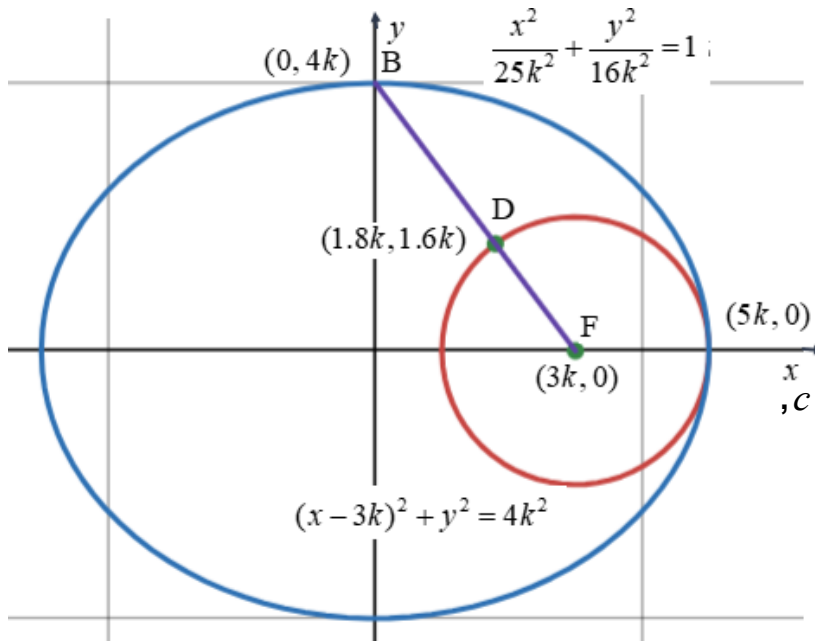




פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשפ"ו, 2025, שאלון 35572 מועד ב:
תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת הקובץ





א. נתונה אליפסה שמשוואתה היא

$$\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1, \quad k > 0 \text{ פרמטר.}$$

הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה.

$$\text{באליפסה מתקיים } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\text{ולכן: } c = \sqrt{25k^2 - 16k^2} = \sqrt{9k^2} = 3k \leftarrow k > 0$$

והמוקד הימני של האליפסה הוא F(3k, 0).

נתון מעגל שמרכזו במוקד הימני של האליפסה,

כלומר בנקודה F(3k, 0),

שעובר בנקודת החיתוך של האליפסה

עם החלק החיובי של ציר ה-x (הקודקוד הימני), כלומר ב- (5k, 0).

הרדיוס מנקודה זו למרכז המעגל מונח על ציר ה-x, ולכן: R = 5k - 3k = 2k.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-3k)^2 + y^2 = 4k^2$.

ב. הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה-y (הקודקוד העליון),

כלומר ב- B(0, 4k).

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

(1) נמצא את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF.

$$BF = \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 5k$$

$$DF = R = 2k$$

$$BF : DF = 5 : 2 \rightarrow \boxed{BD : DF = 3 : 2}$$

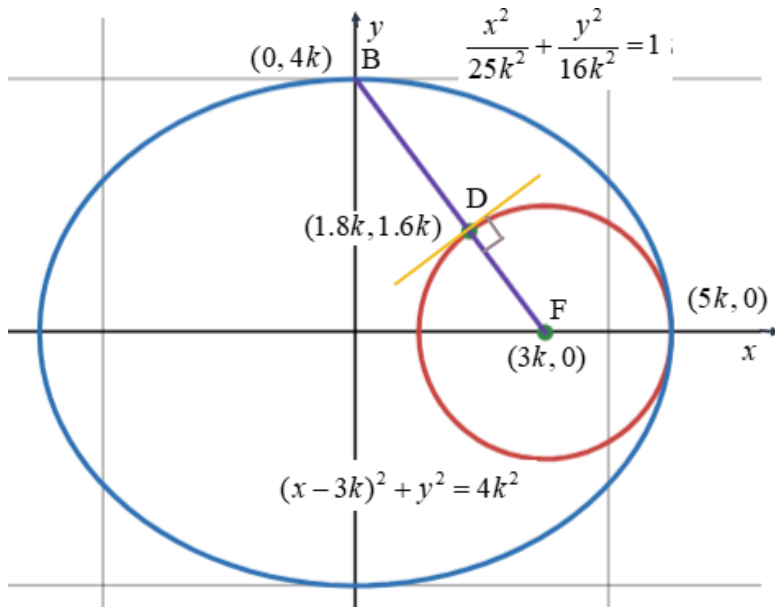
תשובה: BD : DF = 3 : 2.

