהאיבר שלפניו.

בסדרה (2) ניתן לראות שכל איבר בסדרה (פרט לראשון) גדול פי 2 מהאיבר שלפניו.

בסדרה (3) ניתן לראות שכל איבר בסדרה (החל באיבר השלישי) שווה לסכום שני האיברים שלפניו.

את איברי הסדרה מסמנים בצורה הבאה: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$.

המספר הרשום מימין ל- a מציין את מיקומו הסידורי של האיבר בסדרה.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, a_2 הוא האיבר השני בסדרה,

a_3 הוא האיבר השלישי בסדרה וכו'.

לדוגמה: בסדרה $8, 11, 14, 17, \dots$ נוכל לרשום: $a_1 = 8, a_2 = 11, a_3 = 14, a_4 = 17$.

באופן כללי, a_n הוא האיבר העומד במקום ה- n , כאשר n חייב להיות מספר טבעי (חיובי ושלם). a_n נקרא גם האיבר הכללי של הסדרה.

אם נסמן ב- a_n את האיבר האחרון בסדרה, אז בסדרה יש n איברים.

סדרה חשבונית

סדרה חשבונית היא סדרה של מספרים שבה ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא גודל קבוע.

את הפרש הסדרה מסמנים באות d (difference).

נתבונן למשל בסדרה החשבונית $11, 15, 19, 23, \dots$.

בסדרה זו ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא 4.

$(15-11=4, 19-15=4, 23-19=4)$ ולכן הפרש הסדרה הוא $d=4$.

באופן כללי, אם נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהפרשה d ,

אזי מתקיים: $a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d$ וכו'.

הערות:

א. אם הפרש הסדרה החשבונית הוא חיובי ($d > 0$), איברי הסדרה הולכים וגדלים,

והסדרה נקראת סדרה חשבונית עולה. למשל: $2, 5, 8, \dots$.

אם הפרש הסדרה החשבונית הוא שלילי ($d < 0$), איברי הסדרה הולכים וקטנים,

והסדרה נקראת סדרה חשבונית יורדת. למשל: $19, 13, 7, \dots$.

אם הפרש הסדרה החשבונית הוא אפס ($d=0$), הסדרה אינה עולה ואינה יורדת, וכל איבריה שווים זה לזה. סדרה זו נקראת גם סדרה קבועה. למשל: $6, 6, 6, \dots$.

ב. כל איבר בסדרה חשבונית (פרט לראשון) מתקבל על-ידי תוספת קבועה של d לאיבר שלפניו. נתבונן בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$.
בסדרה מתקיים $a_4 = a_3 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $a_2 = a_1 + d$ וכו'.

האיבר הכללי של סדרה חשבונית

נתבונן בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ שהפרשה d .
בסדרה מתקיים:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

קיבלנו:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

ניתן לראות שאפשר להביע כל איבר בסדרה חשבונית באמצעות a_1 ו- d .
לדוגמה: כדי לקבל את a_2 הוספנו פעם אחת d לאיבר הראשון a_1 .
כדי לקבל את a_3 הוספנו פעמיים d לאיבר הראשון a_1 .
כדי לקבל את a_4 הוספנו 3 פעמים d לאיבר הראשון a_1 .

ניתן לראות שכדי להביע איבר כלשהו בסדרה, מספר הפעמים שאנו מוסיפים d לאיבר הראשון a_1 קטן ב-1 ממקומו של האיבר בסדרה.
לדוגמה: כדי לקבל את a_{10} , נרשום את a_1 ונוסיף לו $9d$ ולא $10d$.
באופן כללי, כדי לקבל את האיבר העומד במקום ה- n , כלומר a_n , נוסיף $(n-1)$ פעמים d לאיבר הראשון a_1 ונקבל: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה חשבונית היא: $a_n = a_1 + (n-1)d$

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית $9, 13, 17, \dots$.
חשבו את האיבר השביעי ואת האיבר העשירי בסדרה.

פתרון:

על-פי הנתון: $a_1 = 9$. הפרש הסדרה הוא $13-9$, כלומר $d=4$.
עלינו לחשב את האיבר השביעי, כלומר a_7 . ראינו כי: $a_7 = a_1 + 6d$.
נציב ונקבל: $a_7 = 9 + 6 \cdot 4$, כלומר $a_7 = 33$.
נחשב כעת את האיבר העשירי, כלומר a_{10} . ראינו כי: $a_{10} = a_1 + 9d$.
נציב ונקבל: $a_{10} = 9 + 9 \cdot 4$, כלומר $a_{10} = 45$.

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית $15, 18, 21, \dots$.
מצאו את מקומו הסידורי של איבר בסדרה שערכו 78.

פתרון:

על פי הנתון $d=3, a_1=15$. מקומו של האיבר המבוקש אינו ידוע ולכן נסמן את האיבר ב- a_n , כלומר $a_n = 78$. ניעזר בנוסחה $a_n = a_1 + (n-1)d$.
נציב: $a_n = 78, a_1 = 15, d = 3$. נקבל: $78 = 15 + (n-1)3$.
פתרון המשוואה הוא $n = 22$, כלומר $a_{22} = 78$ ולכן האיבר שערכו 78 נמצא במקום ה-22.

דוגמה:

מצאו כמה איברים יש בסדרה החשבונית $6, 13, 20, \dots, 125$.

פתרון:

על פי הנתון האיבר הראשון הוא $a_1 = 6$ וההפרש הוא $d = 7$. האיבר האחרון בסדרה הוא 125. אם נסמן ב- n את מספר האיברים בסדרה,
אז a_n הוא האיבר האחרון בסדרה ולכן נוכל לרשום $a_n = 125$.
נציב בנוסחה $a_n = a_1 + (n-1)d$ ונקבל $125 = 6 + (n-1)7$. פתרון המשוואה הוא $n = 18$, כלומר $a_{18} = 125$, ולכן בסדרה יש 18 איברים.

דוגמה:

בסדרה חשבונית סכום האיברים השלישי והחמישי הוא 30, וסכום האיברים השישי ושמיני הוא 48. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

פתרון:

כדי למצוא את a_1 ואת d נרכיב שתי משוואות.

(1) על-פי הנתון הראשון: $a_3 + a_5 = 30$.

במקום a_3 נרשום: $a_1 + 2d$. במקום a_5 נרשום: $a_1 + 4d$.

נקבל: $a_1 + 2d + a_1 + 4d = 30$ ומכאן $2a_1 + 6d = 30$.

(2) על פי הנתון השני: $a_6 + a_8 = 48$.

במקום a_6 נרשום: $a_1 + 5d$. במקום a_8 נרשום: $a_1 + 7d$.

נקבל: $a_1 + 5d + a_1 + 7d = 48$ ומכאן $2a_1 + 12d = 48$.

קיבלנו את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (1) & 2a_1 + 6d = 30 \\ (2) & 2a_1 + 12d = 48 \end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות הוא: $d = 3, a_1 = 6$.

תרגילים

1. נתונה הסדרה החשבונית $3, 7, 11, 15, \dots$.
א. כתבו את הערך של a_1 ושל d .
ב. חשבו את a_8 .
ג. כתבו את עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

2. נתונה הסדרה החשבונית $-17, -19, -21, -23, \dots$.
א. מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה?
ב. חשבו את האיבר התשיעי בסדרה.
3. נתונה הסדרה החשבונית $100, 97, 94, \dots$. חשבו את a_{18} ואת a_{23} .
4. בסדרה חשבונית נתון: $a_{11} = 12$, $d = -6$. מצאו את a_1 .
5. א. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 9$, $a_{23} = 75$. מצאו את ההפרש d .
ב. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 8$, $a_{33} = 16$. מצאו את ההפרש d .
6. בסדרה חשבונית שההפרש שלה 3 יש 20 איברים.
האיבר האחרון בסדרה הוא 79. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
7. בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = 104$, $d = -4$, $a_n = 12$. מצאו את n .
8. נתונה סדרה חשבונית $7, 12, 17, \dots$.
מצאו בסדרה זו את מקומו הסידורי של המספר 112.
9. נתונה סדרה חשבונית $108, 105, 102, \dots$.
אחד האיברים בסדרה הוא אפס. מצאו את מקומו הסידורי.
10. נתונה סדרה חשבונית $2, 5, 8, 11, \dots$.
א. האם קיים בסדרה איבר שערכו 35? אם כן, מהו מקומו הסידורי?
ב. האם קיים איבר בסדרה שערכו 48?
11. נתונה הסדרה החשבונית $-46, -42, -38, \dots$.
האיבר האחרון בסדרה הוא 86. כמה איברים בסדרה?
12. מצא את מספר האיברים בסדרה החשבונית $2, \dots, 5\frac{3}{5}, 5\frac{4}{5}, 6$.
13. בסדרה חשבונית נתון: $a_7 = 50$, $a_{15} = 74$. מצאו את a_1 ואת d .
14. בסדרה חשבונית האיבר החמישי הוא 23 והאיבר האחד-עשר הוא 53.
מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

15. בסדרה חשבונית נתון: $a_6 + a_{11} = 102$, $a_{10} + a_{17} = 142$. מצאו את a_1 ואת d .
16. בסדרה חשבונית סכום האיברים השלישי והשישי הוא 37, וסכום האיברים השני, השמיני והעשירי הוא 36. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
17. א. בסדרה חשבונית האיבר התשיעי גדול ב-18 מהאיבר השלישי. חשבו את הפרש הסדרה.
ב. בסדרה חשבונית האיבר השמיני קטן ב-6 מסכום האיברים הרביעי והחמישי. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
18. בסדרה חשבונית האיבר השלישי גדול פי 9 מהאיבר הראשון. האיבר השישי הוא 42. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
19. בסדרה חשבונית האיבר הרביעי גדול פי 2 מהאיבר התשיעי. סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 144. מצאו את האיבר העשירי בסדרה.
20. בסדרה חשבונית יש 10 איברים. האיבר הרביעי קטן פי 2 מהאיבר האחרון וגדול ב-9 מהאיבר הראשון. חשבו את האיבר האחרון בסדרה.
21. בסדרה חשבונית שבה כל איבר גדול ב-5 מהאיבר שלפניו, האיבר השישי הוא 26. א. מהו האיבר הראשון בסדרה?
ב. מצאו כמה איברים בסדרה אם ערכו של האיבר האחרון הוא 51.
22. סכום שני האיברים הראשונים בסדרה חשבונית הוא 4. האיבר האחד-עשר גדול ב-13 מסכום האיברים השני והשלישי. א. אחד האיברים בסדרה הוא 69. מצא את מקומו הסידורי.
ב. האם קיים בסדרה איבר שערכו 80? נמקו.
23. נתונים המספרים 27 ו-69. הכניסו בין שני מספרים אלה חמישה מספרים נוספים, כך שכל שבעת המספרים יהוו סדרה חשבונית עולה.
24. בין המספר 24 למספר נוסף יש להכניס ארבעה מספרים כך שתתקבל סדרה חשבונית שהפרשה 6. מצאו את המספר הנוסף:
א. אם נתון שהמספר 24 הוא המספר הראשון בסדרה.
ב. אם נתון שהמספר 24 הוא המספר האחרון בסדרה.

25. האיבר השני בסדרה חשבונית עולה הוא 5. מכפלת האיבר הראשון באיבר השלישי היא 16. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
26. סכום שלושת האיברים הראשונים של סדרה חשבונית יורדת הוא 15. מכפלת שלושת האיברים הראשונים של הסדרה היא 80. חשבו את הפרש הסדרה ואת האיבר הראשון שלה.
27. נתונה הסדרה החשבונית $37, 34, 31, \dots$. האם יש בסדרה איבר שערכו שווה למקומו הסידורי? אם כן, מצאו אותו.
28. א. סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה חשבונית הוא 33. מצאו את האיבר השני בסדרה.
ב. סכום האיברים השני, השלישי והשביעי בסדרה חשבונית הוא 24. מצאו את האיבר הרביעי בסדרה.
29. האיבר החמישי בסדרה חשבונית הוא 15. מצא את סכום האיברים הראשון, השישי והשמיני.
30. בסדרה חשבונית שההפרש שלה -2 האיבר האחרון קטן ב-38 מהאיבר הראשון. מצאו כמה איברים בסדרה.

