



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיצ' תשפ"ה, 2025, שאלון 35482, מועד א, גרסה 06:
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"



סדרות

1. נתונה סדרה חשבונית A, ובה 46 איברים: $a_1, a_2, a_3, \dots$.

נתון: $a_2 + a_4 = a_6$.

האיבר האחרון בסדרה A הוא 138.

א. מצאו את הפרש הסדרה ואת a_1 .

נתונה סדרה הנדסית אינסופית B שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, \dots$.

נתון: $3 \cdot b_3 = a_8$, $b_1 = a_6$.

ב. מצאו את המנה של הסדרה B (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה B אינה עולה ואינה יורדת.

ג. מצאו את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה B.

פתרון

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = a_6 \\ a_{46} = 138 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d = a_1 + 5d \\ a_1 + 45d = 138 \end{cases} \quad \text{נתון:}$$

מהמשוואה הראשונה, נקבל: $2a_1 + 4d = a_1 + 5d$

$$\Downarrow \\ a_1 = d$$

נציב במשוואה השנייה:

$$\begin{aligned} a_1 + 45a_1 &= 138 \\ 46a_1 &= 138 / :46 \end{aligned}$$

$$a_1 = 3$$

$$\boxed{d = 3, a_1 = 3} \quad \text{גשום זה:}$$

$$\begin{cases} b_1 = a_6 \\ 3 \cdot b_3 = a_8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_1 + 5d \\ 3 \cdot b_1 \cdot r^2 = a_1 + 7d \end{cases} \quad \text{ב. כעת נתון:}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} b_1 = 3 + 5 \cdot 3 = 18 \\ 3 \cdot b_1 \cdot r^2 = 3 + 7 \cdot 3 \end{cases} & \quad \text{נציב, ונקבל:} \\ 3 \cdot 18 \cdot r^2 &= 24 \end{aligned}$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





$$54q^2 = 24 \quad | :54 \rightarrow q^2 = \frac{4}{9} \quad | \sqrt{}$$

$$q_B = \frac{2}{3} \quad \text{או} \quad q_B = -\frac{2}{3}$$

ל. כן $q = -\frac{2}{3}$

סדרת האיברים בהנחה הראשונה הסדרה ב
מתחילה ב- b_2 והמשלשה היא q^2 :

$$b_2 = b_1 \cdot q = 18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -12$$

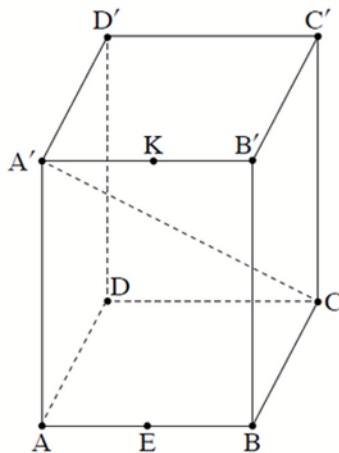
$$q^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

נניח בנוסחה את כוכ סדרה הנדסית אינסופית
מתכנסת:

$$S = \frac{b_2}{1-q^2} = \frac{-12}{1-\frac{4}{9}} = \frac{-12}{\left(\frac{5}{9}\right)} = \boxed{-\frac{108}{5}}$$

סה"כ
215

טריגונומטרייה במרחב



2. בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע.

נתון כי האורך של צלע הבסיס הוא 26,

וכי גודל הזווית שבין CA' לבין הבסיס $ABCD$ הוא 42° .

א. מצאו את גובה התיבה.