(2) נמצא את שיעורי הנקודה D באמצעות הנוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון.

$$D\left(\frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3k}{5}, \frac{2 \cdot 4k + 3 \cdot 0}{5}\right) \rightarrow \boxed{D(1.8k, 1.6k)}$$

תשובה: D(1.8k, 1.6k).

ג. נמצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה $D(1.8k, 1.6k)$, המאונך לרדיוס DF.



$$m_{DF} = m_{BF} = \frac{4k-0}{0-3k} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{\text{mashik}} \cdot m_{BF} = -1 \rightarrow m_{\text{mashik}} = +\frac{3}{4}$$

$$y - 1.6k = \frac{3}{4}(x - 1.8k)$$

$$y - 1.6k = \frac{3}{4}x - 1.35k$$

$$\boxed{y = \frac{3}{4}x + \frac{k}{4}}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y = \frac{3}{4}x + \frac{k}{4}$, או בהצגה הכללית $-3x + 4y - k = 0$.

ד. בונים ריבוע שאורך הצלע שלו 15, כלומר זה המרחק בין הצלעות הנגדיות של הריבוע.

הנקודה $B(0, 4k)$ נמצאת בתוך הריבוע, כלומר הצלע הנגדית, המקבילה למשיק, נמצאת מעל המשיק.

נשתמש בנוסחה למרחק בין ישרים מקבילים, כאשר המקדם של y חיובי במשוואה $-3x + 4y - k = 0$.

$$15 = \frac{-k - c}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}$$

$$75 = -k - c$$

$$c = -k - 75$$

$$\boxed{-3x + 4y - k - 75 = 0}$$

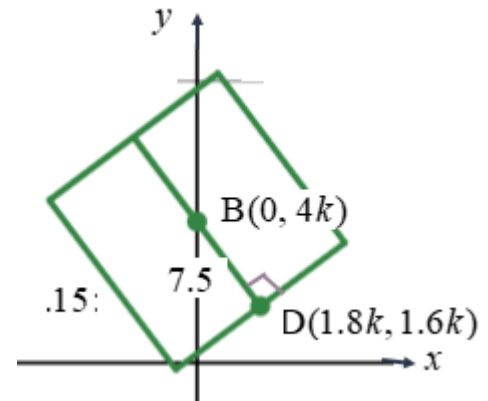
תשובה: משוואת הישר, שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק, היא $-3x + 4y - k - 75 = 0$,

או בהצגה המפורשת $y = \frac{3}{4}x + \frac{k+75}{4}$.

ה. הנקודה $B(0, 4k)$, מפגש אלכסוני הריבוע, נמצאת על מקביל אמצעי של שתי הצלעות של הריבוע.

כיוון ש- BD מאונך למשיק (שצלע של הריבוע מונחת עליו) בנקודה $D(1.8k, 1.6k)$,

הרי שגם הנקודה D נמצאת על אחת מצלעות הריבוע, והמרחק BD שווה ל- $15:2 = 7.5$.



$$7.5 = \sqrt{(1.8k - 0)^2 + (1.6k - 4k)^2}$$

$$56.25 = 3.24k^2 + 5.76k^2$$

$$56.25 = 9k^2$$

$$6.25 = k^2$$

$$\boxed{k = 2.5} \leftarrow k > 0$$

תשובה: $k = 2.5$.

א. נתונה מנסרה ישרה $AOBA'O'B'$, שבסיסה AOB הוא משולש ישר זווית ($\angle AOB = 90^\circ$).

$$\overrightarrow{OA} = \underline{u} \quad \overrightarrow{OB} = \underline{v} \quad \overrightarrow{OO'} = \underline{w}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

המנסרה ישרה, ולכן $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$ וגם $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.

$$\angle AOB = 90^\circ \quad \text{ולכן} \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$$

הנקודה K היא אמצע היתר AB במשולש AOB .

