



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיצ תשפ"ה, 2025, שאלון 35571, מועד ב', גרסה 06:
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"





1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4n-2}{3^n} = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

פתרון:

שלב א' - נבדוק שהסכום מתקיים עבור $n=1$:
 $a_n = \frac{4 \cdot 1 - 2}{3^1} = \frac{2}{3} \rightarrow a_1 = \frac{2}{3}$ נכון!

$$2 - \frac{2 \cdot 1 + 2}{3^1} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

הנני מניח שמתקיים עבור $n \geq 1$

שלב ב' - הנחת האינדוקציה נניח שהסכום נכון עבור $n=k$
 נבדוק עבור $n=k+1$ כדלהלן:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4k-2}{3^k} = 2 - \frac{2k+2}{3^k}$$

שלב ג' - נוכיח שהסכום נכון עבור $n=k+1$ כדלהלן:
 זיהוי ההוכחה:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4k-2}{3^k} + \frac{4(k+1)-2}{3^{k+1}} = 2 - \frac{2(k+1)+2}{3^{k+1}}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4k-2}{3^k} + \frac{4k+2}{3^{k+1}} = 2 - \frac{2k+4}{3^{k+1}}$$

כעת נשאר להוכיח שההנחה נכונה:

$$2 - \frac{2k+2}{3^k} + \frac{4k+2}{3^{k+1}} = 2 - \frac{4k+4}{3^{k+1}}$$

נכון

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





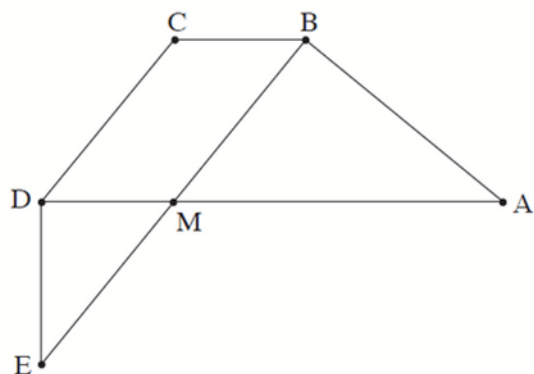
נכנסת, וואל, שמואל:

$$2 - \frac{2k+2}{3^k} + \frac{4k+2}{3^{k+1}} = 2 - \frac{3(2k+2)}{3 \cdot 3^k} + \frac{4k+2}{3^{k+1}} =$$

$$= 2 - \frac{6k+6}{3^{k+1}} + \frac{4k+2}{3^{k+1}} = 2 - \frac{6k+6-4k-2}{3^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{2k+4}{3^{k+1}} //$$

משפט סינוד: בדקנו שהסכום נכון עבור $n=1$
בצעד הבאה ההנחה שהסכום נכון עבור k אכן נכון
כלשהו, היכחנו שהסכום נכון עבור $k+1$.
לכן, הוכחנו באינדוקציה שהסכום נכון לכל n טבעי.



ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($BC \parallel AD$)

וטרפז $BCDE$ ($CD \parallel BE$).

הנקודה M היא נקודת החיתוך של הצלעות AD ו- BE .

נתון: $AB \perp BM$, $ED \perp AD$, $EM = BM$.

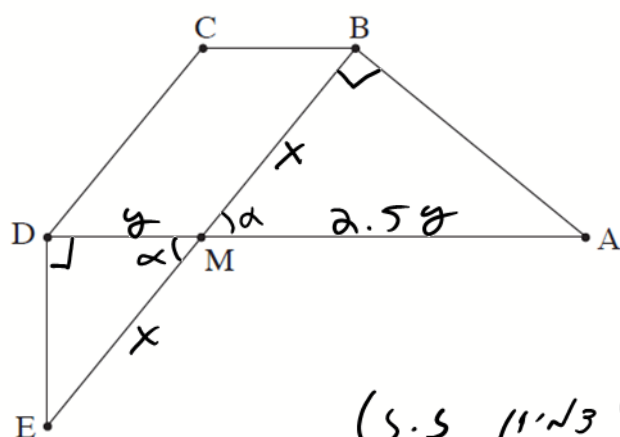
אורך הקטע AM גדול פי 2.5 מאורך הקטע DM .

נסמן: $\angle EMD = \alpha$.

(1) מצאו את הערך של α .

נתון: $DM = 6$.

(2) חשבו את שטח הטרפז $ABCD$.



פתרון: (1)

נשים: $BM = EM = x$

$DM = y \Rightarrow AM = 2.5y$

$\angle ABM = \angle EDM = 90^\circ$

$\angle EMD = \angle AMB = \alpha$



$\Delta EDM \sim \Delta AMB$ (שש) (3 נ"נ) (S.S)



$$\frac{AM}{EM} = \frac{BM}{DM} = \frac{AB}{DE}$$



$$\frac{2.5y}{x} = \frac{x}{y}$$



$$2.5y^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{2.5} \cdot y$$

כעת נשתמש ב- ΔEDM נשלש בהנחה הזוסינוס:

$$\cos \alpha = \frac{DM}{EM} = \frac{y}{\sqrt{2.5} \cdot y} \Rightarrow \boxed{\alpha = 50.768^\circ}$$