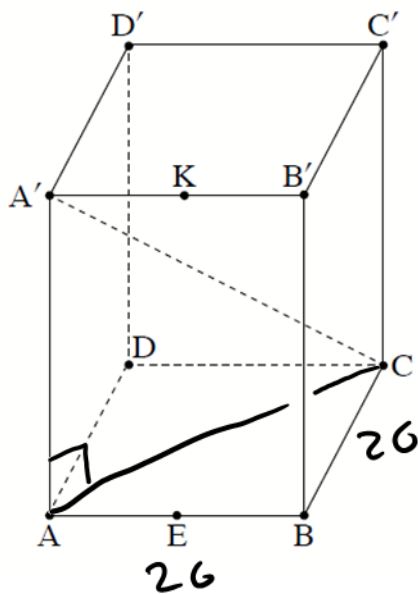
ב. מצאו את שטח הפנים של התיבה.

הנקודה E היא אמצע המקצוע AB והנקודה K היא אמצע המקצוע $A'B'$.

ג. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש $A'AC$ משטח המשולש KEC .

ד. חשבו את הזווית שבין KC ובין הבסיס $ABCD$.

פתרון:



א. נקודי אלכסון AC בקסים,
ונתבונן במשולש ABC .

משפט פיתגורס:

$$AC^2 = 26^2 + 26^2 = 1352$$

$$AC = 26\sqrt{2}$$

הנלית בין אלכסון AC לבסיס

היא 42° , לכן נתבונן

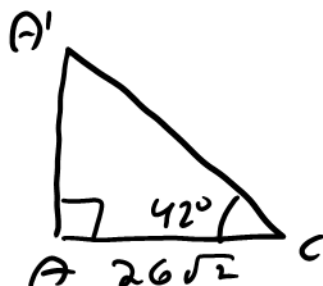
במשולש $AA'C$:

$$\tan 42^\circ = \frac{AA'}{AC}$$

$$AA' = 26\sqrt{2} \cdot \tan 42^\circ$$

$$AA' = 33.107$$

נעזרתי בתיקון





ב. שטח הפנים של תיבה הוא סכום שטחי הפאות והבסיסים של התיבה.

שטח הבסיסים:

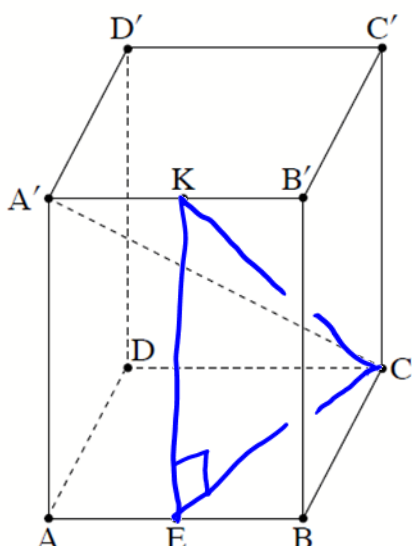
$$2 \cdot 26^2 = 1,352$$

שטח הפאות:

$$4 \cdot 26 \cdot 33.707 = 3,443.128$$

סך, שטח הפנים הכולל:

$$1,352 + 3,443.128 = \boxed{4,795.128}$$



ב. למשלש $\triangle A'AC$ - $\triangle KEC$

יש זווית זוויה, משום

שמרחק $\triangle A'AC$ הוא זוויה.
מכאן, שיחס השטחים של המשולש
שווה ליחס הבסיסים שלהם:

$$\frac{S_{A'AC}}{S_{KEC}} = \frac{\frac{AC \cdot AA'}{2}}{\frac{EC \cdot KE}{2}} = \frac{AC}{EC}$$

אם AC הישקנו בסעיף א'. נחשב EC .

נתבונן במשולש $\triangle BCE$:

$$BE = \frac{1}{2} AB = 13$$

משפט פיתגורס:

$$EC^2 = 26^2 + 13^2 = 845/5$$

$$EC = 13 \cdot \sqrt{5}$$



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



$$\frac{S_{\Delta AC}}{S_{\Delta EC}} = \frac{20\sqrt{2}}{13\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \boxed{1.265}$$

משוקד: שטח משולש AC עזבול פי $\boxed{1.265}$

שטח משולש EC.



