הסברים לפרק חשיבה כמותית 2

התשובות הנכונות:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	2	1	4	3	3	1	2	3	3	2	4	4

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
3	1	2	1	4	4	2	4	1	1	4	2

הסברים

1. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע מהו טווח כמות האגסים שהמטע מניב בשנה.
לפיכך, נחשוב על הקצוות האפשריים:
<u>כמות אגסים הכי קטנה שתתכן</u>: כדי להגיע לכמות האגסים הקטנה ביותר על כל עץ להניב הכי מעט ק״ג אגסים בשנה (= 2 ק״ג) ושבכל ק״ג יהיו הכי מעט אגסים (= 3 אגסים בק״ג).
במקרה זה כמות האגסים השנתית תהיה 42 אגסים ($= 7 \cdot 2 \cdot 3$).
<u>כמות אגסים הכי גדולה שתתכן</u>: כדי להגיע לכמות האגסים הגדולה ביותר על כל עץ להניב הכי הרבה ק״ג אגסים בשנה (= 4 ק״ג) ושבכל ק״ג יהיו הכי הרבה אגסים (= 6 אגסים בק״ג).
במקרה זה כמות האגסים השנתית תהיה 168 אגסים ($= 7 \cdot 4 \cdot 6$).

2. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע איזו מהטענות שבתשובות נכונה.
לשם כך, נתאר את כל הנעלמים באמצעות נעלם אחד (a).
נקבל: $b = a + 1$, $c = a + 2$.
כעת נבדוק את נכונות המשוואות שבתשובות.
<u>תשובה (1)</u>: $b + c = 2(a + 1) \Leftarrow (a + 1) + (a + 2) = 2(a + 1) \Leftarrow 2a + 3 = 2a + 1 \Leftarrow 3 = 1$.
תשובה זו אינה נכונה ולכן תפסל.
<u>תשובה (2)</u>: $a + c = 2b \Leftarrow a + (a + 2) = 2(a + 1) \Leftarrow 2a + 2 = 2a + 2$. לפיכך, זוהי התשובה הנכונה. משום שמצאנו את התשובה הנכונה, אין צורך לבדוק את התשובה שנותרה. אנו נעשה זאת למען שלמות ההסבר.
<u>תשובה (3)</u>: $a + b + 2 = 2c \Leftarrow a + (a + 1) + 2 = 2(a + 2) \Leftarrow 2a + 3 = 2a + 4 \Leftarrow 3 = 4$. לפיכך, תשובה זו נפסלת.

3. התשובה הנכונה היא: (1).

עלינו למצוא מהו המרחק בין הנקודות A ו- B.
המרחק בין A ל- B עובר דרך משושים שווי צלעות שאורך צלעם 1 ס"מ.
בהעברת האלכסונים הראשיים במשושה משוכלל (= בניית עזר נפוצה במשושים משוכללים) נקבל 6 משולשים שווי צלעות שווים. באמצעות בניית עזר זו נוכל להבין שמרחק מהנקודה A לקצה המשושה שעליו היא נמצאת הוא כמרחק שתי צלעות המשושה, ולכן מרחק זה הוא 2 ס"מ ($= 1 \cdot 2$).
המרחק בין A ל- B מורכב מצלע משושה אחת (= 1 ס"מ) ומפעמיים המרחק מקצה אחד לאחר של אותו המשושה (= 4 ס"מ $= 2 \cdot 2$).
לפיכך, אורך המרחק כולו בין הנקודות A ו- B הוא 5 ס"מ ($= 1 + 4$).

4. התשובה הנכונה היא: (4).

