



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשפ"ה, 2025, שאלון, 35582, מועד ב, גרסה 06:
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"





1. נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$. k הוא פרמטר חיובי.

הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה.

נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה' x .

א. הביעו באמצעות k את משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה' y .

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב. (1) מצאו את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF.

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה D.

ג. הביעו באמצעות k את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

בונים ריבוע שאורך הצלע שלו הוא 9.

אחת מצלעות הריבוע נמצאת על המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת בתוך הריבוע.

ד. הביעו באמצעות k את משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

נתון כי הנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

ה. מצאו את הערך של k .

פתרון:

א. נתונים האליפסה

$$\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = 25k^2 \rightarrow a = 5k$$

$$b^2 = 16k^2 \rightarrow b = 4k$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 9k^2 \quad (5)$$

$$c = 3k$$

נמצא את הפוקל c:

באמצעות המידע הימני בנתונה $F(3k, 0)$.

נמצא את החיתוך של המשיק עם ציר ה' x (היא בנקודה



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





החיתוך של האיפסה עם y , כלומר בנקודה $(0, 4k)$
מכאן שרדיוס המעגל הוא $r = 5k - 3k = 2k$

$$(x - 3k)^2 + y^2 = 4k^2$$

משוואת המעגל:

ב. (1) הנקודה B היא נקודת החיתוך של האיפסה עם
הציר החיובי של x , כלומר $B(0, 4k)$.

זווית הטל BF שווה לפרמטר a
של האיפסה כלומר $BF = 5k$.

OF שווה לרדיוס $2k$

$$\frac{BD}{OF} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2} \quad \text{זכור!}$$

(2) נשתמש בהצורה הטל ביחס נתון:

$$\frac{BD}{OF} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BD}{2k} = \frac{3}{2} \Rightarrow BD = 3k$$

$$x = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3k}{2 + 3} = \frac{9}{5}k$$

$$y = \frac{2 \cdot 4k + 3 \cdot 0}{2 + 3} = \frac{8}{5}k$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{9}{5}k, \frac{8}{5}k\right)$$

$$m_{OF} = m_{BF} = \frac{4k - 0}{0 - 3k} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{\text{משק}} = \frac{3}{4}$$

ד. שיפוע הרדיוס OF :

המשק שווה לרדיוס זכור!

$$y - \frac{8}{5}k = \frac{3}{4}\left(x - \frac{9}{5}k\right)$$

משוואת המשיק:



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





$$y - \frac{2}{5}k = \frac{3}{4}x - \frac{27}{20}k \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}k}$$

3. כדי שנקודה ב תהיה בתוך הריבוע הצלף הנדבילה
למשך תקדור מעל למשך.

$$y = 3x + k$$

נסבך יא שולל המשך

$$-3x + 4y - k = 0$$

ונשמע בנוסחה למרחק בין ישרים זהבילים.
שולל גישו המקביל תהיה $0 = -3x + 4y + c$
ומתקין $k - c$ שום שהישר מעל למשך:

$$y = \frac{-k - c}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} \Rightarrow y = \frac{-k - c}{5} \Rightarrow 4.5 = -k - c$$

$$c = -k - 4.5$$

שולל הצלף הנדבילה למשך היא: $\boxed{-3x + 4y - k - 4.5 = 0}$

ה נקודה ב היא נקודה מפתט האלנסיוני של הריבוע.
לכן המרחק של הנדבילה הריבוע שווה למרחק יא
צלף הריבוע, כלומר 4.5.

מכאן, גמרק הנקודה $B(0, 4.5)$ מהמשך $-3x + 4y - k = 0$
היא $d = 4.5$. נציב בנוסחה למרחק נקודה מישור:

$$4.5 = \frac{-3 \cdot 0 + 4 \cdot 4.5 - k}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} \Rightarrow 4.5 = \frac{15 - k}{5}$$