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'O'} + \overrightarrow{O'E})$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} (\underline{w} - \underline{u} + \frac{1}{3} \underline{v} - \frac{1}{3} \underline{w})$$

$$\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{w}$$

$$\overrightarrow{O'E} = \frac{1}{3} \overrightarrow{O'B}$$

$$\overrightarrow{O'E} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{B'B})$$

$$\overrightarrow{O'E} = \frac{1}{3} \underline{v} - \frac{1}{3} \underline{w}$$

(1) נביע את $\overrightarrow{O'N}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{O'N} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{O'N} = \underline{u} - \underline{w} - \frac{3}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{w}$$

$$\overrightarrow{O'N} = \frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} - \frac{1}{2} \underline{w}$$

$$\text{תשובה: } \overrightarrow{O'N} = \frac{1}{4} \underline{u} + \frac{1}{4} \underline{v} - \frac{1}{2} \underline{w}$$

(2) נראה כי הנקודות O' , N ו- K נמצאות על ישר אחד.

נזכור כי הנקודה K היא אמצע היתר AB במשולש AOB

$$\overrightarrow{O'K} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OK}$$

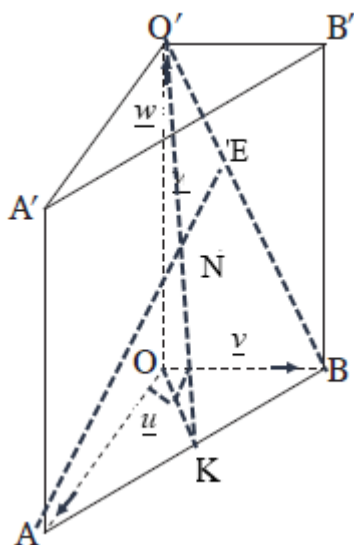
$$\overrightarrow{O'K} = -\underline{w} + \frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v}$$

$$\overrightarrow{O'K} = \frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v} - \underline{w}$$

$$\overrightarrow{O'N} = \frac{1}{2} \overrightarrow{O'K}$$

לכן, הנקודות O' , N ו- K נמצאות על ישר אחד, כאשר $O'K:O'N=2:1$.

תשובה: הוכחנו כי הנקודות O' , N ו- K נמצאות על ישר אחד, $O'K:O'N=2:1$.



ב. נתון: $O(0, 0, 0)$ ראשית הצירים, $E(0, 1, 6)$.

$A(4, 0, 0)$ על הקרן החיובית של ציר ה- x .

$B(0, b, 0)$ על הקרן החיובית של ציר ה- y .

$O'(0, 0, o)$ על הקרן החיובית של ציר ה- z .

משוואת המישור AOB היא $z=0$ ולכן משוואת הבסיס העליון של המנסרה היא $z=o$

נמצא את שיעורי הנקודות N ו-B באמצעות הנוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AE} \text{ , ולכן } AN : NE = 3 : 1$$

$$N\left(\frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 0}{4}, \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{4}, \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 6}{4}\right) \rightarrow \boxed{N(1, 0.75, 4.5)}$$

$O'K : O'N = 2 : 1$, כלומר N היא אמצע OK.

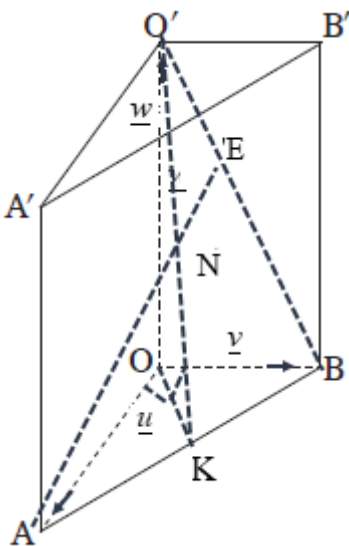
$$4.5 = \frac{0 + o}{2} \rightarrow o = 9 \rightarrow \boxed{O'(0, 0, 9)}$$

ומשוואת הבסיס העליון של המנסרה היא $z=9$.

$$\overrightarrow{O'E} = \frac{1}{3} \overrightarrow{O'B} \text{ , ולכן } O'E : EB = 1 : 2$$

$$1 = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot b}{3} \rightarrow b = 3 \rightarrow \boxed{B(0, 3, 0)}$$

תשובה: $N(1, 0.75, 4.5)$, $B(0, 3, 0)$.



ג. נמצא את משוואת המישור $A'KB'$, שהיא למעשה משוואת הפאה $A'B'BA$.

כיוון ש- $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \underline{w}$ הרי שכל הפאה מקבילה לציר ה- z ו- $c=0$ במשוואת המישור המבוקשת.

