



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיצ' תשפ"ה, 2025, שאלון 35581, מועד ב:
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"





1. האורך של מסילת הרכבת בין חדרה לבאר שבע הוא 150 ק"מ.

רכבת א' יצאה מחדרה לבאר שבע ונסעה במהירות קבועה.

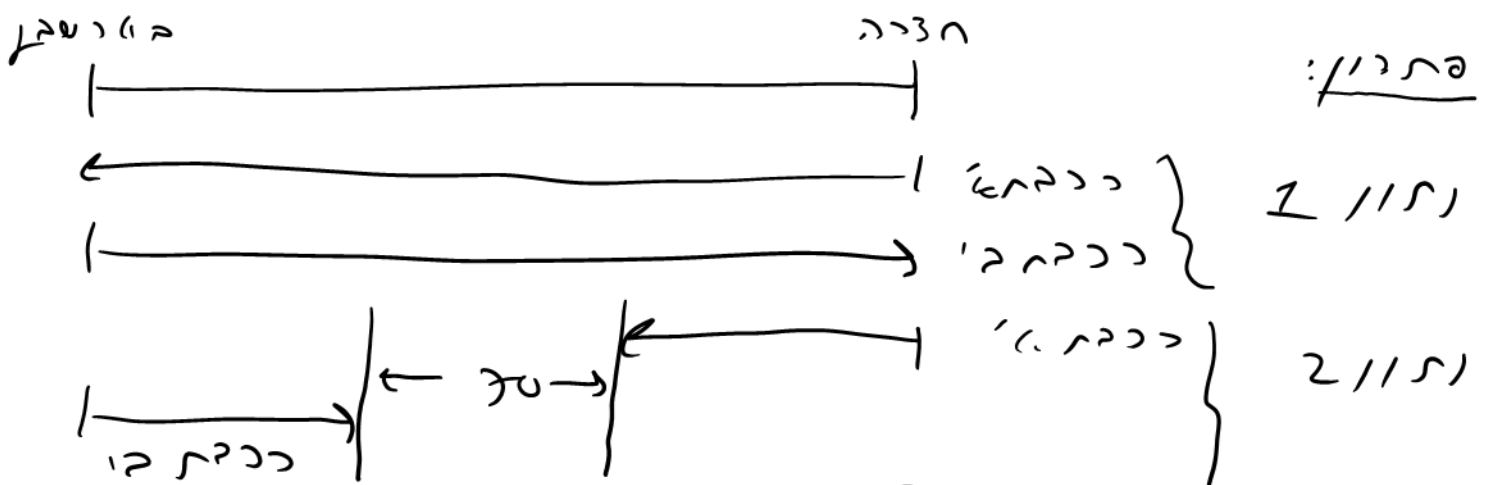
רבע שעה לאחר מכן יצאה רכבת ב' מבאר שבע לחדרה, וגם היא נסעה במהירות קבועה.

שתי הרכבות חלפו זו על פני זו, והגיעו ליעדים שלהן באותה השעה.

ידוע כי רבע שעה לאחר שרכבת ב' יצאה לדרכה, לפני שהרכבות חלפו זו על פני זו, המרחק ביניהן היה 70 ק"מ.

א. מצאו את מהירות הנסיעה של רכבת א' ואת מהירות הנסיעה של רכבת ב'.

ב. מצאו כמה זמן לאחר יציאתה של רכבת א', המרחק בין הרכבות היה 70 ק"מ פעם נוספת.



נסעו 150 ק"מ הנסיעה בסך הכל

תאריך התנועה	150	היחס	150
רכבת א' כל הדרך	$t + \frac{1}{4} = \frac{4t+1}{4}$	$\frac{150}{\frac{4t+1}{4}} = \frac{600}{4t+1}$	150
רכבת ב' כל הדרך	t	$\frac{150}{t}$	150
רכבת א' ונסעו 80 ק"מ	$\frac{1}{2}$	$\frac{600}{4t+1}$	$\frac{300}{4t+1}$
רכבת ב' ונסעו 80 ק"מ	$\frac{1}{4}$	$\frac{150}{t}$	$\frac{150}{4t}$

הנעלם יהיה זמן הנסיעה של רכבת ב' כל הדרך.
נטמן, נאמן ב- t .



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





משוואה - צרכים:

$$\frac{300}{4t+1} + \frac{150}{4t} = 80$$

|||

$$300 \cdot 4t + 150(4t+1) = 80 \cdot 4t \cdot (4t+1)$$

$$1200t + 600t + 150 = 1280t^2 + 320t$$

$$1280t^2 - 1480t - 150 = 0$$

נבדוק גורם משולב - הריבוע וזהו

$$t = \frac{5}{4}, \quad t = -\frac{3}{32}$$

שמן הנסיעה חיובי: $t = \frac{5}{4}$

מהירות כרכר א'	100 קמ"ש
מהירות כרכר ב'	120 קמ"ש

ד. נסמן x את מסלול הנסיעה של כרכר א' ב- x .

נסמן את הנסיעה של כרכר ב' יהיה $x - \frac{1}{4}$.

סכום המרחקים שהן עברות ביחד צריך להיות

$$150 + 30 = 220$$

כאשר המשוואה תהיה:

$$100x + 120(x - \frac{1}{4}) = 220$$

$$100x + 120x - 30 = 220$$

$$220x = 250$$

$$x = \frac{25}{22} \text{ שעות}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





2. a_n היא סדרה הנדסית אינסופית עולה שמנתה היא q .

$$0 < q < 1$$

א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.

b_n היא סדרה הנדסית אינסופית וגם מנתה היא q .

c_n היא סדרה אינסופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$ ($c_n \neq 0$).

ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .

2א.
לכיוון $0 < q < 1$ וגם a_n חיובי
סדרה c_n (כאשר a_n חיובי וסדרה b_n חיובי)

2ב.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2b_{n+1} - a_{n+1}}{2b_n - a_n} = \frac{2b_n \cdot q - a_n \cdot q}{2b_n - a_n} = \frac{q(2b_n - a_n)}{2b_n - a_n} = q$$

c_n הנדסית ומנתה q

נתון כי $c_1 = 5\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 17 מסכום איברי הסדרה b_n .

ג. מצאו את הערך של a_1 .

נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול פי 4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים

בסדרה a_n .

ד. מצאו את הערך של q .

2ג.

$$S_{c, \text{זוגי}} = 17 S_{b, \text{זוגי}}$$

$$\frac{c_1}{1-q} = \frac{17b_1}{1-q}$$



$$\frac{s \frac{2}{3}}{1-q} = \frac{17b_1}{1-q}$$

$$s \frac{2}{3} = 17b_1$$

$$b_1 = \frac{1}{3}$$

$$c_1 = 2b_1 - a_1$$

$$s \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} - a_1$$

$$a_1 = -5$$

23.

$$S_{\text{מש.}} = 4 + S_{\text{מש.ק}}$$

$$\frac{a_2}{1-q^2} = 4 + \frac{a_1}{1-q^2} \rightarrow \frac{a_1 q}{1-q^2} = 4 + \frac{a_1}{1-q^2}$$

$$\frac{-sq}{1-q^2} = 4 - \frac{s}{1-q^2}$$

$$-sq = 4(1-q^2) - s$$

$$-sq = 4 - 4q^2 - s$$

$$4q^2 - sq + 1 = 0$$

$$q = 1 \quad q = \frac{1}{4}$$

($0 < q < 1$)





3. בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים.

חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא.

ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא 0.4096.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?

ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.

ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{4}{15}$.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

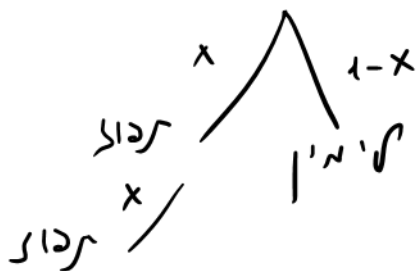
ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

ג. ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?

בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?



$$x^2 = 0.4096$$

$$x = 0.64$$

x

$$P(\text{פרי} | \text{פרי}) = 0.36$$





ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.
ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{4}{15}$.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

	$\bar{A}$ פירות	A לימונים	
y	$1 - \frac{3}{5}y$ $= \frac{2}{5}y$	$\frac{3}{5}y$	B ייצוא
$1-y$	$\frac{4}{15}(1-y)$		$\bar{B}$ לא ייצוא
1	0.36	0.64	

$$P(\text{ייצוא}) = y$$

$$\frac{-3}{\frac{2}{5}y} + \frac{-1}{\frac{4}{15}(1-y)} = \frac{.15}{0.36} \quad | \cdot 15$$

$$6y + 4(1-y) = 5.4$$

$$6y + 4 - 4y = 5.4$$

$$2y = 1.4$$

$$y = 0.7$$

$$P(\text{פרי ייצוא}) = 0.7$$



בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

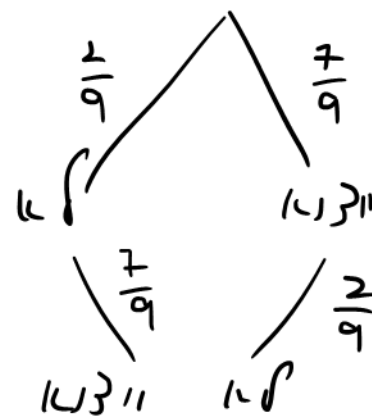
ג. ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?

ג.

	$\bar{A}$ לימון	A אפריסק	
B לימון	0.7 0.28	0.42	
$\bar{B}$ אפריסק	0.3 0.08	0.22	
	1 0.36	0.64	

$$P(\text{אפריסק} / \text{לימון}) = \frac{0.28}{0.36} = \frac{7}{9}$$

$$P(\text{שני לימונים}) = 2 \times \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} = \boxed{\frac{28}{81}}$$





בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

7. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

$$n = 4$$

$$p = 0.7$$

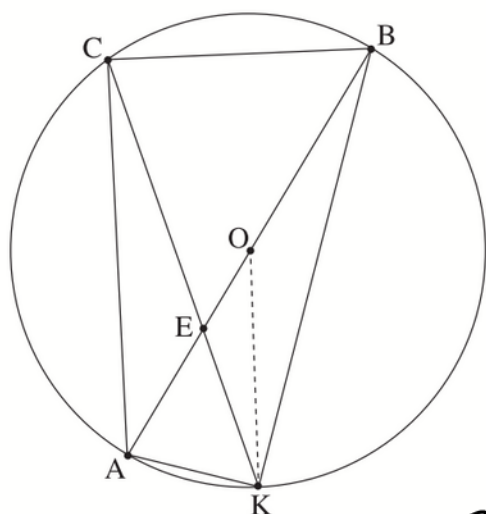
$$0, \overbrace{1, 2, 3, 4}^{\text{יציא}}$$