ול

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה

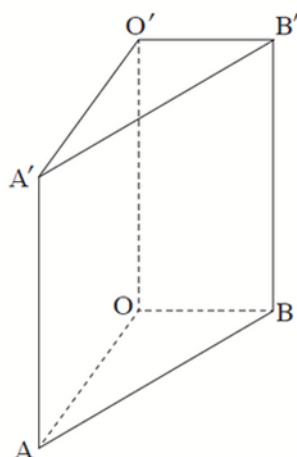




$$22.5 = 15K$$

$$K = \frac{3}{2}$$





2. בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $AOBA'O'B'$ שבסיסה AOB הוא משולש ישר זווית, $\angle AOB = 90^\circ$. הנקודה K היא אמצע המקצוע AB . הנקודה E נמצאת על הקטע $O'B$ כך ש- $\vec{OE} = \frac{1}{3} \cdot \vec{O'B}$. הנקודה N נמצאת על הקטע AE כך ש- $\vec{AN} = \frac{3}{4} \cdot \vec{AE}$. נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OO'} = \underline{w}$.
א. (1) הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את $\vec{O'N}$.
(2) הוכיחו כי הנקודות K, N, O' נמצאות על ישר אחד, ומצאו את היחס בין $O'K$ ובין $O'N$.

נתון: $E(0, 3, 18)$, $A(12, 0, 0)$, $O(0, 0, 0)$.

הקודקוד B נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y , והקודקוד O' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z .

ב. מצאו את שיעורי הנקודות N ו- B .

ג. מצאו את משוואת המישור $A'KB'$.

ד. (1) מצאו את המרחק בין הנקודה N ובין המישור $A'KB'$.

(2) מצאו את נפח הפירמידה $NA'KB'$.

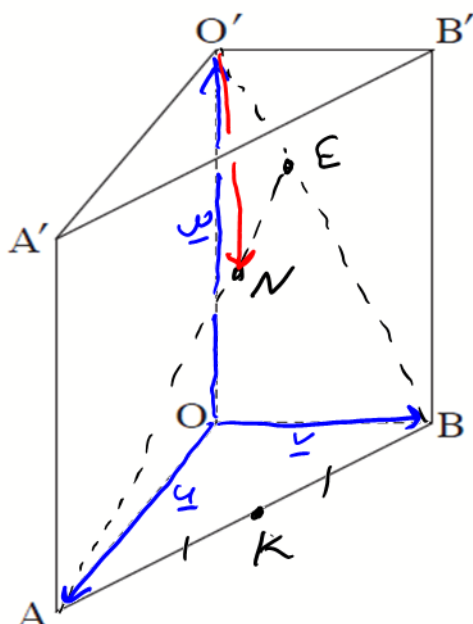
פתרון:

1. נוסף, הנתונים $(12, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} \vec{ON} &= \vec{OO} + \vec{OA} + \vec{AN} = -\underline{w} + \underline{u} + \frac{3}{4} \vec{AE} \quad (1) \\ &= -\underline{w} + \underline{u} + \frac{3}{4} (\vec{AO} + \vec{OE}) \\ &= -\underline{w} + \underline{u} + \frac{3}{4} (-\underline{u} + \underline{w} + \frac{1}{3} \vec{OB}) \\ &= -\underline{w} + \underline{u} - \frac{3}{4} \underline{u} + \frac{3}{4} \underline{w} + \frac{1}{4} (\vec{OO} + \vec{OB}) \\ &= -\frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} (-\underline{u} + \underline{v}) \\ &= -\frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} - \frac{1}{4} \underline{u} \\ &= \frac{1}{4} \underline{v} - \frac{1}{2} \underline{u} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{ON} = \frac{1}{4} \underline{v} + \frac{1}{4} \underline{v} - \frac{1}{2} \underline{u}}$$

תגובה:



$$\begin{aligned} \vec{OK} &= \vec{OO} + \vec{OA} + \vec{AK} \quad (2) \quad \text{נמצא, הנתונים} \\ \vec{OK} &= -\underline{w} + \underline{u} + \frac{1}{2} \vec{AB} = -\underline{w} + \underline{u} + \frac{1}{2} (\vec{AO} + \vec{OB}) \end{aligned}$$



