



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשפ"ו, 2025, שאלון 35472 מועד ב:
תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת הקובץ



א. לפנינו סדרה חשבונית, כי גובה הפיקדון של מיכל גדל במספר קבוע מדי חודש.

סכום הפיקדונות שהעבירה מיכל בחודש הראשון ושני הוא 2,100 שקלים סך הכול, ולכן $a_1 + a_2 = 2,100$.

גובה הפיקדון שהעבירה מיכל בחודש החמישי גדול פי 3 מזה של החודש הראשון, ולכן $a_5 = 3a_1$.

$$a_5 = 3a_1$$

$$a_1 + 4d = 3a_1$$

$$4d = 2a_1$$

$$\boxed{2d = a_1}$$

$$a_1 + a_2 = 2,100$$

$$a_1 + a_1 + d = 2,100$$

$$\boxed{2a_1 + d = 2,100}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + d = 2,100 \\ 2d = a_1 \end{cases}$$

$$2 \cdot 2d + d = 2,100$$

$$5d = 2,100 \quad / : 5$$

$$\boxed{d = 420}$$

$$2 \cdot 420 = a_1$$

$$\boxed{a_1 = 840}$$

תשובה: גובה הפיקדון שהעביר המיכל בחודש הראשון הוא 840 שקלים

(ובכל חודש מעבירה 420 שקלים יותר מהסכום שהעביר בחודש שלפניו).

ב. נמצא לאחר כמה חודשים היה סכום הפיקדונות שהעבירה מיכל 22,680 שקלים סך הכול.

$$S_n = 22,680$$

$$\frac{n[2 \cdot 840 + 420(n-1)]}{2} = 22,680 \quad / \cdot 2$$

$$n(1,680 + 420n - 420) = 45,360$$

$$1,680n + 420n^2 - 420n = 45,360$$

$$420n^2 + 1,260n - 45,360 = 0$$

$$\boxed{n = 9}, \quad \cancel{n = 12}$$

הפתרון השני נפסל, כי מספר ההפקדות צריך להיות חיובי ושלם (טבעי $n \geq 5$ על פי הנתונים).

תשובה: לאחר 9 חודשים היה סכום הפיקדונות שהעבירה מיכל 22,680 שקלים סך הכול.

ב. בחודש ה- 12, במקום להפקיד כסף לחסכון, החליטה מיכל לקנות מקרר שמחירו זהה לגובה הפיקדון, שהייתה אמורה להעביר בחודש זה.

היא שילמה בארבעה תשלומים, כאשר כל תשלום גדול פי 3 מן התשלום שלפניו,

ולכן זו סדרה הנדסית, שמנתה $q=3$.

נקרא לסדרה B, ולאיברה הראשון b_1 .

האיבר הראשון בסדרה B הוא האיבר ה- 12 של הסדרה החשבונית:

$$a_{12} = a_1 + 11d$$

$$a_{12} = 840 + 11 \cdot 420$$

$$\boxed{a_{12} = 5,460}$$

לכן בסדרת התשלומים למקרר: $S_4 = 5,460$, $q=3$, ואנחנו רוצים למצוא את התשלום הראשון, את b_1 .

$$S_4 = 5,460$$

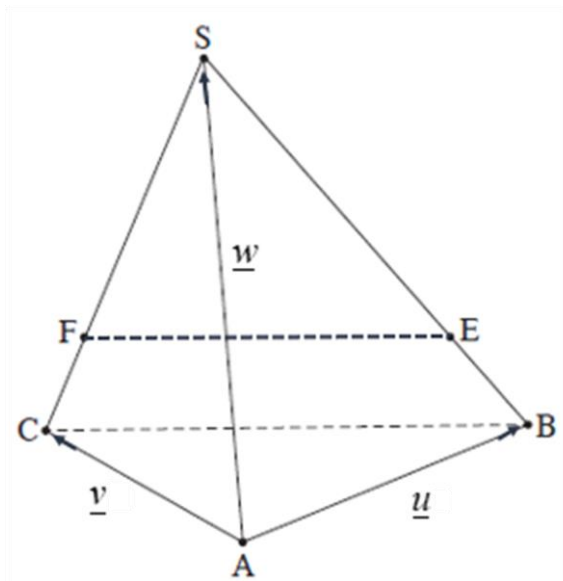
$$\frac{b_1 \cdot (3^4 - 1)}{3 - 1} = 5,460$$

$$40b_1 = 5,460 \quad / : 40$$

$$\boxed{b_1 = 136.5}$$

תשובה: התשלום הראשון הוא 136.5 שקלים.