$A'(4, 0, 9)$, $B'(0, 3, 9)$ כי הן על המישור $z=9$, כאשר $A'A$ ו- $B'B$ מקבילים לציר ה- z .

$$\overrightarrow{A'B'} = \underline{B'} - \underline{A'} = \underline{x} = (-4, 3, 0)$$

$$(a, b, c) \cdot (-4, 3, 0) = 0 \rightarrow -4a + 3b = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow b = 4$$

משוואת המישור היא: $3x + 4y + d = 0$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + d = 0 \rightarrow d = -12 : B(0, 3, 0) \text{ נציב}$$

תשובה: משוואת המישור $A'KB'$ היא: $3x + 4y - 12 = 0$.

בגרות פה יולי 25 מועד קיץ ב שאלון 35572

א. נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = 2 + 3i$ ו- z_2

המקיימים: $z_1 \cdot z_2 = -19 + 4i$.

$$(2 + 3i) \cdot z_2 = -19 + 4i$$

$$z_2 = \frac{-19 + 4i}{2 + 3i}$$

$$z_2 = \frac{(-19 + 4i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)}$$

$$z_2 = \frac{-38 + 57i + 8i + 12}{2^2 + 3^2}$$

$$z_2 = \frac{-26 + 65i}{13}$$

$$\boxed{z_2 = -2 + 5i}$$

תשובה: $z_2 = -2 + 5i$.

ב. w הוא מספר מרוכב.

נפתור את המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$

$$w^3 = 2 + 3i - 2 + 5i$$

$$w^3 = 8i = 8 \operatorname{cis} 90^\circ$$

$$w_k = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3}$$

$$w_0 = 2 \operatorname{cis} 30^\circ = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2 \operatorname{cis} 150^\circ = -\sqrt{3} + i$$

$$w_2 = 2 \operatorname{cis} 270^\circ = -2i$$

תשובה: $w_2 = 2 \operatorname{cis} 270^\circ = -2i$, $w_1 = 2 \operatorname{cis} 150^\circ = -\sqrt{3} + i$, $w_0 = 2 \operatorname{cis} 30^\circ = \sqrt{3} + i$.

ג. נתון מספר מרוכב $z = 2cis \theta$, $0 \leq \theta < 360^\circ$.

נתון כי המספרים z ו- z^3 נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

נמצא את ארבע האפשרויות של המספר z .

$$z = 2cis \theta \text{ ולכן } z^3 = 8cis 3\theta$$

על-מנת שהפתרונות יהיו על ישר אחד שעובר בראשית הצירים,

נדרש שהארגומנט יהיה שווה או גדול ב- 180° .

$$cis \theta = cis (180^\circ + 3\theta)$$

$$\theta = 180^\circ + 3\theta + 360^\circ k$$

$$-2\theta = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$\theta = -90^\circ + 180^\circ k \quad (0 \leq \theta < 360^\circ)$$

$$\theta = 90^\circ \rightarrow z = 2i$$

$$\theta = 270^\circ \rightarrow z = -2i$$

$$cis \theta = cis 3\theta$$

$$\theta = 3\theta + 360^\circ k$$

$$-2\theta = 360^\circ k$$

$$\theta = 180^\circ k \quad (0 \leq \theta < 360^\circ)$$

$$\theta = 0^\circ \rightarrow z = 2$$

$$\theta = 180^\circ \rightarrow z = -2$$

תשובה: ארבע האפשרויות של המספר z הן: $z = 2$, $z = -2$, $z = 2i$, $z = -2i$.

ד. פתרונות המשוואה שמצאנו בסעיף ב

$$(w_2 = 2 cis 270^\circ = -2i, w_1 = 2 cis 150^\circ = -\sqrt{3} + i, w_0 = 2 cis 30^\circ = \sqrt{3} + i)$$

וארבעת המספרים שמצאנו בסעיף ג ($z = -2i$, $z = 2i$, $z = -2$, $z = 2$)

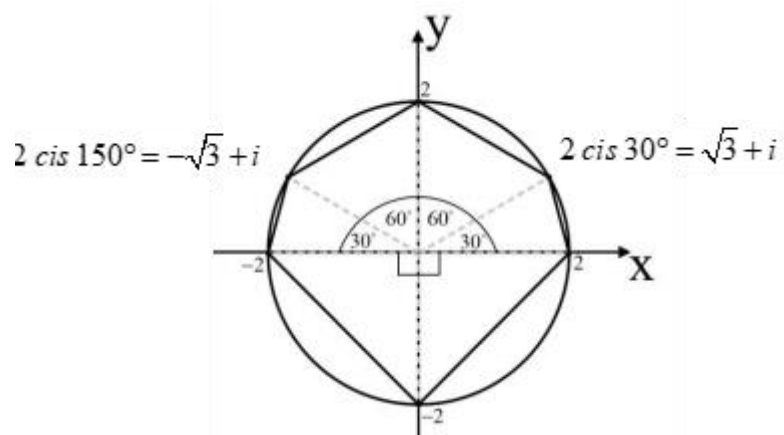
מייצגים את כל הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

(1) נסרטט את המצולע במערכת צירים.