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





$$\vec{OK} = -u + v + \frac{1}{2}(-u + v) = -u + u - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$$

$$\vec{OK} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - u$$

$$\vec{ON} = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - u\right) \quad \text{כאן:}$$

$$\vec{ON} = \frac{1}{2} \vec{OK}$$

הומוסקים: $\vec{OK}$ ו- $\vec{ON}$ תלויים ליניארית. נגזר
; 3 קוביטות $\vec{OK}$, $\vec{ON}$, $\vec{O}$ הומוסקים
אשר $\vec{OK}$ ו- $\vec{ON}$ הם

$$\boxed{\frac{OK}{ON} = 2}$$

$$E(0, 3, 18), A(12, 0, 0), O(0, 0, 0) \quad \text{נניח:}$$

$$\vec{AN} = \frac{3}{4}\vec{AE} = \frac{3}{4}(E-A) = \frac{3}{4}(-12, 3, 18) = (-9, 2\frac{1}{4}, 13\frac{1}{2})$$

↓

$$\vec{AN} = N - A = (x, y, z) - (12, 0, 0) = (x-12, y, z)$$

↓

$$(x-12, y, z) = (-9, 2\frac{1}{4}, 13\frac{1}{2})$$

$$\begin{cases} x-12 = -9 \\ y = 2\frac{1}{4} \\ z = 13\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2\frac{1}{4} \\ z = 13\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{N(3, 2\frac{1}{4}, 13\frac{1}{2})}$$

נניח: $\vec{OB}$ ו- $\vec{O'B}$ הם

$$\vec{O'E} = \frac{1}{3}\vec{O'B} \Rightarrow E - O' = \frac{1}{3}(B - O')$$

$$(0, 3, 18) - (0, 0, z) = \frac{1}{3}((0, y, u) - (0, 0, z))$$

$$(0, 3, 18-z) = (0, \frac{1}{3}y, -\frac{1}{3}z)$$

↓

WWW.GEVA.CO.IL | 1-800-20-40-60 | פסיכומטרי, בגרות, GMAT



$$V_{NAF\bar{N}} = \frac{202.5 \cdot 3.6}{3} = \boxed{243}$$





3. נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו- z_2 שמכפלתם היא $-51 + 12i$.

$$z_1 = 6 + 3i$$

א. מצאו את המספר z_2 .

נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, w הוא משתנה מרוכב.

ב. מצאו את פתרונות המשוואה.

נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

נתון כי המספרים z ו- z^3 נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

ג. מצאו את ארבע האפשרויות של המספר z .

$$3\text{א. } (6+3i)z_2 = -51+12i$$

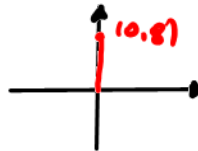
$$z_2 = \frac{-51+12i}{6+3i} \cdot \frac{(6-3i)}{(6-3i)} = \frac{-306+153i+72i+36}{36-(-9)} = \frac{-270+225i}{45} = -6+5i$$

$$\boxed{z_2 = -6+5i}$$

$$3\text{ב. } w^3 = 6+3i-6+5i$$

$$w^3 = 8i$$

$$w^3 = 8\text{cis}90^\circ$$



$$w_k = \sqrt[3]{8} \text{cis} \left(\frac{90^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3} \right)$$

א. נוסח כללי - 11אזר

$$w_k = 2\text{cis}(30^\circ + 120^\circ k)$$

$$\boxed{w_0 = 2\text{cis}30^\circ}$$

$$\boxed{w_1 = 2\text{cis}150^\circ}$$

$$\boxed{w_2 = 2\text{cis}270^\circ}$$

$$3\text{ג. } z = 2\text{cis}\alpha$$

$$z^3 = 8\text{cis}3\alpha$$

לכיוון לפני המספרים (מציאם על גבי אחד הסוגר הראשון הנדרש:

$$3\alpha - \alpha = 180^\circ$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





42. $2a = 180$

$a = 90$

$a = 0$: $0 \leq a < 360$ פר חוט

$a = 90$

$a = 180$

$a = 270$

$z_0 = 2cis0$, $z_1 = 2cis90$, $z_2 = 2cis180$, $z_3 = 2cis270$

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב וארבעת המספרים שמצאתם בסעיף ג, מייצגים את כל הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ד. (1) סרטטו את המצולע במערכת צירים.

