



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשפ"ו, 2025, שאלון 35572 מועד א:
תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת הקובץ



נתון מעגל I שמשוואתו היא $x^2 - 6x + y^2 + t = 0$, $t < 9$ פרמטר.

נסדר את משוואת המעגל, ונביע את רדיוס המעגל באמצעות t .

$$x^2 - 6x + y^2 + t = 0$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9-t$$

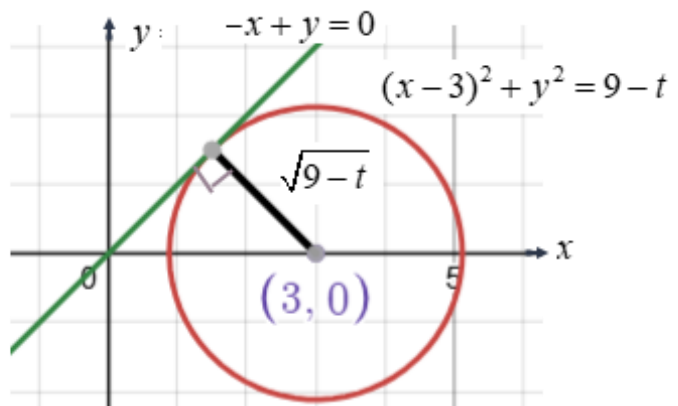
ולכן רדיוס המעגל הוא $\sqrt{9-t}$, כאשר $t < 9$.

תשובה: רדיוס המעגל הוא $\sqrt{9-t}$.

ב. מרכז המעגל הוא $(3, 0)$ ומונח על ציר ה- x .

הישר $y = x \rightarrow -x + y = 0$ משיק למעגל, עולה ועובר בראשית, ולכן מרכז המעגל נמצא מתחת לישר,

במרחק של $\sqrt{9-t}$ ממנו, כאורך הרדיוס.



$$\sqrt{9-t} = -\frac{-3+0}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\sqrt{9-t} \cdot \sqrt{2} = 3 \rightarrow \text{test}$$

$$2(9-t) = 9$$

$$9-t = 4.5$$

$$t = 4.5 \rightarrow \sqrt{9-4.5} \cdot \sqrt{2} \stackrel{?}{=} 3 \rightarrow 3 = 3 \text{ o.k.}$$

תשובה: $t = 4.5$.

ג. נציב $t = 4.5$ ונקבל שמשוואת המעגל היא $(x-3)^2 + y^2 = 4.5$.

הזיזו את מעגל I שמאלה, כך שהתקבל מעגל II שמרכזו בראשית הצירים O.

מכאן שההזזה היא 3 יחידות שמאלה והתקבל המעגל הקנוני $x^2 + y^2 = 4.5$.

A היא נקודה כלשהי על מעגל II, כך ש- $-1.5 \leq y_A \leq 1.5$.

דרך נקודה A מעבירים מיתר AB המאונך לציר ה- y.

נסמן P(s, t) נקודה על המיתר AB, כך שמתקיים $AB = 2 \cdot PO$.

נניח, מבלי להגביל את הכלליות שהנקודה A מימין לציר ה- y ולכן $x_A > 0$.

עקב הסימטריה של המעגל לצירים בכלל, ולציר ה- y בפרט, הרי ש- $AB = 2x_A$.

AB מאונך לציר ה- y, ולכן $y_B = y_A = t$ ובהתאם $x_A = \sqrt{4.5 - t^2}$ ו- $AB = 2\sqrt{4.5 - t^2}$.