תשובות:

1. א. $d = 4, a_1 = 3$. ב. $a_8 = 31$. ג. 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39.
2. א. $d = -2, a_1 = -17$. ב. $a_9 = -33$. ג. 49 ו-34. ד. 72. ה. 5. ו. 3. ז. $\frac{1}{4}$. ח. 6. ט. 22.
7. $n = 24$. 8. $n = 22$. 9. a_{37} . 10. א. כן, $a_{12} = 35$. ב. לא. 11. 34. 12. 21.
13. $d = 3, a_1 = 32$. 14. $d = 5, a_1 = 3$. 15. $d = 4, a_1 = 21$. 16. $d = -3, a_1 = 29$.
17. א. 3. ב. 6. 18. $d = 8, a_1 = 2$. 19. 16. 20. 36. 21. א. 1. ב. 11.
22. א. a_{35} . ב. לא. 23. 69, 62, 55, 48, 41, 34, 27. 24. א. 54. ב. -6.
25. $d = 3, a_1 = 2$. 26. $a_1 = 8, d = -3$. 27. כן, $a_{10} = 10$. 28. א. 11. ב. 8. 29. 45. 30. 20.

סדרה חשבונית – שאלות מציאותיות

דוגמה:

פועל עבד במפעל במשך 12 חודשים.
בכל חודש הייתה משכורתו של הפועל גדולה ב- 300 שקלים מהמשכורת בחודש שקדם לו.
משכורתו האחרונה של הפועל הייתה גדולה פי 3 ממשכורתו השנייה.
מצא את משכורתו של הפועל בחודש הראשון לעבודתו.

פתרון:

משכורתו של הפועל בכל חודש גדולה ב- 300 שקלים ממשכורתו בחודש הקודם,
ולכן משכורות הפועל יוצרות סדרה חשבונית שהפרשה $d = 300$.
האיבר הראשון בסדרה הוא המשכורת הראשונה של הפועל, האיבר השני בסדרה הוא
המשכורת השנייה של הפועל, האיבר השלישי הוא המשכורת השלישית של הפועל וכו'.
משכורתו האחרונה של הפועל גדולה פי 3 ממשכורתו השנייה. הפועל עבד 12 חודשים
ולכן משכורתו האחרונה היא המשכורת בחודש ה- 12.
משכורת זו מיוצגת על-ידי האיבר a_{12} בסדרה החשבונית,
ולכן על פי הנתון $a_{12} = 3a_2$ ומכאן $a_1 + 11d = 3(a_1 + d)$.
נציב $d = 300$ ונקבל $a_1 = 1200$.
לסיכום: משכורתו הראשונה של הפועל הייתה 1,200 שקלים.

31. דוד התאמן למרוץ אופניים. ביום הראשון רכב 25 ק"מ ובכל יום רכב 4 ק"מ יותר מביום הקודם לו. כמה ק"מ רכב דוד ביום העשירי?
32. להקת בידור הופיעה 8 פעמים. בהופעתה הראשונה של הלהקה נכחו 250 צופים, ובכל הופעה נוספת פחת מספר הצופים ב- 30 לעומת ההופעה הקודמת. כמה צופים נכחו בהופעתה האחרונה של הלהקה?
33. בתחרות שחמט חולקו 6 פרסים. כל פרס קטן מקודמו ב- 200 שקלים. הפרס הראשון היה גדול פי 2 מהפרס האחרון. מה היה הפרס הראשון?
34. מטוס עובר בשעה הראשונה לטיסתו 1,200 ק"מ, ובכל שעה שלאחר מכן הוא עובר 100 ק"מ יותר מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. באיזו שעה לטיסתו יעבור המטוס מרחק של 2,600 ק"מ?
35. קבוצת תלמידים מסודרת לפי גובה, כך שכל תלמיד גבוה במספר קבוע של ס"מ מקודמו. גובהו של התלמיד החמישי בשורה הוא 162 ס"מ. גובהו של התלמיד השנים-עשר בשורה הוא 183 ס"מ. מצאו כמה תלמידים עומדים בשורה, אם גובהו של התלמיד האחרון הוא 201 ס"מ.

תשובות: 31. 61 ק"מ. 32. 40 צופים. 33. 2,000 שקלים. 34. בשעה ה- 15. 35. 18 תלמידים.

איברים חיוביים ושליילים בסדרה חשבונית

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית: $76, 73, 70, \dots$

א. האם קיים בסדרה איבר שערכו אפס?

ב. כמה איברים חיוביים יש בסדרה?

פתרון:

א. על פי הנתון: $a_1 = 76, d = -3$. נבדוק האם ייתכן $a_n = 0$.

ניעזר בנוסחה $a_n = a_1 + (n-1)d$. נציב $a_n = 0$. נקבל: $0 = 76 - 3(n-1)$.

הפתרון הוא $n = 26.33$. קיבלנו n שאינו שלם ולכן אין בסדרה איבר שערכו אפס.

ב. **דרך א'**: הסדרה הנתונה היא סדרה חשבונית יורדת.

בסעיף א' קיבלנו שהערך של n שעבורו $a_n = 0$ הוא 26.33 , ולכן a_{26} הוא האיבר החיובי

האחרון ו- a_{27} הוא האיבר השלילי הראשון. נובע מכך שבסדרה יש 26 איברים חיוביים.

דרך ב': נבדוק לאיזה ערך של n מתקיים $a_n > 0$.

נציב $a_1 = 76, d = -3$ ונקבל: $76 + (n-1)(-3) > 0$ ומכאן $n < 26.33$.

כדי שאיבר a_n יהיה חיובי צריך להתקיים $n < 26.33$.

n שלם וחיובי, ולכן הערכים של n שעבורם מתקבל a_n חיובי הם: $n = 1, 2, 3, \dots, 26$.

כלומר האיברים החיוביים הם: $a_1, a_2, \dots, a_{26}$ ולכן בסדרה יש 26 איברים חיוביים.

36.

נתונה סדרה חשבונית $42, 39, 36, \dots$

א. מצאו את מיקומו הסידורי של איבר שערכו שווה לאפס.

ב. כמה איברים חיוביים יש בסדרה?

37.

נתונה הסדרה החשבונית $-49, -45, -41, \dots$

א. כמה איברים שליליים יש בסדרה?

ב. מצאו את מקומו ואת ערכו של האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה.

38.

נתונה הסדרה החשבונית $-109, -105, -101, \dots$

א. מצאו כמה איברים יש בסדרה.

ב. מצאו כמה איברים חיוביים וכמה איברים שליליים יש בסדרה.

39.

נתונה סדרה חשבונית עולה: $100, 96, 92, \dots$

א. הראו כי בסדרה אין איבר השווה לאפס.

ב. מהו הערך והמקום הסידורי של האיבר הראשון בסדרה הגדול מאפס?

ב. מצאו כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

תשובות: 36. א. a_{15} . ב. 14. 37. א. 13. ב. $a_{14} = 3$.

38. א. 54. ב. 17 חיוביים, 37 שליליים. 39. א. (2) $a_{13} = 4$. ב. 17.

התחלקות במספרים טבעיים

דוגמה:

כמה מספרים תלת ספרתיים מתחלקים ב-7 ללא שארית?

פתרון:

המספרים התלת-ספרתיים הם 100, 101, 102, ..., 998, 999
 המספר התלת-ספרתי הקטן ביותר שמתחלק ב-7 ללא שארית הוא 105,
 המספר התלת-ספרתי הבא המתחלק ב-7 ללא שארית הוא 112,
 המספר התלת-ספרתי שאחריו שמתחלק ב-7 ללא שארית הוא 119 וכו',
 כך שמספרים אלה יוצרים את הסדרה החשבונית ... 105, 112, 119, ... שבה $d=7$.
 המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר המתחלק ב-7 ללא שארית הוא 994,
 ולכן עלינו למצוא כמה איברים יש בסדרה החשבונית 105, 112, ..., 994.
 בסדרה זו נסמן: $a_1 = 105$, $d = 7$, $a_n = 994$.
 עלינו למצוא את n . הנוסחה ל- a_n היא: $a_n = a_1 + (n-1)d$.
 נציב ונקבל $994 = 105 + (n-1)7$. פתרון המשוואה הוא $n = 128$.
 לסיכום: יש 128 מספרים תלת-ספרתיים המתחלקים ב-7 ללא שארית.

40. כמה מספרים גדולים מ-400 וקטנים מ-1100 מתחלקים ב-6 ללא שארית?

41. כמה מספרים חיוביים הקטנים מ-200 מתחלקים ב-9 ללא שארית?

42. א. רשמו את שלושת המספרים הדו-ספרתיים הראשונים המתחלקים ב-3 ללא שארית.
 ב. כמה מספרים דו-ספרתיים מתחלקים ב-3 ללא שארית?

43. מצאו כמה מספרים תלת-ספרתיים מתחלקים ב-9 ללא שארית.

44. לפניהם סדרת המספרים הטבעיים הדו-ספרתיים: 99, ..., 12, 11, 10.
 א. מצאו כמה מספרים דו-ספרתיים קיימים.
 ב. מצאו כמה ממספרים אלה מתחלקים ב-6 ללא שארית.
 ג. מצאו כמה ממספרים אלה אינם מתחלקים ב-6 ללא שארית.

45. מצאו כמה מספרים דו-ספרתיים משאירים שארית 2 כאשר מחלקים אותם ב-5.

46. מצאו כמה מספרים תלת-ספרתיים מתחלקים ב-3 וגם ב-7.

תשובות: 40. 117. 41. 22. 42. א. 18, 15, 12. ב. 30. 43. 100. 44. א. 90. ב. 15. ג. 75.
 45. 18. 46. 43.

מציאת הנוסחה ל- a_n , הגדרה על-ידי כלל נסיגה

עד עכשיו הגדרנו סדרה חשבונית על-פי הנוסחה לאיבר כללי a_n (נוסחה לפי מקום). בסעיף זה נראה שאפשר להגדיר סדרה חשבונית באמצעות כלל נסיגה. בהמשך נראה שאפשר להגדיר בדרך זו גם סדרות נוספות. כאשר מגדירים סדרה באמצעות כלל נסיגה, נותנים (בדרך-כלל) את האיבר הראשון (נתון זה נקרא התנאי ההתחלתי), ובנוסף נותנים נוסחה שמראה כיצד מתקבל כל איבר בסדרה (החל מהאיבר השני) בעזרת האיבר שקודם לו.

כלל הנסיגה המתאים לסדרה חשבונית שאיברה הראשון k והפרשה d

$$\text{הוא: } a_1 = k, a_{n+1} = a_n + d$$

לדוגמה:

כלל הנסיגה של הסדרה החשבונית $14, 17, 20, \dots$ הוא: $a_1 = 14, a_{n+1} = a_n + 3$

כלל הנסיגה של הסדרה החשבונית $34, 29, 24, \dots$ הוא: $a_1 = 34, a_{n+1} = a_n - 5$

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית $1, 5, 9, \dots$

א. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n באמצעות n בלבד.

ב. הגדירו את הסדרה באמצעות כלל נסיגה.

פתרון:

א. הנוסחה לאיבר הכללי של סדרה חשבונית היא $a_n = a_1 + (n-1)d$

נציב $a_1 = 1, d = 4$, נקבל: $a_n = 1 + (n-1)4$ ומכאן $a_n = 4n - 3$

ב. בסדרה הנתונה $a_1 = 1, d = 4$, לכן כלל הנסיגה של הסדרה הוא: $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 4$

כלל: כדי להוכיח שסדרה היא סדרה חשבונית צריך להראות שההפרש בין כל איבר (פרט לראשון) לקודמו הוא קבוע, כלומר יש להוכיח שההפרש $a_{n+1} - a_n$ הוא קבוע ואינו תלוי ב- n .

דוגמה:

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי הנוסחה $a_n = 3n + 1$

א. מצאו את a_8

ב. הוכיחו שהסדרה היא חשבונית ורשמו את הפרשה.

פתרון:

א. כדי לחשב את a_8 נציב בנוסחה 8 בכל מקום שבו מופיע n

נקבל: $a_8 = 3 \cdot 8 + 1$, כלומר $a_8 = 25$

ב. כדי להוכיח שהסדרה היא חשבונית יש להראות שההפרש $a_{n+1} - a_n$ הוא קבוע.