המספר $-2i$ התקבל פעמיים, ולכן יש ששה קודקודים והמצולע הוא משושה.

המצולע חסום במעגל קנוני שרדיוסו הוא 2 ,

ולכן כדאי לסרטט גם את המעגל כך שיהיה נוח לחשב בתת-סעיף (2) את שטח המצולע.



תשובה: הסרטוט מעל.

$$(2) \text{ שטח המשושה הוא: } 2 \cdot \frac{2^2 \sin 30^\circ}{2} + 2 \cdot \frac{2^2 \sin 60^\circ}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} = 6 + 2\sqrt{3}$$

תשובה: השטח של המצולע הוא $6 + 2\sqrt{3}$.

ה. נתון מספר מרוכב $3 \operatorname{cis} \theta$, $0 \leq \theta < 360^\circ$,

מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה, כך שנוצר מצולע חדש. לאחר ההכפלה פי 3 המצולע יהיה חסום במעגל שרדיוסו גדול פי 3 (והוא 6). שטח כל אחד מהמשולשים שחישבנו יגדל פי $3^2 = 9$, וכך גם שטח המצולע. אפשר להבין זאת על פי נוסחת השטחים שהשתמשנו בתת-סעיף ד(2), או כי מתקבלים משולשים דומים (משפט דמיון צלע, זווית, צלע), כאשר יחס הדמיון הוא 3:1 ויחס השטחים הוא 9:1. לאחר ההכפלה פי $3 \operatorname{cis} \theta$ המצולע רק יסתובב בזווית θ נגד כיוון השעון, אולם שטחו לא ישתנה. תשובה: שטח המצולע החדש גדול פי 9 משטח המצולע שמצאנו בסעיף ד.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$ המוגדרת לכל x , כאשר b הוא פרמטר.

(1) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

כאשר $x \rightarrow +\infty$ אז $e^x \rightarrow +\infty$ ו- $y = 1 + b$ אסימפטוטה אופקית לימין.

כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $e^x \rightarrow 0$ ו- $y = -1 + b$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.

תשובה: $(x \rightarrow +\infty) y = 1 + b$ אסימפטוטה אנכית לציר y (אסימפטוטה אופקית לימין).

$(x \rightarrow -\infty) y = -1 + b$ אסימפטוטה אנכית לציר y (אסימפטוטה אופקית לשמאל).

(2) נמצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y , בה מתקיים $x = 0$.

$$f(0) = \frac{e^0 + 0}{e^0 - 0} + b = 1 + b \rightarrow (0, 1 + b)$$

תשובה: $(0, 1 + b)$.

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגה.

$$f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x + x)}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x + e^x - x - (e^{2x} + xe^x - e^x - x)}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x + e^x - x - e^{2x} - xe^x + e^x + x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2xe^x + 2e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$0 = 2e^x(-x + 1)$$

$$x = 1 \rightarrow \left(1, \frac{e+1}{e-1} + b\right)$$

סימני הנגזרת נקבעים רק על פי ערכו של $(-x + 1)$, קו ישר העובר מחיוביות לשליליות,

ולכן $f(x)$ עוברת מעלייה לירידה, ומתקבלת נקודת מקסימום.