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





$$DM = 6 \quad (2) \text{ נתון}$$

$$AM = 2.5 \cdot 6 = 15$$

$$BM = \sqrt{2.5 \cdot 6}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{BCDM} =$$

$$= \frac{AM \cdot BM \cdot \sin 50.768^\circ}{2} + DM \cdot BM \cdot \sin(180^\circ - 50.768^\circ)$$

$$= \frac{15 \cdot \sqrt{2.5 \cdot 6} \cdot \sin 50.768^\circ}{2} + 6 \cdot \sqrt{2.5 \cdot 6} \cdot \sin 129.232^\circ$$

$$= 55.11 + 44.09 = 99.2$$

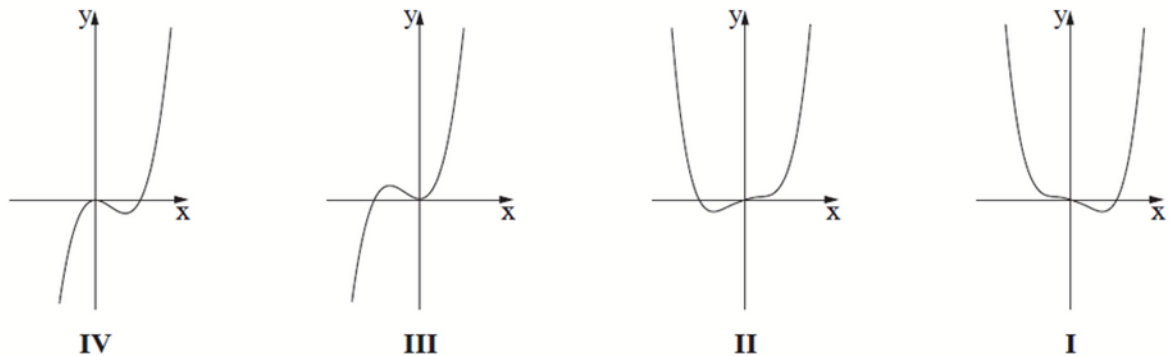
$$S_{ABCD} = 99.2$$



ג. נתונות הפונקציות $f(x) = x^n(x-1)$ ו- $g(x) = x^n(x+1)$, המוגדרות לכל x .

n הוא פרמטר טבעי גדול מ-1.

כל אחד מן הגרפים IV-I שלפניכם מייצג אחת מן הפונקציות $f(x)$ או $g(x)$ בעבור n זוגי או n אי-זוגי.



(1) התאימו לכל אחד מן הגרפים IV-I את הפונקצייה, $f(x)$ או $g(x)$, המתאימה לו בעבור n זוגי או n אי-זוגי.

(2) הציבו $n = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

פתרון:

בולטים: $f(x)$: חומכת להיך x בנהוצל (ט) !- (ס)

$g(x)$: חומכת להיך x בנהוצל (ס) !- (ט-)

עניי: דשתי הפונה ליה ההכדל הליכנ' קין מ שולי
לכין מ אי שולי הול עקור סא:

נחש: עקור מ שולי הפונה ליה שול-ר עקור מ אי שולי
הפונה ליה חובי

(א) : עקור מ שולי הפונה ליה חובי עקור סא $x < 1$
ושול-ר עקור ו- x

עקור מ אי שולי הפונה ליה שול-ר עקור סא $x < 1$
וחובי עקור ו- x .

סכום: I : $f(x)$ עקור מ אי שולי

II : $g(x)$ עקור מ אי שולי

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





$$\text{דוגמה III: } f(x) \text{ עמוק } n \leq 1$$

$$\text{דוגמה IV: } f(x) \text{ עמוק } n \leq 1$$

(2) נתון $n=2$

$$S = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2(x+1) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx$$

$$S = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = [0] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} \right] = \boxed{\frac{1}{12}}$$





$$\int_{2.5}^{4.7} f(x) dx = 3$$

נדקא ב.

מכאן, שהשטח הכחול יהיה $\boxed{3}$





2. a_n היא סדרה הנדסית אינסופית עולה שמנתה היא q .

$$0 < q < 1$$

א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.

b_n היא סדרה הנדסית אינסופית וגם מנתה היא q .

c_n היא סדרה אינסופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$ ($c_n \neq 0$).

ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .

2א.
לכיוון $q < 1$ וגם $q > 0$ אזי a_n אינו גסדרה קצרה
סלילית. (כי a_n לא נמצא q ואיננו חוקי הסדרה קצרה)

2ב.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2b_{n+1} - a_{n+1}}{2b_n - a_n} = \frac{2b_n \cdot q - a_n q}{2b_n - a_n} = \frac{q(2b_n - a_n)}{2b_n - a_n} = q$$

c_n הנדסית ומנתה q

נתון כי $c_1 = 6\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 8 מסכום איברי הסדרה b_n .

ג. מצאו את הערך של a_1 .

נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב-4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים

בסדרה a_n .

ד. מצאו את הערך של q .

2ג.

$$S_{c, \text{זוג}} = 8 \cdot S_{b, \text{זוג}}$$

$$\frac{c_1}{1-q} = \frac{8b_1}{1-q}$$





$$\frac{6\frac{2}{3}}{1-q} = \frac{8b_1}{1-q}$$

$$6\frac{2}{3} = 8b_1$$

$$b_1 = \frac{5}{6}$$

$$c_1 = 2b_1 - a_1$$

$$6\frac{2}{3} = 2\frac{5}{6} - a_1$$

$$a_1 = -5$$

23.

$$S_{\text{מש.}} = 4 + S_{\text{מש.ק}}$$

$$\frac{a_2}{1-q^2} = 4 + \frac{a_1}{1-q^2} \rightarrow \frac{a_1 q}{1-q^2} = 4 + \frac{a_1}{1-q^2}$$

$$\frac{-5q}{1-q^2} = 4 - \frac{5}{1-q^2}$$

$$-5q = 4(1-q^2) - 5$$

$$-5q = 4 - 4q^2 - 5$$

$$4q^2 - 5q + 1 = 0$$

$$q = 1 \quad q = \frac{1}{4}$$

($0 < q < 1$)





3. בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים.

חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא.

ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא 0.4096.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?

ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.

ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{1}{5}$.

בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

ג. ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?