3. הזאת המקודש (היא) 1/5
KCE. נתבונן במשולש KCE:

$$\tan \angle KCE = \frac{KE}{EC} = \frac{33.107}{13\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\angle KCE = 48.716^\circ} \quad \text{ונהב}$$



3. נתונה הפונקצייה $f(x) = ax + \cos(2x)$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

a הוא פרמטר.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ הוא -1.

א. מצאו את הערך של a.

הציבו $a = 1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ב-ד.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

דרך נקודת המינימום הפנימית של הפונקצייה $f(x)$ העבירו אנך לציר ה-x.

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי האנך,

על ידי ציר ה-x ועל ידי ציר ה-y.

פתרון:

א. נתון: $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$ נגזור את הפונקציה: $f(x) = ax + \cos(2x)$
 $f'(x) = a - 2\sin(2x)$

נציב $x = \frac{\pi}{4}$ ונשווה פשוט הנתיב $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$

$$a - 2 \cdot \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$a - 2 = -1$$

$$\boxed{a = 1}$$

נרשום מחזר את הפונקציה: $f(x) = x + \cos(2x)$

ב. נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה:

$$f(0) = 0 + \cos(0) = 1 \longrightarrow (0, 1)$$

$$f(\pi) = \pi + \cos(2\pi) = \pi + 1 = 4.14 \longrightarrow (\pi, \pi + 1) = (3.14, 4.14)$$



המטק סעיף ב:

נתן קיצון בתיאור נשואה נגזרת פאפוס:

$$f(x) = x + \cos(2x)$$

$$f'(x) = 1 - 2\sin(2x)$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 1 - 2\sin(2x)$$

$$2\sin(2x) = 1$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi k$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + \pi k$$

$$2x = \pi - \frac{1}{6}\pi + 2\pi k$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + \pi k$$

ספר ערכים של א נקבע בתחום ההגדרה את הפתרונות:

$$x_1 = \frac{1}{12}\pi$$

$$x_2 = \frac{5}{12}\pi$$

נציב בסוגן פהבסל שיחור' ל הנל:

$$f\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \frac{1}{12}\pi + \cos\left(2 \cdot \frac{1}{12}\pi\right) = \frac{1}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.128 \longrightarrow \left(\frac{1}{12}\pi, 1.128\right)$$

$$f\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{5}{12}\pi + \cos\left(2 \cdot \frac{5}{12}\pi\right) = \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.443 \longrightarrow \left(\frac{5}{12}\pi, 0.443\right)$$