$$P_4(0) = \binom{4}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^4 = 0.0081$$

$$P_4(4) = \binom{4}{4} 0.7^4 \cdot 0.3^0 = 0.2401$$

$$P\left(\frac{\text{לפחות 3 יציא}}{\text{לפחות 1}}\right) = \frac{1 - P_4(0) - P_4(4)}{1 - P_4(0)} = \frac{1 - 0.2401 - 0.0081}{1 - 0.0081}$$

$$P\left(\frac{\text{לפחות 3 יציא}}{\text{לפחות 1}}\right) = \frac{1074}{1417}$$



4. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
המיתר CK חותך את הרדיוס AO בנקודה E (ראו סרטוט).
נתון: $\angle EKO = \angle ABK$.
א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle OKE$.
המשך הקטע KO חותך את המיתר CB בנקודה P.
נתון כי $PO = 4$, וכי רדיוס המעגל הוא 4.8.
ב. (1) הוכיחו כי PO הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
(2) מצאו את אורך הקטע EO.
ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ACE ובין שטח המשולש AOK.

פתרון: (שנינו) עם תוספת כסוף הפירוט

המטרה	טענה	נימוק
①	AB הוא קוטר במעגל	נתון
②	O מרכז המעגל	נתון
③	$\angle EKO = \angle ABK$	נתון
④	$OB = OK = R$	רדיוסים במעגל גלויים. א"כ
⑤	$\angle OBK = \angle OKB$	מ"כ זא"מ מול במעגל
⑥	$\angle ACK = \angle ABK$	זווית היקפית הנשענת על אותה קשת
⑦	$\angle ACE = \angle EKO$	כ"א המזדהא"כ 3, 5, 6
⑧	$\angle AEC = \angle KEO$	זווית דקדוקית 10/15
⑨	$\triangle ACE \sim \triangle OKE$ ל"ז. ע"כ	משפט דמיון ז.ז. א"כ 7, 8

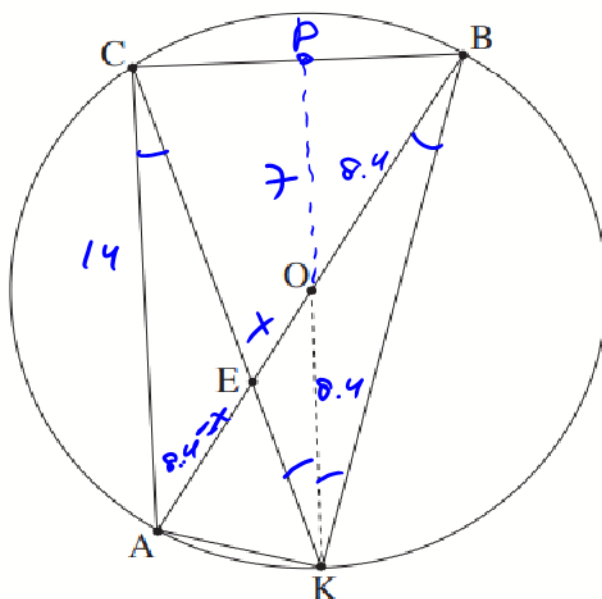


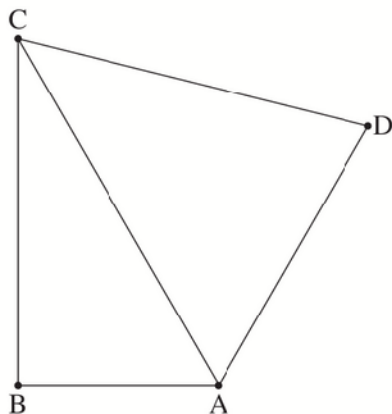
המספר	טענה	נימוק
(10)	$R = 4.8, PO = 4$	נמין
(11)	$AO = BO \leq R$	כדי וסיק במהלך נעילה. לפי 2
(12)	$AC \parallel KP$	ואם דין שני ישרים וישר שלישי מחזיק אותם. ששזל נולד מחזיק נעילה, אז הישרים מחזיקים. לפי 7
(13)	PO היא נעילה דו-משל ABC	ישו שיוכל מחזיק נעילה דו-משל, ונעילה נעילה נעילה במשולש, הוה נעילה נעילה במשולש. לפי 12, 11
(14)	$OK = AO = 4.8$	לפי 10
(15)	$AC = 2 \cdot PO = 8$	נעילה נעילה נעילה נעילה הנעילה הנעילה. לפי 14, 10
(16)	$\frac{AC}{OK} = \frac{AE}{EO} = \frac{CE}{KE}$	יחס הנעילה הנעילה במשולש הנעילה. לפי 9
(17)	$\frac{8}{4.8} = \frac{4.8 - EO}{EO}$	הנעילה. לפי 14, 15, 16
(18)	$EO = 1.8$	$8 \cdot EO = 23.04 - 4.8 \cdot EO$ חישוב $12.8 \cdot EO = 23.04$ $EO = \frac{23.04}{12.8} = 1.8$
(19)	$\frac{S_{ACE}}{S_{OKE}} = \left(\frac{AC}{OK}\right)^2 = \left(\frac{8}{4.8}\right)^2 = \frac{25}{9}$	יחס המשולשים שמשולש נעילה נעילה היחס יחס הנעילה הנעילה לפי 16, 15, 10, 9