עלינו לקבוע מהו גודלה של הזווית β.
בסרטוט מבנה מוכר של זווית עגולה ($= 360^\circ$) שמכיל את β.
נקבל: $3\alpha + \alpha + \beta + \alpha = 360^\circ \leftarrow 5\alpha + \beta = 360^\circ$.
לפיכך, עלינו למצוא את גודלה של α כדי למצוא את גודלה של β.
מהסרטוט נובע: $3\alpha + \alpha = 180^\circ \leftarrow 4\alpha = 180^\circ \leftarrow \alpha = 45^\circ$.
נציב זאת במשוואה שקיבלנו בתחילת הפתרון. נקבל:
$5\alpha + \beta = 360^\circ \leftarrow 5 \cdot 45 + \beta = 360^\circ \leftarrow 215^\circ + \beta = 360 \leftarrow \beta = 135^\circ$.

5. התשובה הנכונה היא: (3).

עלינו לקבוע מה היה המרחק בין אלון לתומר בתום הדקה ה- 7.
על-פי התרשים, עד תום הדקה ה- 7 אלון עבר מרחק של 1,200 מטרים, ואילו תומר עבר מרחק של 1,050 מטרים. לפיכך, המרחק ביניהם היה 150 מטרים (= 1,050 – 1,200).

6. התשובה הנכונה היא: (3).

עלינו לקבוע כמה מטרים עבר אלון בשתי הדקות האחרונות של הריצה.
את הריצה סיים אלון בתום 9 דקות כשעבר 1,500 מטרים.
2 דקות קודם (תום הדקה ה- 7) עבר 1,200 מטרים.
לפיכך, בשתי הדקות האחרונות עבר מרחק של 300 מטרים (= 1,200 – 1,500).

7. התשובה הנכונה היא: (1).

עלינו לקבוע מי מבין הרצים עבר ראשון את מחצית המסלול.
אורך המסלול כולו הוא 1,500 מטרים. לפיכך, מחצית המסלול הוא 750 מטרים.
אלון עבר 750 מטרים בפחות מ- 5 דקות. תומר עבר 750 מטרים ביותר מ- 5 דקות.
לפיכך, אלון עבר את מחצית המסלול ראשון.

8. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע בכמה זמן עבר תומר את 500 המטרים האחרונים במסלול.
את המסלול כולו (= 1,500 מטרים) סיים תומר לאחר 9 דקות.
את 1,000 המטרים הראשונים של המסלול סיים תומר בקצת פחות מ- 7 דקות.
לפיכך, את 500 המטרים האחרונים עבר תומר בקצת יותר מ- 2 דקות, ופחות מ- 3 דקות.

9. התשובה הנכונה היא: (3).

עלינו לקבוע איזו מהטענות בנוגע למערכת היחסים שבין הנעלמים נכונה.
בנתוני השאלה מידע על מערכת היחסים בין הנעלמים שמובעת במילים. נתרגם מערכת יחסים זו לאלגברה ונלמד ממנה.
"a שווה ל- 20% מ- b" ← $a=\frac{20}{100}\cdot b=\frac{b}{5}$.
"a שווה ל- 120% מ- c" ← $a=\frac{120}{100}\cdot c=\frac{6\cdot c}{5}$.
משום שלפי התשובות עלינו ללמוד על הקשר בין b לבין c, נפטר מ- a על ידי הצבת משוואה אחת באחרת. נקבל: $\frac{b}{5}=\frac{6c}{5}$. נכפיל את שני אגפי המשוואה פי 5. נקבל: $b = 6c$. לפיכך, b גדול פי 6 מ- c (על-פי הנתון הנעלמים חיוביים).

10. התשובה הנכונה היא: (3).