תשובה: $(1, \frac{e+1}{e-1} + b)$, מקסימום.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 1.5$.

$$1.5 = 1 + b \rightarrow b = 0.5 \quad \text{עבור } y = 1 + b \text{ נקבל:}$$

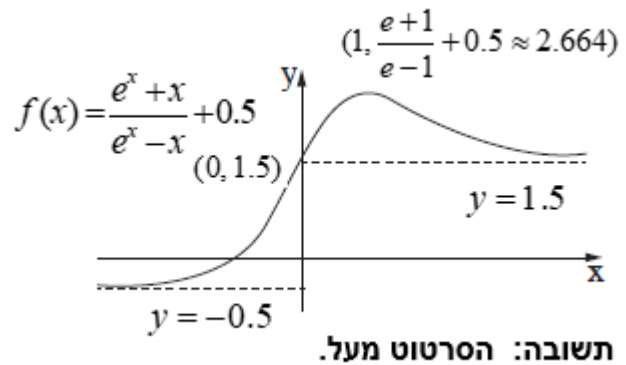
$$1.5 = -1 + b \rightarrow b = 2.5 \quad \text{עבור } y = -1 + b \text{ נקבל:}$$

$$\text{תשובה: } b = 2.5, b = 0.5.$$

ג. נציב את הערך הקטן של b , כלומר $b = 0.5$, ונקבל $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + 0.5$.

$(0, 1.5)$ נקודת חיתוך עם ציר y , $(1, \frac{e+1}{e-1} + 0.5 \approx 2.664)$, מקסימום.

$y = 1.5$ ($x \rightarrow +\infty$), $y = -0.5$ ($x \rightarrow -\infty$) אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y .



ד. ידוע כי $(0, 1.5)$ היא אחת משתי נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$, ו- $f'(x)$ מוגדרת לכל x .

(1) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$,

$$f'(x) = \frac{2e^x(-x+1)}{(e^x - x)^2}$$

כאשר $x \rightarrow +\infty$ אז $e^x \rightarrow +\infty$ ו- $y = 0$ אסימפטוטה אופקית לימין.

כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $e^x \rightarrow 0$ ו- $y = 0$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.

אפשר גם להסביר ש- $y = 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) אסימפטוטה אופקית,

כיוון של- $f(x)$ יש אסימפטוטות אופקיות והשיפועים שואפים לאפס.

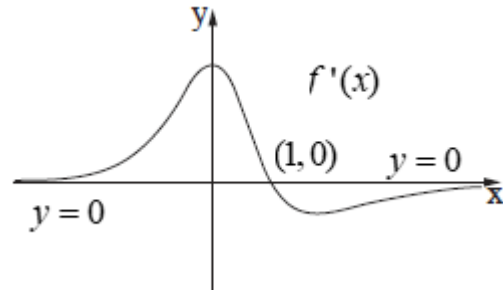
תשובה: $y = 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) אסימפטוטה אנכית לציר y .

(2) נסרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$

$$, f(x) \text{ מקסימום של } (1, \frac{e+1}{e-1} + 0.5 \approx 2.664)$$

ולכן $(1, 0)$ נקודת האפס של הנגזרת בה היא עוברת מחיוביות לשליליות.

ל- $f(x)$ שתי נקודות פיתול, ובהתאם לפונקציית הנגזרת שתי נקודות קיצון.



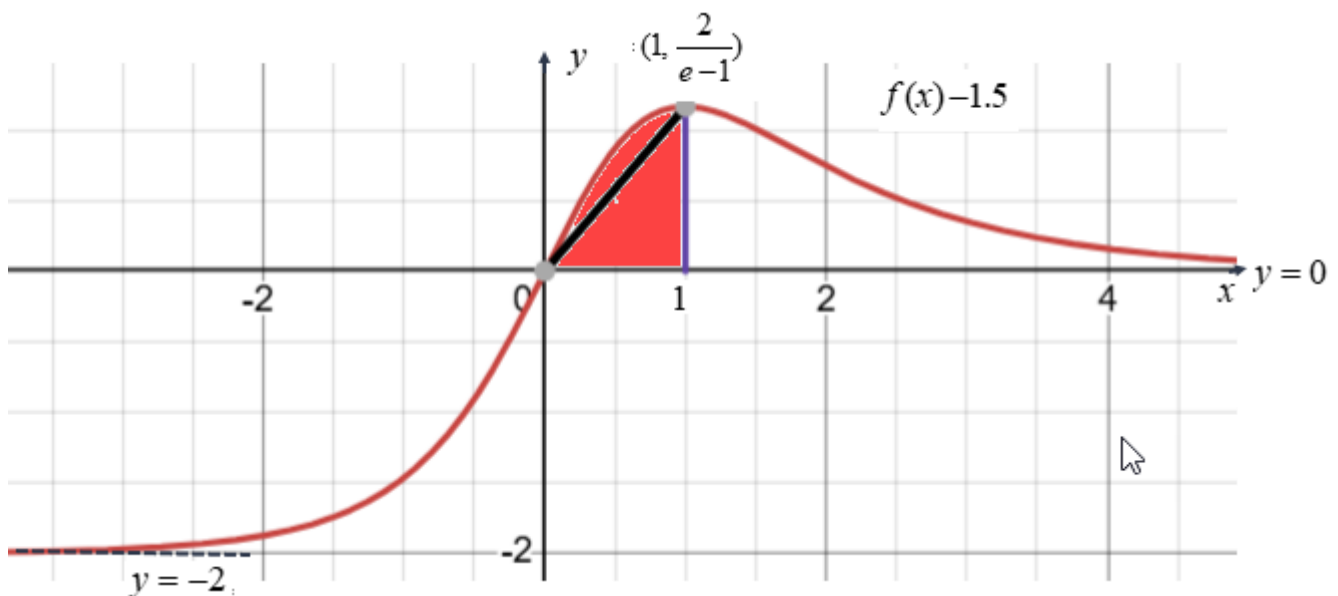
תשובה: הסרטוט מעל.