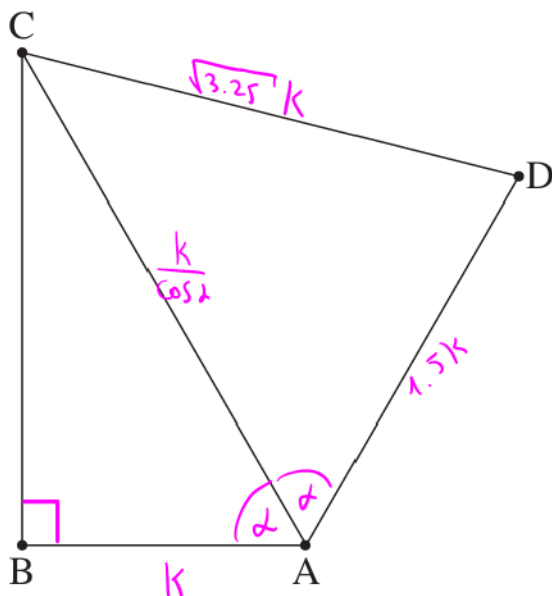


המספר	לשם	נחיה
20	ניכיון ימין מנהוגה א	קנייך שטר + סימון
21	לחץ א, ונסמן ואליו h	ניסוח שטר שוואר. א. 20
22	$S_{OKE} = \frac{EO \cdot h}{2}$	ניסוח שטר שוואר א. 2
23	$S_{AOK} = \frac{AO \cdot h}{2}$	חיסוק. א. 21, 22
	$\frac{S_{AOK}}{S_{OKE}} = \frac{AO}{EO}$	
24	$\frac{S_{AOK}}{S_{OKE}} = \frac{4.8}{1.8} = \frac{8}{3}$	חיסוק. א. 10, 16, 23
25	$\frac{S_{ACE}}{S_{AOK}} = \frac{\frac{25}{5}}{\frac{8}{3}} = \boxed{\frac{25}{24}}$	חיסוק. א. 15, 24
	נ.ד. א	





5. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$).
על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש- AC הוא חוצה זווית BAD .
נסמן: $\angle CAB = \alpha$, $AB = k$.
א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC .
נתון: $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$, $AD = 1.5 \cdot k$.
ב. חשבו את הערך של α .
הציבו $\alpha = 60^\circ$ וענו על סעיפים ג-ד.
הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .
ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .
הנקודה E היא מרכז המעגל החסום את המשולש ABC .
נתון: $ME = 4$.
ד. חשבו את הערך של k .



א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC .

$$\Delta ABC: \cos \alpha = \frac{k}{AC}$$

$$AC = \frac{k}{\cos \alpha}$$

נתון: $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$, $AD = 1.5 \cdot k$.
ב. חשבו את הערך של α .

$$\Delta ACD: CD^2 = CA^2 + DA^2 - 2 \cdot CA \cdot DA \cdot \cos \alpha$$

$$3.25k^2 = \frac{k^2}{\cos^2 \alpha} + 2.25k^2 - 2 \cdot \frac{k}{\cos \alpha} \cdot 1.5k \cdot \cos \alpha \quad | :k^2$$

$$3.25 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2.25 - 3$$

$$4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

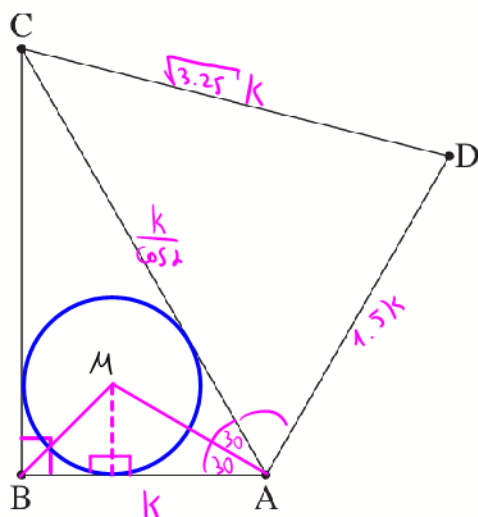
$$\alpha = 60^\circ \quad \alpha = 120^\circ$$



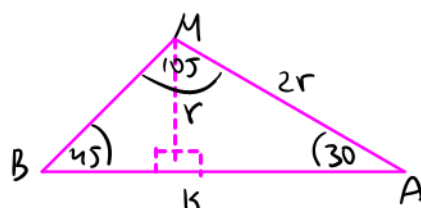
הציבו $\alpha = 60^\circ$ וענו על סעיפים ג-ד.

הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.



כעבור, מרכז מעגל חסום הוא מרכז חוצי זוויות



MA חצו כי 2 מהרדיוס מאחר ונצב שיהיו 30° הוא חצי מהזווית.

נבצע משפט הקוסינוס ב $\triangle MBA$:

$$\frac{k}{\sin(105)} = \frac{2r}{\sin(45)} \rightarrow r = \frac{k \sin(45)}{2 \sin(105)} = 0.366k$$

הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

נתון: $ME = 4$.

ד. חשבו את הערך של k.

מרכז מעגל חוסם משולש ישר זווית הוא אמצע היתר. כלומר E היא אמצע AC.

CA חצו כי 2 $\angle$ BA (נצב הוא 30° ...)

