



פתרון הבחינה במתמטיקה

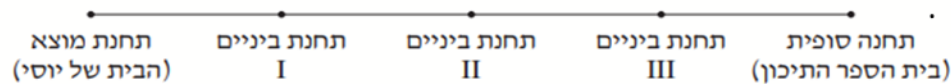
קיצ' תשפ"ה, 2025, שאלון 35581, מועד א:
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"





1. אורך הכביש שבין הבית של יוסי ובין בית הספר התיכון שהוא לומד בו הוא 8 ק"מ.

בכל יום יוצא אוטובוס, המשמש להסעת תלמידים, מתחנת המוצא שלו – הבית של יוסי, אל התחנה הסופית שלו – בית הספר. בדרך לבית הספר האוטובוס עובר בשלוש תחנות ביניים ועוצר בכל אחת מהן למשך 4 דקות כדי לאסוף תלמידים. האוטובוס נוסע במהירות קבועה של v קמ"ש בכל קטעי הכביש. המרחק בין כל שתי תחנות סמוכות זהה, כמתואר בסרטוט.



ביום ראשון החליט יוסי לבוא לבית הספר ברכיבה על אופניים חשמליים. הוא יצא מביתו באותו הזמן שיצא האוטובוס מתחנת המוצא, ורכב במהירות קבועה. האוטובוס ויוסי הגיעו לבית הספר באותו הזמן.

א. הביעו את מהירות הרכיבה של יוסי באמצעות v .

ביום שני החליט יוסי לבוא לבית הספר בריצה. הוא יצא 19 דקות לפני שיצא האוטובוס מתחנת המוצא. מהירות הרכיבה של יוסי ביום ראשון גדולה פי 2 ממהירות הריצה שלו ביום שני. יוסי והאוטובוס הגיעו לתחנת ביניים III באותו הזמן.

ב. מצאו את הערך של v .

ג. קבעו באיזה מן המקרים (1)–(3) שלפניכם, יגיע יוסי לבית הספר בזמן הקצר ביותר. נמקו את קביעתכם.

(1) יוסי ייסע באוטובוס כל הדרך עד בית הספר.

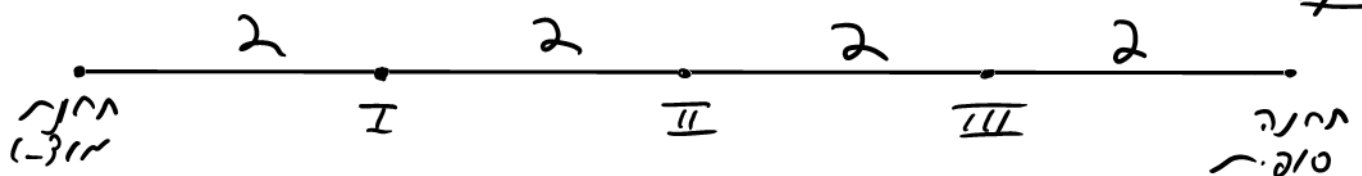
(2) יוסי ייסע באוטובוס מתחנת המוצא עד תחנת ביניים II, ומשם ימשיך מייד ברכיבה על אופניים חשמליים.

עד לבית הספר באותה המהירות שבה רכב ביום ראשון.

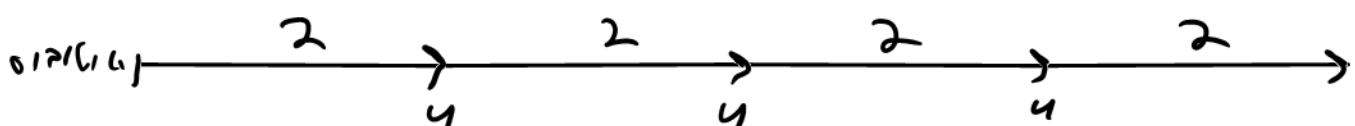
(3) יוסי ירכב על אופניים חשמליים מביתו עד לבית הספר במהירות הגדולה ב-5 קמ"ש ממהירות הרכיבה שלו ביום ראשון.

פתרון:

א.



ב.



$$4 \cdot \frac{2}{v} + 3 \cdot \frac{4}{60} = \frac{8}{v} + \frac{1}{5}$$

מהירות ירכיבה של יוסי - x מ"ש, רכיבה 'ס' $\frac{8}{x}$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





נשווה יאל הזמנים:

$$\frac{8}{x} = \frac{8}{v} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{40+v}{5v} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{5v}{40+v} \rightarrow x = \frac{40v}{40+v}$$

$$\boxed{\frac{40v}{40+v} \text{ ש"ש}}$$

מהיר הכבידה של יוס

ב. מהיר הרילה של יוסי גלם פי 2 מההיך
הרכיבה, כלומר היא

$$\frac{20v}{40+v}$$

זמן כיזה של יוסי עז חזנה בין"ק III:

$$\frac{6}{\left(\frac{20v}{40+v}\right)} = \frac{120+3v}{10v}$$

זמן של האוטובוס עז חזנה בין"ק IV:

$$3 \cdot \frac{2}{v} + 2 \cdot \frac{4}{60} = \frac{6}{v} + \frac{2}{15} = \frac{90+2v}{15v}$$

נשווה הזמנים:

$$\frac{4}{\frac{90+2v}{15v}} + \frac{v}{19} = \frac{6}{\frac{120+3v}{10v}}$$

$$360 + 8v + 19v = 720 + 18v$$

$$9v = 360$$

$$\boxed{v = 40 \text{ ש"ש}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה 



ד. נחשב ו- הנמנים זכר יחד להאפשריות.

$$t_1 = \frac{40+V}{5V} = \frac{40+40}{5 \cdot 40} = \frac{2}{5} = 24\% \quad (1)$$

$$(2) \text{ להי-הרכבה של יוסי: } \frac{40 \cdot V}{40+V} = 20\% \quad \downarrow$$

$$t_2 = 2 \cdot \frac{2}{40} + \frac{4}{60} + \frac{4}{20} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = 22\%$$

$$(3) \text{ להי-הרכבה חדשה: } 25\% \quad \downarrow$$

$$t_3 = \frac{8}{25} = 19.2\%$$

הסמן, הזכר ביחיד ה-1, ואפשר (3)



2. נתונה סדרה הנדסית אינסופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$.