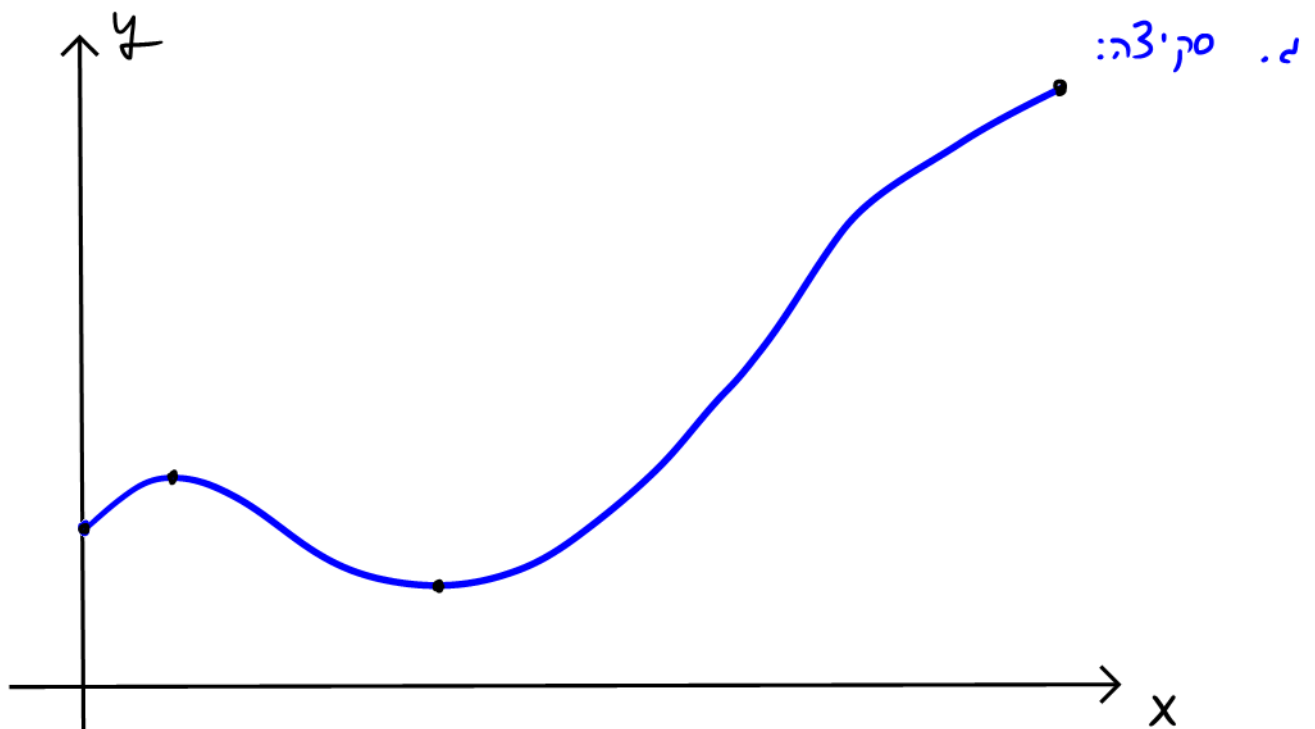


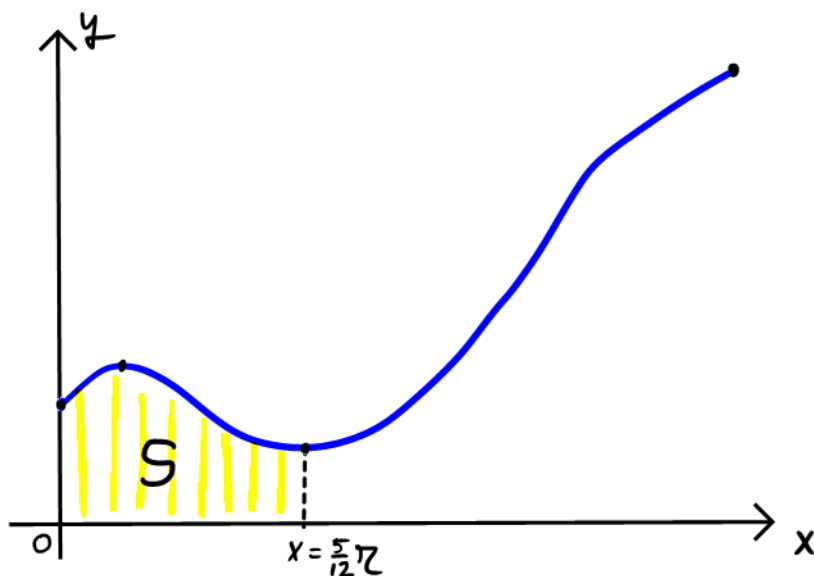
המשק סעיף ב. נציב ערכי ביניים הנגזרת לבדיקת תחומי עלייה וירידה ולסייוע נק' הקיצון:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{6\pi}{2}$	π
$f'(x)$	///	+	0	-	0	+	///
$f(x)$	min	↗	max	↘	min	↗	max

ניכס תוצאות:

$(0,1)$ min , $(\frac{\pi}{2}, 1.128)$ max , $(\frac{5\pi}{2}, 0.443)$ min , $(\pi, 4.14)$ max





3. נחשב בעזרת אינטגרל :PION

$$S = \int_0^{\frac{5\pi}{12}} f(x) dx = \int_0^{\frac{5\pi}{12}} (x + \cos(2x)) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{5\pi}{12}} =$$

$$\left(\frac{\left(\frac{5\pi}{12}\right)^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{12}\right) \right) - (0) = 1.107$$

1.107

כפומר הטלח המתאור הוא





4. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + a}$, a הוא פרמטר.

לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה היא $x = 2$.

א. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 4$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ב-ד.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = -f(x) + e^9$ שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ד. כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקצייה $h(x)$ עם ציר ה- x ? נמקו את תשובתכם.

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + a}$$

פתרון:

א. אסימפטוטה אנכית ב $x=2$

כפומר: הביטוי שבמכנה מתאפס ב $x=2$

$$2^2 - 4 \cdot 2 + a = 0$$

נציב ונשווה פאפס:

$$a = 4$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + 4} = \frac{e^{2x}}{(x-2)^2}$$

נרשום מחצול את הפונקציה:

ב. (1) תחום ההגדרה $x \neq 2$

(2) נק' חיתוך עם ציר y , נציב $x=0$

$$f(0) = \frac{e^0}{0^2 - 0 + 4} = \frac{1}{4} \rightarrow (0, \frac{1}{4})$$



המשק מסוג ב:

למצוא נק' חיתוך עם ציר x נשווה את הפונק' לאפס:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + 4} = 0 \quad \text{כפל במ"מ} \quad \cdot (x^2 - 4x + 4) \neq 0 \quad \text{ת.ה.}$$

$$e^{2x} = 0$$

אין פתרון למשוואה

אין נק' חיתוך עם ציר x

(3) נמצא את הפונקציה:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + 4}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2 - 4x + 4) - (2x - 4)e^{2x}}{(x^2 - 4x + 4)^2} = \frac{[2x^2 - 8x + 8 - 2x + 4]e^{2x}}{(x^2 - 4x + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x^2 - 10x + 12)e^{2x}}{(x^2 - 4x + 4)^2} = \frac{2(x^2 - 5x + 6)e^{2x}}{(x^2 - 4x + 4)^2}$$



המטק סעיף ב:

נשווה נגזרת לאפס ונחלץ שיעורי x בהן קיצון:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2(x^2 - 5x + 6)e^{2x}}{(x^2 - 4x + 4)^2} = 0 \quad / \quad \frac{(x^2 - 4x + 4)^2}{2 \cdot e^{2x}} \neq 0 \text{ תה}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

נציב במסחר הארשיט ונקבל:

$$x_1 = 3$$

$$\cancel{x_2 = 2} \text{ נפסל עקב תה}$$

נציב בפינקציה פקבל שיעור הג בהן הקיצון:

$$f(3) = \frac{e^{2 \cdot 3}}{3^2 - 4 \cdot 3 + 4} = \frac{e^6}{1} = e^6 = 403.4 \rightarrow (3, e^6) = (3, 403.4)$$