כאן $EA = k$! $CA = 2k$

מסעיף קודם: $MA = 0.732k$

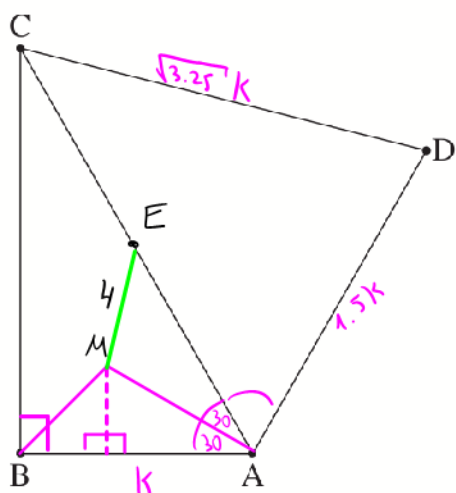
נבצע משפט הקוסינוס ב $\triangle EMA$:

$$ME^2 = MA^2 + EA^2 - 2 \cdot MA \cdot EA \cdot \cos(30)$$

$$6^2 = (0.732k)^2 + k^2 - 2 \cdot k \cdot 0.732k \cdot \cos(30)$$

$$36 = k^2 (0.732^2 + 1 - 2 \cdot 0.732 \cdot \cos(30))$$

$$k = 11.59$$





6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2ax}{(x^2 - 16)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

6א(1)

$$x^2 - 16 \neq 0$$

$$x \neq \pm 4$$

6א(2)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{2ax}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{2x^2}{x^4} + \frac{256}{x^4}} = \frac{\frac{2a}{x^3}}{1 - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{256}{x^4}} = \frac{0}{1 - 0 + 0} = 0$$

$x = \pm 4$ גאנס · גרף וואן גאנס וואן:

$$x = 4$$

$$x = -4$$

$$y = 0$$

6א(3)

$$f'(x) = \frac{2a(x^2 - 16)^2 - 2ax \cdot 2(x^2 - 16) \cdot 2x}{(x^2 - 16)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2a(x^2 - 16)(x^2 - 16 - 4x^2)}{(x^2 - 16)^4} = \frac{2a(x^2 - 16)(-3x^2 - 16)}{(x^2 - 16)^4}$$

$$\frac{2a(x^2 - 16)(-3x^2 - 16)}{(x^2 - 16)^4} = 0 \rightarrow 2a(x^2 - 16)(-3x^2 - 16) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ x = \pm 4 & \emptyset \\ \text{אין פתרון} & \end{array}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



נתון כי $c_1 = 5\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 17 מסכום איברי הסדרה b_n .
ג. מצאו את הערך של a_1 .

נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב-4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n .

ד. מצאו את הערך של q .

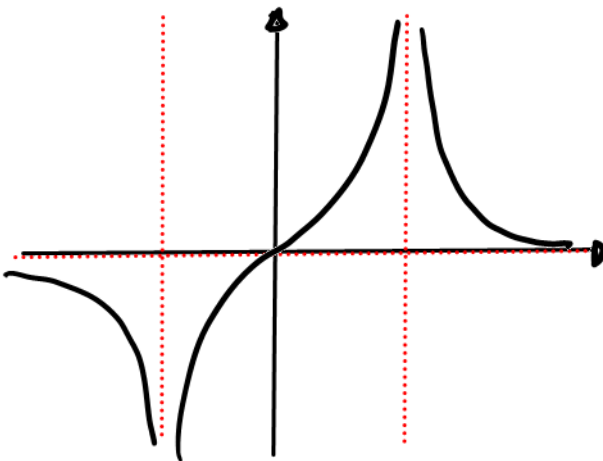
6k(3)

x	$x < -4$	$-4 < x < 4$	$x > 4$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$			

$$\begin{aligned} f'(5) &= - < 0 \\ f'(0) &= + > 0 \\ f'(-5) &= - < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4 < x < 4 & : \nearrow \\ x < -4 \text{ או } x > 4 & : \searrow \end{aligned}$$

6k(4)



נתונה הפונקצייה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x) = f(x) + 1$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -2$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-ד.

נתון כי הפונקצייה $g(x)$ עוברת בנקודה $(2, 7)$.

ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקצייה $g(x)$.

6p. $g'(-2) = 0 \rightarrow f(-2) + 1 = 0 \rightarrow f(-2) = -1$





6c. $-1 = \frac{-4a}{(4-16)^2} \rightarrow -1 = \frac{-4a}{144} \rightarrow -144 = -4a$

$a = 36$

6c. $g(x) = \int (f(x)+1) dx \rightarrow \int \left(\frac{36x}{x^2-16} + 1 \right) dx \rightarrow \int (36 \cdot (x^2-16)^{-2} + 1) dx$

$g(x) = 36 \frac{(x^2-16)^{-1}}{-1} + x + c$

לפי בנוסחה: $\int f(x)^n f'(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$