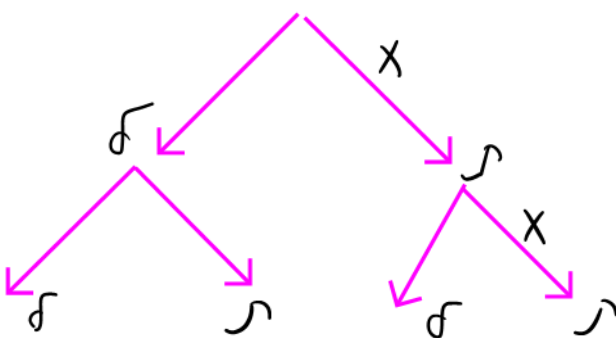
בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?

נסמן את הסכום של תפוזים ב-X

נמצי את כל תנאי שיתקיימו
של חישוב:



$$X^2 = 0.4096$$

$$X = 0.64$$

הסכום של תפוזים הוא 0.36





ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.
ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{1}{5}$.
בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.
ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

	ליון	תפוז	
י	0.8	0.32	$\frac{3y}{5}$ 0.48
1-y	0.2	$\frac{1-y}{5}$ 0.04	$\frac{4(1-y)}{5}$ 0.16
	1	0.36	0.64

1/3'

1/3'
1/3'

A - ס'פ

$\bar{A}$ - ל'פ

B - 1/3'

$\bar{B}$ - 1/3' ו 1/3'

$$p(B) = y$$

$$p(\bar{B}) = 1 - y$$

$$p(A/B) = \frac{3}{5} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \rightarrow p(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot y$$

$$p(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{1}{5} = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} \rightarrow p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{5} (1 - y)$$

$$\frac{3}{5} y + \frac{4(1-y)}{5} = 0.64 \rightarrow 3y + 4(1-y) = 3.2 \rightarrow y = 0.8$$

הסיכוי שנתו פני ס'פ'ל'א הוא 0.8



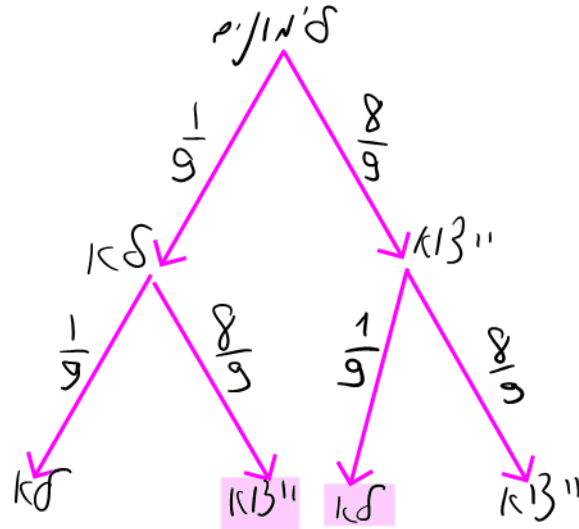
בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

ג. ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא ואיננו מיועד לייצוא?

$$p(B/\bar{A}) = \frac{0.32}{0.36} = \frac{8}{9}$$

$$p(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{1}{9}$$

$$2 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{81}$$



בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

$$n=4$$

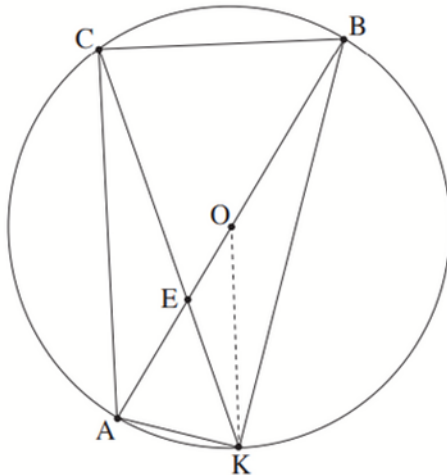
$$p=0.8$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X=4)$$

לימון	0	1	2	3	4
אבוקדו	4	3	2	1	0

$$P(X \leq 3) = \frac{p_4(1) + p_4(2) + p_4(3)}{p_4(1) + p_4(2) + p_4(3) + p_4(4)} = \frac{1 - p_4(0) - p_4(4)}{1 - p_4(0)} = \frac{1 - 0.2^4 - 0.8^4}{1 - 0.2^4} = 0.5897$$





4. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
המיתר CK חותך את הרדיוס AO בנקודה E (ראו סרטוט).
נתון: $\angle EKO = \angle ABK$.
א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle OKE$.
המשך הקטע KO חותך את המיתר CB בנקודה P.
נתון כי $PO = 7$, וכי רדיוס המעגל הוא 8.4.
ב. (1) הוכיחו כי PO הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
(2) מצאו את אורך הקטע EO.
ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ACE ובין שטח המשולש AOK.

פתרון: (שניטוט) עם תוספת בסוף הפתרון

המטרה	טענה	נימוק
①	AB קוטר במעגל	נתון
②	O מרכז המעגל	נתון
③	$\angle EKO = \angle ABK$	נתון
④	$OB = OK = R$	רדיוסים במעגל שווים. אפי.
⑤	$\angle OBK = \angle OKB$	הזוויות הנגדיות שוות במשולש
⑥	$\angle ACK = \angle ABK$	זוויות היקפיות הנושאות את אותו קשת.
⑦	$\angle ACE = \angle EKO$	זוויות חיתוך שוות. אפי.
⑧	$\angle AEC = \angle KEO$	זוויות הנגדיות שוות. אפי.
⑨	$\triangle ACE \sim \triangle OKE$ לפי ש.ש.ז.	באמצעות זוויות 7, 8, 5, 6, 4, 3, 2, 1.