עלינו לקבוע כמה בלונים יהיו ברשות מוכר הבלונים בסוף יום ג'.
בשאלה נתונה כמות הבלונים שברשותו בתחילת יום א' ואופן התקדמות המכירה והקנייה מידי יום. לפיכך, נלווה את התהליך עד לסוף יום ג'.
בתחילת יום א' יש למוכר 40 בלונים. במהלך היום הוא מכר מחצית מהבלונים שלו (= 20 בלונים), ובסוף יום א' קנה 40 בלונים (= $2 \cdot 20$). לכן, בסוף יום א' היו למוכר הבלונים 60 בלונים (20 שנותרו מתחילת היום ועוד 40 חדשים).
בתחילת יום ב' יש למוכר 60 בלונים. במהלך היום הוא מכר מחצית מהבלונים שלו (= 30 בלונים), ובסוף יום ב' קנה 60 בלונים (= $2 \cdot 30$). לכן, בסוף יום ב' היו למוכר הבלונים 90 בלונים (30 שנותרו מתחילת היום ועוד 60 חדשים).
בתחילת יום ג' יש למוכר 90 בלונים. במהלך היום הוא מכר מחצית מהבלונים שלו (= 45 בלונים), ובסוף יום ב' קנה 90 בלונים (= $2 \cdot 45$). לכן, בסוף יום ג' היו למוכר הבלונים 135 בלונים (45 שנותרו מתחילת היום ועוד 90 חדשים).

11. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע מהו ערכו של y.
נתון אורך רדיוס המעגל (= 10), ולכן נחבר בין הנקודה A והנקודה (0,y) בעזרת הרדיוס שאורכו 10. נקבל משולש ישר זווית שבו אורך אחד הניצבים הוא 8 ואורך היתר הוא 10.
לפיכך (על-פי גדלים מוכרים שמקיימים את משפט פיתגורס), אורך הניצב הנוסף הוא 6.
אורך הניצב שמצאנו הוא למעשה ערך ה- y עליו שאלו.

12. התשובה הנכונה היא: (4).

עלינו לקבוע איזו מהזוויות שבתשובות אינה שווה בהכרח ל- α.
נבדוק תשובות. תשובה שהזווית שבה אינה בהכרח שווה ל- α היא התשובה הנכונה.
תשובה (1): זווית EFH בהכרח שווה לזווית α משום שהקטעים BC ו- EF מקבילים, ולכן שתי הזוויות הינן זוויות מתחלפות בין קטע חותך למקבילים.
תשובה (2): זווית BEF בהכרח שווה לזווית α. זווית BEF הינה זווית במקבילית BEFC. משום שזוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו, הרי שזווית BEF שווה לזווית HCF. זווית HCF שווה לזווית α משום ששתיהן זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים HFC.
תשובה (3): זווית DAH בהכרח שווה לזווית α. זווית DAH שווה לזווית AHB (זוויות מתחלפות במקרה של קטע החותך מקבילים). זווית AHB שווה לזווית α משום שהן קודקודיות.
תשובה (4): משום שפסלנו 3 תשובות, ומשום שלא ניתן למצוא שום קשר של זהות בין שתי זוויות אלו, זווית BAH אינה בהכרח שווה לזווית α.

13. התשובה הנכונה היא: (4).

עלינו לקבוע מהו גודלו של c. מהתשובות ניתן ללמוד ש- c הוא מספר שלם וקטן יחסית.
לפיכך, נבדוק תשובות.
תשובה (1): עבור $c = 5$ נקבל: $a^5 = 5^a$. נתון ש- $a < c$.
a לא יכול להיות 1 ($1^5 \neq 5^1$).
a לא יכול להיות 2 ($2^5 \neq 5^2$).
a לא יכול להיות 3 ($3^5 \neq 5^3$).
a לא יכול להיות 4 ($4^5 \neq 5^4$).
לפיכך, תשובה זו נפסלת.
תשובה (2): עבור $c = 6$ נקבל: $a^6 = 6^a$. נתון ש- $a < c$.
a לא יכול להיות 1 ($1^6 \neq 6^1$).
a לא יכול להיות 2 ($2^6 \neq 6^2$).
a לא יכול להיות 3 ($3^6 \neq 6^3$).
a לא יכול להיות 4 ($4^6 \neq 6^4$).
a לא יכול להיות 5 ($5^6 \neq 6^5$).
לפיכך, תשובה זו נפסלת.
תשובה (3): עבור $c = 3$ נקבל: $a^3 = 3^a$. נתון ש- $a < c$.
a לא יכול להיות 1 ($1^3 \neq 3^1$).
a לא יכול להיות 2 ($2^3 \neq 3^2$).
לפיכך, תשובה זו נפסלת.
תשובה (4): עבור $c = 4$ נקבל: $a^4 = 4^a$. נתון ש- $a < c$.
a לא יכול להיות 1 ($1^4 \neq 4^1$).
a יכול להיות 2 ($2^4 = 4^2 \rightarrow 16 = 16$).
לפיכך, זוהי התשובה הנכונה.