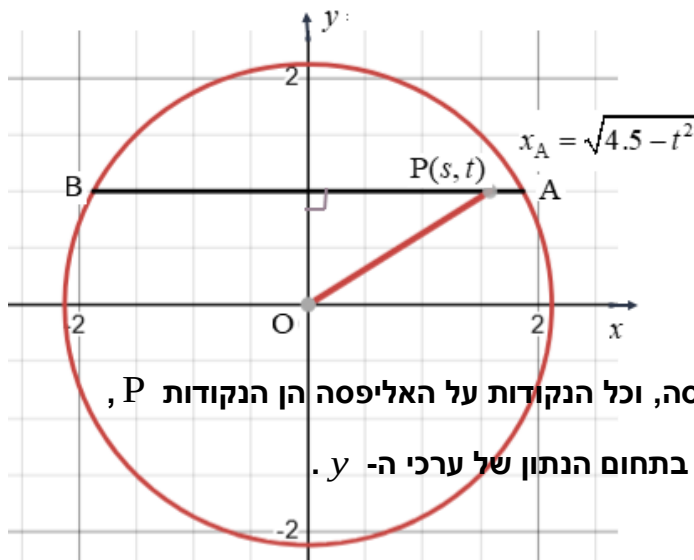
$$AB = 2 \cdot PO$$

$$2\sqrt{4.5 - t^2} = 2\sqrt{s^2 + t^2} \quad /:2$$

$$\sqrt{4.5 - t^2} = \sqrt{s^2 + t^2} \quad ()^2$$

$$4.5 - t^2 = s^2 + t^2 \rightarrow 4.5 = s^2 + 2t^2$$

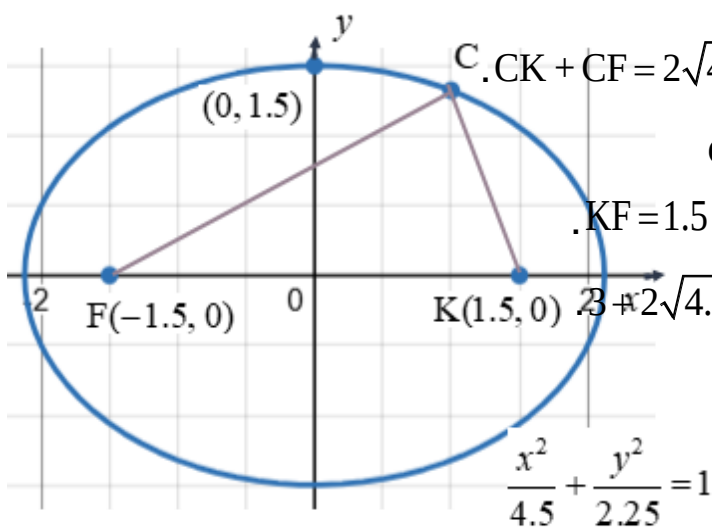
$$1 = \frac{s^2}{4.5} + \frac{t^2}{2.25} \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4.5} + \frac{y^2}{2.25} = 1}$$



הערה: נשים לב שכל הנקודות P נמצאות על האליפסה, וכל הנקודות על האליפסה הן הנקודות P,

שכן $-1.5 \leq y_P \leq 1.5$ אבל $b = \sqrt{2.25} = 1.5$ בדיוק בתחום הנתון של ערכי ה- y.

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{4.5} + \frac{y^2}{2.25} = 1$.



ד. כל נקודה על האליפסה מקיימת $R_1 + R_2 = 2a$ ולכן $CK + CF = 2\sqrt{4.5}$.

באליפסה מתקיים $C = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4.5 - 2.25} = 1.5$.

ובהתאם: $K(1.5, 0)$ ו- $F(-1.5, 0)$, כאשר $KF = 1.5 - (-1.5) = 3$.

מכאן שהיקף המשולש CKF הוא $3 + 2\sqrt{4.5} = 3 + 3\sqrt{2} \approx 7.243$.

תשובה: היקף המשולש CKF הוא $3 + 3\sqrt{2} \approx 7.243$.

ה. $KF = 3$, כאשר הגובה לצלע זו הוא הערך המוחלט של שיעור ה- y של הנקודה C.

הגובה המקסימלי מונח על ציר ה- y ואורכו הוא $\sqrt{2.25} = 1.5$.

מכאן ששטחו המקסימלי של המשולש הוא $\frac{3 \cdot 1.5}{2} = 2.25$.

תשובה: לא קיימת נקודה שבעבורה שטח היקף המשולש CKF הוא 3.

בגרות פה מאי 25 מועד קיץ א שאלון 35572

א. נתונה פירמידה $SABCD$, שבסיסה $ABCD$ הוא מקבילית.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{u}} \quad \boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{v}} \quad \boxed{\overrightarrow{AS} = \underline{w}}$$

SA הוא גובה הפירמידה, ובהתאם מאונך לבסיס,

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \quad \text{וגם} \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

הנקודה M היא אמצע האלכסון BD ,

ולכן היא נקודת מפגש האלכסונים החוצים זה את זה במקבילית.

נביע את $\overrightarrow{SM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SM} = -\underline{w} + \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$$

$$\boxed{\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}}$$

$$\text{תשובה: } \overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$$

ב. נתון כי $\overrightarrow{SM}$ מאונך ל- $\overrightarrow{DB}$, כלומר $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

$$\text{נוכיח כי } |\underline{u}| = |\underline{v}|$$

DB מאונך למשופע SM למישור $ABCD$,

על פי משפט שלושת האנכים, DB מאונך ל- AM ההיטל של SM למישור.

מקבילית שאלכסוניה מאונכים היא מעוין, ולכן כל הצלעות שוות,

$$\text{ומכאן ש- } |\underline{u}| = |\underline{v}|.$$

פתרון חלופי

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}\right) \cdot (\underline{u} - \underline{v})$$