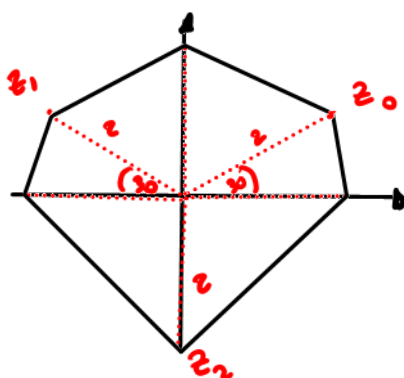
(2) חשבו את השטח של המצולע.

נתון מספר מרוכב $4(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה, כך שנוצר מצולע חדש.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המצולע החדש משטח המצולע שמצאתם בסעיף ד.

43(1)



43(2)

אם הזווית בין הווקטורים, ואורכי הווקטורים, נצבים 3 זווית של חסמים חסמים אבי מ-חפסה 3.3.3, נחש אבי שטח ונחמד:

$$S = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \sin 90}{2} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \sin 90}{2} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \sin 90}{2}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





$$S = 6 + 2\sqrt{3} = 9.464$$

ה.4.

הכפל של התדירות הממונה במספר ג'יבס, תאריך את המחקר
קונקרטי המיושם מאשר הצורם פי 4, ונטיה את המחקר זה מאשר
למד כמן הסוון.

מאחר שיהיה כמו קטע (דוג) 3 נוסף המסלולים שאלו מהעצות הידועות
יתכנו, וזאת הלאה לא נמלסם לא תטא לזה ופ:q:

$$\frac{S_{\text{כאן}}}{S_{\text{טו}}} = \frac{2 \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 8}{2}}{6 + 2\sqrt{3}} = \frac{96 + 32\sqrt{3}}{6 + 2\sqrt{3}} = 16$$

שכ המצוא המצא עמו פי 16 משא המצא הקצב

4. הערה: מכיוון שהסיבוב של המצא לא וסנה את הלווי קן הרדיוסים
3 ציגור המסלולים הקצבים צוים 3.5 ציגור הענים לפי גסס
למין 5.5. וכן וחס גטחים ענה למס הציון קריג

$$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16.$$



4. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$, המוגדרת לכל x .
b הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה-y.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 1.5$.

ב. מצאו את הערך של b (מצאו את שתי האפשרויות).

e^x גולף 5.5 חזק מקר x

4א(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{\frac{e^x + x}{e^x}}{\frac{e^x - x}{e^x}} + b = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} + b = \frac{1+0}{1-0} + b = 1+b$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = \frac{\frac{e^x + x}{x}}{\frac{e^x - x}{x}} + b = \frac{\frac{e^x}{x} + 1}{\frac{e^x}{x} - 1} + b = \frac{0+1}{0-1} + b = b-1$$

$$y_{-} = 1+b$$

$$y_{+} = b-1$$

4א(2)

$$f(0) = \frac{e^0 + 0}{e^0 - 0} + b = (0, 1+b)$$

4א(3)

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - x) - (e^x + x)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} - xe^x + e^x - \cancel{x} - \cancel{e^{2x}} + e^x - xe^x + \cancel{x}}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$





$$\frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2} = 0$$

$$2e^x(1-x) = 0$$

$$e^x = 0 \quad \text{or} \quad x = 1$$

$$F(1) = \frac{e^1 + 1}{e^1 - 1} + b$$

$$\max\left(1, \frac{e+1}{e-1} + b\right)$$

x	x < 1	x = 1	x > 1
f'(x)	+		-
f(x)	↗		↘

$$f'(2) = -10$$

$$f'(0) = +10$$

4 פ. $1 + b = 1.5 \rightarrow b = 0.5$

$b - 1 = 1.5 \rightarrow b = 2.5$

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b הקטן ביותר שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y היא אחת משתי נקודות הפיתול של הפונקצייה $f(x)$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x .

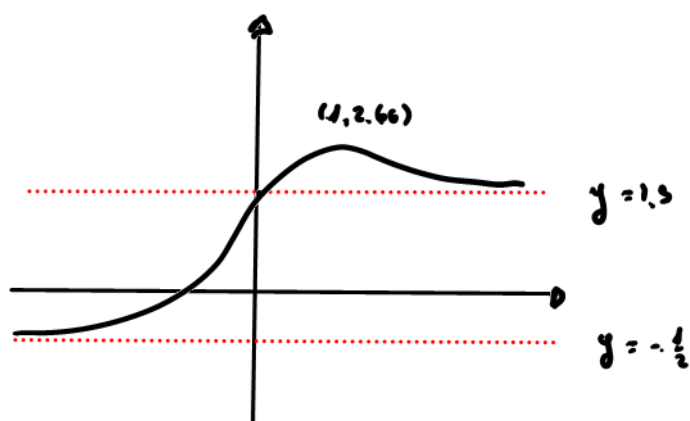
ד. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_0^1 (f(x) - 1.5) dx > \frac{1}{e-1}$.

האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.

4 ע.



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





$$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x} - 2xe^x + x^2}$$

e^x מתאזן עם x ונותר אחד x .

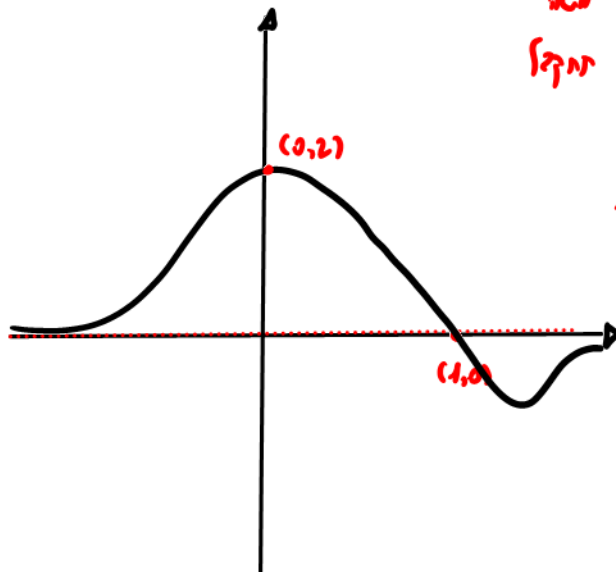
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x} - 2xe^x + x^2}}{\frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x} - 2xe^x + x^2}} = \frac{\frac{2}{e^x} - \frac{2x}{e^x}}{1 - \frac{2x}{e^x} + \frac{x^2}{e^x}} = \frac{0-0}{1-0+0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{-x}(1+x)}{(e^x+x)^2} = \frac{0 \cdot \infty}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$$

המאפיין e^{-x} עם x מתאזן ונותר אחד x .
אחד 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 .

$$y = 0$$

43(2)



עם $x=0$ פונקציה מתחילה קיצון מקסימום, מכיוון שהיא מתחילה מתחת למחיצה ולכן היא מתחילה מתחת למחיצה. נקודה קיצונית של מחיצה מתחילה מתחת למחיצה.

עם $x=1$ פונקציה מתחילה קיצון מינימום, מכיוון שהיא מתחילה מעל למחיצה ולכן היא מתחילה מעל למחיצה.

עם $x=0$ פונקציה מתחילה קיצון מקסימום, מכיוון שהיא מתחילה מתחת למחיצה ולכן היא מתחילה מתחת למחיצה.

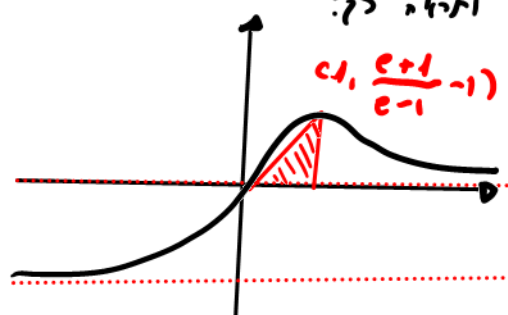
1.5- $f(x)$ היא פונקציה מתחילה קיצון מקסימום, מכיוון שהיא מתחילה מתחת למחיצה ולכן היא מתחילה מתחת למחיצה.

44

$$\int_0^1 f(x) dx$$

מכיוון שהיא מתחילה קיצון מקסימום, מכיוון שהיא מתחילה מתחת למחיצה ולכן היא מתחילה מתחת למחיצה.

$$\int_0^1 f(x) dx$$



$$S_A = \left(\frac{e+1}{e-1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{e+1-e-1}{e-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{e-1}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה.





5. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
 (3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

- ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k הוא פרמטר גדול מ-1.