נתון: $\frac{a_4}{a_2} = 4$, $2a_2 + 8 = a_4$.

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אינסופית חדשה B.

נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אינסופית נוספת C.

איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \dots$, $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. (1) מצאו את מנת הסדרה C.

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B, וב- S_C את סכום הסדרה C.

נתון: $S_C = 4 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k .

נתונה סדרה הנדסית אינסופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$.

נתון: $\frac{a_4}{a_2} = 4$, $2a_2 + 8 = a_4$.

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

$$\text{I } 2a_2 + 8 = a_4 \rightarrow 2a_1q + 8 = a_1q^3 \rightarrow 8 = a_1q(q^2 - 2)$$

$$\text{II } \frac{a_4}{a_2} = 4 \rightarrow \frac{a_1q^3}{a_1q} = 4 \rightarrow q^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} q = 2 \rightarrow a_1 = 2 \\ q = -2 \rightarrow a_1 = -2 \end{cases}$$

$$a_3 = a_1q^2 \rightarrow \boxed{a_3 = \pm 8}$$



נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אינסופית חדשה B.

נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

מאתר והסדרה אנני עזאזי ואנני יורג נסיך ע: $a_1 = -2$, $q = -2$

כאשר נראה q: $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ נמן קבוע.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}}{\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4} = Q_b$$

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אינסופית נוספת C.

איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \dots$ $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. (1) מצאו את מנת הסדרה C.

$$Q_c = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{k}{a_3 \cdot a_4}}{\frac{k}{a_1 \cdot a_2}} = \frac{a_1 \cdot a_2}{a_3 \cdot a_4} = \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{16} = Q_c$$

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

מאתר והסדרה C בין 0 ו 1, רק אם C_1 יהיה שלילי הסדרה תעלה. אם C_1 יהיה חיובי הסדרה תרד. / צוה: $C_1 < 0$

$$\frac{k}{a_1 \cdot a_2} < 0 \rightarrow \frac{k}{-2 \cdot 4} < 0 \rightarrow k > 0$$



נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B, וב- S_C את סכום הסדרה C.

נתון: $S_C = 4 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k.

$$S_C = 4S_B$$

$$\frac{-\frac{k}{8}}{1 - \frac{1}{16}} = 4 \cdot \frac{-\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{-\frac{k}{8}}{\frac{15}{16}} = \frac{-\frac{4}{8}}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{-16k}{15 \cdot 8} = \frac{-4 \cdot 4}{8 \cdot 3}$$

$$\frac{2k}{15} = \frac{2}{3}$$

$$k = 5$$

C	B	
$-\frac{k}{8}$	$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} = -\frac{1}{8}$	I א' בר
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	ג/√





3. במדינה גדולה התקיימו בחירות. המצביעים בבחירות אלה יכולים להצביע למפלגה א' או למפלגה ב' בלבד.

נסמן ב- P את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע למפלגה א' ($0 < P < 1$).

בוחרים באקראי 3 מצביעים.

נתון כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע למפלגה א' גדולה פי 2 מן ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב'.

א. מצאו את הערך של P .

בוחרים באקראי 4 מצביעים.

ב. ידוע כי ארבעתם הצביעו לאותה המפלגה. מהי ההסתברות שהם הצביעו למפלגה א'?

חלק מן המצביעים הם מבוגרים והשאר צעירים.

נתון כי 40% מן המצביעים המבוגרים הצביעו למפלגה ב' ו-15% מן המצביעים הצעירים הצביעו למפלגה א'.

ג. מהי ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר אחד מבין כל המצביעים?

לאחר הבחירות נערך סקר טלפוני בקרב המצביעים. דני, אחד הסוקרים, התקשר באקראי למצביעים צעירים בלבד.

הוא התקשר אליהם בזה אחר זה והפסיק מייד לאחר שריאיון צעיר אחד שהצביע למפלגה אחת וצעיר נוסף

שהצביע למפלגה האחרת.

ד. מהי ההסתברות שדני התקשר ל-5 צעירים בדיוק?

3(א)

$$p_2(1) = 2(1-p)^3$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) p(1-p)^2 = 2(1-p)^3 \quad | : (1-p)^2 \neq 0 \quad (0 < p < 1)$$

$$3p = 2(1-p)$$

$$3p = 2 - 2p$$

$$5p = 2 \rightarrow p = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{p = 0.4}$$

3(ב)

$$P \left(\begin{array}{c} \text{קצת יותר} \\ \text{מבוגר} \\ \text{מבוגר} \end{array} \right) / \left(\begin{array}{c} \text{אזכור} \\ \text{קצת יותר} \\ \text{מבוגר} \\ \text{מבוגר} \end{array} \right) \rightarrow \frac{P \left(\begin{array}{c} \text{קצת יותר} \\ \text{מבוגר} \\ \text{מבוגר} \end{array} \right) \cap \left(\begin{array}{c} \text{אזכור} \\ \text{קצת יותר} \\ \text{מבוגר} \\ \text{מבוגר} \end{array} \right)}{P \left(\begin{array}{c} \text{קצת יותר} \\ \text{מבוגר} \\ \text{מבוגר} \end{array} \right)} \rightarrow \frac{0.4^4}{0.4^4 + 0.6^4}$$



$$P(\text{קצוץ / ארוך}) / P(\text{קצוץ / ארוך}) = \frac{16}{97}$$

6א)