$g(x) = -\frac{36}{x^2-16} + x + c$

$7 = -\frac{36}{4-16} + 2 + c$

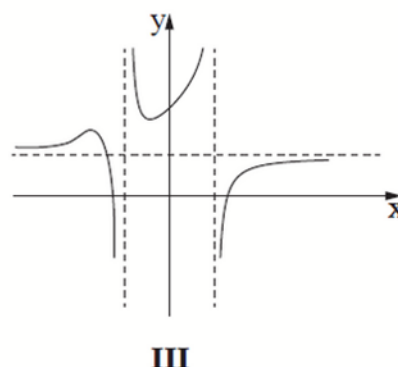
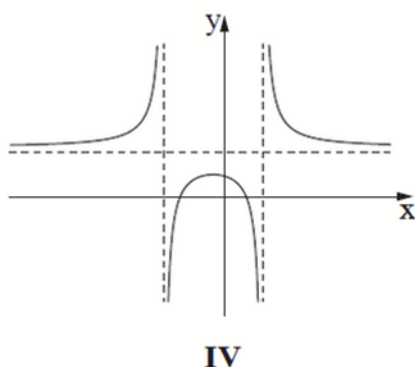
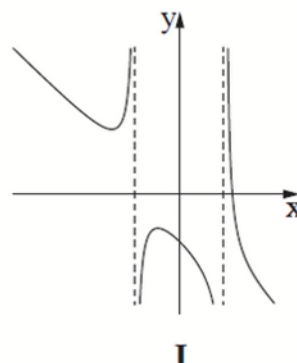
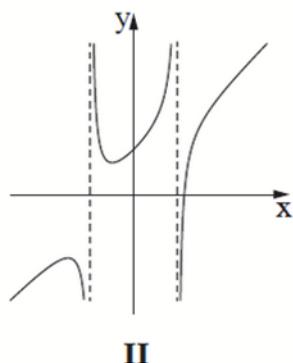
(נכון: $g(2) = 7$)

$7 = 3 + 2 + c$

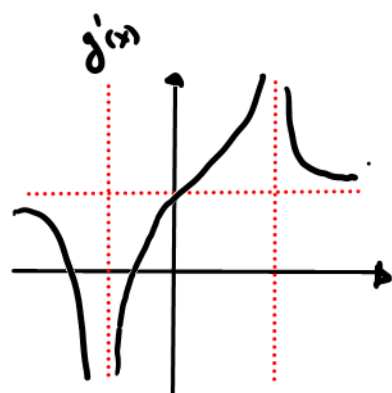
$c = 2$

$g(x) = -\frac{36}{x^2-16} + x + 2$

ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.



נתון דגף של $g(x)$ (הצגה אנטי דמוית של $f(x)$)



ע. גרף של $g(x)$ (הצגה אנטי דמוית של $f(x)$)
והאם $g(x)$ אולימפיק וולקס $g(x)$ נקודה כל היא $g(x)$
הנע $g(x)$ סידה $x = -2$ היא נקודה חזרה.

הגרפים שיש בהם נקודות קיצון אלו הם II ! III

ע. נחזק את $g(x)$ יש אולי אולימפיק

תשובה: II

אולימפיק $g(x)$ אולי
 $g(x) = \frac{36}{x^2} + 2 + \frac{1}{x} = \frac{36}{x^2} + \frac{1}{x} + 2$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



7. נתונה הפונקצייה $f(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
 ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.
 ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) הראו כי $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בעבור כל x בתחום הגדרתה.
 ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק?
 אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}} \quad \text{ת. ה.}$$

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} \text{ מאנסיי מכנוי, לא מוּלֵּה וּלֵּן אִסִּיֶּה אִנְכִּיּוּל}}$$



ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.

$$f(x) = 2\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)} = 2\cos x + \frac{1}{\cos x} = f(x)$$

הנ"ל

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$$f'(x) = -2\sin(x) + \frac{0 \cdot \cos x - \sin x \cdot 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2\sin x = \frac{\sin x - 2\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin x (1 - 2\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cdot (-\cos 2x)}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x \cos 2x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0 + \pi k$$

$$x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	///	-	0	+	0
$f(x)$	///	↘	↗	↘	///

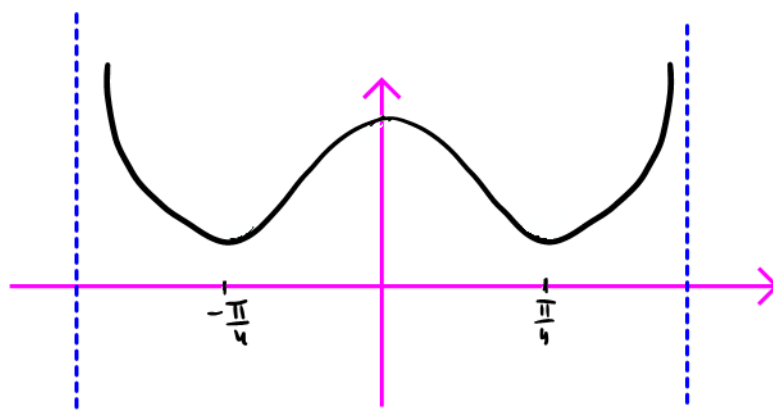
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$f(0) = 3$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ מינימום
 $(0, 3)$ מקסימום
 $\left(-\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ מינימום

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



נתונה הפונקצייה $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

$$\sin 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = 0 + \frac{\pi}{2} k \rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}}$$

(2) הראו כי $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בעבור כל x בתחום הגדרתה.

$$g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin 2x} = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{2 \sin x \cos x} = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x} \quad (x \neq 0) = f(x) \quad (x \neq 0)$$