- ה. (1) קבעו איזה מן הביטויים I ו- II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם.
 $I: k + \ln(k)$ $II: k + \ln(2)$

- (2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^2$ ו- $x = e^4$.

פתרון:
סעיף א.

- (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{1 + \ln x}$$

נדרוש: מכני פונקציות חלוקיים וגם מתן שנק' מאסט:

$$\begin{aligned} x &< 0 & \text{גם} & 1 + \ln x \neq 0 \\ & & & \ln x \neq -1 \\ & & & x \neq e^{-1} \\ & & & x \neq \frac{1}{e} \end{aligned}$$

נכנס לתחום ההגדרה של הפונקציה (אז): $\frac{1}{e} < x$ או $0 < x < \frac{1}{e}$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה 



(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.

נניח שהגדרה: $x = \frac{1}{e}$ מאפס את המכנה אבל לא את המונה...

נוסח נקודת: $x = \frac{1}{e}$ אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x של הפונקצייה (א) f

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} \frac{x \cdot \ln x}{1 + \ln x} = 0$$

האברה: קנס, מניק"מים הגדולות:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} \frac{x \cdot \ln x}{1 + \ln x} = \infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} \frac{x \cdot \ln x}{1 + \ln x} = -\infty$$

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x \cdot \ln x}{1 + \ln x} = 0 \Rightarrow x \cdot \ln x = 0$$

$$\begin{aligned} & \swarrow \text{או} \searrow \\ & \cancel{x=0} \quad \text{או} \quad \ln x = 0 \\ & \text{פסל} \quad x = e^0 \\ & \quad \quad x = 1 \end{aligned}$$

לא קדמוה הגדרה הפונקצייה.

שיעורי נק' החיתוך של גרף הפונקצייה (א) עם ציר ה- x : $(1, 0)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

$$f(x) = \frac{x \cdot hx}{1+hx}$$

ראשית נמצא: (שואש בנוסחא של נגזרת מכפלה ומנה)

$$f'(x) = \frac{(hx + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot (1+hx) - (x \cdot hx) \cdot \frac{1}{x}}{(1+hx)^2}$$

כעת את היאוי האנלגיה של הנגזרת:

$$f'(x) = \frac{(hx+1)^2 - hx}{(1+hx)^2} = \frac{h^2x + 2 \cdot hx + 1 - hx}{(1+hx)^2} = \frac{h^2x + hx + 1}{(1+hx)^2}$$

נשים לב כי מכנה הנגזרת ח'וד כל תמיד חיובי.
נבדוק את סימן המונה של הנגזרת.

$$h^2x + hx + 1 = 0$$

נשווה מונה לאפס:

$$\text{נניח למען הנדב: } x = t$$

$$t^2 + t + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 < 0$$

סימן הדסקרימיננטה של המשוואה הריבועית:
משמע: אין מאפסים ממשיים.

בנוסף, המקדם של t^2 חיובי, היקואציה חיובי.

מסקנה: היאוי החיובי חיובי לכל x ממשי.

נמצא ונציב: $x = t$.

ומהל נסיק כי הנגזרת נ'אל חיובית כל תמיד חיובית.

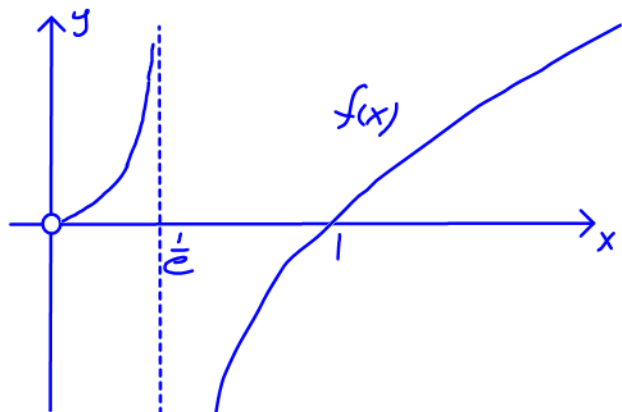
מסקנה: נאל עליה למקול'עין בנל תמיד הנגזרת
ואין לה תמונה יבירה כל.

סיכום: תמונה העלייה של הבוקל'ע (נאל): $\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ או $x < \frac{1}{e}$.



ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

על פי כל סעיבי הדיקה עצב כיה, נשכלל סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$:



סעיף ד: נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

פירוש: תבנו אי-שוויונים חילוקיים וגם מתני שונה מאז:

$$\begin{aligned} x < 0 & \quad \text{וגם} \quad x \cdot \ln(x) \neq 0 \\ & \quad \swarrow \quad \searrow \\ & \quad x \neq 0 \quad \text{וגם} \quad \ln(x) \neq 0 \\ & \quad \quad \quad x \neq e^0 \\ & \quad \quad \quad x \neq 1 \end{aligned}$$

לפיכך: תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$: $1 < x$ או $0 < x < 1$

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

לדעתי ההגדרה: $x = 1$ מאז את המנה אך לא את המונה.

נוסף לכך: $x = 1$ אסימטוטה מאונכת לזיר ו- x של הפונקצייה $f(x)$.

בנוסף, נבדוק עבור $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x \cdot \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

לכן: $x = 0$ אסימטוטה מאונכת לזיר ו- x של הפונקצייה $f(x)$.

הודו מנות נעמוה יש כעת דוים. [אנ ותכשור עניה](#)

הארה:

ניתן קבוע לבטל את הנקודה בנקודה אחרת.
אז להסתכל בתחום ההגדרה של $g(x)$ עם גיל הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$.

אסימפּטוטה מקבילה לציר היא:

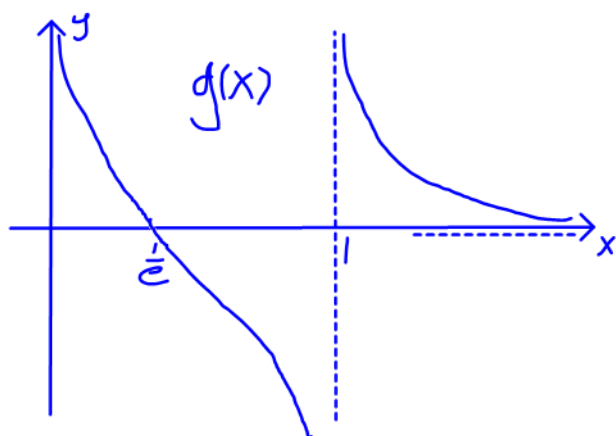
מתחום ההגדרה נבדוק רק קונוס היתרון של ציר-א:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

לכן $y = 1$ אסימפּטוטה מקבילה לציר היא של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

על פי כל סעיבי התיקון עד כה, נשכח את סקיצה של גיל הפונקציה $f(x)$:



סעיף ג.:

נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k הוא פרמטר גדול מ-1.

(1) קבעו איזה מן הביטויים I-II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם.

I. $k + \ln(k)$ II. $k + \ln 2$

עקרי סריי א הנאנים, לאפ רביבה, קיוביר ויורבה.

(ג) קבוצה של האינטגרל:

$$\frac{1}{x \cdot \ln x} + \frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot (1 + \ln x)$$

מתבונן בפרונ סעיפם קודמם נשמע לב כי: $(x \cdot \ln x)' = \ln x + 1$

נשתמש בנוסחה לדיפרנציאל אינטגרל ע"י ציהוי יוצא-הכנסה:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + 1) dx = \ln |x \cdot \ln x| + C$$

בתחום הנתון מתקיים $x \cdot \ln x > 0$ לכן:

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} f(x) dx = \left[\ln(x \cdot \ln x) \right]_{e^k}^{e^{2k}} = \ln(e^{2k} \cdot \ln e^{2k}) - \ln(e^k \cdot \ln e^k)$$

ושמם בחינן חזקות ולוגריתמים ע"פ כלל:

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} f(x) dx = \ln \left(\frac{e^{2k} \cdot 2k}{e^k \cdot k} \right) = \ln(2 \cdot e^k) = \ln 2 + \ln e^k = \ln 2 + k$$

מסקנה: הביטוי שווה ל-II



סעיף ג:

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^2$ ו- $x = e^4$.

לפי תנאי קפיון נת מסוף קודם,
ישא נדכוש מרעקל "ע" גרבת $k=2$ בקיטוי II.
נמין שח צה - S :

$$S = 2 + h_2 \approx 2.693$$

יח"ר //