על פי הנתון: $a_n = 3n + 1$. כדי להביע את a_{n+1} , נציב בנוסחה $(n+1)$ בכל מקום שבו

מופיע n . נקבל: $a_{n+1} = 3(n+1) + 1$

נפתח סוגריים, נכנס איברים ונקבל: $a_{n+1} = 3n + 4$

נחשב את ההפרש $a_{n+1} - a_n$: $a_{n+1} - a_n = (3n + 4) - (3n + 1) = 3$

קיבלנו $a_{n+1} - a_n = 3$, כלומר ההפרש $a_{n+1} - a_n$ הוא קבוע (אינו תלוי ב- n) ושווה ל-3

ולכן הסדרה היא סדרה חשבונית והפרשה 3.

47. סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = -13$.
 א. הוכיחו שהסדרה היא חשבונית ורשמו את הפרשה.
 ב. רשמו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
 ג. חשבו את האיבר שבמקום ה- 57 בסדרה.
48. סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n - 5$, $a_1 = 6$.
 א. חשבו את האיבר התשיעי בסדרה.
 ב. מצאו את מקומו של איבר בסדרה שערכו -69.
49. הגדירו כל אחת מהסדרות החשבוניות הבאות באמצעות כלל נסיגה:
 א. $9, 13, 17, \dots$
 ב. $29, 27, 25, \dots$
50. מצאו את הנוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרות החשבוניות הבאות:
 א. $8, 11, 14, \dots$
 ב. $-23, -27, \dots$
51. סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = 7$.
 מצאו את הנוסחה לאיבר הכללי של הסדרה (נוסחה לפי מקום).
52. האיבר הכללי של סדרה הוא: $a_n = 7n + 3$.
 א. מצאו את שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. חשבו את האיבר ה- 15 בסדרה.
 ג. מצאו באמצעות n נוסחה לאיבר a_{n+1} .
 ד. הוכיחו שהסדרה היא חשבונית ורשום את הפרש הסדרה.
53. בתרגילים הבאים נתון האיבר הכללי של סדרה.
 הוכיחו שהסדרה היא סדרה חשבונית, ומצאו את הפרש הסדרה ואת איברה הראשון.
 א. $a_n = 6n - 19$
 ב. $a_n = -4n + 37$
 ג. $a_n = \frac{1}{2}(5 - 3n)$
54. האיבר הכללי של סדרה הוא: $a_n = 7n + 3$.
 א. הוכיחו שהסדרה היא חשבונית.
 ב. הגדירו את הסדרה באמצעות כלל נסיגה.
55. נתונה הסדרה החשבונית $3, 7, 11, \dots$.
 א. מצאו נוסחה לאיבר במקום ה- n .
 ב. מצאו נוסחה לאיבר במקום ה- $2n$.
56. א. בסדרה חשבונית $21, 27, 33, \dots$ נתון $a_n + a_{n+4} = 174$. מצאו את n .
 ב. בסדרה חשבונית $10, 18, 26, \dots$ נתון $a_{n+2} + a_{2n-6} = 284$. מצאו את n .

תשובות:

47. א. 3. ב. -4, -7, -10, -13. ג. 155. ד. -34. ה. a_{16} .
49. א. $a_1 = 9$, $a_{n+1} = a_n + 4$. ב. $a_1 = 29$, $a_{n+1} = a_n - 2$. ג. $3n + 5$. ד. $-15 - 4n$.
51. $a_n = 4n + 3$. 52. א. 10, 13, 16. ב. 108. ג. $a_{n+1} = 7n + 10$. ד. 7.
53. א. $a_1 = -13$, $d = 6$. ב. $a_1 = 33$, $d = -4$. ג. $a_1 = 1$, $d = -1.5$. ד. 54. ב. $a_{n+1} = a_n + 7$, $a_1 = 10$.
55. א. $4n - 1$. ב. $8n - 1$. 56. א. 10. ב. 13.

תכונת הסדרה החשבונית

כלל: כאשר המספרים a , b , c מהווים איברים סמוכים בסדרה חשבונית, אז ההפרש בין b ל- a שווה להפרש בין c ל- b , כלומר מתקיים: $b - a = c - b$

הערה: מהקשר $b - a = c - b$ נוכל לקבל $2b = a + c$ ומכאן $b = \frac{a+c}{2}$,

כלומר b הוא ממוצע חשבוני של a ו- c .

דוגמה:

נתונים המספרים $x^2 - 2$, $4x - 6$, $x + 2$.

א. לאילו ערכים של x מהווים המספרים סדרה חשבונית?

ב. עבור כל x שמצאתם בסעיף א', מצאו את הפרש הסדרה החשבונית.

פתרון:

א. כדי שהמספרים יהיו סדרה חשבונית ההפרש ביניהם צריך להיות קבוע,

$$(4x - 6) - (x + 2) = (x^2 - 2) - (4x - 6).$$

לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל $x^2 - 7x + 12 = 0$.

פתרונות המשוואה הריבועית הם $x = 3$ או $x = 4$.

ב. המספרים הנתונים הם: $x^2 - 2$, $4x - 6$, $x + 2$.

נציב $x = 4$ ונקבל את הסדרה החשבונית 14, 10, 6. הפרש הסדרה הוא $d = 4$.

נציב $x = 3$ ונקבל את הסדרה החשבונית 7, 6, 5. הפרש הסדרה הוא $d = 1$.

57. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים שלושה איברים סמוכים של סדרה חשבונית.

מצאו את x ואת שלושת האיברים.

א. x , $2x + 1$, $5x - 4$. ב. x , $3x - 1$, $x^2 + 2$.

58. המספרים m , $2m - 3$, $4m - 16$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה חשבונית.

א. מצא את m ואת שלושת המספרים.

ב. מצא את האיבר השמיני בסדרה.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא 94. כמה איברים בסדרה?

59. המספרים $6a + 6$, $10a - 6$, $7a - 2$ הם האיברים הרביעי, החמישי והשישי בסדרה חשבונית.

א. מצא את a .

ב. מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

60. שלושה מספרים שהראשון בהם הוא 6 מהווים סדרה חשבונית. אם נחסר מהמספר השני 5 ונחלק את המספר השלישי ב-6, נקבל סדרה חשבונית חדשה. מצאו את שלושת המספרים בכל אחת מהסדרות.

61. שלושת האיברים הראשונים בסדרה חשבונית הם a_1, a_2, a_3 . נתון כי סכום שלושת האיברים האלה הוא 30. א. מצאו את a_2 . ב. נתון גם כי אם מחלקים ב-2 את האיבר הראשון, מחסרים 18 מהאיבר השני ומשאירים את האיבר השלישי ללא שינוי, מתקבלת סדרה חשבונית חדשה. מצאו את ההפרש של כל אחת מהסדרות.

62. נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. ידוע כי אם כופלים את האיבר הראשון פי 2, מוסיפים 10 לאיבר השני ומשאירים את האיבר השלישי ללא שינוי, מתקבלת סדרה חשבונית חדשה. מצאו את האיבר הראשון בסדרה החשבונית המקורית.

תשובות: 57. א. $x=3$; 3, 7, 11. ב. $x=1$ או $x=4$; 1, 2, 3 או 4, 11, 18. 58. א. $m=10$; 10, 17, 24. ב. 59. ג. 13. 59. א. 4. ב. $d=4, a_1=14$. 60. 6, 9, 12 ו- 2, 4, 6. 61. א. 10. ב. -62 ו- -44. 62. 20.

איברים סמוכים בסדרה חשבונית

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית $2, 5, 8, \dots$. מצאו בסדרה זו את מקומם וערכם של שני איברים סמוכים שסכומם 97.

פתרון:

דרך א': נסמן שני איברים סמוכים באופן הבא: a_n, a_{n+1} . הנוסחה לאיבר הכללי a_n היא $a_n = a_1 + (n-1)d$. כדי להביע את a_{n+1} נציב $(n+1)$ בכל מקום שבו מופיע n . נקבל: $a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)d = a_1 + nd$. על פי הנתון: $a_n + a_{n+1} = 97$. במקום a_n נרשום: $a_1 + (n-1)d$. במקום a_{n+1} נציב: $a_1 + nd$. נקבל: $a_1 + (n-1)d + a_1 + nd = 97$. נציב $d=3, a_1=2$ ונקבל: $2 + (n-1)3 + 2 + 3n = 97$. פתרון המשוואה הוא $n=16$ ולכן האיברים הם a_{16} ו- a_{17} . נחשב את האיברים הללו: $a_{16} = a_1 + 15d = 2 + 15 \cdot 3 = 47$ $a_{17} = a_1 + 16d = 2 + 16 \cdot 3 = 50$. לסיכום: האיברים הם $a_{16} = 47$ ו- $a_{17} = 50$.

דרך ב': נסמן את אחד האיברים ב- a_n ואת האיבר שאחריו ב- $a_n + d$. על פי הנתון, סכומם 97 ולכן $(a_n) + (a_n + d) = 97$. נציב $d=3$ ונקבל $a_n + a_n + 3 = 97$ ומכאן $a_n = 47$.

האיבר הראשון מבין השניים הוא $a_n = 47$ והאיבר שאחריו הוא $a_n + d$ שהוא : $47 + 3$, כלומר 50. לסיכום, האיברים הם : 47, 50.
 כדי למצוא את מקומו של המספר 47 נסמן : $a_n = 47$, $a_1 = 2$, $d = 3$.
 נציב בנוסחה $a_n = a_1 + (n-1)d$ ונקבל $47 = 2 + (n-1) \cdot 3$.
 פתרון המשוואה הוא $n = 16$ ולכן $a_{16} = 47$.
 האיבר שאחריו הוא $a_{17} = 50$ ולכן האיברים הם : $a_{16} = 47$ ו- $a_{17} = 50$.

63. נתונה הסדרה החשבונית ... 53, 62, 71, 80.
 א. מצאו בסדרה זו שני איברים סמוכים שסכומם 367.
 ב. מצאו את מקומם הסידורי של האיברים שמצאתם בסעיף א'.
64. נתונה הסדרה החשבונית : ... 1, 5, 9, 13.
 א. מצאו בסדרה זו שלושה איברים סמוכים שסכומם 123.
 ב. מצאו את מקומם הסידורי של האיברים הסמוכים הנ"ל.
65. בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא 40 וההפרש הוא 5.
 סכום שני האיברים האחרונים הוא 165.
 א. מהו האיבר האחרון בסדרה?
 ב. כמה איברים בסדרה?
66. בסדרה החשבונית ... 40, 43, 46, סכום שלושת האיברים האחרונים הוא 273.
 כמה איברים בסדרה?
67. בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא 20 והאיבר השביעי הוא 44.
 סכום שני האיברים האחרונים גדול ב- 52 מסכום ארבעת האיברים הראשונים.
 מצאו את מספר איברי הסדרה.
68. מכונית עוברת בכל שעה 2 ק"מ יותר מהמרחק שעברה בשעה הקודמת.
 בארבע השעות האחרונות לנסיעתה עברה המכונית 348 ק"מ.
 מהו המרחק שעברה המכונית בשעה האחרונה?

תשובות:

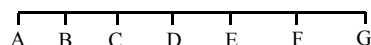
63. א. 179, 188. ב. a_{15} , a_{16} . 64. א. 45, 41, 37. ב. a_{10} , a_{11} , a_{12} .
 65. א. 85. ב. 10. 66. 19. 67. 16. 68. 90 ק"מ.

האיבר הכללי של סדרה חשבונית – שאלות נוספות

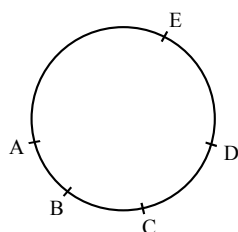
69. נתונה הסדרה החשבונית $26, 32, 38, \dots$.
 א. מצאו כמה איברים בסדרה קטנים מ-100.
 ב. מהו מקומו וערכו של האיבר הראשון בסדרה הגדול מ-100?
70. נתונה הסדרה החשבונית $31, 205, 208, 211, \dots$.
 א. מצאו בסדרה זו את מקומו ואת ערכו של האיבר הראשון שקטן מ-90.
 ב. כמה איברים בסדרה קטנים מ-90?
71. א. בסדרה חשבונית יש 17 איברים. מהו מקומו של האיבר האמצעי?
 ב. בסדרה חשבונית יש 20 איברים.
 מהו מקומם של שני האיברים האמצעיים?
72. נתונה הסדרה החשבונית $27, 31, 35, \dots, 71$.
 מצאו את גודלם של שני האיברים האמצעיים בסדרה.
73. נתונה סדרה חשבונית שבה 11 איברים, האיבר הראשון הוא 10 והאיבר האמצעי הוא 20.
 מצאו את הפרש הסדרה.
74. בסדרה חשבונית יש $2n$ איברים.
 א. מהו מקומם של שני האיברים האמצעיים בסדרה?
 ב. הוכיחו: סכום שני האיברים האמצעיים שווה לסכום של האיברים הראשון והאחרון.
75. בסדרה חשבונית יש $2n+1$ איברים.
 א. מהו מקומו של האיבר האמצעי בסדרה?
 ב. נתון כי האיבר האחרון שווה לסכום של האיבר האמצעי והאיבר שלפניו.
 הוכיחו: $a_1 = d$.
76. נתונות שתי סדרות חשבוניות: (1) $15, 17, 19, \dots$
 (2) $-2, 1, 4, \dots$
 א. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n בכל אחת מהסדרות.
 ב. מצאו את הערך של n שעבורו האיבר ה- n בסדרה (1) שווה לאיבר ה- n בסדרה (2).