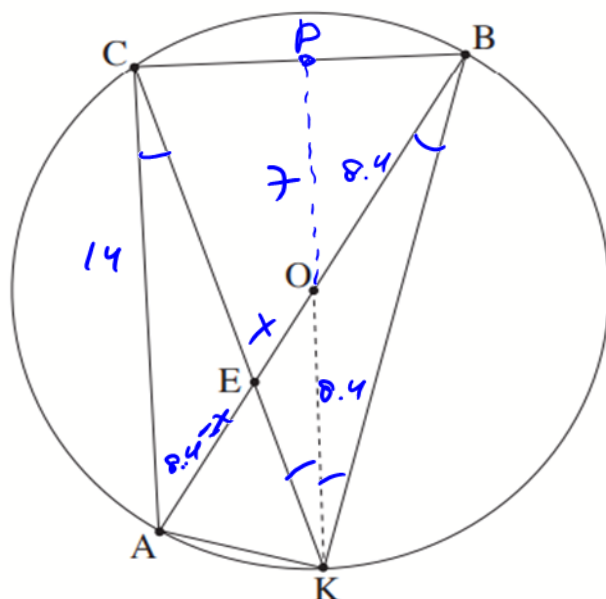


המספר	טענה	נימוק
10	$R = 8.4, PO = 7$	נניח
11	$AO = BO \leq R$	כדי ויטיב במחשך עלול.
12	$AC \parallel KP$	אם אין שני ישרים וישר גלילי לחצן וזווית של זוויות מחיצה עלול, אז הישרים מחיצה. אם כן
13	PO הוא ישר זווית במשולש ABC .	ישו שיוצא מהמרכז נאך במשולש, וזהו אצבע אחת במשולש, הוה האל, למצא במשולש. אם כן, 12, 11
14	$OK = AO = 8.4$	אם כן 10
15	$AC = 2 \cdot PO = 14$	הוא למצא עלולה למחצית הצא המסית. אם כן, 14, 10
16	$\frac{AC}{OK} = \frac{AE}{EO} = \frac{CE}{KE}$	חס הבאג המתייחס במשולש הצולע. אם כן 9
17	$\frac{14}{8.4} = \frac{8.4 - EO}{EO}$	הצבה. אם כן, 14, 15, 16
18	$EO = 3.15$	חישוב
19	$\frac{S_{ACE}}{S_{OKE}} = \left(\frac{AC}{OK}\right)^2 = \left(\frac{14}{8.4}\right)^2 = \frac{25}{9}$	חס הטריגונום של משולשים דומים עלול כריקוס חס הדאגה המתייחס אם כן, 16, 15, 10, 9



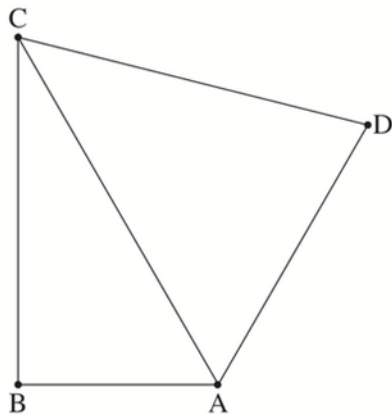


המספר	לסדר	נחלק
20	נניח כי h מנקודה K	נניח כי h מנקודה K
21	$S_{AKE} = \frac{EO \cdot h}{2}$	$S_{AKE} = \frac{EO \cdot h}{2}$
22	$S_{AOK} = \frac{AO \cdot h}{2}$	$S_{AOK} = \frac{AO \cdot h}{2}$
23	$\frac{S_{AOK}}{S_{AKE}} = \frac{AO}{EO}$	$\frac{S_{AOK}}{S_{AKE}} = \frac{AO}{EO}$
24	$\frac{S_{AOK}}{S_{AKE}} = \frac{8.4}{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3}$	$\frac{S_{AOK}}{S_{AKE}} = \frac{8.4}{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3}$
25	$\frac{S_{ACE}}{S_{AOK}} = \frac{\frac{25}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{25}{24}$	$\frac{S_{ACE}}{S_{AOK}} = \frac{\frac{25}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{25}{24}$

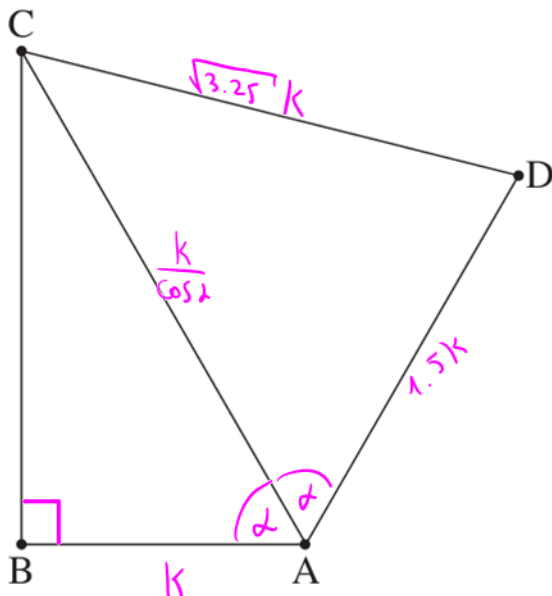


הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





5. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$).
על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש- AC הוא חוצה זווית BAD .
נסמן: $\angle CAB = \alpha$, $AB = k$.
א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC .
נתון: $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$, $AD = 1.5 \cdot k$.
ב. חשבו את הערך של α .
הציבו $\alpha = 60^\circ$ וענו על סעיפים ג-ד.
הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .
ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .
הנקודה E היא מרכז המעגל החסום את המשולש ABC .
נתון: $ME = 4$.
ד. חשבו את הערך של k .