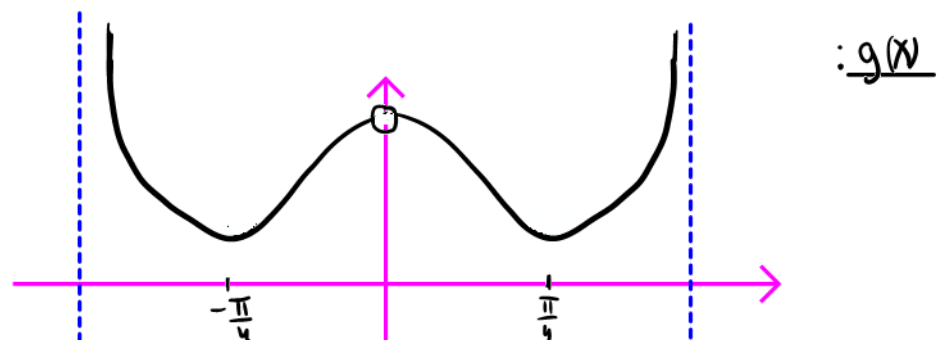
נבדוק ת.י.ג. ענייני פשוט ולאו אחר פשוט

$x=0$ מאתם מתקיים ואם מתקיים ולאו פשוט סולק מהמתקני, לכן חזר

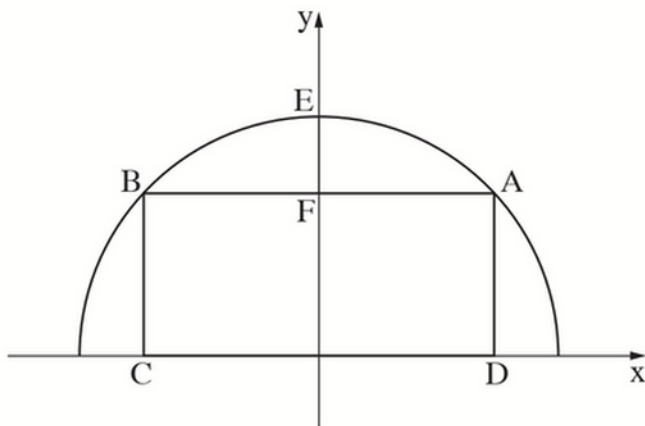
$$g(0) = 2 \cos(0) + \frac{1}{\cos(0)} = 3 \quad \text{חזר } (0,3)$$

$\boxed{\text{אסימטות (א)g? אף לא? :? } x=0 \text{ בו יש חור? (א)g}$

ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק?
אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.



$\boxed{\text{נניח זכאור כצ'ור של (א)g שלטא ק"י א בו (עביו ישו אונקי ונחלקו } g(x) \text{ 3 נעמי.}}$



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$,

R הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R \leq x \leq R$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה-x

וחותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה נוספת B.

הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה-x כך שנוצר מלבן ABCD.

הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה-y.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה-y.

נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF.

נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה A.

א. (1) הביעו באמצעות R ו-t את אורך הקטע EF.

(2) הביעו באמצעות R ו-t את היקף המלבן ABCD.

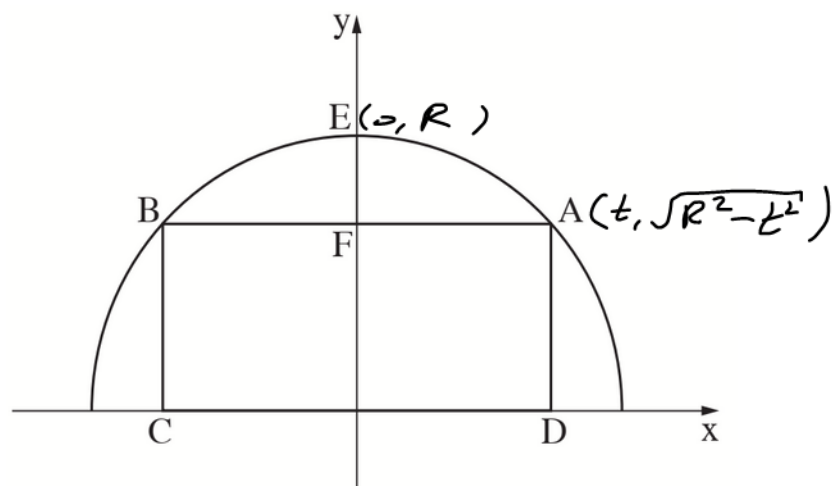
ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן ABCD לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

פתרון:

נניח א-ש שני הנקודה A, נשמע בן שלעזר נקודת המלך הנקודה
זוהי. וכך שנקודה על כלל הנקודה לניו ה-x הן חסות שיסוד ציה.
ונקודה על כלל הנקודה לניו ה-y הן חסות שיסוד x ציה.
וכן חסות חסות של חסות המעל חסות לניו ה-y.
נכיר את שיסודי הנקודות ראשי- בשאלה כהן:
נקודת A ו-E:

$$y_E = f(0) = \sqrt{R^2 - 0^2} = R$$

$$y_A = f(t) = \sqrt{R^2 - t^2}$$



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





עב' הנמק כע"כ :