(29):

קצור קצרים ארוכים

$\bar{A}$ - קצור קצרים ארוכים

B - קצרים קצרים ארוכים

$\bar{B}$ - קצרים קצרים ארוכים

$$P(\bar{A}/B) = 0.4$$

$$\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = 0.4$$

$$P(A/\bar{B}) = 0.15$$

$$\frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = 0.15$$

$$P(B) = x \quad (29)$$

$$P(\bar{B}) = 1 - x \rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0.4x$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.15(1 - x)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6 - 0.4x$$

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap \bar{B})$$

	ארוכים $\bar{A}$	קצרים A	
קצרים B	$0.4x$		
ארוכים $\bar{B}$		$0.15(1-x)$	
1	0.6	0.4	



$$1 - x = 0.6 - 0.4x + 0.15 - 0.15x$$

$$\frac{1}{4} = \frac{9}{20}x$$

$$x = \frac{5}{9}$$

3(א) $p(\bar{B}) = \frac{4}{9}$

3(ב)

אני הנמן

הסתברות אהבתי אהבתי א
הסתברות היא 0.15, מכאן
שבהסתברות אהבתי אהבתי א
היא 0.85

האנכיות אהבתי אהבתי א
בחקירה זה, זה או 4 אנכיות אהבתי א
אך בזה אהבתי אהבתי א
אנין וכן:

	אהבתי $\bar{A}$	אהבתי A	
אהבתי B	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	אהבתי
אהבתי $\bar{B}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{15}$	אהבתי
	1	0.4	

$$p(\text{קיומו של } S) = 0.15 \cdot 0.85 + 0.85 \cdot 0.15 = 0.07875$$





4. בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r .

הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.

הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K .

הנקודה E נמצאת על המעגל הקטן בתוך המשולש KAO .

א. הוכיחו כי $\angle AOE = 2\angle KAE$.

המשך הקטע AE חותך את הקטע OK בנקודה M .

נתון כי הנקודה M היא אמצע הקטע OK .

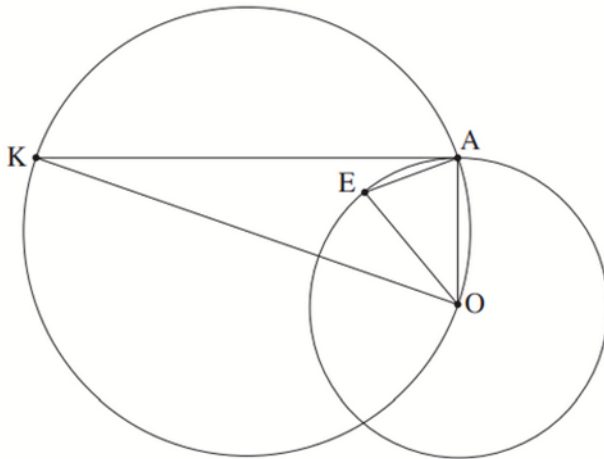
ב. הוכיחו כי הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

ג. הוכיחו כי $\triangle MOA \sim \triangle OEA$.

נתון: $R = 1.5r$.

נסמן ב- S את שטח המשולש MEO .

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש OKA .



פתרון: (שיטות עם תוספות בסוף הפתרון)

המספר	טענה	נימוק
①	O על גמאל הגדול	נתון
②	KA משיק למעגל הקטן	נתון
③	E על המעגל הקטן	נתון
④	A נקודת חיתוך של שני המעגלים	נתון
⑤	AO רדיוס במעגל הגדול	כפי ש
⑥	$\angle KAO = 90^\circ$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה. לפי 5, 2





המספר	טענה	נימוק
(7)	$\angle KAG = \alpha$	סימון
(8)	$\angle EAO = 95 - \alpha$	היסור אולי. לפי 6, 7
(9)	$EO = AO$	כדיוסיג במעגל מוק. לפי 3, 5
(10)	$\angle AEO = 95 - \alpha$	מזל קלעל שוות במעגל מנוחה אולי שולח. לפי 9, 8
(11)	$\angle AOE = 2\alpha$	השקמה יסוד במעגל AOE לפי 8, 10
(12)	$\angle AOC = 2 \angle KAG$ נ.ש.ל	לפי 7, 11
(13)	המעגל AOE חזון אל קאס בנהודה	נתיב
(14)	$OM = OM$	נתיב מ אמצע קלעל OK
(15)	קאס קוטר במעגל העצום	מזל אולי היקסית יסוד במעגל מנוח קוטר. לפי 6
(16)	מ מכנס המעגל העצום נ.ש.ל	קדוצת אמצע של קוטר היס מרכז המעגל. לפי 14, 15