14. התשובה הנכונה היא: (3).

עלינו לקבוע למה יכול להיות שווה מחיר אשכולית אחת.
בנתוני השאלה מתוארות במילים מערכות היחסים בין מחירי הפירות.
ראשית, נתרגם מערכת יחסים זו לאלגברה ונלמד על הקשרים האפשריים.
למען נוחות ההסבר נסמן מחיר לימון ב- L, מחיר תפוז ב- T ומחיר אשכולית ב- E.
נקבל: $2L < T$.
$3T < E < 9L$.
כדי לקשר בין אי-השיוויונים שהתקבלו, נכפיל את אי השיויון הראשון פי 4.5. נקבל:
$9L < 4.5T$
לפיכך, $3T < E < 9L < 4.5T$.
כדי לקשר בין אי-השיוויון הראשון לחלק האחר של אי-השיוויון השני, נכפיל את אי-השיוויון הראשון פי 3. נקבל: $6L < 3T$.
לפיכך, $6L < 3T < E < 9L < 4.5T$.
ממערכת היחסים שהתקבלה ניתן להבין שמחיר אשכולית (= E) נמוך ממחיר 4.5 תפוזים.
לכן, תשובות (1) ו-(2) נפסלות.
כמו כן, מחיר אשכולית (= E) גדול ממחיר 6 לימונים, ולכן גם תשובה (4) נפסלת.
משום שפסלנו 3 תשובות, התשובה שנותרה היא התשובה הנכונה.

15. התשובה הנכונה היא: (1).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין נפח החרוט ונפח הגליל. במידע הנוסף נתון במילים הקשר בין הגבהים. נחשב מהו הגודל בכל אחד מהטורים ונפשט את הטורים.
למען נוחות ההסבר נסמן את גובה הגליל ב- h. לפיכך, גובה החרוט הוא πh.
טור א: על-פי נוסחה, נפח החרוט הוא $\frac{\pi r^2(\pi h)}{3}$.
טור ב: על-פי נוסחה, נפח הגליל הוא $\pi r^2 h$.
נפשט את הטורים:

$\frac{\pi r^2(\pi h)}{3}$	?	$\pi r^2 h$	נחלק את שני הטורים ב- $\pi r^2 h$. נקבל:
$\frac{\pi}{3}$	?	1	נכפיל את שני הטורים פי 3. נקבל:
π	?	3	הביטוי בטור א גדול יותר.

16. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין p לבין 5.
נתון ש- p הוא מספר ראשוני. לפיכך, הוא חיובי ושלם. נבדוק את כל המספרים הראשוניים הקטנים, ונראה מי מהם עומד בתנאי השאלה.
2 - גם 30 וגם 28 מתחלקים ב- 2. לפיכך, p אינו יכול להיות 2.
3 - רק 30 מתחלק ב- 3. לפיכך, 3 עומד בתנאי השאלה. יתכן ש- $p = 3$.
5 - גם 30 וגם 35 מתחלקים ב- 5. לפיכך, p אינו יכול להיות 5.
7 - גם 28 וגם 35 מתחלקים ב- 7. לפיכך, p אינו יכול להיות 7.
11 - אף אחד מהמספרים לא מתחלק ב- 11. לפיכך, p אינו יכול להיות 11.
לסיכום, $p = 3$ ולכן טור ב גדול יותר.