$$\text{ה. נבדוק האם הטענה } \int_0^1 (f(x) - 1.5) dx > \frac{1}{e-1} \text{ נכונה.}$$

הפונקציה $f(x) - 1.5$ היא הזזה אנכית 1.5 יחידות כלפי מטה של $f(x)$.

נקבל שהיא עוברת בראשית הצירים, נקודת המקסימום שלה היא $(1, \frac{2}{e-1}) = (1, \frac{e+1-e+1}{e-1}) = (1, \frac{e+1}{e-1} - 1)$.

ו- $y = 0$ ($x \rightarrow +\infty$), $y = -2$ ($x \rightarrow -\infty$) אסימפטוטות מאונכות לציר y .



השטח האדום מייצג את האינטגרל המסוים $\int_0^1 (f(x) - 1.5) dx$

$$\text{והוא גדול מהשטח של המשולש, ששטחו הוא } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

תשובה: הטענה נכונה.

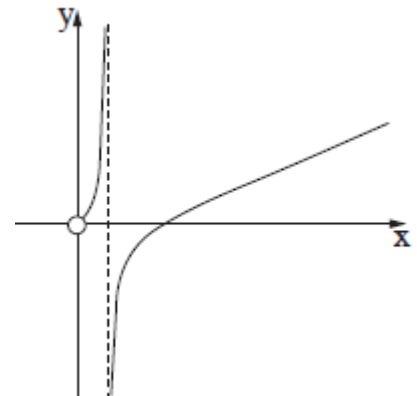
בגרות פה יולי 25 מועד קיץ ב שאלון 35572

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית חיובי, ולכן $x > 0$.

כמו כן מכנה שונה מאפס, לכן $1 + \ln x \neq 0 \rightarrow \ln x \neq -1 \rightarrow x \neq \frac{1}{e}$.

תשובה: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור $x > 0, x \neq \frac{1}{e}$.



(2) כאשר $x \rightarrow 0^+$, נציב $x = 0.00001$ ונקבל $f(0.00001) = 1.1 \cdot 10^{-5} \rightarrow 0$.

והגרף שואף לנקודה $(0, 0)$ ואין אסימפטוטה אנכית.

$x = \frac{1}{e}$ מאפס את המכנה ולא את המונה, והישר $x = \frac{1}{e}$ הוא אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x .

תשובה: $x = \frac{1}{e}$ הוא אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

(3) נמצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , בה מתקיים $y = 0$.

$$0 = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$$

$$0 = x \cdot \ln(x)$$

$$\cancel{x \neq 0} \leftarrow x > 0, x \neq \frac{1}{e}$$

$$\ln(x) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x הם $(1, 0)$.

ב. נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + x \cdot \frac{1}{x})(1 + \ln(x)) - x \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)^2 - \ln(x)}{(1 + \ln(x))^2}$$

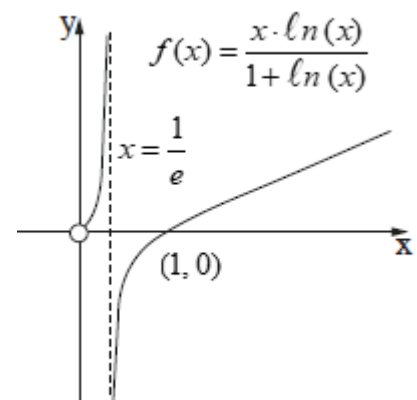
$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 + 2\ln(x) + 1 - \ln(x)}{(1 + \ln(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 + \ln(x) + 1}{(1 + \ln(x))^2}$$

הביטוי הריבועי $(\ln x)^2 + \ln(x) + 1$ חיובי לכל x , כי $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ ו- $a = 1 > 0$.