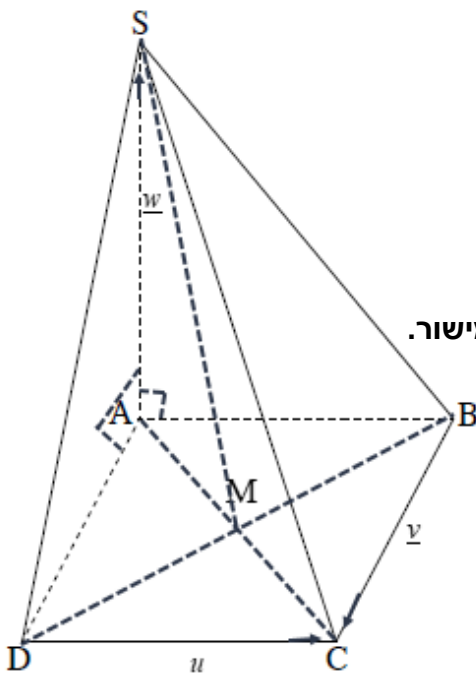
$$\frac{1}{2}\underline{u}^2 - \frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{v} - \frac{1}{2}\underline{v}^2 = 0 \quad \leftarrow \underline{v} \cdot \underline{w} = 0, \underline{u} \cdot \underline{w} = 0$$

$$\frac{1}{2}\underline{u}^2 = \frac{1}{2}\underline{v}^2 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$\underline{u}^2 = \underline{v}^2$$

$$\boxed{|\underline{u}| = |\underline{v}|}$$

תשובה: הוכחנו כי $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ (ו- $ABCD$ הוא מעוין).



ג. נתון: $A(0, 0, 0)$ ראשית הצירים, $B(0, 5, 0)$, $S(0, 0, 6)$, $D(3, p, 0)$, $p > 0$.

משוואת מישור בסיס המקבילית (המעוין) היא $[x, y] \equiv z = 0$.

AD מונח על הקרן החיובית של ציר ה- x , כאשר $|\underline{v}| = |\underline{u}| = 5$.

$$5 = \sqrt{3^2 + p^2 + 0^2}$$

$$25 = 9 + p^2$$

$$16 = p^2$$

$$p = 4 \quad \leftarrow p > 0$$

D(3, 4, 0)

צלעות נגדיות במקבילית שוות ומקבילות זו לזו.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{D}}$$

$$\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{C}}$$

C(3, 9, 0)

תשובה: $C(3,9,0)$, $D(3,4,0)$.

ד. דרך האלכסון AC מעבירים מישור המקביל למקצוע SD.

$$\overrightarrow{AC} = \underline{C} - \underline{A} = \underline{x} = (3, 9, 0)$$

$$\overrightarrow{SD} = \underline{D} - \underline{S} = x = (3, 4, -6)$$

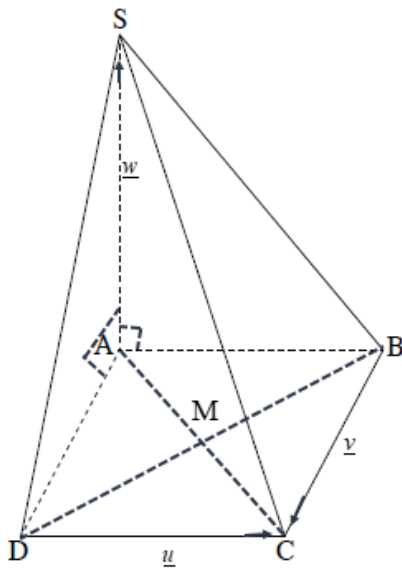
ההצגה הפרמטרית של המישור היא: $x = m(1, 3, 0) + t(3, 4, -6)$.

מכיוון ש- AC עובר בראשית, ומוכל במישור,

אז ראשית הצירים נמצאת גם במישור זה ו- $d = 0$ במשוואת המישור.

$$\left. \begin{aligned} (a,b,c) \cdot (1,3,0) &= 0 \rightarrow a+3b=0 \rightarrow a=-3b \rightarrow b=-1, a=3 \\ (a,b,c) \cdot (3,4,-6) &= 0 \rightarrow 3a+4b-6c=0 \rightarrow c=\frac{5}{6} \quad \swarrow \end{aligned} \right\} a=18, b=-6, c=5$$

תשובה: משוואת המישור היא: $18x - 6y + 5z = 0$.



ה. נבדוק את שתי הטענות הבאות.

I. הישר KM מקביל לישר SD .

תודה לחברי הטוב המורה יגאל.

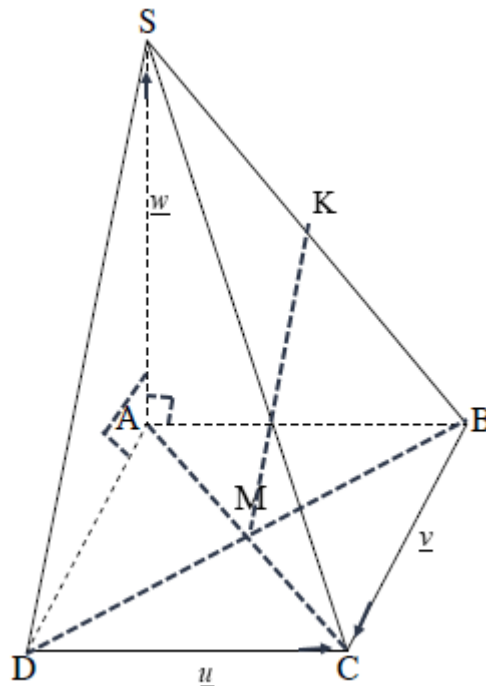
נתון ש- $\overline{SD}$ מקביל למישור AKC .