- א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC .

$$\Delta ABC: \cos \alpha = \frac{k}{AC}$$

$$AC = \frac{k}{\cos \alpha}$$

- נתון: $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$, $AD = 1.5 \cdot k$.
ב. חשבו את הערך של α .

$$\Delta ACD: CD^2 = CA^2 + DA^2 - 2 \cdot CA \cdot DA \cdot \cos \alpha$$

$$3.25k^2 = \frac{k^2}{\cos^2 \alpha} + 2.25k^2 - 2 \cdot \frac{k}{\cos \alpha} \cdot 1.5k \cdot \cos \alpha \quad | :k^2$$

$$3.25 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2.25 - 3$$

$$4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \alpha = 120^\circ$$

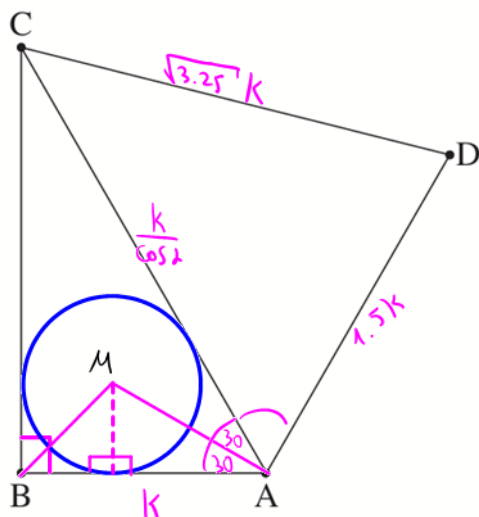




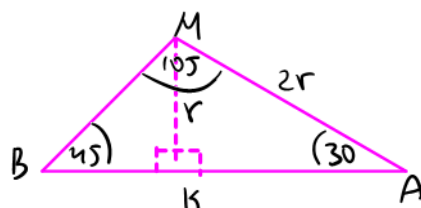
הציבור $\alpha = 60^\circ$ וענו על סעיפים ג-ד.

הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.



כעבור, מרכז מעגל חסום הוא מרכז חוצי זוויות



MA חצוץ כי 2 מהרדיוס מאחר ונצב שמה 30° הוא חצי מציור.

נבצע משפט הקוסינוס ב $\triangle MBA$:

$$\frac{k}{\sin(105)} = \frac{2r}{\sin(45)} \rightarrow r = \frac{k \sin(45)}{2 \sin(105)} = 0.366k$$

הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

נתון: $ME = 4$.

ד. חשבו את הערך של k.

מרכז מעגל חוסם משולש ישר זווית הוא אמצע היתר. כלומר E היא אמצע AC.

CA חצוץ כי 2 $\angle$ BA (נצב מהו 30° ...)

עכ"ן $EA = k$! $CA = 2k$
מסוף קצת : $MA = 0.732k$

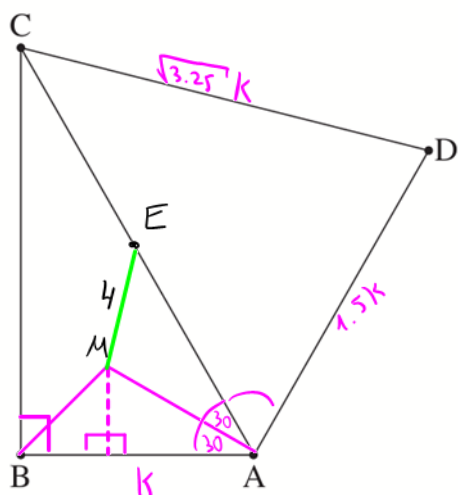
נבצע משפט הקוסינוס ב $\triangle EMA$:

$$ME^2 = MA^2 + EA^2 - 2 \cdot MA \cdot EA \cdot \cos(30)$$

$$4^2 = (0.732k)^2 + k^2 - 2 \cdot k \cdot 0.732k \cdot \cos(30)$$

$$16 = k^2 (0.732^2 + 1 - 2 \cdot 0.732 \cdot \cos(30))$$

$$k = 7.72$$



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2ax}{(x^2-9)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

6א(1)

$$x^2 - 9 \neq 0$$

$$x \neq \pm 3$$

6א(2)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{2ax}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{18x^2}{x^4} + \frac{81}{x^4}} = \frac{\frac{2a}{x^3}}{1 - \frac{18}{x^2} + \frac{81}{x^4}} = \frac{0}{1-0+0} = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

$$y = 0$$

$x = \pm 3$ מאכנס גורמי וולן גורם זניח וזכין:

6א(3)

$$f'(x) = \frac{2a(x^2-9)^2 - 2ax \cdot 2(x^2-9)' \cdot 2x}{(x^2-9)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2a(x^2-9)(x^2-9-4x^2)}{(x^2-9)^4} = \frac{2a(x^2-9)(-3x^2-9)}{(x^2-9)^4}$$

$$\frac{2a(x^2-9)(-3x^2-9)}{(x^2-9)^4} = 0 \rightarrow 2a(x^2-9)(-3x^2-9) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ x = \pm 3 & \emptyset \\ \text{אין פתרון} & \end{array}$$



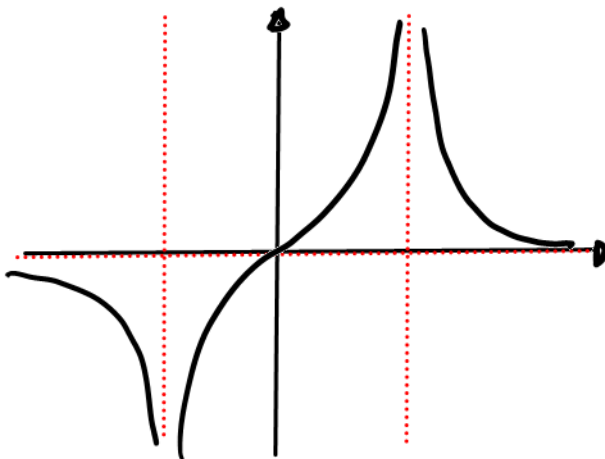
6.א(3)

x	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	-		+		-
$f(x)$					

$$\begin{aligned} f'(-4) &= - < 0 \\ f'(0) &= + > 0 \\ f'(4) &= - < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 < x < 3 & : \nearrow \\ x < -3 \text{ או } x > 3 & : \searrow \end{aligned}$$

6.א.א



נתונה הפונקצייה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x) = f(x) + 1$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-7.