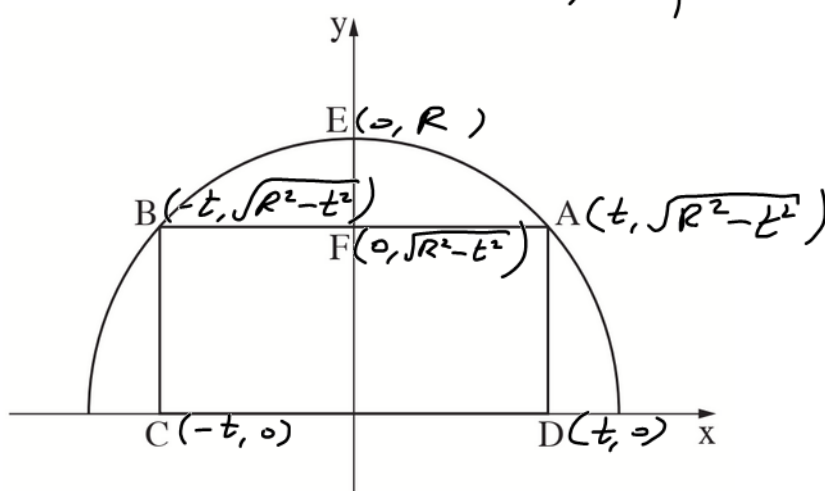
$$y_B = y_F = y_A = \sqrt{R^2 - t^2}$$

$$x_B = -x_A = -t$$

$$x_C = x_B = -t$$

$$x_D = x_A = t$$

$y_C = y_D = 0$ כי נתון שהנקודה אלו נמצאות על ציר ה-x.



סעיף א :

(1) הביעו באמצעות R ו-t את אורך הקטע EF.

לפי הנמק לעיל נביע את אורך הקטע EF:

$$\boxed{EF = y_E - y_F = R - \sqrt{R^2 - t^2}}$$

(2) הביעו באמצעות R ו-t את היקף המלבן ABCD.

נשתמש בנתון ובהגדרת הויקף שלבן. היקף המלבן, כל צד של צלעות (שצדיות שוות זו לזו באורך).

$$AB = CD, \quad AD = BC$$

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2 \cdot (AB + AD)$$

$$AB = x_A - x_B = t - (-t) = 2t$$

$$AD = y_A - y_D = \sqrt{R^2 - t^2} - 0$$

הקו"ל של הויקף המלבן ABCD ($0 < t < R$):

$$\boxed{P_{ABCD} = 2 \cdot (2t + \sqrt{R^2 - t^2}) = 4t + 2\sqrt{R^2 - t^2}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן $ABCD$ לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

נקודת א' היקף הריבוע:
הריבוע, כל הצלעות שוות צלעו באורך t , היקף הריבוע:
נקודת ב' גודל מנת הסולק קוטר:

$$P_{\square} = 4 \cdot EF = 4 \cdot (R - \sqrt{R^2 - t^2}) = 4R - 4\sqrt{R^2 - t^2}$$

נציג פונקציית מטרה:

$$h(t) = P_{ABCD} - P_{\square} = 4t + 2\sqrt{R^2 - t^2} - (4R - 4\sqrt{R^2 - t^2}) =$$

$$= 4t - 4R + 6\sqrt{R^2 - t^2}$$

פונקציית המטרה:

$$h(t) = 4t - 4R + 6\sqrt{R^2 - t^2}, \quad 0 < t < R$$

(חוקי דיפרנציאל מקסימום ממוחלל): נגזרת:

$$h'(t) = 4 + 6 \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{R^2 - t^2}}$$

נשווה לאפס: $h'(t) = 0$

$$4 - \frac{6t}{\sqrt{R^2 - t^2}} = 0 \quad / \cdot \sqrt{R^2 - t^2}$$

(פתור עבור t):

$$4\sqrt{R^2 - t^2} - 6t = 0 \quad / + 6t$$

$$4\sqrt{R^2 - t^2} = 6t \quad / : 2$$

$$2\sqrt{R^2 - t^2} = 3t \quad / ()^2$$

נשים לב כי $0 < t < R$ שני האגפים חיוביים:

$$4(R^2 - t^2) = 9t^2$$



$$4(R^2 - t^2) = 9t^2$$

$$4R^2 - 4t^2 = 9t^2 \quad / +4t^2$$

$$4R^2 = 13t^2 \quad / :13$$

$$t^2 = \frac{4}{13} R^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$0 < t = \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot R$$

כאשר נגד קדימו של הנגזרת ונבדל:

$$h'(t) = 4 + 6 \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{R^2 - t^2}} = 4 - \frac{6t}{\sqrt{R^2 - t^2}} = \frac{4\sqrt{R^2 - t^2} - 6t}{\sqrt{R^2 - t^2}}$$

מכאן הנגזרת הנ"ל חיובית בכל תחום הגדרה.
עכ"ל נובל על ציר מוחלט שזה ע"ה נמצא את סימן הנגזרת הנ"ל.

$$(4\sqrt{R^2 - t^2} - 6t)' = 4 \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{R^2 - t^2}} - 6 = \frac{-4t}{\sqrt{R^2 - t^2}} - 6$$

נשים לב כי בל"א שלילי בתחום $0 < t < R$

ואכן נבדל שלילי עבור $t = \frac{2\sqrt{13}}{13} R$.

מסקנה: עבור $t = \frac{2\sqrt{13}}{13} R$ יהיה בין היתר נמצא את ההיבדל ונגזרת

הנ"ל:
ניתן למצוא את ערך סימן הנגזרת (ה'ה) באשר $\frac{2\sqrt{13}}{13} R \approx 0.555R$
ואיך קצת ערכים עבור t בתחום $0 < t < R$:
ע"ה $0.5R$ ו- $0.6R$.