מכאן שהישר SD מקביל או מצטלב עם הישר KM .

הנקודות K, M, D, S נמצאות על מישור BDS ,

ולכן, הישר KM מקביל לישר SD כי ישרים מצטלבים אינם פורסים מישור.

תשובה: הטענה נכונה.



II. כל ישר שמאונך למישור ACK מאונך לישר SD .

KM נמצא במישור ACK ולכן הוא מאונך לנורמל למישור.

מכיון ש- SD מקביל ל- KM הרי שגם הוא מאונך לנורמל למישור,

כלומר לכל ישר שמאונך למישור, והטענה נכונה.

תשובה: הטענה נכונה.

פתרון חלופי לסעיף ה

ה. המישור $18x - 6y + 5z = 0$ חותך את המקצוע SB בנקודה K .

מצאנו כבר: $A(0, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$, $S(0, 0, 6)$, $D(3, 4, 0)$, $C(3, 9, 0)$.

נמצא את שיעורי הנקודה K .

$\underline{x} = (0, 0, 6) + t(0, 5, -6)$ ולכן ההצגה הפרמטרית של המקצוע היא $\overrightarrow{SB} = \underline{B} - \underline{S} = \underline{x} = (0, 5, -6)$

ונקודה טיפוסית עליו היא $(0, 5t, 6-6t)$ ונציב אותה במשוואת המישור.

$$18 \cdot 0 - 6 \cdot 5t + 5 \cdot (6 - 6t) = 0$$

$$-30t + 30 - 30t = 0$$

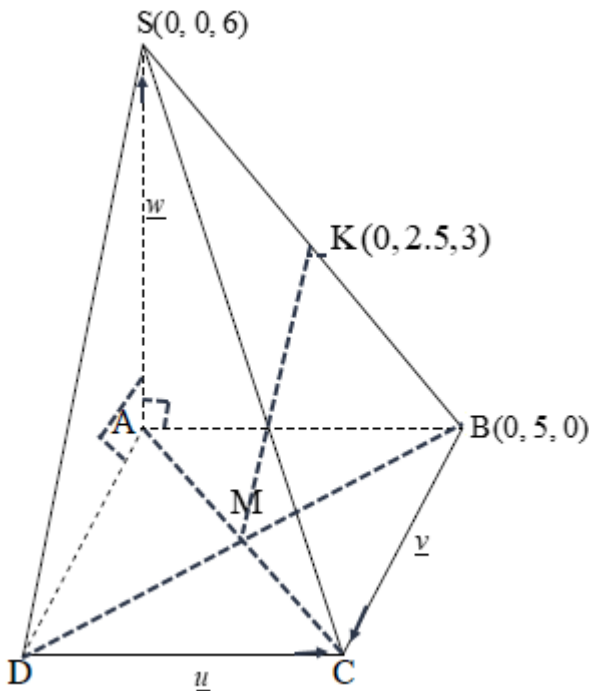
$$-60t = -30 \quad / : (-60)$$

$$t = 0.5$$

$$\boxed{K(0, 2.5, 3)}$$

נמצא את שיעורי הנקודה M , אמצע האלכסון AC .

$$M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \rightarrow \boxed{M(1.5, 4.5, 0)}$$



I. הישר KM מקביל לישר SD .

נשים לב ש- $K(0, 2.5, 3)$ היא אמצע המקצוע SB ,

ולכן KM קטע אמצעים במשולש BDS ,

ולכן מקביל לצלע שמולו, הצלע SD .

$$\overrightarrow{KM} = \underline{M} - \underline{K} = \underline{x} = (1.5, 2, -3) \quad \text{או:} \quad \overrightarrow{SD} = \underline{D} - \underline{S} = \underline{x} = (3, 4, -6)$$

קל לראות ש- $\overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{KM}$ ולכן הישרים מקבילים.

II. כל ישר שמאונך למישור ACK מאונך לישר SD .

משוואת המישור ACK היא $18x - 6y + 5z = 0$,

כאשר הנורמל שלו הוא $\underline{x} = (18, -6, 5)$.

$$\overrightarrow{SD} \cdot (18, -6, 5) = (3, 4, -6) \cdot (18, -6, 5) = 54 - 24 - 30 = 0$$

לכן SD מאונך לנורמל למישור, כלומר לכל ישר שמאונך למישור, והטענה נכונה.

תשובה: הטענה נכונה.

א. נביע באמצעות X ו- y את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות $z = x + yi$ במישור גרוס

$$\text{המקיימות: } |z| = |z - (2 + 2i)|.$$

$$|z| = |z - (2 + 2i)|$$

$$|x + yi| = |x + yi - 2 - 2i|$$

$$|x + yi| = |(x - 2) + (y - 2)i|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2}$$

$$x^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$4y = -4x + 8$$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

תשובה: המקום הגיאומטרי במישור גאוס הוא הישר $y = -x + 2$.