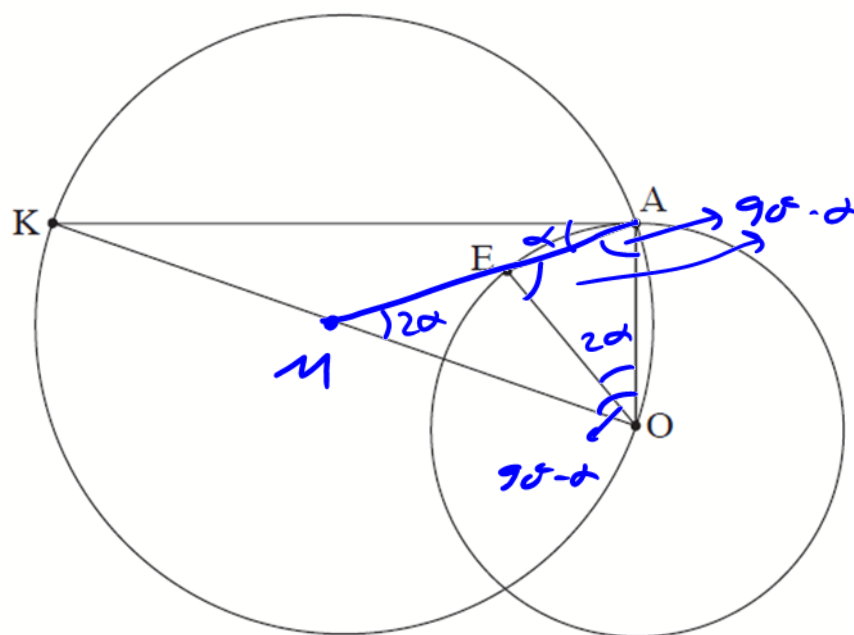


הנחם פר	לוח	נימוק
(17)	$\$MAU = \$EAU = 90 - \alpha$	כל לוח ש/ה אקלים
(18)	$AM = OM = R$	לפי 16
(19)	$\$AOM = \$MAU = 90 - \alpha$	הזוויות נגדיות במשולש מסמך מיוחד ש/ו' נגדיות. לפי 17, 18
(20)	$\$AOM = \$AEO = 90 - \alpha$	לפי 19, 18
(21)	$\triangle MOA \sim \triangle OEA$ נ.ש.ל. ד.	משפט דמיון S.S לפי 17, 20
(22)	$R = 1.5r$	115
(23)	$S_{\triangle MOE} = S$	110
(24)	$\frac{MO}{OE} = \frac{MA}{OA} = \frac{OA}{EA}$	יחס הזוויות המתאימות במשולשים הדומים. לפי 22
(25)	$MO = R = 1.5r$	לפי 22, 18
(26)	$\frac{MO}{OE} = \frac{1.5r}{r} = 1.5$	חיסוק. לפי 9, 25
(27)	$\frac{S_{\triangle MOA}}{S_{\triangle OEA}} = 1.5^2 = 2.25$	יחס השטחים של משולשים דומים ש/ה יחס הזוויות המתאימות בקיבוצי.
(28)	$S_{\triangle OEA} + S_{\triangle MOE} = S_{\triangle MOA}$	לפי 26, 24 חיבור שטחים



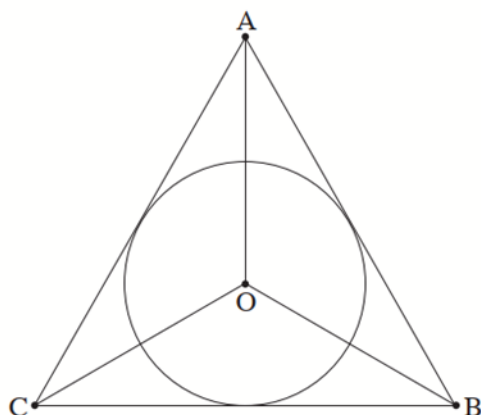


הנחיות	לענה	נימוק
(29)	$S_{OEA} = 0.8$	חשיב. אבי 28, 27, 23
(30)	$S_{MOA} = 1.8$	חיבור שטחים. אבי 29, 23
(31)	מא תיבון 35 אק במשולש OKA	הצד תיבון. אבי 14
(32)	$S_{AKA} = S_{MOA} = 1.8$	תיבון מהלך משולש אס
(33)	$S_{OKA} = 3.6$ נ.ש. 3	משולש-י שווה בשטח חיבור שטחים





5. במשולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט).
נסמן: $\angle ACB = 2\alpha$.



א. (1) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הקטע CO .

(2) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הצלע AC .

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO .
ב. מצאו את הערך של α .

הציבו $\alpha = 30^\circ$ וענו על הסעיפים ג-ד.

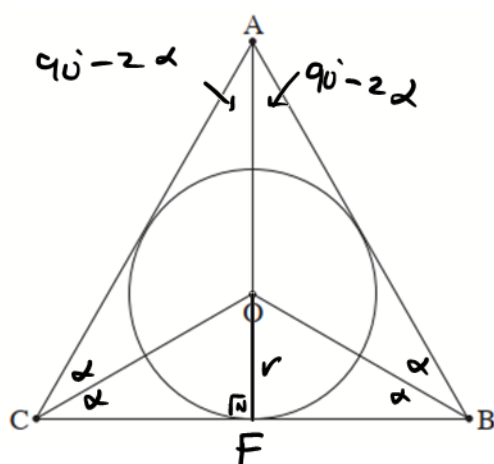
המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K .

נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{175}$.
ג. מצאו את הערך של r .

הנקודה E נמצאת על הצלע CB .

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 18.

ד. חשבו את אורך הקטע BE .



במשולש ABC :

$$\angle BAC = 180 - 4\alpha$$

$$\angle BAO = \angle CAO = 90 - 2\alpha$$

$\triangle COF$:

$$\frac{r}{CO} = \sin \alpha$$

$$CO = \frac{r}{\sin \alpha}$$

במשולש ABC שווה שוקיים

שוויון הזוויות שולר 50 ל-1

$$\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$$

מכיוון שהמעגל חסום במשולש

הוא מפצל תחת זווית המשולש

$$\angle ACO = \angle BCO = \angle ABO = \angle CBO = \alpha$$

נסמן נת' F נת' הסקת BC למחצה.

$$OF \perp BC, OF = r$$

כדיים המאונך למסל BC בנת' תהיה OF .