נתון כי הפונקצייה $g(x)$ עוברת בנקודה $(1, 7)$.

ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקצייה $g(x)$.

6.א. $g'(-1) = 0 \rightarrow f(-1) + 1 = 0 \rightarrow f(-1) = -1$



$$6c. \quad -1 = \frac{-2a}{(1-9)^2} \rightarrow -1 = \frac{-2a}{64} \rightarrow -64 = -2a$$

$$a = 32$$

$$6c. \quad g(x) = \int (f(x)+1) dx \rightarrow \int \left(\frac{64x}{x^2-9} + 1 \right) dx \rightarrow \int (32 \cdot (x^2-9)^{-2} \cdot 2x + 1) dx$$

$$g(x) = 32 \frac{(x^2-9)^{-1}}{-1} + x + c$$

$$g(x) = -\frac{32}{x^2-9} + x + c$$

$$7 = -\frac{32}{1-9} + 1 + c$$

$$7 = 4 + 1 + c$$

$$c = 2$$

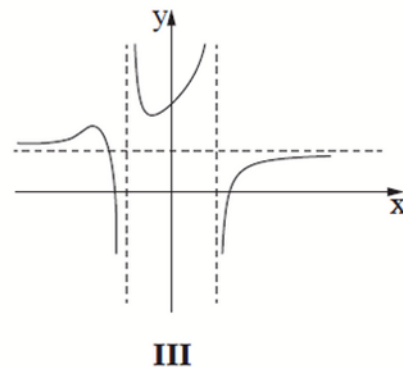
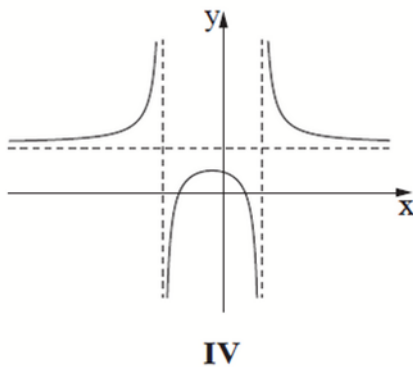
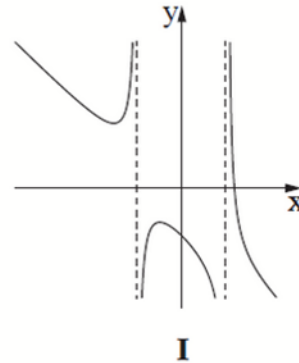
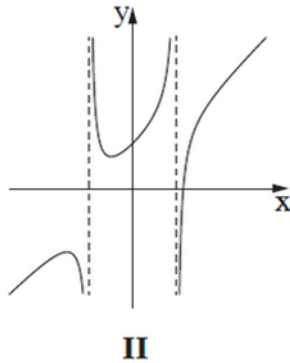
$$g(x) = -\frac{32}{x^2-9} + x + 2$$

$$\int f(x)^n f'(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{לפי בנוסחה}$$

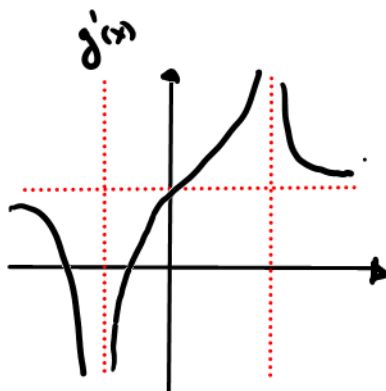
$$g(1) = 7 \quad \text{נניח:}$$



ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.



נתון גרף של $f(x)$ (הצגה אנמית בחזרה של $f(x)$)



ע. גרף של $f(x)$ כאשר $x = -3$ יש חיתוך של הפונקציה עם ציר x והחלפה ממרבית אלמנט וזמן ה נאץ נאצה כל היא נק' $\max$ ה נאץ נאצה סימט $x = 1$ היא נקודה חזרה.

הגרפים שיש בהם נקודות קיצון אלו הם II ! III

ע. נחזק את ה נאץ יש אלו אלקור

תשובה: II

לנאץ אין אלו $\rightarrow \infty = \frac{-32}{\infty} + \infty + 2 = \infty$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





7. נתונה הפונקצייה $f(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.

ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) הראו כי $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בעבור כל x בתחום הגדרתה.

ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק? אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ת. נ. } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.

$$x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} \text{ מאנסיי מכנו, ולא מוליך וזן אסיי אנכוא}$$



ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.

$$f(x) = 2\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)} = 2\cos x + \frac{1}{\cos x} = f(x)$$

הנ"ל

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$$f'(x) = -2\sin(x) + \frac{0 \cdot \cos x - \sin x \cdot 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2\sin x = \frac{\sin x - 2\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin x (1 - 2\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cdot (-\cos 2x)}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x \cos 2x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0 + \pi k$$

$$x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$f'(x)$	///	-	0	+	0	+	///
$f(x)$	///	↘	$m_{\min}$	↗	$m_{\max}$	↘	///

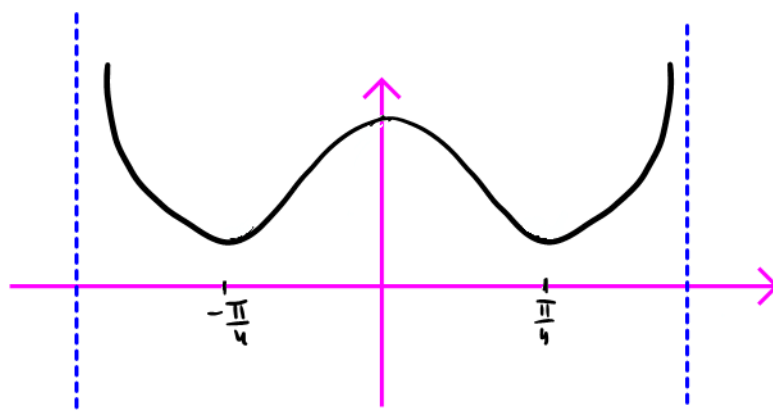
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$f(0) = 3$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ מינימום
 $(0, 3)$ מקסימום
 $\left(-\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ מינימום