ב. $\mathbb{Z}$ הוא מספר מרוכב.

$$\text{נפתור את המשוואה הריבועית } z^2 - z(2 + 2i) + 4i = 0$$

ונראה ששני הפתרונות שלה (A ו- B) נמצאים על הישר $y = -x + 2$.

$$\Delta = (-(2 + 2i))^2 - 4 \cdot 4i$$

$$\Delta = 4 + 8i - 4 - 16i$$

$$\boxed{\Delta = -8i}$$

$$\boxed{\Delta = 8 \operatorname{cis} 270^\circ}$$

$$t_i = \sqrt{8} \operatorname{cis} \frac{270^\circ + 360^\circ k}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{8} \operatorname{cis} 135^\circ = -2 + 2i$$

$$t_2 = \sqrt{8} \operatorname{cis} 315^\circ = 2 - 2i$$

$$z_{1,2} = \frac{2 + 2i \pm (2 - 2i)}{2}$$

$$z_1 = \frac{2 + 2i + 2 - 2i}{2} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow A(2, 0)$$

$$z_2 = \frac{2 + 2i - 2 + 2i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i \rightarrow B(0, 2)$$

קל לראות ששתי הנקודות המצאות על הישר $y = -x + 2$:

$$0 = -2 + 2 \rightarrow 0 = 0 \quad o.k$$

$$2 = -0 + 2 \rightarrow 2 = 2 \quad o.k$$

תשובה: הראינו ששני הפתרונות של המשוואה (A ו- B) נמצאים על הישר $y = -x + 2$.

ג. הנקודות C ו- D נמצאות על הצירים כך ש- ABCD הוא ריבוע.

כיוון שבריבוע האלכסונים מאונכים, שווים וחוצים זה את זה,

קל לראות שהקודקודים הם: $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 0)$ ו- $D(0, -2)$.

סובבו את הריבוע ABCD סביב ראשית הצירים נגד כיוון השעון בזוויות α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

כל שמונה הנקודות (A, B, C, D וארבע הנקודות שהתקבלו אחרי הסיבוב)

מיוצגות על ידי פתרונות המשוואה $z^n = b$ (n טבעי ו- b ממשי).

(1) נמצא את הערך של b ואת הערך של α בעבור $n = 8$.

למשוואה הזאת יהיו שמונה פתרונות,

שכל אחד מהם יהיה על המעגל הקנוני $x^2 + y^2 = 4$ שרדיוסו 2.

כל הפתרונות של משוואה מהסוג $z^n = b = r \operatorname{cis} \theta$ מהווים סדרה הנדסית,

שמנתה $\operatorname{cis}(\frac{360^\circ}{n})$ ובמקרה שלנו בעבור $n = 8$ היא $\operatorname{cis}(\frac{360^\circ}{8}) = \operatorname{cis}(45^\circ)$,

מכיוון ש- $A = 2 \operatorname{cis} 0^\circ$ ו- $B = 2 \operatorname{cis} 90^\circ$ אז עבור $\alpha = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ נקבל ברצף את כל שמונת הקודקודים,

שגם יהוו קודקודים של מתומן משוכלל.

כל זאת כאשר $b = 2^8 = 256$, וכל הפתרונות יהיו על אותו מעגל שמצאנו $x^2 + y^2 = 4$.

תשובה: $\alpha = 45^\circ$, $b = 256$.

(2) נמצא ערך אפשרי של n בעבור $\alpha = 15^\circ$ ואת הערך של b המתאים לו.

בעבור $\alpha = 15^\circ$, נקבל שחילקנו $\alpha = \frac{90^\circ}{6} = 15^\circ$ או $\alpha = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$,

ולכן למשל נקבל 24 פתרונות למשוואה $z^{24} = 2^{24}$.

ייתכן, בתנאי השאלה שיהיו עוד פתרונות למשוואה $z^n = b$, כל עוד n יהיה כפולה של 24.

תשובה: $n = 24$, $b = 2^{24}$ או $n = 24t$, $b = 2^{24t}$ כאשר t טבעי.

בגרות פה מאי 25 מועד קיץ א שאלון 35572

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{a - e^x}$, כאשר $a \neq 0$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

$$a - e^x \neq 0 \text{ ומכאן ש- } e^x \neq a \text{ ו- } x \neq \ln a$$

תשובה: עבור $a > 0$ תחום ההגדרה הוא $x \neq \ln a$.

עבור $a < 0$ תחום ההגדרה הוא כל X .

(2) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

כאשר $x \rightarrow +\infty$ אז $e^x \rightarrow +\infty$ ו- $y = -1$ אסימפטוטה אופקית לימין.

כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $e^x \rightarrow 0$ ו- $y = 0$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.