77. נתונים שני טורים חשבוניים: $4, 7, 10, \dots$ ו- $140, 135, 130, \dots$

לשני הטורים יש מספר איברים שווה. האיבר האחרון בטור השני גדול פי 2 מהאיבר האחרון בטור הראשון.
א. כמה איברים בכל טור?
ב. מהו האיבר האחרון בכל טור?

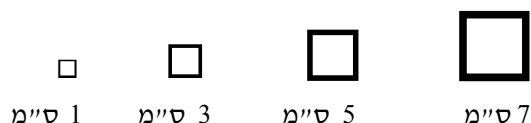


78. אורכי ששת הקטעים שלפניכם מהווים סדרה חשבונית (לפי הסדר).
נתון: $AC = 22$ ס"מ, $CF = 48$ ס"מ.
מצאו את אורך הקטע CG.



79. אורכי חמש הקשתות שבציור מהווים סדרה חשבונית.
נתון: $AD = 33$ ס"מ, $CE = 31$ ס"מ.
מצאו את היקף המעגל (AB היא הקשת הקצרה ביותר, ושאר הקשתות מסודרות לפי הסדר).

80. נתונה סדרה של ריבועים. אורכי הצלעות של הריבועים יוצרים סדרה חשבונית, כמתואר בציור שלפניכם.



א. מהו ההיקף של הריבוע העשירי בסדרה?
ב. ההיקף של הריבוע האחרון בסדרה הנתונה הוא 156 ס"מ. כמה ריבועים ישנם בסדרה?

81. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שההפרש שלה d .
בונים סדרה חשבונית חדשה $b_1, b_2, b_3, \dots$ כך ש- $b_1 = 4a_1, b_2 = 4a_2, b_3 = 4a_3, \dots$.
א. הביעו באמצעות d את הפרש הסדרה החשבונית החדשה.
ב. הביעו באמצעות a_1 ו- d את b_{10} .
ג. הביעו באמצעות a_1, d ו- n את b_n ואת b_{n+1} .

- 82.** נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots$ שההפרש שלה d .
 בונים סדרה חשבונית חדשה: $b_1 = a_1 + 5, b_2 = a_2 + 5, b_3 = a_3 + 5, \dots$.
 א. הביעו באמצעות d את הפרש הסדרה החשבונית החדשה.
 ב. הביעו באמצעות a_1 ו- d את b_{20} .
 ג. הביעו באמצעות a_1, d ו- n את b_n .
- 83.** נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהפרשה d .
 בונים סדרה חדשה $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, \dots$.
 א. הביעו באמצעות a_1, d ו- n את b_n .
 ב. הוכיחו שסדרת b_n היא חשבונית והביעו את ההפרש שלה באמצעות d .
- 84.** נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots$ שההפרש שלה d .
 בונים סדרה חדשה: $b_1 = pa_1, b_2 = pa_2, b_3 = pa_3, \dots$.
 הוכיחו שסדרת b_n היא חשבונית ומצאו את הפרשה.

תשובות:

- 69.** א. 13. ב. $a_{14} = 104$. **70.** א. $a_{42} = 48$. ב. 20. **71.** א. a_9 . ב. a_{10}, a_{11} . **72.** 47, 51.
- 73.** 2. **74.** א. a_n, a_{n+1} . **75.** א. a_{n+1} . **76.** א. (1) $a_n = 2n + 13$, (2) $a_n = 3n - 5$. ב. 18.
- 77.** א. 13. ב. 40 ו-80. **78.** 68 ס"מ. **79.** 70 ס"מ. **80.** א. 76 ס"מ. ב. 20.
- 81.** א. 4d. ב. $b_{10} = 4a_1 + 36d$. ג. $b_n = 4a_1 + 4dn - 4d$, $b_{n+1} = 4a_1 + 4dn$.
- 82.** א. d. ב. $b_{20} = a_1 + 5 + 19d$. ג. $b_n = a_1 + 5 + dn - d$. **83.** א. $b_n = 2a_1 + 2dn - d$. ב. 2d. **84.** pd.

הסכום של סדרה חשבונית

נתבונן בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ שהפרשה d .
נסמן את סכום n האיברים הראשונים בסדרה ב- S_n ,
כלומר: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.
לדוגמה: $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$.
נביר שתי נוסחאות לסכום n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית.

$$S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} \quad \text{הנוסחה הראשונה:}$$

$$S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2} \quad \text{הנוסחה השנייה:}$$

הערה: ברוב התרגילים נשתמש בנוסחה השנייה.

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית $5, 8, 11, \dots$.
חשבו את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

פתרון:

הנוסחה היא $S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$. עלינו לחשב את S_{20} . נציב $a_1 = 5$,
 $n = 20$, $d = 3$ ונקבל: $S_{20} = [2 \cdot 5 + (20-1)3] \frac{20}{2}$. כלומר: $S_{20} = 670$.

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית $-24, -20, -16, \dots$.
מצאו כמה איברים יש בסדרה אם סכום הסדרה הוא -72 .

פתרון:

על-פי הנתון: $a_1 = -24$, $d = 4$. סכום הסדרה הוא -72 , כלומר $S_n = -72$.
ניעזר בנוסחה $S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$. נציב ונקבל: $-72 = [2(-24) + (n-1)4] \frac{n}{2}$.
לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל $4n^2 - 52n + 144 = 0$.
פתרונות המשוואה הריבועית הם $n = 4$ או $n = 9$.
עבור $n = 4$ יש בסדרה 4 איברים: $-24, -20, -16, -12$.
וסכום הסדרה הוא -72 . עבור $n = 9$ יש בסדרה 9 איברים:
 $8, 4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, -24$ וגם כאן סכום הסדרה הוא -72 .

דוגמה:

בסדרה חשבונית סכום עשרת האיברים הראשונים הוא 345
וסכום חמישה-עשר האיברים הראשונים הוא 705.
מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

פתרון:

על-פי הנתונים: $S_{10} = 345$, $S_{15} = 705$. כדי למצוא את a_1 ואת d נרכיב שתי משוואות. הנוסחה היא $S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$.

(1) הנתון הראשון הוא $S_{10} = 345$. נציב $n = 10$ ונקבל $(2a_1 + 9d)5 = 345$.
נחלק ב-5 את שני האגפים ונקבל: $2a_1 + 9d = 69$.

(2) הנתון השני הוא $S_{15} = 705$. נציב $n = 15$ ונקבל $(2a_1 + 14d)7.5 = 705$.
נחלק ב-7.5 את שני האגפים ונקבל $2a_1 + 14d = 94$.

נחלק ב-2 את שני האגפים ונקבל: $a_1 + 7d = 47$.

פתרון מערכת המשוואות (1) ו-(2) הוא $a_1 = 12$, $d = 5$.

תרגילים

הנוסחה: $S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$

1. בסדרה חשבונית נתון: $d = 5$, $a_1 = 16$.
א. חשבו את S_{27} . ב. חשב את S_{32} .
2. נתונה הסדרה החשבונית $71, 68, 65, \dots$.
חשבו את סכום 17 האיברים הראשונים של הסדרה.
3. בסדרה חשבונית שבה 10 איברים, האיבר הראשון הוא 8 וההפרש הוא 6.
חשבו את סכום כל איברי הסדרה.
4. בסדרה חשבונית נתון: $d = 3$, $n = 20$, $S_n = 730$. מהו האיבר הראשון a_1 ?
5. מצאו את האיבר הראשון a_1 על פי הנתון בסדרה חשבונית: $d = 3$, $S_9 = 180$.
6. מצאו את הפרש הסדרה d על פי הנתון בסדרה חשבונית: $a_1 = 30$, $S_{14} = -217$.
7. בסדרה חשבונית נתון: $d = 3$, $a_1 = 2$, $S_n = 392$. מצאו את n .
8. נתונה הסדרה החשבונית $11, 14, 17, \dots$.
חיברו n איברים ראשונים בסדרה והסכום שהתקבל הוא 245. כמה איברים חיברו?
9. סכום הסדרה החשבונית $2, 6, 10, \dots$ הוא 1250. כמה איברים ישנם בסדרה?

10. נתונה הסדרה החשבונית $60, 56, 52, \dots$. מצאו כמה איברים עוקבים, החל בראשון, יש לחבר בסדרה כדי לקבל את הסכום 336.
11. נתונה הסדרה החשבונית: $3, 7, 11, \dots, 87$.
א. מצאו כמה איברים בסדרה.
ב. חשבו את סכום הסדרה.
12. חשבו את סכום הסדרה החשבונית $60, 54, 48, \dots, -36$.
13. בסדרה חשבונית האיבר הרביעי הוא 19 והאיבר העשירי הוא 43.
א. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
ב. כמה איברים יש בסדרה אם סכומם 403?
14. בסדרה חשבונית נתון: $a_7 = 48$, $S_{11} = 495$. מצאו את a_1 ואת d .
15. סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה חשבונית הוא 65. האיבר השביעי הוא 11.
מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
16. בסדרה חשבונית סכום תשעת האיברים הראשונים הוא 99, וסכום חמישה-עשר האיברים הראשונים הוא 300.
מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
17. בסדרה חשבונית סכום תשעת האיברים הראשונים הוא 99. האיבר השנים-עשר גדול פי 4 מהאיבר הרביעי.
א. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
ב. מצאו כמה איברים יש בסדרה אם סכום הסדרה הוא 550.
18. א. בסדרה חשבונית נתון: $S_9 = 63$. מצאו את a_5 .
ב. בסדרה חשבונית נתון: $a_{10} = 37$. מצאו את S_{19} .
19. הסכום של סדרה חשבונית שבה 15 איברים הוא 135.
חשבו את האיבר האמצעי בסדרה.
20. בסדרה חשבונית יש 18 איברים. סכום שני האיברים האמצעיים הוא 71.
חשבו את סכום כל איברי הסדרה.

21. סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שווה לאיבר ה-46.
כמה איברים יש לחבר כדי שסכומם יהיה שווה לאיבר שבמקום ה-79?

22. נתונה הסדרה החשבונית $7, 11, 15, \dots$.
מצאו בסדרה זו את סכום שמונת האיברים העוקבים החל באיבר השישי.

23. נתונה הסדרה החשבונית $24, 29, 34, \dots$.
חיברו 9 איברים, החל באיבר מסוים, והתקבל הסכום 711.
מהו מקומו הסידורי של האיבר הנ"ל?

תשובות:

1. א. 2187. ב. 2992. 2. 799. 3. 350. 4. 8. 5. 8. 6. -7. 7. $n=16$. 8. 10. 9. 25.
10. 7 או 24. 11. א. 22. ב. 990. 12. 204. 13. א. $d=4, a_1=7$. ב. 13. 14. $d=3, a_1=30$.
15. $d=3, a_1=-7$. 16. $d=3, a_1=-1$. 17. א. $d=3, a_1=-1$. ב. 20. 18. א. 7. ב. 703.
19. 9. 20. 639. 21. 13. 22. 328. 23. 8.

$$S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} \quad \text{הנוסחה:}$$

24. בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא 45 והאיבר האחרון הוא 20.
סכום הסדרה הוא 357.5. מצאו כמה איברים בסדרה.

25. בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא 12 והאיבר האחרון הוא 72.
סכום הסדרה הוא 546.
א. מצאו כמה איברים יש בסדרה.
ב. חשבו את הפרש הסדרה.

26. בסדרה חשבונית שבה 20 איברים, האיבר הראשון הוא 17 והאיבר האחרון הוא 93.
חשבו את סכום הסדרה.

תשובות:

24. 11. 25. א. 13. ב. 5. 26. 1100.