א(1)





(2) k

$$\Delta ACO: \angle AOC = 180 - (90 - 2\alpha) - \alpha$$

$$= 90 + \alpha$$

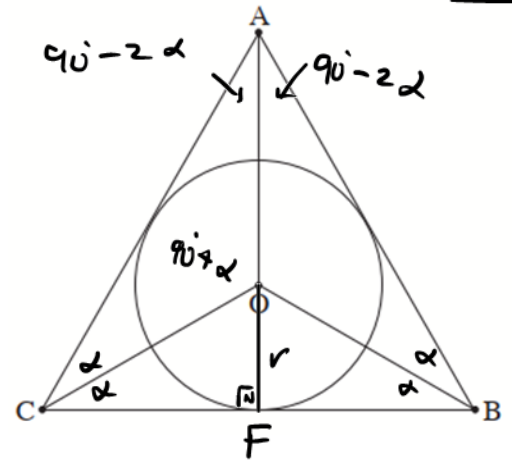
$$\frac{AC}{\sin(90 + \alpha)} = \frac{CO}{\sin(90 - 2\alpha)}$$

$$\frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{CO}{\cos 2\alpha}$$

$$AC \cdot \cos 2\alpha = CO \cdot \cos \alpha$$

$$AC = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \cdot CO$$

$$AC = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{r}{\sin \alpha}$$



$$AC = \frac{r \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}$$

$$AC = \sqrt{3} \cdot CO$$

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO.
ב. מצאו את הערך של α .

$$\frac{r \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{3} \cdot r}{\sin \alpha} \quad \left| : \frac{r}{\sin \alpha} \right.$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \sqrt{3} \quad t = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3} (2 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$t = 2\sqrt{3} t^2 - \sqrt{3}$$

$$0 = 2\sqrt{3} t^2 - t - \sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

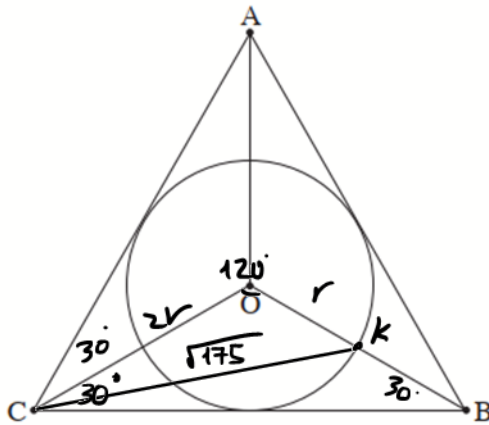
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 125.3^\circ$$

כי, $\cos$
 $4\alpha < 180^\circ$

$$\alpha = 30^\circ$$





הציבו $\alpha = 30^\circ$ וענו על הסעיפים ג-ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K.

נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{175}$.

ג. מצאו את הערך של r.

$$CO = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r$$

$$\triangle CKO: \angle KOC = 180^\circ - 2\alpha = 120^\circ$$

$$\sqrt{175}^2 = r^2 + (2r)^2 - 2 \cdot r \cdot 2r \cdot \cos 120^\circ$$

$$175 = 5r^2 - 4r^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5r^2 + 2r^2 = 7r^2$$

$$7r^2 = 175$$

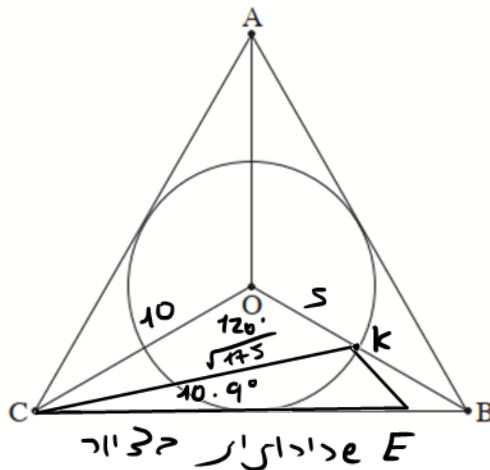
$$r^2 = 25$$

$$r = 5$$

הנקודה E נמצאת על הצלע CB.

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 18.

ד. חשבו את אורך הקטע BE.



$$\triangle CKO: \frac{5}{\sin \angle C} = \frac{\sqrt{175}}{\sin 120^\circ}$$

$$\sin \angle C = \frac{5 \sin 120^\circ}{\sqrt{175}}$$

$$\angle OCK = 19.1^\circ$$

$$\angle KCB = 30^\circ - 19.1^\circ = 10.9^\circ$$

עבור $\angle = 30^\circ$ היתרון הוא 3/4

$$BC = AC = \frac{5 \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}$$

$$BC = 10\sqrt{3} = 17.32$$

$$\triangle CKE: \frac{\sqrt{175} \cdot CE \cdot \sin 10.9^\circ}{2} = 18$$

$$CE = \frac{36}{\sqrt{175} \sin 10.9^\circ} = 14.39$$

$$BE = BC - CE$$

$$BE = 2.93$$





6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על הסעיפים א-ג. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

6k(1)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

יָקָן $x^2 - a^2 > 0$ $\rightarrow$ $x > a$ או $x < -a$

6k(2) $x = a$! $x = -a$ אסימפטוטיים אנכיים ואלה אסימפטוטים אנכיים

($a > 0$) ולכן אלו אסימפטוטים אנכיים: $x = a$, $x = -a$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0}} = -1$$

אסימפטוטים אנכיים: $y = 1$, $y = -1$

6g.

(נכין כ"י: $-f(x) = f(-x)$)

$$-\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - a^2}}$$



$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

62.