17. התשובה הנכונה היא: (1).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין הביטוי שבטור ב לבין אפס (האם הביטוי בטור ב יכול להיות חיובי/שלילי/אפס).
נתון כי שניים מהנעלמים חיוביים ו- 3 שליליים.
נבחן מהם המצבים האפשריים:
א- שני המספרים החיוביים במונה השבר. במקרה זה המונה יהיה חיובי (מכפלת שני איברים חיוביים) והמכנה יהיה שלילי (מכפלת שלושה איברים שליליים). השבר כולו יהיה שלילי (חלוקת חיובי בשלילי).
ב- אחד המספרים החיוביים נמצא במונה והאחר במכנה. במקרה זה המונה יהיה שלילי (מכפלת חיובי בשלילי), והמכנה יהיה חיובי (מכפלת שני שליליים בחיובי). גם במקרה זה השבר כולו יהיה שלילי (חלוקת שלילי בחיובי).
ג- שני המספרים החיוביים במכנה השבר. במקרה זה המונה יהיה חיובי (מכפלת שני שליליים) והמכנה יהיה שלילי (מכפלת שני חיוביים בשלילי). גם במקרה זה השבר כולו יהיה שלילי (חלוקת חיובי בשלילי).
לא יתכנו מקרים נוספים. לפיכך, טור ב תמיד שלילי ולכן טור א גדול יותר.

18. התשובה הנכונה היא: (4).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין מספר המשתתפים ששתו מיץ, אכלו עוגה ולא רקדו, לבין 8.
נתון כי 12 משתתפים שתו מיץ, אכלו עוגה ורקדו. כמו כן, ידוע שרק 20 משתתפים שתו מיץ. לפיכך, ייתכן שכל 8 (= 12 - 20) המשתתפים ששתו מיץ ולא רקדו אכלו עוגה, אך ייתכן שגם רק חלק מאותה קבוצה (פחות מ- 8) בחרו לאכול עוגה.
לפיכך, תתכן יותר ממערכת יחסים אחת בין הטורים ולכן התשובה היא (4).

19. התשובה הנכונה היא: (4).

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים בין שטח המלבן לחצי משטח הטרפז.
מהנתונים ניתן להבין שלא קיימת מגבלה על גודל המשולשים ABE ו- DFC.
לפיכך, יתכן שמשולשים אלו עצומים בשטחם, כך שחצי משטח הטרפז יהיה גדול משטח המלבן. כמו כן, יתכן שמשולשים אלו קטנים בשטחם, כך שחצי משטח הטרפז קטן משטח הטרפז.
משום שתתכן יותר ממערכת יחסים אחת בין הטורים, התשובה היא (4).

20. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע מהו התחום המדוייק של x.
נפשט את אי-השיוויונים שבנתון עד שנגיע למידע על x.
נפרק את אי-השיוויון בעל 3 האגפים ל- 2 אי-שיוויונים.
נקבל:
$\frac{1}{3}<\frac{x}{x+1}$ ו- $\frac{2}{3}<\frac{x}{x+1}$.
נפשט תחילה את $\frac{1}{3}<\frac{x}{x+1}$:
נכפיל את שני הטורים ב- 3 וב- $(x+1)$. נקבל:
$x+1<3x$ נחסר x משני הטורים. נקבל:
$1<2x$ נחלק ב- 2. נקבל:
$\frac{1}{2}<x$
כעת נפשט את $\frac{2}{3}<\frac{x}{x+1}$:
נכפיל את שני הטורים ב- 3 וב- $(x+1)$. נקבל:
$3x<2x+2$ נחסר 2x מכל אגף. נקבל:
$x<2$.
לסיכום, תחום הערכים שבו x יכול להמצא הוא $\frac{1}{2}<x<2$.

21. התשובה הנכונה היא: (4).