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





נתונה הפונקצייה $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

$$\sin 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = 0 + \frac{\pi}{2} k \rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}} \quad \text{ל.י.}$$

(2) הראו כי $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בעבור כל x בתחום הגדרתה.

$$g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin 2x} = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{2 \sin x \cos x} = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x} \quad (x \neq 0) = f(x) \quad (x \neq 0)$$

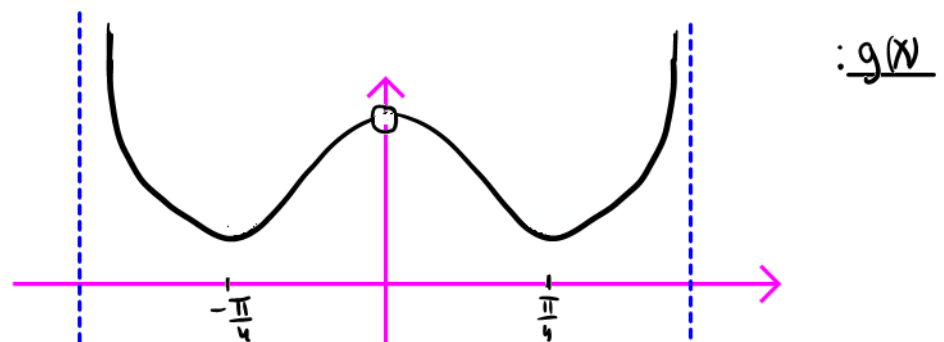
נבדוק ת.י. ענני בישול ולאו בישול

$x=0$ מאת מנת ואם מנת ולאו בישול סולן מנת, לכן חור

$$\text{חור } (0,3) \quad g(0) = 2 \cos(0) + \frac{1}{\cos(0)} = 3$$

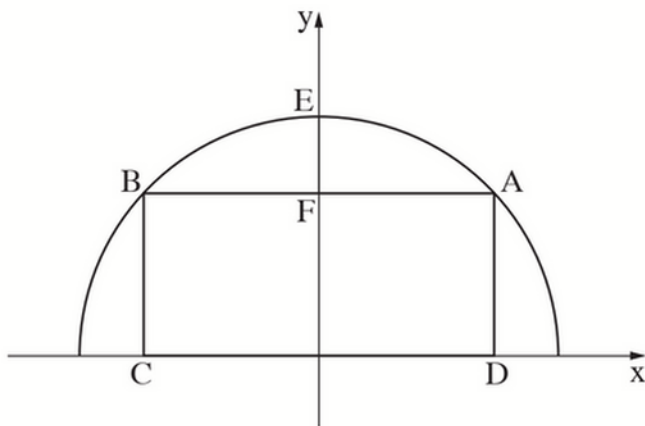
$\boxed{\text{לסיכום } g(x) \text{ מה? } f(x) \text{ מה? } x=0 \text{ כן חור? } g(x)}$

ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק? אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.



$\boxed{\text{נניח } f(x) \text{ כצורה של } g(x) \text{ של } k \text{ קיים } k \text{ (עליו יש אונקציה ונחלק)}} \\ \text{אם } g(x) \text{ 3 נחלק.}$





8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$,

R הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R \leq x \leq R$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה-x

וחותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה נוספת B.

הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה-x כך שנוצר מלבן ABCD.

הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה-y.

הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה-y.

נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF.

נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה A.

א. (1) הביעו באמצעות R ו-t את אורך הקטע EF.

(2) הביעו באמצעות R ו-t את היקף המלבן ABCD.

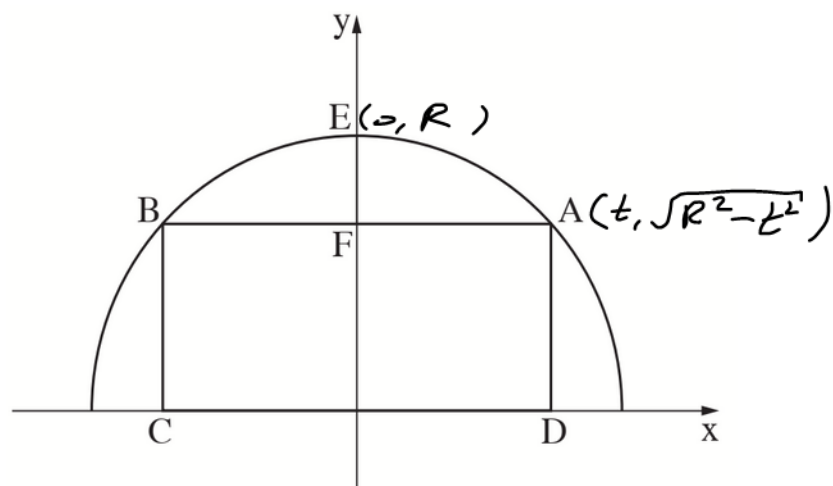
ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן ABCD לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

פתרון:

נניח א-ש שני הנקודה A, נשמע בן שלעז-נקודת המלבן הנקודה
זוהי. וכך שנקודה על קו המקדמה לנו ה-x הן שלעז שיעור y.
ונקודה על קו המקדמה לנו ה-y הן שלעז שיעור x.
וכן קיימתה של חצי המעגל ביחס לנו ה-y.
נכיר את שיעור הנקודות ראשי-בשאלה כולל:
נקודת A ו-E:

$$y_E = f(0) = \sqrt{R^2 - 0^2} = R$$

$$y_A = f(t) = \sqrt{R^2 - t^2}$$



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





עב' הנמק כע"ס :