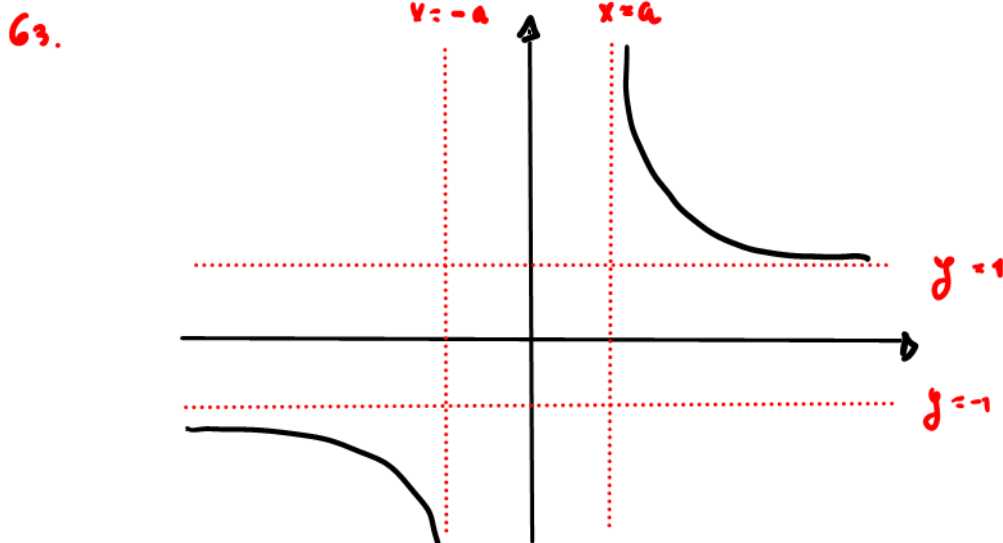
$$f'(x) = \frac{1(\sqrt{x^2-a^2}) - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2} \rightarrow \frac{\sqrt{x^2-a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$$

$$f'(x) = \frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2} (x^2-a^2)}$$

הנהגות
הנהגות
הנהגות

קוצצות תמונה של אזור בתחום ההגדרה ולכן:

א: $x > a$ או $x < -a$



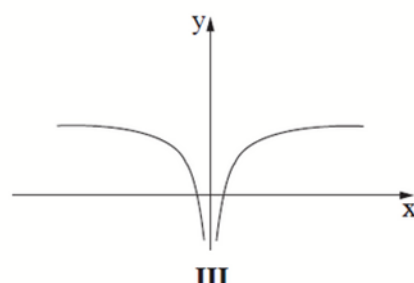
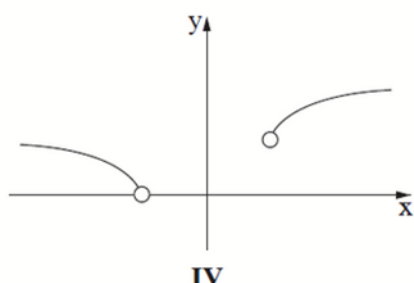
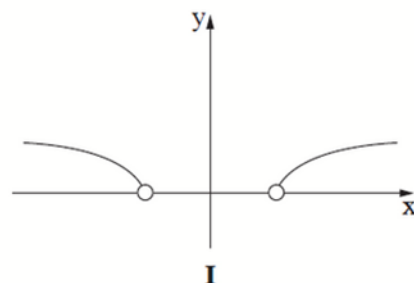
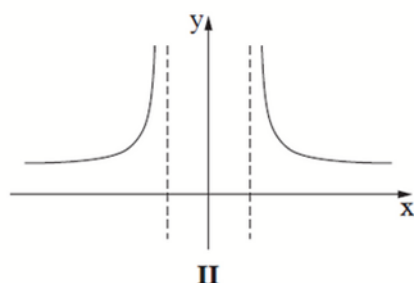


נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ה. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) קבעו איזה מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 2a$ ו- $x = 3a$ הוא 7.5. נ. מצאו את הערך של a .



חידה 6

$$g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{0 \cdot (f(x))^2 - 1 \cdot 2f(x)f'(x)}{[f(x)]^4}$$

$$\rightarrow g'(x) = \frac{-2f(x)f'(x)}{[f(x)]^4}$$

תמיד
חזיתי
וזין
אזכיר
פשוט
למחזק
הגוף



קטגורי : $x > a$: סוגי $f(x)$ (מילוי של x)
 נק': $f'(x) f(x)$ (מילוי חדר)
 $-2 < 0$
 $g'(x) > 0$

קטגורי : $x < a$: סוגי $f(x)$ (מילוי של x)
 נק': $f'(x) f(x)$ (מילוי חדר)
 $-2 < 0$
 $g'(x) < 0$

$g(x)$: $x > a$: μ
 $x < a$: ν

$$\frac{-2f(x)f'(x)}{[f(x)]^4} = 0 \rightarrow -2f(x)f'(x) = 0$$

$\swarrow$ $\searrow$
 μ ν

א (נימ) זה אפס

ואתה טכני.