(עבור $a > 0$ נקבל $x = \ln a$ אסימפטוטה אנכית).

תשובה: $y = -1$ ($x \rightarrow +\infty$) אסימפטוטה אנכית לציר y (אסימפטוטה אופקית לימין), עבור $a \neq 0$.

$y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$) אסימפטוטה אנכית לציר y (אסימפטוטה אופקית שמאל), עבור $a \neq 0$.

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$$f(x) = \frac{e^x}{a - e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(a - e^x) - e^x(-e^x)}{(a - e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(a - e^x + e^x)}{(a - e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{ae^x}{(a - e^x)^2}$$

סימני הנגזרת נקבעים רק על פי ערכו של a , כי שאר הגורמים חיוביים בתחום ההגדרה.

תשובה: עבור $a > 0$ עלייה $x > \ln a$ או $x < \ln a$.

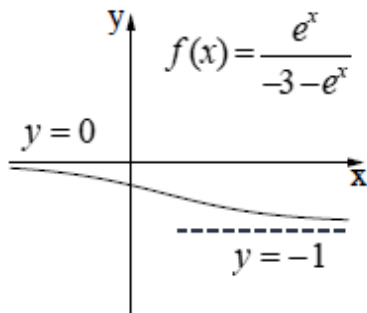
עבור $a < 0$ ירידה לכל X .

ב. נקבע אילו מהגרפים מתאים עבור ערכי a השונים.

עבור $a = -3$ מתאים גרף III

הפונקציה היא $f(x) = \frac{e^x}{-3 - e^x}$

שמוגדרת, רציפה ויורדת לכל x



III

עבור $a = 3$ מתאים גרף II

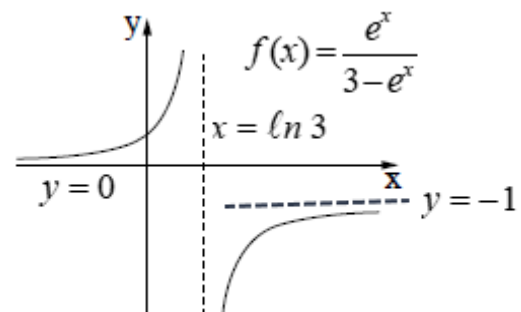
הפונקציה היא $f(x) = \frac{e^x}{3 - e^x}$

עולה בתחום $x < \ln 3$ או $x > \ln 3$,

ומכיון ש- $\ln 3 = 1.0986 > 0$

הרי שהאסימפטוטה האנכית $x = \ln 3$

נמצאת מימין לציר ה- y



II

תשובה: עבור $a = 3$ מתאים גרף II.

עבור $a = -3$ מתאים גרף III.

נציב $a = 3$, כלומר הפונקצייה היא $f(x) = \frac{e^x}{3 - e^x}$ ונענה על סעיפים ג-ה.

ג. נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x) + 2}$.

זוהי תזוזה 2 יחידות כלפי מעלה של $f(x)$ לקבלת $f(x) + 2$, ולאחר מכן $\frac{1}{f(x) + 2}$.

$$\frac{1}{f(x) + 2}$$

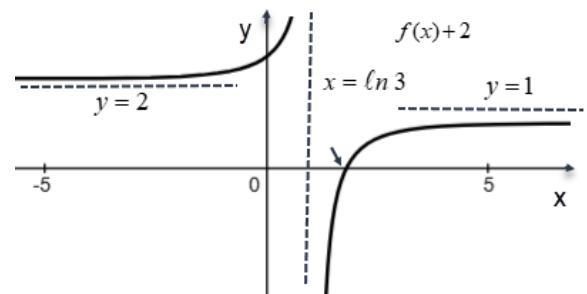
$$f(x) + 2$$

נקבל נקודת חיתוך עם ציר ה- x ,

שעבור שיעור x זה, $g(x)$ לא תהייה מוגדרת,

והאסימפטוטות: $x = \ln 3$

$$(x \rightarrow -\infty) y = 2, (x \rightarrow +\infty) y = 1$$

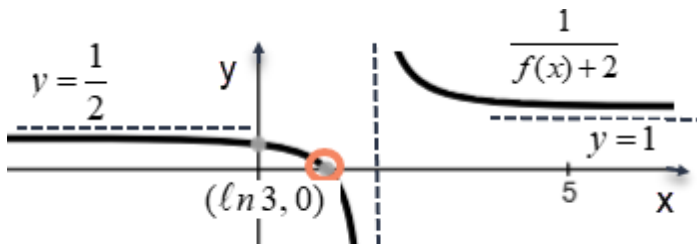


עבור $x = \ln 3$ נקבל נקודת אי רציפות סליקה ("חור")

$$f(x) + 2 \rightarrow \pm\infty \quad x = \ln 3, (\ln 3, 0)$$

$$g(x) = \frac{1}{f(x) + 2} \pm 0 \text{ ומכאן ש-}$$

$$(x \rightarrow -\infty) y = \frac{1}{2}, (x \rightarrow +\infty) y = 1$$



זאת הייתה הרחבה בקדם אנליזה, בעמוד הבא נרשום מחדש את התהליך בקצרה.