שאלות מציאותיות – סכום סדרה חשבונית

27. משכורתו ההתחלתית של פועל הייתה 3500 שקלים בחודש. בכל חודש עלתה משכורתו ב- 50 שקלים.
א. מה הייתה משכורתו של הפועל בחודש ה- 12 לעבודתו?
ב. כמה השתכר הפועל במשך 12 החודשים הראשונים לעבודתו?
28. בשורה הראשונה של אולם קולנוע יש 20 מושבים, ובכל שורה נוספת יש שלושה מושבים יותר מאשר בשורה שלפניה.
מצאו כמה שורות יש באולם אם בכל האולם יש 893 מושבים.
29. דוד התאמן למרוץ אופניים. ביום הראשון רכב 25 ק"מ, ובכל יום רכב 4 ק"מ יותר מאשר ביום הקודם. ביום האחרון רכב דוד 61 ק"מ.
כמה ק"מ רכב דוד סך הכול בכל ימי רכיבתו?
30. בונים מגדל קוביות על ידי הנחת קוביות זו על זו. הגבהים של הקוביות במגדל מהווים סדרה חשבונית, כאשר הקובייה הראשונה הנמצאת בתחתית המגדל היא הגדולה ביותר. נתון כי הגובה של הקובייה הראשונה במגדל הוא 38 ס"מ, הגובה של הקובייה החמישית במגדל הוא 30 ס"מ וגובה המגדל כולו הוא 350 ס"מ.
מצאו את מספר הקוביות במגדל ואת גובה הקובייה האחרונה המונחת בראש המגדל.
31. אנציקלופדיה לנוער שמחירה 2160 שקלים נמכרת ב- 12 תשלומים חודשיים לא שווים. התשלומים החודשיים מהווים סדרה חשבונית, וששת התשלומים הראשונים מכסים $\frac{2}{3}$ ממחיר האנציקלופדיה. חשבו את התשלום הראשון ואת התשלום האחרון.
32. קבוצת תלמידים יצאה למסע. בשעה הראשונה עברה הקבוצה 9 ק"מ, ובכל שעה שלאחר מכן היא עברה מספר קבוע של ק"מ פחות משעברה בשעה הקודמת. בשמונה השעות הראשונות עברה הקבוצה 58 ק"מ. בסך הכול עברה הקבוצה 75 ק"מ.
כמה ק"מ עברה הקבוצה בשעה האחרונה?
33. תלמיד פתר ביום החופש הראשון 40 בעיות, ובכל יום נוסף הוא פתר 2 בעיות פחות מאשר ביום הקודם. בשלושת הימים האחרונים פתר התלמיד 42 בעיות.
מצאו כמה בעיות פתר התלמיד בסך הכול.

תשובות:

27. א. 4050 שקלים. ב. 45300 שקלים. 28. 19 שורות. 29. 430 ק"מ. 30. 14 קוביות, 12 ס"מ.
31. תשלום ראשון - 290 שקלים, תשלום אחרון - 70 שקלים. 32. 3.5 ק"מ. 33. 390 בעיות.

התחלקות של מספרים טבעיים – סכום סדרה חשבונית

34. א. כמה מספרים טבעיים קטנים מ-500 מתחלקים ב-8 ללא שארית?
 ב. מהו הסכום של כל המספרים שמצאת בסעיף א'?
35. מהו סכום כל המספרים הטבעיים בין 200 ל-900 שספרתם האחרונה היא 7?
36. א. מצאו את סכום כל המספרים הדו-ספרתיים.
 ב. מצאו את סכום המספרים הדו-ספרתיים שמתחלקים ב-4 ללא שארית.
 ג. מצאו את סכום המספרים הדו-ספרתיים שאינם מתחלקים ב-4 ללא שארית.

תשובות:

34. א. 62. ב. 15624. 35. 38640. 36. א. 4905. ב. 1188. ג. 3717.

שאלות הכוללות נוסחה ל- S_n

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית $1, 4, 7, \dots$

מצאו נוסחה ל- S_n באמצעות n בלבד.

פתרון:

על פי הנתון $a_1 = 1$, $d = 3$. נציב בנוסחה: $S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$

$$S_n = [2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 3] \frac{n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = 1.5n^2 - 0.5n \quad \text{נקבל:}$$

37. מצאו את הנוסחה ל- S_n בסדרות החשבוניות הבאות:

א. $1, 3, 5, \dots$ ב. $100, 96, 92, \dots$

38. סדרה מוגדרת לכל n טבעי באמצעות הנוסחה $a_n = 3n - 10$.

א. הוכיחו שהסדרה היא חשבונית.

ב. מצאו נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

39. סדרה מוגדרת לכל n טבעי באמצעות כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n - 4$, $a_1 = 60$.

מצאו נוסחה לסכום S_n של n האיברים הראשונים בסדרה.

תשובות:

37. א. $S_n = n^2$. ב. $S_n = -2n^2 + 102n$. 38. א. $S_n = 1.5n^2 - 8.5n$. ב. $S_n = -2n^2 + 62n$. 39.

סכום איברים אחרונים – סדרה חשבונית

קיימים מקרים שבהם נרצה לחשב סכום של איברים עוקבים בסדרה חשבונית, אך האיבר הראשון בסדרה לא יהיה a_1 .

למשל, נניח כי נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהפרשה d

ונרצה לחשב את הסכום $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{18}$ שמתחיל מ- a_{11} .

קיימות שתי דרכים מרכזיות בעזרתן ניתן לחשב סכום כזה:

דרך א': לפי חיסור סכומים.

נתבונן בדיאגרמה המתוארת:

10 איברים ראשונים	הסכום המבוקש
$a_1, a_2, \dots, a_{10}$	$a_{11}, \dots, a_{18}$
18 איברים ראשונים	

ניתן לראות שאם נחסר מסכום 18 האיברים הראשונים בסדרה את סכום 10 האיברים הראשונים בסדרה, נקבל את הסכום $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{18}$ שהוא הסכום המבוקש, כלומר ניתן לחשב את הסכום המבוקש על-ידי $S_{18} - S_{10}$.

דרך ב': נחשב באופן ישיר.

הסכום $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{18}$ הוא סכום של סדרה חשבונית שבה 8 איברים והאיבר הראשון שלה הוא a_{11} .

נוסחת הסכום של סדרה חשבונית היא: $S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$.

נציב a_{11} במקום a_1 . כמו כן, נציב $n = 8$.

נקבל שהסכום המבוקש הוא: $[2a_{11} + (8-1)d] \frac{8}{2}$, כלומר $(2a_{11} + 7d)4$.

ניתן להשתמש בשתי הדרכים שראינו כאשר נרצה לחשב סכום של איברים אחרונים.

דוגמה:

בסדרה החשבונית $13, 16, 19, \dots$ יש 20 איברים.

חשבו את סכום שמונת האיברים האחרונים בסדרה.

פתרון:

נפתור בשתי דרכים:

דרך א': נחשב את סכום 8 האיברים האחרונים בעזרת חיסור סכומים.

בסדרה יש 20 איברים ולכן $S = S_{20} - S_{12}$ 8 אחרונים

12 איברים ראשונים	8 איברים אחרונים
$a_1, a_2, \dots, a_{12}$	$a_{13}, \dots, a_{20}$
20 איברים	

נחשב את S_{20} : $S_{20} = [2 \cdot 13 + (20-1)3] \frac{20}{2} = 830$

נחשב את S_{12} : $S_{12} = [2 \cdot 13 + (12-1) \cdot 3] \frac{12}{2} = 354$

נציב ונקבל: $S = 830 - 354 = 476$ 8 אחרונים

דרך ב': נחשב את סכום 8 האיברים האחרונים באופן ישיר, כאשר האיבר הראשון בסכום

$$S_{13} = [2a_{13} + (8-1) \cdot 3] \frac{8}{2} \quad \text{הוא } a_{13}$$

$$a_{13} = a_1 + 12d = 13 + 12 \cdot 3 = 49 \quad \text{נחשב את } a_{13} :$$

$$S_{13} = [2 \cdot 49 + 7 \cdot 3] \frac{8}{2} = 476 \quad \text{ונקבל: } S_{13} \text{ נציב את } a_{13}$$

דוגמה:

בסדרה חשבונית יש 50 איברים. סכום עשרת האיברים הראשונים הוא ' וסכום עשרת האיברים האחרונים הוא 1650. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

פתרון:

כדי למצוא את a_1 ואת d נרכיב שתי משוואות.

$$(1) \text{ סכום עשרת האיברים הראשונים הוא } 50, \text{ כלומר } S_{10} = 50.$$

$$\text{נציב בנוסחת הסכום ונקבל } \frac{10}{2} [2a_1 + 9d] = 50.$$

$$(2) \text{ סכום עשרת האיברים האחרונים הוא } 1650. \text{ ניתן לרשום נתון זה בשתי דרכים.}$$

דרך א': לפי חיסור סכומים.

$$S_{50} - S_{40} = 1650 \quad \text{נתון כי } S_{50} - S_{40} = 1650$$

$$S_{50} - S_{40} = 1650 \quad \text{ולכן } S_{50} - S_{40} = 1650$$

$$\text{נציב בנוסחת הסכום ונקבל } \frac{40}{2} (2a_1 + 39d) - \frac{50}{2} (2a_1 + 49d) = 1650$$

$$\text{לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל } 10a_1 + 445d = 1650 \quad (2)$$

$$\text{פתרון מערכת המשוואות (1) ו-(2) הוא } a_1 = -13, d = 4.$$

דרך ב': נתבונן בסדרת עשרת האיברים האחרונים.

בסדרה זו עשרה איברים, ההפרש הוא d והאיבר הראשון הוא a_{41} .

$$S_{10} = 1650 \quad \text{על פי הנתון: } S_{10} = 1650$$

$$\text{נציב בנוסחת הסכום ונקבל: } \frac{10}{2} [2a_{41} + (10-1)d] = 1650$$

$$[2(a_1 + 40d) + 9d] \cdot 5 = 1650$$

$$\text{לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל } 2a_1 + 89d = 330 \quad (3)$$

$$\text{פתרון מערכת המשוואות (1) ו-(3) גם הוא } a_1 = -13, d = 4.$$

40. בסדרה החשבונית $8, 11, 14, \dots$ יש 20 איברים. חשבו את סכום עשרת האיברים האחרונים בסדרה.

41. בסדרה חשבונית שבה 45 איברים האיבר הראשון הוא 25 וההפרש הוא 6. חשבו את סכום 13 האיברים האחרונים בסדרה.

42. בסדרה חשבונית שבה 15 איברים האיבר הראשון שווה ל-30. סכום עשרת האיברים האחרונים בסדרה הוא 490. מצאו את הפרש הסדרה.

43. ההפרש של סדרה חשבונית הוא 5. סכום האיברים $a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20}$ הוא 1080. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
44. בסדרה חשבונית שבה 23 איברים האיבר השביעי הוא 38. סכום אחד-עשר האיברים האחרונים בסדרה הוא 176. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
45. בסדרה חשבונית יש 20 איברים. הסכום של עשרת האיברים הראשונים הוא 100, והסכום של עשרת האיברים האחרונים הוא 300. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
46. בסדרה חשבונית סכום שמונת האיברים הראשונים הוא 484, וסכום שמונת האיברים הבאים אחריהם הוא 676. מצאו את a_1 ואת d .
47. בסדרה חשבונית יש 43 איברים. הסכום של שמונת האיברים הראשונים הוא 168, והסכום של 11 האיברים האחרונים הוא 1705. א. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה. ב. מצאו את סכום כל איברי הסדרה.
48. בסדרה חשבונית יש 17 איברים. סכום תשעת האיברים הראשונים הוא 81, וסכום תשעת האיברים האחרונים הוא 225. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
49. בסדרה חשבונית שבה 30 איברים האיבר הראשון הוא 11. סכום עשרים האיברים הראשונים שווה לסכום עשרת האיברים האחרונים. מצאו את הפרש הסדרה.
50. בסדרה חשבונית יש 12 איברים. הפרש הסדרה הוא 2. סכום ששת האיברים הראשונים של הסדרה קטן פי שלושה מסכום ששת האיברים האחרונים בסדרה. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
51. בסדרה חשבונית יש שישה-עשר איברים. סכום שמונת האיברים הראשונים קטן ב-192 מסכום שמונת האיברים האחרונים. מהו הפרש הסדרה?
52. בסדרה חשבונית יש 21 איברים. סכום שבעת האיברים האחרונים גדול ב-98 מסכום שבעת האיברים האמצעיים. מצאו את הפרש הסדרה.