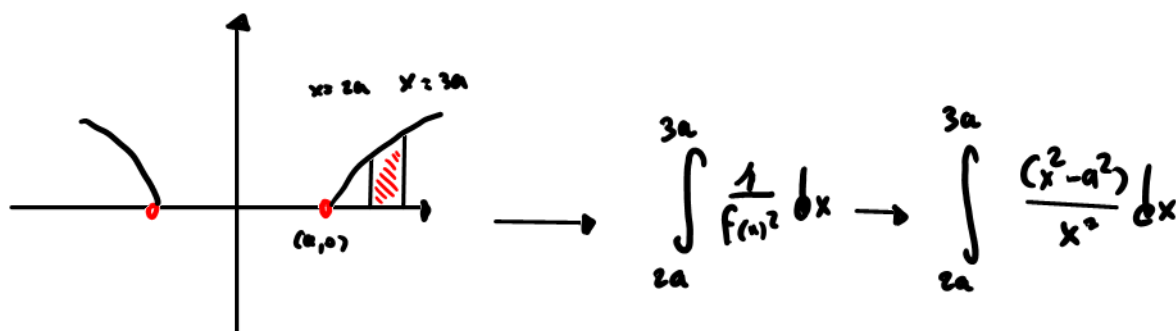
דוגמה 6

קטגורי : $x = a$! $x = -a$: $f(x)$ (מילוי של x) ! ∞ ! $-\infty$

דינמיקה ואלן (מילוי של x) : 0 : $\frac{1}{x} = 0$ (מילוי של x)

ואלן יתקן חור על x קטגורי : $x = a$! $x = -a$, ואלן על z מתאם את $g(x)$.

דוגמה 6



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





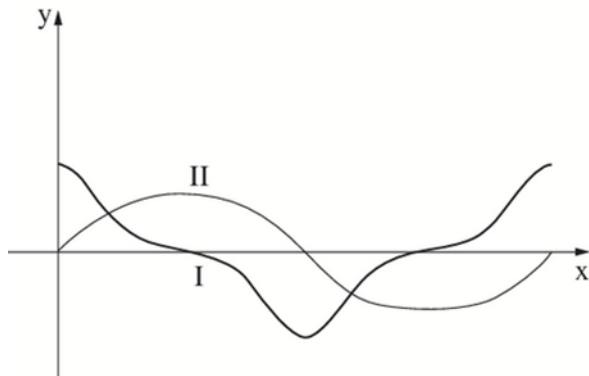
$$\int_{2a}^{3a} \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) dx \rightarrow \int_{2a}^{3a} (1 - a^2 x^{-2}) dx \rightarrow \left[x - a^2 \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{2a}^{3a}$$

$$x + \frac{a^2}{x} \Big|_{2a}^{3a} \rightarrow \left(3a + \frac{a^2}{3a}\right) - \left(2a + \frac{a^2}{2a}\right) = 7.5$$

$$3a + \frac{a}{3} - 2a - \frac{a}{2} = 7.5$$

$$\frac{5}{6}a = 7.5$$

$$a = 9$$



7. בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים, II-I, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$,

ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.

א. קבעו איזה מן הגרפים II-I מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקצייה $g(x) = |f(x) - 0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

א. קבעו איזה מן הגרפים II-I מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

ניתן לזהות הגרפים בין תחומי עליה וירידה של $f(x)$ בתחומי
(החילובים והשילובים) של $f'(x)$

$$\begin{array}{l} f(x) - II \\ f'(x) - I \end{array}$$

נתון כי $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

$$0 = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} \rightarrow 0 = \sin x \rightarrow x = 0 + \pi k \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$(2\pi, 0) \quad (\pi, 0) \quad (0, 0)$$



(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$$f'(x) = \frac{\cos x (1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x & u' &= \cos x \\ v &= 1 + \sin^2 x & v' &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x (1 + \sin^2 x - 2 \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{\cos x (1 - \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{\cos^3 x}{(1 + \sin^2 x)^2} = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\min_{\text{בג}}$	$\nearrow$	$\max_{\text{בג}}$	$\searrow$	$\min_{\text{בג}}$	$\nearrow$	$\max_{\text{בג}}$

הצורה: כוכבי לכת
הטבלה למעלה היא גורל
גזרים יתנוני.

$$\left(0, 0\right)_{\min}^{\text{בג}}, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\max}, \left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right)_{\min}, \left(2\pi, 0\right)_{\max}^{\text{בג}}$$

נתונה הפונקצייה $g(x) = |f(x) - 0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

$$0 = |f(x) - 0.4| \rightarrow 0 = f(x) - 0.4 \rightarrow f(x) = 0.4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} = 0.4 \rightarrow \sin x = 0.4 + 0.4 \sin^2 x \rightarrow 0.4 \sin^2 x - \sin x + 0.4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin x = 2 \quad (\text{בסג})$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

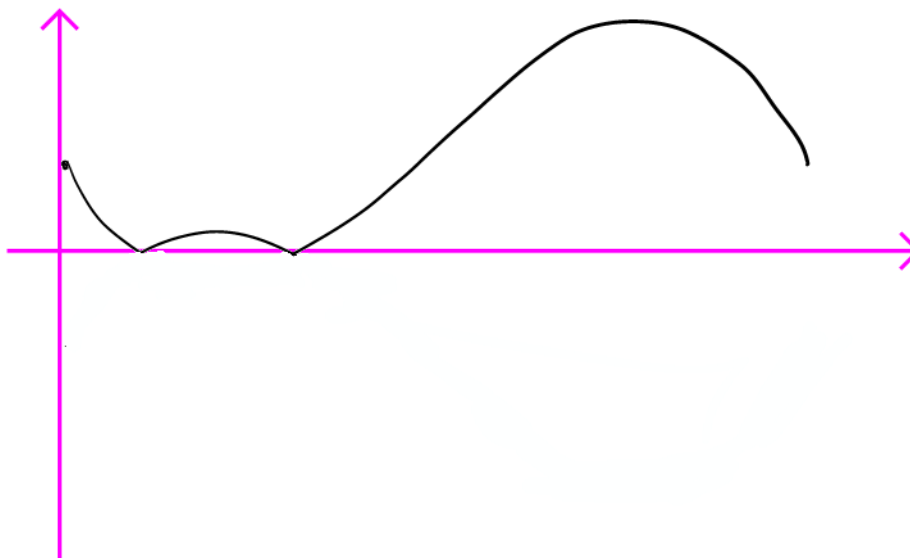
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6}, 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{5\pi}{6}, 0 \end{pmatrix}$$





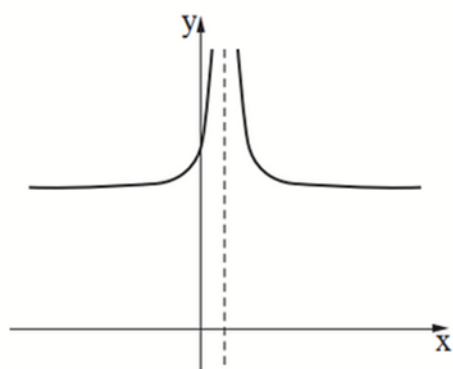
ד. (1) סרטוט סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.