נתונה הפונקציה

$$g(x) = \frac{1}{f(x)+2}$$

$$f(x)+2 = \frac{e^x}{3-e^x} + 2 = \frac{e^x + 6 - 2e^x}{3-e^x} = \frac{-e^x + 6}{3-e^x}$$

$$g(x) = \frac{3-e^x}{-e^x+6}$$

(1) בתחום ההגדרה $x \neq \ln 3$, בגלל תחום ההגדרה של $f(x)$.

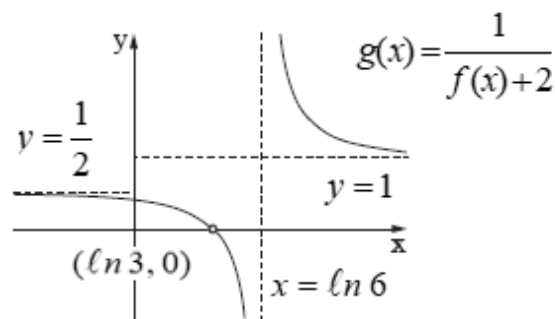
בנוסף מכנה צ"ל שונה מאפס.

$$-e^x + 6 \neq 0 \text{ ומכאן ש- } e^x \neq 6 \text{ ו- } x \neq \ln 6.$$

תשובה: $x \neq \ln 6$, $x \neq \ln 3$.

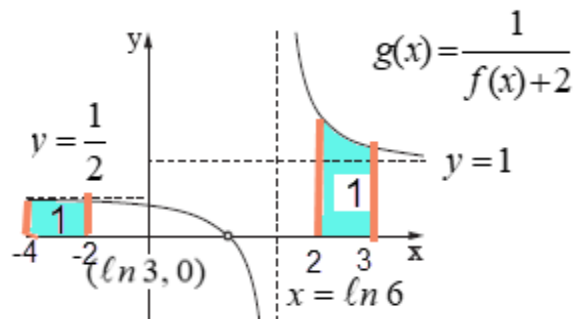
(2) תשובה: $y=1$ ($x \rightarrow +\infty$), $y=\frac{1}{2}$ ($x \rightarrow -\infty$), $x=\ln 6$.

ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



תשובה: השרטוט מעל.

ה. נבדוק האם הטענה $\int_{-4}^{-2} g(x) dx > \int_2^3 g(x) dx$ נכונה.



$\int_2^3 g(x) dx$ מייצג את השטח שבין הגרף של $g(x)$ לציר ה- x , הגדול מריבוע ששטחו $1 \times 1 = 1$.

$\int_{-4}^{-2} g(x) dx$ מייצג את השטח שבין הגרף של $g(x)$ לציר ה- x , הקטן ממלבן ששטחו $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

תשובה: הטענה לא נכונה (למעשה, $\int_{-4}^{-2} g(x) dx < \int_2^3 g(x) dx$).

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^n)$, n הוא מספר טבעי זוגי.

(1) בתחום ההגדרה הביטוי שמקבל הפונקצייה הלוגריתמית צ"ל גדול מאפס,

לכן $x^n > 0$, n הוא מספר טבעי זוגי, מכאן ש- $x \neq 0$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \neq 0$.

(2) $f(x)$ היא פונקציה זוגית כי n הוא מספר טבעי זוגי, עם אסימפטוטה אנכית $x = 0$.

האסימפטוטה אנכית $x = 0$ פוסלת את גרפים III ו-IV.

הזוגיות פוסלת את גרף I, שנראה כמו גרף של פונקציה אי-זוגית.

תשובה: גרף II הוא מייצג את הפונקציה $f(x)$.

נציב $n = 2$, כלומר הפונקצייה היא $f(x) = \ln(x^2)$ ונענה על סעיפים ב-ד.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^2 - 4$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

זוהי העלאה בריבוע של $f(x)$ לקבלת $[f(x)]^2$, ולאחר מכן הזזה 4 יחידות כלפי מטה.

$$g(x) = (f(x))^2 - 4$$

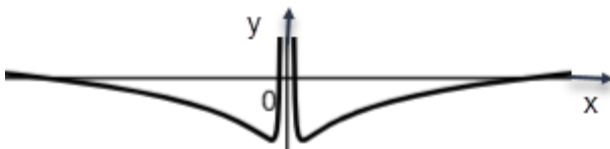
$$[f(x)]^2$$

נקבל ארבע נקודות חיתוך חדשות עם ציר ה- x ,

שתי נקודות המינימום "תרדנה" 4 יחידות,

והאסימפטוטה $x = 0$ ללא שינוי.

הזוגיות נשמרת



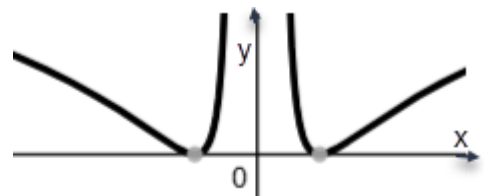
הפונקציה תהייה אי-שלילית.