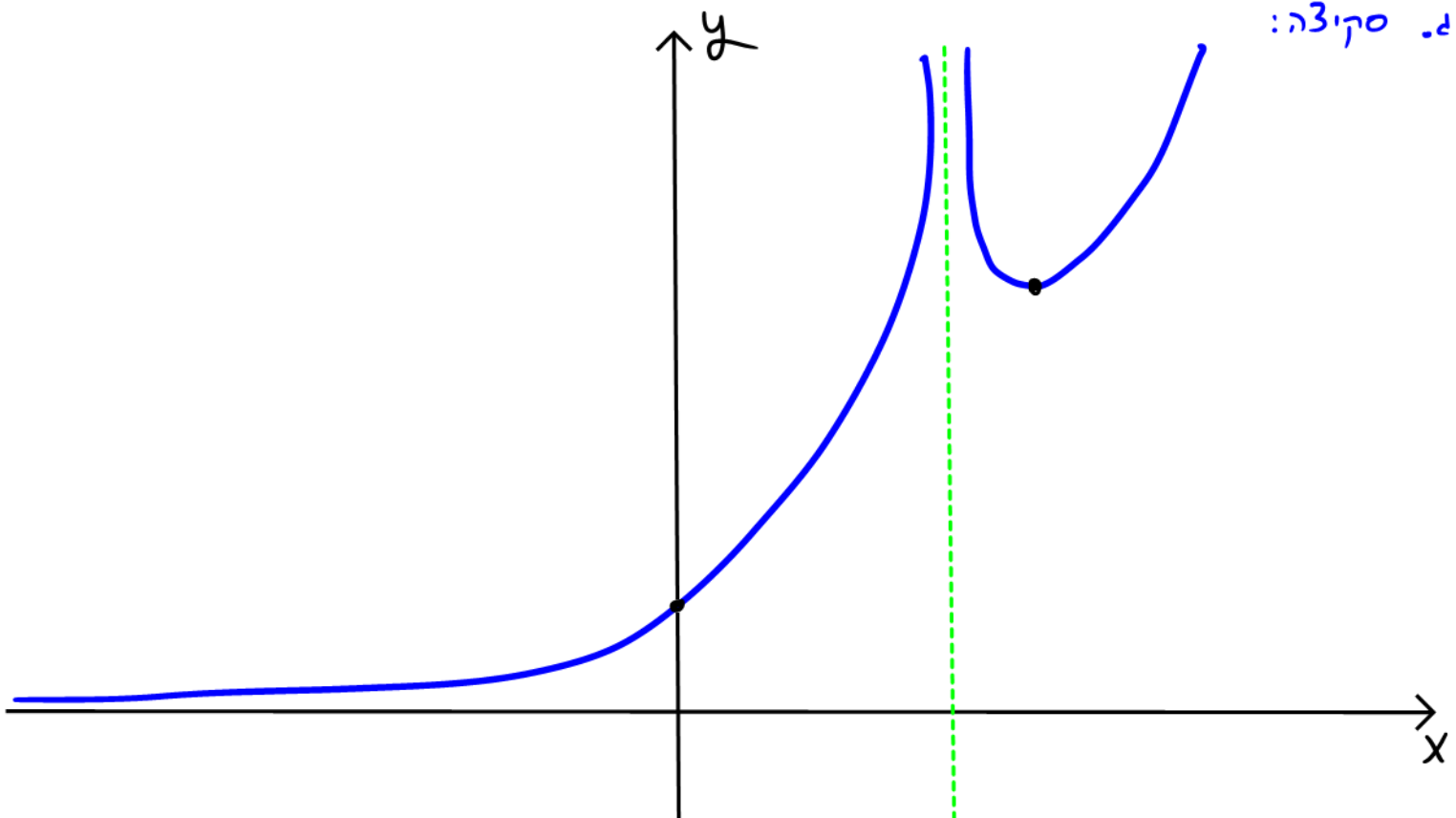
המשק סעיף ב. נציב ערכי ביניים הנגזרת לבדיקת תחומי עלייה וירידה ולסיווג נק' הקיצון:

x	0	2	2.5	3	4
$f'(x)$	+	/	-	0	+
$f(x)$	↗	/	↘	min	↗

$\min (3, e^6)$

דעונו

א. סקיצה:

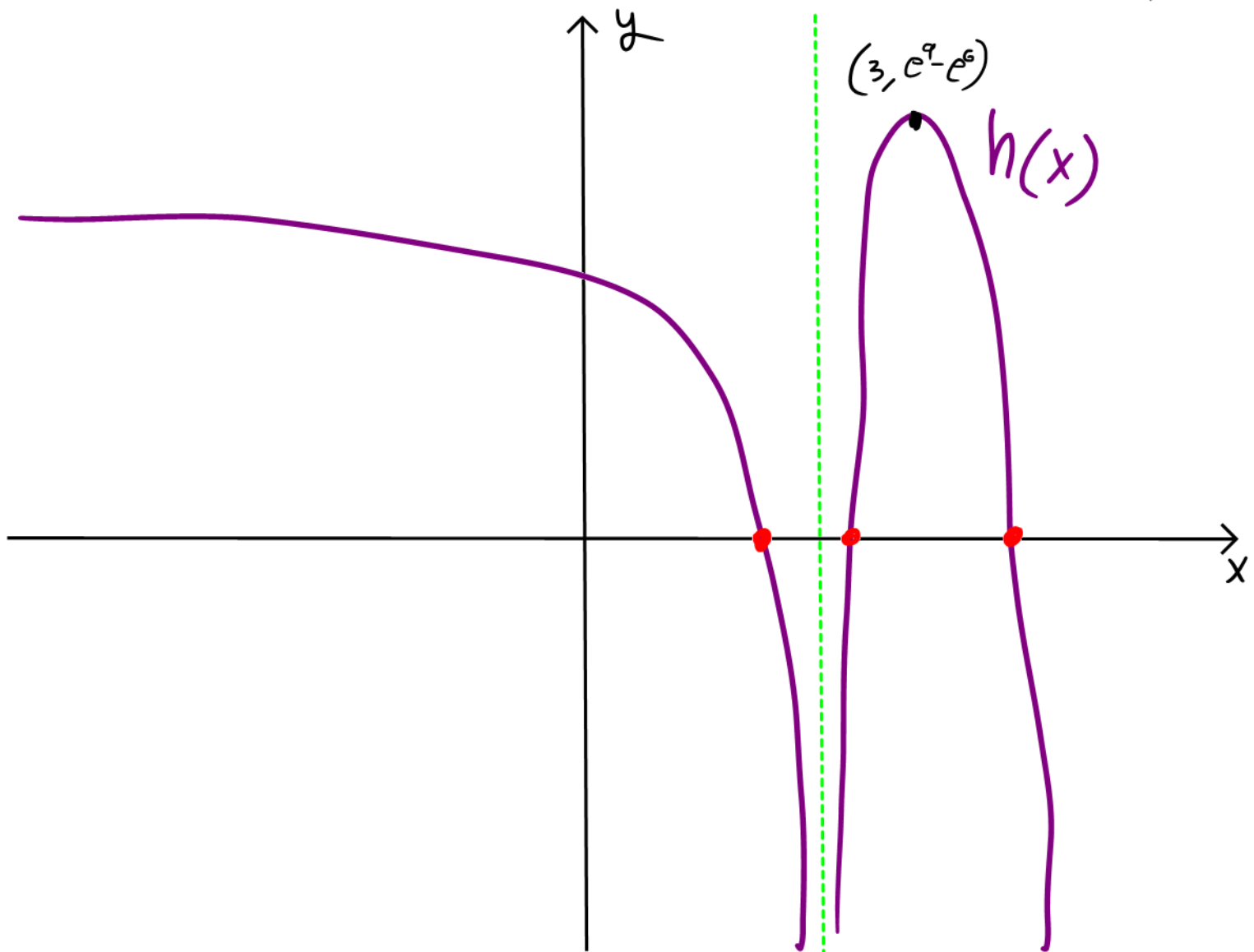




3. כפל $f(x)$ ב (-1) ובצד שיקוף סביב ציר ה x ← נקבל נק' $(3, -e^3)$ והוספת e^3 יבצר הצגה מעלה של כל הנק' כולל נק' המקסימום אצל $x=3$ ציר x , כך נקבל מימין פאסימטולה 2 נק' חיתוך עם ציר x ונקבל משמאל פאסימטולה נק' חיתוך נוספת כיוון שכאשר x מושג ערכים אינסוף הפונק' שואבת e^3 החזרי ואילו כל x שואף ל 3 הפונק' שואבת ערכים אינסוף השלישי וביניהם תהיה נק' חיתוך.

כדומה: נקבל 3 נק' חיתוך

ניתן פראור בסף 3:





5. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות בתחום $x > 0$.