(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

$$(0, 0.4) \max, \left(\frac{\pi}{6}, 0\right) \min, \left(\frac{\pi}{2}, 0.1\right) \max, \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right) \min, \left(\frac{3\pi}{2}, 0.9\right) \max, (2\pi, 0.4) \min$$





8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 9$.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, ושיעור ה־x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

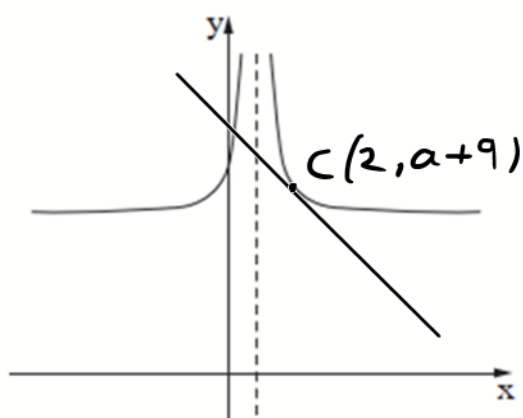
ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה־x בנקודה A ואת הישר $x = 1$ בנקודה B.

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1, 0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB.

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.



$$\begin{aligned} x=1 & \text{ אסימפטה אנכית} \\ y=9 & \text{ אסימפטה אופקית} \end{aligned}$$

$$y_c = f(2) = \frac{a}{(2-1)^2} + 9 = a + 9$$

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 9$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - a \cdot 2(x-1) \cdot 1}{((x-1)^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2a(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2a}{(x-1)^3}$$

$$m = f'(2) = \frac{-2a}{1^3} = -2a$$

$$y - (a+9) = -2a(x-2)$$

$$y = -2ax + 4a + a + 9$$

משוואת המשיק:

$$y = -2ax + 5a + 9$$



המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x = 1$ בנקודה B .

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1, 0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB .

$$y = -2ax + 5a + 9$$

חינוק $x = 1$

$$y_B = -2a \cdot 1 + 5a + 9 \\ = 3a + 9$$

$$B(1, 3a + 9)$$

$$0 = -2ax + 5a + 9 \quad x \text{ חיתוך ציר}$$

$$2ax = 5a + 9$$

$$x = \frac{5a + 9}{2a}$$

$$A\left(\frac{5a + 9}{2a}, 0\right)$$

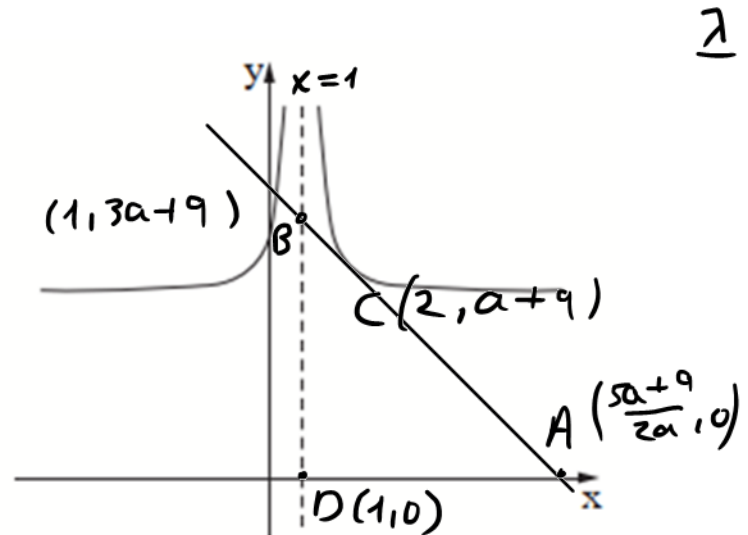
$$BD = y_B - y_D = 3a + 9 - 0$$

$$BD = 3a + 9$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot (3a + 9) \cdot \frac{(3a + 9)}{2a} = \frac{3 \cdot (a + 3) \cdot 3 \cdot (a + 3)}{4a}$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{9}{4} \cdot \frac{(a + 3)^2}{a} = \frac{9}{4} \cdot \frac{a^2 + 6a + 9}{a} = \frac{9}{4} \cdot \left(a + 6 + \frac{9}{a}\right)$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{(3a + 9)^2}{4a}$$



$$AD = \frac{5a + 9}{2a} - 1$$

$$AD = \frac{5a + 9 - 2a}{2a}$$

$$AD = \frac{3a + 9}{2a}$$





7. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

$$S_{\text{ADB}} = \frac{9}{4} \cdot \left(a + 6 + \frac{9}{a} \right)$$

$$S'(a) = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{9}{a^2} \right) = 0$$

$$1 = \frac{9}{a^2}$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$S'(2) = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{9}{2^2} \right) = -$$

$$S'(4) = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{9}{4^2} \right) = +$$

a	1		3	
$S'(a)$	$\diagup \diagdown$	-	0	+
$S(a)$	$\diagup \diagdown$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$a = 3$