נקבל שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ,

שתהיינה נקודות מינימום,

והאסימפטוטה $x = 0$ ללא שינוי.

הזוגיות נשמרת



זאת הייתה הרחבה בקדם אנליזה, בעמוד הבא נרשום מחדש את התהליך בקצרה.

נתונה הפונקציה: $g(x) = (f(x))^2 - 4$, המוגדרת לכל $x \neq 0$, ולכן $g(x) = [\ln(x^2)]^2 - 4$.

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- X מתקיים $y = 0$.

$$[\ln(x^2)]^2 - 4 = 0 \rightarrow [\ln(x^2)]^2 = 4$$

$$\ln(x^2) = 2 \rightarrow x^2 = e^2 \rightarrow x = \pm e \rightarrow (-e, 0), (e, 0)$$

$$\ln(x^2) = -2 \rightarrow x^2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \rightarrow x = \pm \frac{1}{e} \rightarrow \left(-\frac{1}{e}, 0\right), \left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

תשובה: $(-e, 0)$, $(-\frac{1}{e}, 0)$, $(\frac{1}{e}, 0)$, $(e, 0)$.

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ונקבע את סוגן.

על פי הניתוח המקדים, נקבל שתי נקודות מינימום ולכן אין צורך לבדוק את סוגן.

למעשה נקבע אותן לפי נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- X .

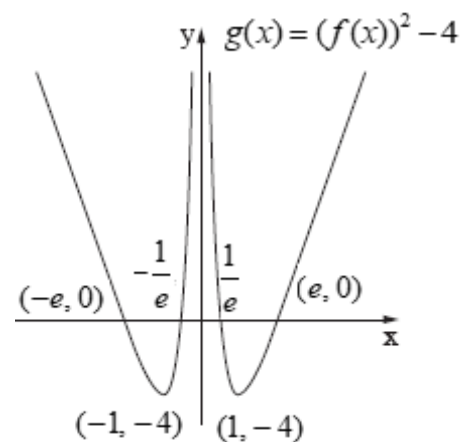
$$\ln(x^2) = 0 \rightarrow x^2 = 1$$

$$x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$$

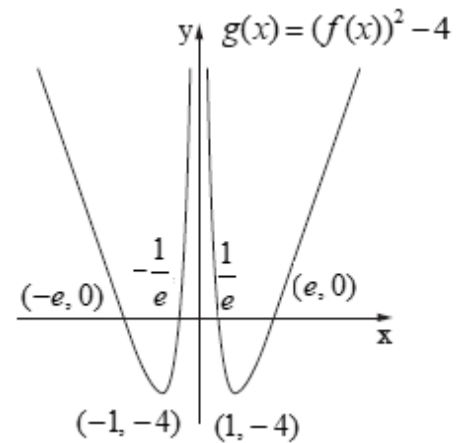
ולאחר תזוזה של 4 יחידות כלפי מטה, נקודות המינימום של $g(x)$ הן $(1, -4)$ ו- $(-1, -4)$.

תשובה: עבור $g(x)$ - $(1, -4)$ מינימום, $(-1, -4)$ מינימום.

ג. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



תשובה: הסרטוט מעל.



ד. נתונה הפונקציה $k(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, בתחום $x > 0$.

(1) בתחום $x > 0$ המכנה של $k(x)$ מתאפס פעמיים לפי שיעורי ה- x בנקודות האפס של $g(x)$,

כאשר המונה $(g'(x))$ מוגדר בתחום $x > 0$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $k(x)$ הוא $x > 0, x \neq \frac{1}{e}, x \neq e$.

(2) בתחום $e^2 \leq x \leq e^3$ מתקיים ש- $g(x)$ חיובית ועולה, ומכאן שגם $g'(x) > 0$ וגם $k(x) > 0$.

נחשב את האינטגרל (החיובי) המבוקש על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S = \int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{g'(x)}{g(x)} - 0 \right) dx$$

$$S = \ln |g(x)| \Big|_{e^2}^{e^3} = \ln g(x) \Big|_{e^2}^{e^3} \quad \leftarrow g(x) > 0$$

$$x = e^3: \ln \left\{ \left[\ln ((e^3)^2) \right]^2 - 4 \right\} = \ln (6^2 - 4) = \ln 32$$

$$x = e^2: \ln \left\{ \left[\ln ((e^2)^2) \right]^2 - 4 \right\} = \ln (4^2 - 4) = \ln 12$$

$$S = \ln 32 - \ln 12 \rightarrow S = \ln \frac{32}{12} \rightarrow \boxed{S = \ln 2 \frac{2}{3}}$$

תשובה: תשובה: השטח המוגבל על ידי הגרף של $k(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = e^2$ ו- $x = e^3$ הוא $\ln 2 \frac{2}{3}$.