53. קבוצת פועלים נטעה שתילים. מספר השתילים שנטעה מדי שעה מהווה סדרה חשבונית. בשעה השמינית נטעו הפועלים 75 שתילים. בחמש-עשרה השעות הראשונות נטעו הפועלים מחצית ממספר השתילים שנטעו בחמש-עשרה השעות שלאחר מכן. כמה שעות עבדו הפועלים אם הם נטעו בסך הכול 3375 שתילים?

54. באמפיתיאטרון גדול יש 42 שורות. בכל שורה יש 2 מקומות ישיבה יותר מאשר בשורה שלפניה. מספר מקומות הישיבה ב-24 השורות הראשונות שווה למספר מקומות הישיבה ב-18 השורות האחרונות. כמה מקומות ישיבה יש בכל 42 השורות שבאמפיתיאטרון?

תשובות:

40. 515. 41. 3289. 42. 2. 43. 45. 44. $d = -2$, $a_1 = 50$. 45. $d = 2$, $a_1 = 1$. 46. $d = 3$, $a_1 = 50$. 47. א. $d = 4$, $a_1 = 7$. ב. 3913. 48. $d = 2$, $a_1 = 1$. 49. 2. 50. 1. 51. 3. 52. 2. 53. 30 שעות. 54. 6048 מקומות.

מקומות אי-זוגיים וזוגיים – סכום סדרה חשבונית

נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ שהפרשה d . נתבונן בסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים שהיא הסדרה $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ ונמצא בסדרה זו את ההפרש שבין שני איברים סמוכים:

$$a_3 - a_1 = (a_1 + 2d) - a_1 = 2d$$

$$a_5 - a_3 = (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 2d$$

$$a_7 - a_5 = (a_1 + 6d) - (a_1 + 4d) = 2d$$

ניתן לראות שההפרש בין שני איברים סמוכים בסדרה $a_1, a_3, a_5, \dots$ הוא קבוע ושווה ל- $2d$.

נסכם: האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ($a_1, a_3, a_5, \dots$) מהווים סדרה חשבונית שאיברה הראשון שווה לאיבר הראשון של הסדרה המקורית, כלומר שווה ל- a_1 והפרשה שווה לפעמיים ההפרש של הסדרה המקורית, כלומר שווה ל- $2d$.

נתבונן כעת בסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים שהיא הסדרה: $a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$ ונמצא בסדרה זו את ההפרש שבין שני איברים סמוכים:

$$a_4 - a_2 = (a_1 + 3d) - (a_1 + d) = 2d$$

$$a_6 - a_4 = (a_1 + 5d) - (a_1 + 3d) = 2d$$

$$a_8 - a_6 = (a_1 + 7d) - (a_1 + 5d) = 2d$$

ניתן לראות שההפרש בין שני איברים סמוכים בסדרה $a_2, a_4, a_6, \dots$ הוא קבוע ושווה ל- $2d$.

נסכם: האיברים העומדים במקומות הזוגיים ($a_2, a_4, a_6, \dots$) מהווים סדרה חשבונית שאיברה הראשון שווה לאיבר השני של הסדרה המקורית, כלומר שווה ל- a_2 והפרשה שווה לפעמיים ההפרש של הסדרה המקורית, כלומר שווה ל- $2d$.

שים לב!

קיים קשר בין מספר האיברים בסדרה המקורית למספר האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים או הזוגיים. אם בסדרה המקורית יש מספר זוגי של איברים, אז מספר האיברים בסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים שווה למספר האיברים העומדים במקומות הזוגיים, וכל אחד מהם שווה למחצית ממספר האיברים שבסדרה המקורית. למשל, אם בסדרה המקורית יש 28 איברים, מספר האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים שווה למספר האיברים העומדים במקומות הזוגיים וכל אחד מהם שווה ל- $\frac{28}{2}$, כלומר שווה ל-14.

אם בסדרה המקורית יש מספר אי-זוגי של איברים, אז מספר האיברים בסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול ב-1 ממספר האיברים העומדים במקומות הזוגיים. למשל, אם בסדרה המקורית יש 29 איברים, אז מספר האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים שווה ל-15 ומספר האיברים העומדים במקומות הזוגיים שווה ל-14. נסביר זאת: מתוך 28 האיברים הראשונים, יש 14 איברים במקומות האי-זוגיים ו-14 איברים במקומות הזוגיים. האיבר שנוסף שהוא a_{29} שייך לסדרת האיברים שבמקומות האי-זוגיים ולכן בסדרת האיברים שבמקומות האי-זוגיים יש 15 איברים.

דוגמה:

נתונה הסדרה החשבונית 17, 21, 25, 29, 33, 37, ..., 97. חשבו את סכום האיברים שבמקומות הזוגיים.

פתרון:

סדרת האיברים שבמקומות הזוגיים היא: 21, 29, 37, ... האיבר הראשון בסדרה זו הוא 21 וההפרש של סדרה זו שווה ל-8. כדי לדעת כמה איברים יש בסדרה זו, נחשב תחילה את מספר האיברים בסדרה המקורית. בסדרה החשבונית המקורית נתון: $d=4$, $a_1=17$. נסמן ב- a_n את האיבר האחרון, כלומר $a_n=97$. ניעזר בנוסחה $a_n = a_1 + (n-1)d$ ונקבל $97 = 17 + (n-1)4$. הפתרון הוא $n=21$ ולכן בסדרה המקורית יש 21 איברים. נובע מכך שבסדרת האיברים שבמקומות האי-זוגיים יש 11 איברים ובסדרת האיברים שבמקומות הזוגיים יש 10 איברים. נחשב את סכום עשרת האיברים שבמקומות הזוגיים:

$$S = [2 \cdot 21 + (10-1)8] \frac{10}{2} = 570$$

דוגמה:

בסדרה חשבונית יש 16 איברים. סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 176, וסכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 128. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

פתרון:

הסדרה המקורית היא $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$. נסמן ב- d את הפרשה.

(1) סדרת האיברים שבמקומות האי-זוגיים $(a_1, a_3, a_5, \dots)$

היא סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא a_1 של הסדרה המקורית, ההפרש הוא $2d$ ומספר האיברים הוא $\frac{16}{2}$, כלומר 8.

נציב בנוסחת הסכום ונקבל: $S = [2a_1 + (8-1) \cdot 2d] \cdot \frac{8}{2}$ מקומות אי-זוגיים

נשווה ל-176 ונקבל: $(2a_1 + 14d)4 = 176$ (1)

(2) סדרת האיברים שבמקומות הזוגיים $(a_2, a_4, a_6, \dots)$

היא סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא a_2 של הסדרה המקורית, ההפרש הוא $2d$, ומספר האיברים הוא $\frac{16}{2}$ כלומר 8.

נציב בנוסחת הסכום ונקבל: $S = [2a_2 + (8-1)2d] \cdot \frac{8}{2}$ מקומות זוגיים

נשווה ל-128 ונקבל: $[2(a_1 + d) + 14d]4 = 128$ (2)

פתרון מערכת המשוואות (1) ו-(2) הוא $a_1 = 64$, $d = -6$.

55. בסדרה החשבונית $7, 11, 15, 19, \dots$ יש 40 איברים.
 א. חשבו את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.
 ב. חשבו את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.
 ג. חשבו את סכום כל איברי הסדרה והראו שהוא שווה לסכום התוצאות שקיבלתם בסעיפים א' ו-ב'.

56. בסדרה החשבונית $10, 16, 22, 28, \dots$ יש 13 איברים.
 א. חשבו את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
 ב. חשבו את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

57. נתונה סדרה חשבונית: $62, 67, 72, 77, \dots, 197$.
 א. מצאו כמה איברים יש בסדרה.
 ב. חשבו את סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

58. נתונה הסדרה החשבונית: $37.6, \dots, -13.4, -13.7, -14$.
 מצאו את סכום האיברים בסדרה המופיעים במקומות הזוגיים.

59. בסדרה חשבונית יש 24 איברים. הפרש הסדרה הוא 4.
 סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא 708. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

- 60.** בסדרה חשבונית יש 21 איברים.
האיבר הראשון בסדרה הוא 3 וסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא 583.
מצאו את הפרש הסדרה.
- 61.** בסדרה חשבונית יש 18 איברים.
סכום האיברים המופיעים במקומות האי-זוגיים הוא 810 וסכום האיברים המופיעים במקומות הזוגיים הוא 855.
מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
- 62.** בסדרה חשבונית יש 20 איברים. סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 420 וסכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 400.
א. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
ב. חשבו את סכום עשרת האיברים האחרונים של הסדרה.
- 63.** בסדרה חשבונית יש 30 איברים. נסמן: $T = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30}$, $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{30}$.
נתון: $T = 765$, $S = 1485$.
מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
- 64.** בסדרה חשבונית יש 16 איברים.
סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול ב-32 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
א. מהו הפרש הסדרה?
ב. בכמה קטן סכום שמונת האיברים הראשונים מסכום שמונת האיברים האחרונים?
- 65.** א. בסדרה חשבונית שבה 28 איברים ידוע כי האיבר החמישה-עשר הוא 30.
חשבו את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
ב. בסדרה חשבונית שבה 18 איברים, סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 252.
מצאו את הערך של האיבר התשיעי.
- 66.** האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 83.
סכום 12 האיברים הראשונים המופיעים במקומות הזוגיים הוא 564.
כמה איברים יש לחבר בסדרה, החל בראשון, כדי שסכומם יהיה 845?

תשובות:

- 55.** א. 1660. ב. 1740. ג. 3400. **56.** א. 322. ב. 276. **57.** א. 28. ב. 1778. **58.** 1014.8.
- 59.** 11. **60.** 5. **61.** $d = 5$, $a_1 = 50$. **62.** א. $d = -2$, $a_1 = 60$. ב. 310. **63.** $d = 3$, $a_1 = 6$.
- 64.** א. 4. ב. 256. **65.** א. 420. ב. 28. **66.** 13.

סדרות שבהן מספר האיברים שונה מ- n

דוגמה:

בסדרה חשבונית יש $2n$ איברים. סכום הסדרה גדול פי 4 מסכום n האיברים הראשונים. האיבר העשירי בסדרה הוא 19. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

פתרון:

(1) בסדרה יש $2n$ איברים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$. נסמן ב- d את הפרש הסדרה. כדי להביע את סכום הסדרה (S_{2n}) נרשום את הנוסחה ל- S_n , ונציב $2n$ בכל מקום שבו רשום n .

$$\text{הנוסחה ל- } S_n \text{ היא: } S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2} \text{ ולכן: } S_{2n} = [2a_1 + (2n-1)d] \frac{2n}{2}$$

$$\text{על פי הנתון } S_{2n} = 4 \cdot S_n, \text{ כלומר: } [2a_1 + (2n-1)d] \frac{2n}{2} = 4[2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}$$

$$[2a_1 + 2dn - d]n = [2a_1 + dn - d]2n$$

ידוע ש- $n > 0$ לכן ניתן לצמצם את המשוואה ב- n .

$$\text{נקבל: } (2a_1 + 2dn - d) = (2a_1 + dn - d)2$$

$$\text{נפתח סוגריים ונקבל (1) } d = 2a_1$$

(2) האיבר העשירי בסדרה הוא 19, לכן: $a_{10} = 19$ ומכאן: $a_1 + 9d = 19$

פתרון מערכת המשוואות (1) ו-(2) הוא $a_1 = 1, d = 2$.

67. בסדרה החשבונית $2, 6, 10, \dots$ יש $2n$ איברים.

סכום כל איברי הסדרה גדול ב-1014 מסכום n האיברים הראשונים. מצאו את n ורשום כמה איברים יש בסדרה.

68. בסדרה החשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ יש $2n$ איברים. הפרש הסדרה הוא d .

סכום כל איברי הסדרה גדול פי 4 מסכום n האיברים הראשונים.

א. הוכיחו: $d = 2a_1$.

ב. האיבר ה-15 הוא 87. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

69. בסדרה החשבונית $9, 15, 21, \dots$ יש $2n$ איברים.

סכום n האיברים האחרונים בסדרה הוא 624. מצאו כמה איברים יש בסדרה.

70. בסדרה חשבונית שהפרשה 6 יש $2n$ איברים.