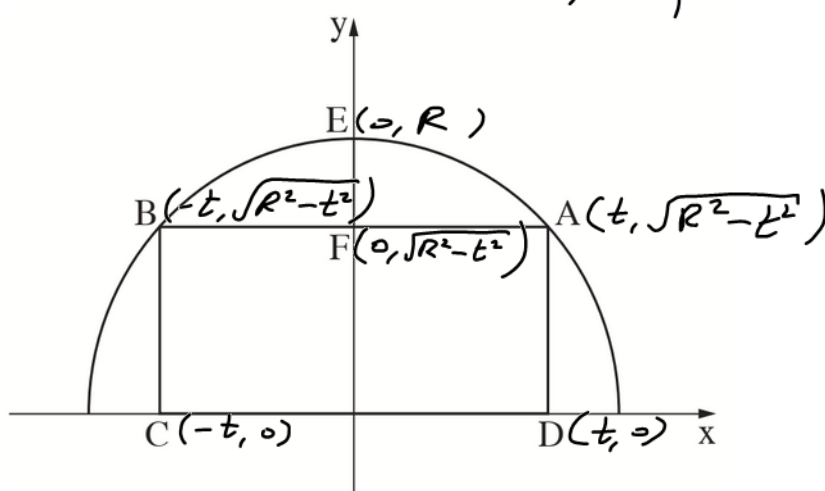
$$y_B = y_F = y_A = \sqrt{R^2 - t^2}$$

$$x_B = -x_A = -t$$

$$x_C = x_B = -t$$

$$x_D = x_A = t$$

$y_C = y_D = 0$ כי נתון שהנקודה אלו נמצאות על ציר ה-x.



סעיף א :

(1) הביעו באמצעות R ו-t את אורך הקטע EF.

לפי הנמק לעיל נביע את אורך הקטע EF:

$$\boxed{EF = y_E - y_F = R - \sqrt{R^2 - t^2}}$$

(2) הביעו באמצעות R ו-t את היקף המלבן ABCD.

נשתמש בנתון ובהגדרת הויקף שלבן.
המלבן, כל צדו נלעוו (נבדיל שורה זו לזו באופן).

$$AB = CD, \quad AD = BC$$

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2 \cdot (AB + AD)$$

$$AB = x_A - x_B = t - (-t) = 2t$$

$$AD = y_A - y_D = \sqrt{R^2 - t^2} - 0$$

הקווי וי הויקף המלבן ABCD ($0 < t < R$):

$$\boxed{P_{ABCD} = 2 \cdot (2t + \sqrt{R^2 - t^2}) = 4t + 2\sqrt{R^2 - t^2}}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן $ABCD$ לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

נקודת א' היקף הריבוע:
הריבוע, כל הצלעות שוות צלעו באורך t , היקף הריבוע:
נקודת ב' גודל מנת הסולק קוטר:

$$P_{\square} = 4 \cdot EF = 4 \cdot (R - \sqrt{R^2 - t^2}) = 4R - 4\sqrt{R^2 - t^2}$$

נציג פונקציית מטרה:

$$h(t) = P_{ABCD} - P_{\square} = 4t + 2\sqrt{R^2 - t^2} - (4R - 4\sqrt{R^2 - t^2}) =$$

$$= 4t - 4R + 6\sqrt{R^2 - t^2}$$

פונקציית המטרה:

$$h(t) = 4t - 4R + 6\sqrt{R^2 - t^2}, \quad 0 < t < R$$

(חוקי דיפרנציאל מקסימום מוחלט): נגזרת:

$$h'(t) = 4 + 6 \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{R^2 - t^2}}$$

נשווה לאפס: $h'(t) = 0$

$$4 - \frac{6t}{\sqrt{R^2 - t^2}} = 0 \quad / \cdot \sqrt{R^2 - t^2}$$

(פתור עבור t):

$$4\sqrt{R^2 - t^2} - 6t = 0 \quad / + 6t$$

$$4\sqrt{R^2 - t^2} = 6t \quad / : 2$$

$$2\sqrt{R^2 - t^2} = 3t \quad / ()^2$$

נשים לב כי $0 < t < R$ שני האגפים חיוביים:

$$4(R^2 - t^2) = 9t^2$$



$$4(R^2 - t^2) = 9t^2$$

$$4R^2 - 4t^2 = 9t^2 \quad / +4t^2$$

$$4R^2 = 13t^2 \quad / :13$$

$$t^2 = \frac{4}{13} R^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$0 < t = \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot R$$

כאשר נגד קדימו של הנגזרת ונבדל:

$$h'(t) = 4 + 6 \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{R^2 - t^2}} = 4 - \frac{6t}{\sqrt{R^2 - t^2}} = \frac{4\sqrt{R^2 - t^2} - 6t}{\sqrt{R^2 - t^2}}$$

מכאן הנגזרת הנ"ל חיובית בכל תחום הגדרה.
עכשיו נבדל עוצמת מונוטוניות של פונקציה על ידי סימן הנגזרת השנייה.

$$(4\sqrt{R^2 - t^2} - 6t)' = 4 \cdot \frac{-2t}{2\sqrt{R^2 - t^2}} - 6 = \frac{-4t}{\sqrt{R^2 - t^2}} - 6$$

נשים לב כי בל"א של פונקציה בתחום $0 < t < R$

ואכן הפונקציה שלילית עבור $t = \frac{2\sqrt{13}}{13} R$.

מסקנה: עבור $t = \frac{2\sqrt{13}}{13} R$ יהיה בין היתר הנחשן סאטא זהירות והיקוד וגוג מוקס

הארה:
ניתן גם לחשב את ערך מינימום הפונקציה (א"ל). כאשר $\frac{2\sqrt{13}}{13} R \approx 0.555R$
ואידיק קאדא ערכים עבור t בתחום $0 < t < R$:
על $0.5R$ ו- $0.6R$.