עלינו לקבוע מהו גודל היחס $\frac{AC}{AB}$.
למען נוחות ההסבר, נסמן את צלע הריבוע ב- a.
הקטע AB הוא אלכסון בריבוע שצלעו a, לפיכך, אורכו הוא $a\sqrt{2}$ (אלכסון בריבוע מחלק אותו לשני משולשי כסף).
הקטע AC הוא היתר במשולש ישר זווית שבו אורך ניצב אחד הוא a ואורך הניצב השני הוא 2a. לפי משפט פיתגורס, אורך הקטע AC הוא $a\sqrt{5}$.
$\left((AC)^2=a^2+(2a)^2=a^2+4a^2=5a^2\rightarrow AC=a\sqrt{5}\right)$.
לפיכך, $\frac{AC}{AB}=\frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

22. התשובה הנכונה היא: (1).

עלינו לקבוע פי/ב כמה גדול מספר הבולים של נגה מזה של ראובן.
נתון במילים מידע לגבי הקשר בין כמויות הבולים. נתרגם קשר זה לאלגברה ונפשטו.
נסמן את כמות הבולים של גלעד ב- G, את כמות הבולים של נגה ב- N ואת כמות הבולים של ראובן ב- R. נקבל:
$\frac{G+N}{2}=\frac{G+R}{2}+8$. נכפיל את שני אגפי המשוואה פי 2. נקבל:
$G+N=G+R+16$. נחסר G מכל אגף. נקבל:
$N=R+16$.
כלומר, מספר הבולים של נגה (= N) גדול ב- 16 ממספר הבולים של ראובן (= R).

23. התשובה הנכונה היא: (1).

עלינו לקבוע מהו ערך הביטוי $\$(-1, 3)$.
נפשט את ביטוי זה על-פי הגדרת הפעולה \$. נקבל:
$\$(-1,3)=\frac{-1}{3}-\frac{3}{-1}=-\frac{1}{3}-(-3)=-\frac{1}{3}+3=2\frac{2}{3}$.
כעת נפשט את הביטויים שבתשובות עד שנתקל בתשובה שערך הביטוי שבה הוא $2\frac{2}{3}$.
תשובה (1): $\$(3,1)=\frac{3}{1}-\frac{1}{3}=3-\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}$.
משום שערך הביטוי שבתשובה זו זהה לערך הביטוי שבשאלה, הרי שזו התשובה הנכונה.
משום שמצאנו את התשובה הנכונה, אין צורך להמשיך ולבדוק את שאר התשובות.

24. התשובה הנכונה היא: (4).

עלינו לקבוע כמה אפשרויות שונות ייתכנו עבור הקוד הסודי, ועל-פי התשובות מספר האפשרויות קטן יחסית. נתון כי הקוד הוא מספר בן 4 ספרות, שמתחיל ב- 5 ושכל אחת מהספרות הבאות גדולה מהספרה הקודמת לה. לפיכך, נמנה באופן ידני את כל אפשרויות הקוד, מהקוד שיוצר את המספר הקטן ביותר ועד לקוד שיוצר את המספר הגדול ביותר.
נקבל: 5678, 5679 , 5689, 5789.
סך הכל קיבלנו 4 אפשרויות.

25. התשובה הנכונה היא: (2).

עלינו לקבוע מהו שטח הגזרה הכהה.
לשם כך עלינו למצוא מהו גודל הזווית המרכזית היוצרת את הגזרה.
ABCD הוא טרפז. לפיכך, סכום הזוויות הפנימיות שעל אותה השוק הוא 180°. ולכן, גודל זווית ECF הוא 140° (=180° - 40°). במרובע EOFC שתי זוויות פנימיות בנות 90° (זווית CEO וזווית CFO. שתיהן זוויות בין משיק לרדיוס).
לפיכך, סכום שתי הזוויות הפנימיות הנוספות במרובע זה הוא 180° (= 360° - 180°) וגודל הזווית EOF הוא 40° (=180° - 140°).

גודל הזווית המרכזית היוצרת את הגזרה המבוקשת ($40° =$) מהווה $\frac{1}{9}$ משטח המעגל כולו.
על-פי נוסחה, שטחו של מעגל שרדיוסו הוא 3 ס"מ הוא 9π סמ"ר ($r^2\pi = 3^2\pi =$).
לפיכך, $\frac{1}{9}$ מגודל זה הוא π סמ"ר.