סכום n האיברים האחרונים גדול ב-1350 מסכום n האיברים הראשונים. מצאו את n .

71. בסדרה החשבונית $15, 18, 21, \dots$ יש $2n$ איברים.

סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול פי 2 מסכום n האיברים הראשונים.

מצאו כמה איברים יש בסדרה.

- 72.** בסדרה חשבונית יש $2n$ איברים.
סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול פי 3 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה.
האיבר השמיני בסדרה הוא 60. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
- 73.** בסדרה החשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ יש $2n$ איברים.
הפרש הסדרה הוא d . הביעו באמצעות d, a_1 ו- n :
א. את סכום n האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
ב. את סכום n האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- 74.** בסדרה חשבונית יש $2n$ איברים. הפרש הסדרה הוא 4.
סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול ב-36 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים. מצאו את n ורשמו כמה איברים יש בסדרה.
- 75.** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים, ההפרש הוא -5.
סכום האיברים שבמקומות הזוגיים קטן ב-95 מסכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים.
מצאו כמה איברים יש בסדרה.
- 76.** בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים, ההפרש הוא -5.
סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 450 וסכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 420. מצאו כמה איברים יש בסדרה.
- 77.** בסדרה חשבונית שבה ההפרש הוא 1.4, יש n איברים (n הוא מספר זוגי).
סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא 126 וסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 140. כמה איברים בסדרה?
- 78.** בסדרה החשבונית $12, 15, 18, \dots$ יש $3n$ איברים.
סכום כל איברי הסדרה גדול ב-1161 מסכום n האיברים הראשונים.
מצאו את n ורשום כמה איברים בסדרה.
- 79.** בסדרה חשבונית $21, 23, 25, \dots$ יש $3n$ איברים.
סכום כל איברי הסדרה גדול פי 2 מסכום n האיברים האחרונים.
מצאו כמה איברים יש בסדרה.

תשובות:

- 67.** $n=13$, 26 איברים. **68.** ב. $a_1=3$, $d=6$. **69.** 16. **70.** 15. **71.** 18. **72.** $a_1=4$, $d=8$.
73. א. $(a_1 + dn - d)n$. ב. $(a_1 + dn)n$. **74.** $n=9$, 18 איברים. **75.** 38.
76. 12. **77.** 20. **78.** $n=9$, 27 איברים. **79.** 60.

שאלות עם שתי סדרות – סכום סדרה חשבונית

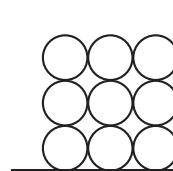
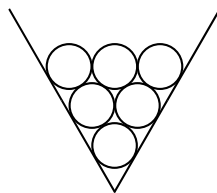
80. נתונות שתי סדרות חשבוניות: $28, 33, 38, 43, \dots$
 $19, 25, 31, 37, \dots$
בשתי הסדרות אותו מספר איברים ולשתיהן אותו הסכום.
מצאו כמה איברים בכל סדרה.
81. נתונות שתי סדרות חשבוניות: $10, 13, 16, \dots$
 $40, 36, 32, \dots$
בסדרה ראשונה יש שלושה איברים יותר מאשר בסדרה השנייה.
סכום הסדרה הראשונה גדול ב-67 מסכום הסדרה השנייה.
מצאו כמה איברים יש בכל אחת מהסדרות.
82. אדם קיבל שתי הצעות לקניית מכשיר חשמלי. ההצעה הראשונה הייתה תשלום ראשון של 1400 שקלים, תשלום שני של 1300 שקלים וכו', כלומר כל תשלום קטן ב-100 שקלים מהתשלום הקודם. ההצעה השנייה הייתה תשלומים קבועים של 1000 שקלים כל תשלום. מספר התשלומים בהצעה הראשונה שווה למספר התשלומים בהצעה השנייה, והסכום הכולל שווה בשתי ההצעות.
א. מהו מספר התשלומים בכל אחת מההצעות?
ב. מהו מחירו של המכשיר החשמלי?
83. אדם שהתעניין בקניית רהיטים קיבל שתי הצעות. ההצעה מסוחר הראשון הייתה:
תשלום ראשון של 500 שקלים, וכל תשלום נוסף גבוה ב-100 שקלים מהתשלום הקודם. ההצעה שקיבל מסוחר שני הייתה:
תשלום ראשון של 400 שקלים וכל תשלום נוסף גבוה ב-200 שקלים מהתשלום הקודם. מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-1 ממספר התשלומים בהצעה הראשונה. מצאו את מחירם של הרהיטים בכל אחת מההצעות, אם מחיר הרהיטים בהצעה השנייה גדול ב-2000 שקלים ממחיר הרהיטים בהצעה הראשונה.
84. משני מקומות שהמרחק ביניהם הוא 4500 מטרים, יוצאים באותו הזמן שני גופים זה לקראת זה. הגוף הראשון עובר בדקה הראשונה 300 מטרים, ובכל דקה שלאחר מכן הוא עובר 14 מטרים פחות משעבר בדקה הקודמת. הגוף השני עובר בדקה הראשונה 200 מטרים ובכל דקה שלאחר מכן הוא עובר 14 מטר יותר משעבר בדקה הקודמת.
מצאו כעבור כמה דקות ייפגשו שני הגופים, ומהו המרחק שיעבור כל אחד מהם עד הפגישה.

85. שתי רכבות היו במרחק 230 מטרים זו מזו בזמן שנהגי הרכבות הבחינו זה בזה והחלו לבלום. בשנייה הראשונה לבלימה עברה הרכבת הראשונה 20 מטרים ובכל שנייה שאחריה ב-2 מטרים פחות מאשר בשנייה שקדמה לה, בעוד שהרכבת השנייה עברה בשנייה הראשונה 24 מטרים ובכל שנייה שאחריה 3 מטרים פחות מאשר בשנייה שקדמה לה. האם שתי הרכבות תתנגשנה? אם לא, מצאו מה יהיה המרחק ביניהן כשתעצרנה.

86. שני בתי חרושת קיבלו הזמנה לייצר מספר שווה של מכוניות. בבית החרושת הראשון ייצרו בחודש הראשון 200 מכוניות, ובכל חודש נוסף ייצרו 20 מכוניות יותר מבחודש הקודם. בבית החרושת השני ייצרו בכל חודש 360 מכוניות, וסיימו את העבודה חודשיים לפני בית החרושת הראשון. מצאו כמה מכוניות ייצרו בכל בית חרושת.

87. שתי מכוניות נמצאות במרחק 1110 ק"מ זו מזו ונעות אחת לכיוון השנייה. בשעה הראשונה עברה המכונית האחת מרחק של 50 ק"מ, ובכל שעה נוספת עברה 5 ק"מ יותר מהמרחק שעברה בשעה הקודמת. המכונית השנייה יצאה לדרך 3 שעות לאחר המכונית הראשונה ועברה בשעה הראשונה 90 ק"מ, ובכל שעה נוספת עברה 4 ק"מ פחות מהמרחק שעברה בשעה הקודמת. א. מצא כעבור כמה שעות מרגע שהחלה המכונית הראשונה לנסוע תיפגשנה שתי מכוניות. ב. מהו המרחק שתעבור כל אחת מהמכוניות עד הפגישה?

88. בריבוע ובמשולש שווה צלעות חסום אותו מספר של מעגלים שווים. המעגלים ממלאים את שתי הצורות ומסודרים כפי שמראים הציורים. מספר המעגלים הנוגעים בצלע המשולש גדול ב-14 ממספר המעגלים הנוגעים בצלע הריבוע. כמה מעגלים חסומים בכל אחת מהצורות הנ"ל?



תשובות:

80. 19. 81. 11 ו-8. 82. א. 9. ב. 9000 שקלים. 83. 11000 שקלים, 13000 שקלים.
84. 9 דקות, 2196 מטר, 2304 מטר. 85. לא תתנגשנה, המרחק ביניהן יהיה 12 מ'.
86. 2520 מכוניות או 2160 מכוניות. 87. א. 9 שעות. ב. 630 ק"מ, 480 ק"מ. 88. 1225.

מעבר מנוסחת הסכום לאיבר הכללי בסדרה חשבונית

נדון במקרים שבהם נתונה נוסחה ל- S_n ונרצה למצוא נוסחה לאיבר הכללי בסדרה.

דוגמה:

הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה היא $S_n = 2n^2 + 5n$.

חשבו את S_7 ו- a_8 .

פתרון:

על-פי הנתון: $S_n = 2n^2 + 5n$.

כדי לקבל את S_8 נציב $n = 8$ בנוסחה הנתונה. נקבל: $S_8 = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 = 168$

כדי לקבל את S_7 נציב $n = 7$ בנוסחה הנתונה. נקבל: $S_7 = 2 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 = 133$

כדי לחשב את a_8 נחסר מ- S_8 את S_7 .

נציב ונקבל: $a_8 = S_8 - S_7 = 168 - 133 = 35$

נסכם:

כפי שראינו בדוגמה, כאשר נתונה הנוסחה לסכום S_n , ניתן לחשב כל איבר בסדרה וזאת על-ידי חיסור סכומים. לדוגמה: כדי לחשב את האיבר העשירי בסדרה,

נחשב את סכום עשרת האיברים הראשונים ומסכום זה נחסר את סכום תשעת האיברים

הראשונים, כלומר: $a_{10} = S_{10} - S_9$.

באותה דרך ניתן לחשב למשל את a_{13} : $a_{13} = S_{13} - S_{12}$.

הערה:

כאשר נתונה נוסחה ל- S_n אפשר להציב בנוסחה $n = 1$ ולקבל את S_1 ,

שזה למעשה הערך של האיבר הראשון a_1 .

למשל, בדוגמה הקודמת נתון: $S_n = 2n^2 + 5n$.

אם נציב $n = 1$, נקבל: $S_1 = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1$, כלומר $S_1 = 7$, ולכן $a_1 = 7$.

שימו לב!

אם נתון הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה ונחסר ממנו את סכום $(n-1)$

האיברים הראשונים בסדרה, נקבל את האיבר העומד במקום ה- n , כלומר a_n .

לכן, כאשר נתונה נוסחה לסכום S_n של סדרה חשבונית,

ניתן למצוא נוסחה לאיבר הכללי a_n על-פי הקשר: $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$).

דוגמה:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = 3n^2 + 4n$.

א. חשבו את a_1 .

ב. מצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n .

ג. הוכיחו שהסדרה היא סדרה חשבונית.

פתרון:

א. נתון כי: $S_n = 3n^2 + 4n$. נציב $n = 1$ ונקבל $S_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 7$.

קיבלנו $S_1 = 7$, ולכן $a_1 = 7$.

ב. נמצא נוסחה לאיבר a_n בעזרת הקשר $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$).
 על פי הנתון: $S_n = 3n^2 + 4n$.
 כדי להביע את S_{n-1} , נציב $(n-1)$ בכל מקום שבו מופיע n .
 נקבל: $S_{n-1} = 3(n-1)^2 + 4(n-1)$ ומכאן $S_{n-1} = 3n^2 - 2n - 1$.
 נביע את a_n : $a_n = S_n - S_{n-1} = (3n^2 + 4n) - (3n^2 - 2n - 1) = 6n + 1$.
 קיבלנו $a_n = 6n + 1$.
 הקשר $a_n = S_n - S_{n-1}$ מתקיים עבור $n \geq 2$, לכן גם את הנוסחה $a_n = 6n + 1$ מציאנו עבור $n \geq 2$.
 כדי להוכיח שהנוסחה ל- a_n נכונה גם עבור $n = 1$ יש להראות ש- a_1 המתקבל על-ידי הצבת $n = 1$ בנוסחת a_n , שווה ל- S_1 המתקבל על-ידי הצבת $n = 1$ בנוסחת S_n .
 קיבלנו שעבור $n \geq 2$: $a_n = 6n + 1$. נציב $n = 1$ ונקבל $a_1 = 6 \cdot 1 + 1 = 7$.
 נתון כי: $S_n = 3n^2 + 4n$. נציב $n = 1$ ונקבל $S_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 7$.
 התוצאות שוות ולכן הנוסחה ל- a_n נכונה גם עבור $n = 1$, ומכאן שהיא נכונה לכל n טבעי.
 ב. כדי להוכיח שהסדרה היא סדרה חשבונית יש להוכיח שההפרש $a_{n+1} - a_n$ הוא קבוע ואינו תלוי ב- n . מסעיף א' ידוע: $a_n = 6n + 1$.
 נציב $(n+1)$ במקום n ונקבל: $a_{n+1} = 6(n+1) + 1 = 6n + 7$.
 נחשב את ההפרש $a_{n+1} - a_n$: $a_{n+1} - a_n = (6n + 7) - (6n + 1) = 6$.
 קיבלנו $a_{n+1} - a_n = 6$ ולכן הסדרה היא סדרה חשבונית והפרשה 6.