תשובה: עלייה: $x > \frac{1}{e}$, או $0 < x < \frac{1}{e}$, ירידה: אף x .

ג. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

נשים לב, שהמנה באגף ימין הופכית לזו של $f(x)$,

אולם מכיוון ו- $g(x)$ לא הוגדרה בצורה הבאה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$,

אזי ייתכנו x -ים שבהם $f(x)$ לא הייתה מוגדרת ו- $g(x)$ כן תהיה מוגדרת בהם, במקרה שלנו $x = \frac{1}{e}$.

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית חיובי, ולכן $x > 0$.

כמו כן מכנה שונה מאפס, לכן $x \neq 1 \rightarrow \ln x \neq 0$, וכמובן $x \neq 0$.

תשובה: הפונקציה $g(x)$ מוגדרת עבור $x > 0$, $x \neq 1$.

(2) כאשר $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow 0$, ולכן $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$ והישר $x = 0$ אסימפטוטה אנכית.

$x = 1$ מאפס את המכנה ולא את המכנה, והישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x .

כאשר $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, ולכן $\frac{1}{f(x)} \rightarrow +0^+$ והישר $y = 0$ אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x = 0$, $x = 1$ אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x של הפונקציה $g(x)$.

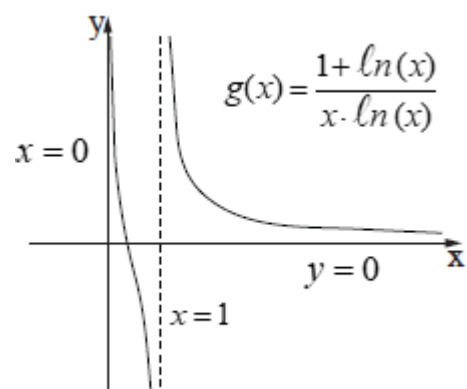
$y = 0$ אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נשים לב ש- $x = \frac{1}{e}$ בתחום ההגדרה של $g(x)$, מאפס את המונה ו- $(\frac{1}{e}, 0)$ נקודת אפס.

נשים גם שתחומי העלייה והירידה מתחלפים עבור $\frac{1}{f(x)}$

והפונקציה $g(x)$ תרד עבור $x > 1$ או $0 < x < 1$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ה. נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, $k > 1$ פרמטר.

(1) נחשב את האינטגרל המבוקש על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית, ונקבע מה הביטוי המתאים.

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\left[\ln |\ln(x)| + \ln |x| \right]_{e^k}^{e^{2k}} =$$

$$x = e^{2k} : \ln |\ln(e^{2k})| + \ln e^{2k} = \ln(2k) + 2k \leftarrow \ln |(2k)| = \ln(2k) \leftarrow k > 1$$

$$x = e^k : \ln |\ln(e^k)| + \ln e^k = \ln(k) + k \leftarrow \ln |(k)| = \ln(k) \leftarrow k > 1$$

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln(2k) + 2k - \ln(k) - k$$

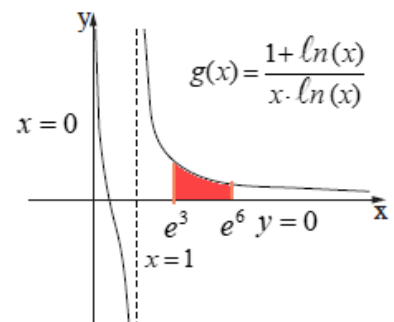
$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln \frac{2k}{k} + k$$

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln(2) + k$$

תשובה: הביטוי II. $\ln(2) + k$ שווה לערך של $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$.

(2) נחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x .

ועל ידי הישרים $x = e^3$ ו- $x = e^6$ (השטח הצבוע באדום, ללא פרופורציה על ציר ה- x).



נשים לב, על פי תת-סעיף (1) שעבור $k = 3$, הביטוי $\ln(2) + 3$ מחשב את השטח המבוקש.

$$\int_{e^3}^{e^6} \left(\frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)} \right) dx = \int_{e^3}^{e^6} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln(2) + 3$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $\ln(2) + 3$.