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת מינימום אחת בלבד ונקודת מקסימום אחת בלבד.

נתון כי נקודת המינימום נמצאת מימין לנקודת המקסימום.

א. אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

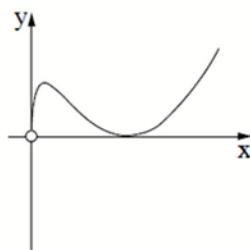
נתון כי $f(x) = 4x \cdot (\ln x)^2$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

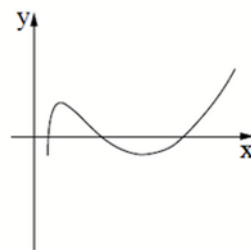
(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. קבעו איזה מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

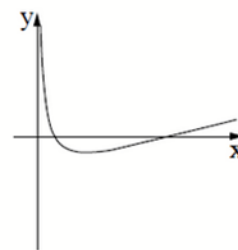
ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



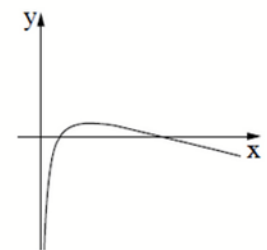
IV



III



II



I

פתרון:

א. נקודת המינימום נמצא - מימין, לנקודת המקסימום
וזכר הפונקציה מתחילה בתחום $x > 0$, עובר
לתחום ירידה, וממשיכה בעוצמה של
עליה.

מכאן, שהנגזרת מתחילה מתחום חיובי
עוברת לתחום שלילי, וממשיכה לעוצמה של
של חיובי. הגרף שמראה תחום חיובי כזה
הוא גרף II.

גרף II

תשובה:





$$f(x) = 4x \cdot (\ln x)^2 \quad .ק.$$

(1) אילו חיתוך עם ציר כי תחום הגדרה $0 < x$.

ציר x:

$$4x \cdot (\ln x)^2 = 0$$

$\swarrow$ $\searrow$
 $x=0$ $\ln x = 0$
 $\emptyset$ $x = e^0 = 1$

תשובה: $\boxed{(1,0)}$

$$f'(x) = 4 \cdot (\ln x)^2 + 4x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad (2) \text{ גזירה:}$$

$$f'(x) = 4(\ln x)^2 + 8 \ln x$$

גזירה נוספת:

$$4(\ln x)^2 + 8 \ln x = 0$$

$$4 \ln x (\ln x + 2) = 0$$

$\swarrow$
 $\ln x = 0$
 $x = 1$

$\searrow$
 $\ln x = -2$
 $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = 0.135$

שיעור ג ש הנדון:

$$f(1) = 0$$

$$f(e^{-2}) = 4 \cdot e^{-2} \cdot (\ln e^{-2})^2 = 4 \cdot \frac{1}{e^2} \cdot (-2)^2 = \frac{16}{e^2} = 2.165$$



הנדאצור ב' : $(1, 0)$ $(\frac{1}{e^2}, \frac{16}{e^2})$
 אפי הנתון בתחילת השאלה $\frac{1}{e^2} < 1$

ואכן $(1, 0)$ מינימום
 $(\frac{1}{e^2}, \frac{16}{e^2})$ מקסימום

ג. נקודת המינימום של הפונקציה נמצאת ב- $(1, 0)$
 ציכא. זה מתקיים בקבוצה $\overline{D}$.

תשובה: $\overline{D}$ וכן

ד. הנגזרת חמכת לר לר x ב- $x=1$ $x=e^{-2}$

והיא עוקרת מתחת לר לר x . ואכן:

$$S = \int_{e^{-2}}^1 f'(x) dx = [-f(x)]_{e^{-2}}^1 =$$

$$S = [-f(1)] - [-f(e^{-2})] =$$

$$S = [-0] - [-\frac{16}{e^2}] = \frac{16}{e^2} = 2.165$$

תשובה: הערך הוא $\frac{16}{e^2} = 2.165$