תרגילים

1. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית היא $S_n = n^2 + 3n$.
 א. חשבו את S_4 ואת S_5 .
 ב. חשבו את a_5 . היעזרו בסעיף א'.
2. בסדרה חשבונית נתון: $S_n = 2n^2 - 8n$. חשבו את a_6 .
3. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית היא $S_n = n^2$.
 א. חשבו את S_1 ואת a_1 .
 ב. חשב את S_2 ואת a_2 .
4. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה היא $S_n = 3n^2 + n$.
 א. מצאו נוסחה לסכום $(n-1)$ האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. היעזרו בקשר $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$), ומצאו נוסחה לאיבר הכללי a_n .

בתרגילים הבאים נתונה נוסחה לסכום S_n של n האיברים הראשונים של סדרה. מצא את הנוסחה לאיבר הכללי a_n , ובדקו שמתקיים $a_1 = S_1$.

5. $S_n = n^2$ 6. $S_n = \frac{n^2 - 6n}{2}$

7. סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = n^2 + 6n + 4$.
א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n ($n \geq 2$).
ב. האם הנוסחה שמצאת בסעיף א' נכונה גם עבור $n = 1$?

8. סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = \frac{(5n+3)n}{2}$.
א. מצאו ביטוי לאיבר הכללי a_n .
ב. הוכיחו שהסדרה היא סדרה חשבונית.

9. בסדרה נתון: $S_n = 2n^2 + n$.
א. מצאו את הנוסחה לאיבר הכללי a_n .
ב. מצאו את מקומו של איבר בסדרה שערכו 47.

10. סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = n^2 + bn$.
נתון שהאיבר הכללי של הסדרה הוא $a_n = 2n + 5$. מצאו את b .

11. סכום n האיברים הראשונים של סדרה הוא $S_n = -2n^2 + 5n$.
א. הוכיחו שהסדרה היא סדרה חשבונית.
ב. חשבו את הסכום $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{26}$.

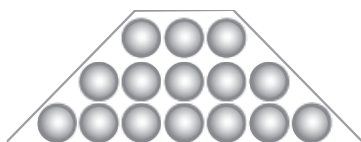
תשובות:

1. א. $S_4 = 28$, $S_5 = 40$. ב. 12. 2. 92. 3. א. $a_1 = 1$, $S_1 = 1$. ב. $a_2 = 3$, $S_2 = 4$.
4. א. $S_{n-1} = 3n^2 - 5n + 2$. ב. $a_n = 6n - 2$. 5. $a_n = 2n - 1$. 6. $a_n = n - 3.5$.
7. א. $a_n = 2n + 5$. ב. לא. 8. א. $a_n = 5n - 1$.
9. א. $a_n = 4n - 1$. ב. a_{12} . 10. 6. 11. ב. -637.

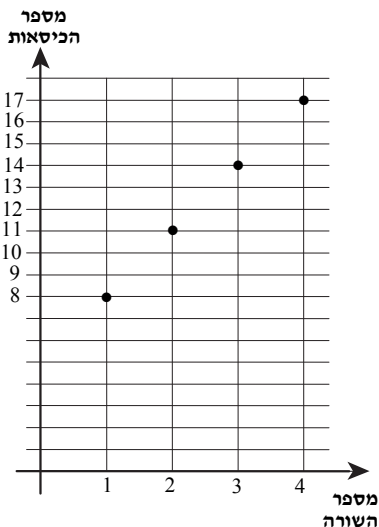
סדרה חשבונית – שאלות לסיכום וחזרה

1. נתונה הסדרה החשבונית $80, 73, 66, \dots$.
 א. מצאו כמה איברים חיוביים יש בסדרה.
 ב. מהו סכום כל האיברים החיוביים בסדרה?
2. נתונה הסדרה החשבונית $77, 72, 67, \dots$.
 א. מצאו כמה איברים עוקבים לכל הפחות, החל בראשון, יש לחבר בסדרה, כדי לקבל סכום שלילי.
 ב. חשבו את S_{31} ואת S_{32} , והסבירו כיצד התוצאות שקיבלתם תואמות את תשובתכם לסעיף א'.
3. בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא -54 וההפרש הוא 4 .
 א. חשבו את סכום כל האיברים השליליים בסדרה.
 ב. כמה איברים עוקבים לכל היותר יש לחבר, החל בראשון, כדי שסכומה יהיה עדיין שלילי?
4. נתונה הסדרה החשבונית $-36, -31, -26, \dots$.
 א. מהו האיבר הראשון בסדרה הגדול מ- 50 ?
 ב. כמה איברים (לפחות) יש לחבר בסדרה, החל מהאיבר הראשון, כדי שסכומם יהיה גדול מ- 50 ?
5. בסדרה חשבונית יש 17 איברים, מתוכם 12 איברים חיוביים.
 הפרש הסדרה הוא 4 . האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה הוא 3 .
 א. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.
 ב. חשבו את סכום הסדרה.
6. במבנה עם גג משופע יש שני קירות תמיכה זהים.
 כל קיר עשוי מעמודים אנכיים של צינורות ברזל (ראו שרטוט).
 אורכו של העמוד הגבוה ביותר בכל אחד מהקירות הוא 6 מטרים. אורכו של העמוד הקצר ביותר הוא 4 מטרים ו- 60 ס"מ.
 אורכו של כל עמוד קצר מהקודם לו ב- 20 ס"מ.
 א. כמה עמודים יש בקיר תמיכה אחד?
 ב. בכמה מטרים של צינור ברזל השתמשו לבניית שני הקירות?
 ג. מחירו של מטר אחד צינור ברזל הוא 15 שקלים.
 מה המחיר ששילמו עבור צינורות הברזל לבניית שני הקירות?





7. על שולחן מסדרים כדורים בצורת טרפז באופן הבא: בשורה הראשונה – 3 כדורים, בשורה השנייה – 5 כדורים, בשורה השלישית – 7 כדורים וכן הלאה (ראו שרטוט).
 א. כמה כדורים יהיו בשורה ה-15?
 ב. מהו מספר הכדורים הדרוש ליצירת טרפז שבו 15 שורות?
 ג. לבניית הטרפז משתמשים ב-195 כדורים. כמה שורות של כדורים יהיו בטרפז זה?



8. הגרף הבא מתאר את מספר הכיסאות באולם קונצרטים, בכל אחת מארבע השורות הראשונות באולם.
 א. עבור 4 השורות הראשונות, קבעו בכמה גדול מספר הכיסאות בכל שורה ממספר הכיסאות בשורה הקודמת לה.
 ב. בהנחה שההפרש שמצאת בסעיף א' נשאר קבוע גם בשורות שלאחר מכן, מצאו:
 (1) כמה כיסאות יש בשורה ה-12?
 (2) באולם הקונצרטים יש 435 מקומות ישיבה. מהו מספר השורות באולם?

9. נתונה הסדרה החשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$. בסדרה ישנם 48 איברים.
 א. מצאו כמה איברים ישנם בסדרה $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{48}$.
 ב. מצאו כמה איברים ישנם בסדרה $a_3, a_7, a_{11}, \dots, a_{47}$.

10. בסדרה החשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ יש 30 איברים.
 נתון: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{30} = 1950$, $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{30} = 690$.
 מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

11. בסדרה החשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ יש 40 איברים.
 נתון: $a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40} = 800$, $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40} = 1540$.
 מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

12. בסדרה החשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ יש 42 איברים.
 נתון: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{41} = -840$, $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{40} = -525$.
 מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

13. בסדרה חשבונית שהפרשה 4 יש $3n$ איברים.
נתון: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{3n} = 3024$, $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n} = 1056$.
מצאו את האיבר הראשון בסדרה ואת מספר איבריה.
14. בסדרה חשבונית יש $4n$ איברים. הפרש הסדרה הוא 3.
סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 456 וסכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 492. כמה איברים ישנם בסדרה?
15. בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים, שווה האיבר האחרון לסכום שני האיברים האמצעיים.
א. מצא את האיבר הראשון.
ב. כמה איברים בסדרה אם סכום כל איברי הסדרה גדול פי 9 מהאיבר האחרון?
16. בסדרה חשבונית יש מספר אי-זוגי של איברים.
סכום הסדרה הוא 378 והאיבר האמצעי הוא 18. מצאו את מספר האיברים בסדרה.
17. בסדרה חשבונית שאיבריה שונים זה מזה, סכום 60 האיברים הראשונים שווה לאפס.
א. הראו כי סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה שווה לסכום 40 האיברים הראשונים.
ב. הראו שלא קיים בסדרה איבר שערכו שווה לאפס.
ג. אם הסדרה היא סדרה חשבונית יורדת, מצאו את מקומו הסידורי של האיבר השלילי הראשון בסדרה.
18. בסדרה חשבונית סכום שני האיברים הראשונים ושני האיברים האחרונים יחד הוא 110.
סכום שאר איברי הסדרה הוא 275. מצאו כמה איברים בסדרה.
19. בסדרה חשבונית יש 17 איברים.
סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 324 וסכום שמונת האיברים האחרונים הוא 396.
מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
20. בסדרה חשבונית שבה יותר מ-30 איברים נתון: $a_1 = 20$, $d = -2$.
האיבר האחרון בסדרה קטן פי 8 מסכום כל האיברים שלפניו.
א. כמה איברים בסדרה?
ב. מהו סכום כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים?
21. בסדרה חשבונית שהפרשה שונה מאפס, נתון כי האיבר הראשון שווה להפרש הסדרה, והאיבר האחרון קטן פי 6 מסכום כל האיברים שלפניו.
כמה איברים בסדרה?

22. ההפרש של הסדרה החשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots$ הוא d .
ההפרש של הסדרה החשבונית $b_1, b_2, b_3, \dots$ הוא D .
נתון: $b_3 = a_7, b_1 = a_3$.
א. הוכיחו: $D = 2d$.
ב. הוכיחו: $b_8 = a_{17}$.
23. הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה חשבונית שההפרש שלה d .
בונים סדרה חדשה שאיבריה: $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, \dots$
א. הביעו באמצעות a_1, d ו- n את b_n , האיבר במקום ה- n .
ב. הוכיחו שסדרת b_n היא חשבונית ורשום את הפרשה.
ג. הביעו באמצעות a_1, d ו- n את הסכום $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$.
24. הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה חשבונית שההפרש שלה d .
בונים סדרה חדשה $b_1 = a_1 + a_2 + a_3, b_2 = a_2 + a_3 + a_4, b_3 = a_3 + a_4 + a_5, \dots$
א. הביעו באמצעות a_1, d ו- n את b_n , האיבר שבמקום ה- n .
ב. הוכיחו שסדרת b_n היא חשבונית.
ג. נתון: $a_1 = 6, b_2 = 42$, וסכום n האיברים $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ הוא 1152.
מצאו את n .

תשובות:

1. א. 12. ב. 498. 2. א. 32. ב. $S_{31} = 62, S_{32} = -16$. 3. א. -392. ב. 27. 4. א. $a_{19} = 54$. ב. 17.
5. א. $a_1 = -17$. ב. 255. 6. א. 8 עמודים. ב. 84.8 מטר. ג. 1,272 שקלים.
7. א. 31 כדורים. ב. 255 כדורים. ג. 13 שורות.
8. א. 3 כיסאות. ב. (1) 41 כיסאות. (2) 15 שורות.
9. א. 16. ב. 12. 10. $a_1 = 7, d = 4$. 11. $a_1 = 17, d = 3$. 12. $a_1 = 60, d = -5$.
13. $a_1 = 14, a_{36}$ איברים. 14. 24. 15. א. 0. ב. 18. 16. 21. 17. ג. a_{31} . 18. 14.
19. $a_1 = 12, d = 3$. 20. א. 33. ב. -192. 21. 13.
23. א. $b_n = 2a_1 + 2dn - d$. ב. $2d$. ג. $(2a_1 + nd)n$. 24. א. $3a_1 + 3dn$. ג. 12.