א. בסרטוט מתוארת פירמידה משולשת SABC.



$$\overrightarrow{AB} = \underline{u} \quad \overrightarrow{AC} = \underline{v} \quad \overrightarrow{AS} = \underline{w}$$

נביע את הווקטורים $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SE}$ ו- $\overrightarrow{SF}$,

באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$$

$$\overrightarrow{SF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{SE} = \frac{3}{4} \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{SF} = \frac{3}{4} (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{SE} = \frac{3}{4} (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{SF} = \frac{3}{4} (-\underline{w} + \underline{v})$$

$$\overrightarrow{SE} = \frac{3}{4} (-\underline{w} + \underline{u})$$

$$\overrightarrow{SF} = \frac{3}{4} \underline{v} - \frac{3}{4} \underline{w}$$

$$\overrightarrow{SE} = \frac{3}{4} \underline{u} - \frac{3}{4} \underline{w}$$

תשובה: $\overrightarrow{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\overrightarrow{SE} = \frac{3}{4} \underline{u} - \frac{3}{4} \underline{w}$, $\overrightarrow{SF} = \frac{3}{4} \underline{v} - \frac{3}{4} \underline{w}$.

ב. (1) נביע את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ES} + \overrightarrow{SF}$$

$$\overrightarrow{EF} = -(\frac{3}{4} \underline{u} - \frac{3}{4} \underline{w}) + \frac{3}{4} \underline{v} - \frac{3}{4} \underline{w}$$

$$\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{4} \underline{u} + \frac{3}{4} \underline{w} + \frac{3}{4} \underline{v} - \frac{3}{4} \underline{w}$$

$$\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{4} \underline{u} + \frac{3}{4} \underline{v}$$

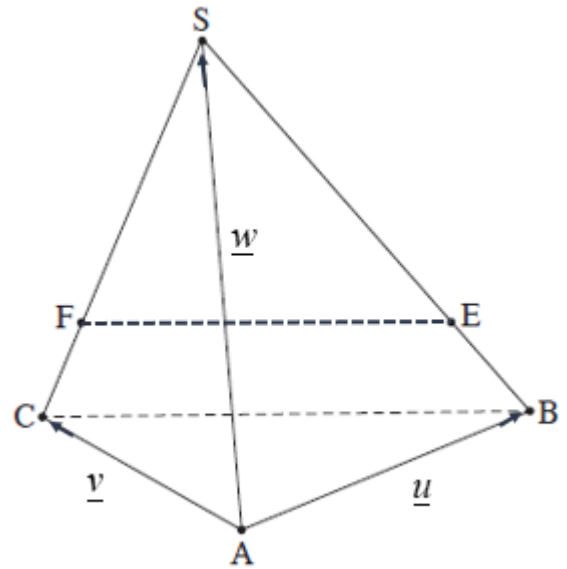
תשובה: $\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{4} \underline{u} + \frac{3}{4} \underline{v}$.

(2) נסביר מדוע EF מקביל ל- BC.

$$\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{4} \underline{u} + \frac{3}{4} \underline{v} = \frac{3}{4} (-\underline{u} + \underline{v}) \rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BC}$$

מתקבל שהווקטורים קולינאריים, ומכיוון שהנקודות E ו- F נמצאות על המקצועות הצדדים ולא על BC, הרי שהישרים מקבילים ולא מתלכדים.

תשובה: הסברנו מדוע EF מקביל ל- BC.



ג. נתון: $B(1, -1, 3)$, $C(13, 15, 3)$.

$$\overrightarrow{BC} = \underline{C} - \underline{B}$$

$$\overrightarrow{BC} = \underline{(13, 15, 3)} - \underline{(1, -1, 3)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = (12, 16, 0)}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4} \underline{(12, 16, 0)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EF} = (9, 12, 0)}$$

תשובה: $\overrightarrow{BC} = (12, 16, 0)$, $\overrightarrow{EF} = (9, 12, 0)$.

ד. נתון: $E(5, 1, 6)$.

$$\overrightarrow{EF} = \underline{F} - \underline{E}$$

$$\underline{E} + \overrightarrow{EF} = \underline{F}$$

$$\underline{(5, 1, 6)} + \underline{(9, 12, 0)} = \underline{F}$$

$$\boxed{F(14, 13, 6)}$$

תשובה: $F(14, 13, 6)$.

ה. נתון: $A(4, 12, 3)$.

(1) נחשב את גודל הזווית EAF (ראו בשרטוט משמאל).

מצאנו כי: $E(5, 1, 6)$, $F(14, 13, 6)$.

$$\cos \angle EAF = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{AF}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{AF}|} \quad \text{תכנון:}$$

$$\vec{AE} = \underline{E} - \underline{A} = \underline{x} = (1, -11, 3)$$

$$|\vec{AE}| = \sqrt{1^2 + (-11)^2 + 3^2}$$

$$|\vec{AE}| = \sqrt{131}$$

$$\vec{AF} = \underline{F} - \underline{A} = \underline{x} = (10, 1, 3)$$

$$|\vec{AF}| = \sqrt{10^2 + 1^2 + 3^2}$$

$$|\vec{AF}| = \sqrt{110}$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = (1, -11, 3) \cdot (10, 1, 3)$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1 \cdot 10 + (-11) \cdot 1 + 3 \cdot 3$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 8$$

$$\cos \angle EAF = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{AF}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{AF}|}$$

$$\cos \angle EAF = \frac{8}{\sqrt{131} \cdot \sqrt{110}}$$

$$\angle EAF = 86.18^\circ$$

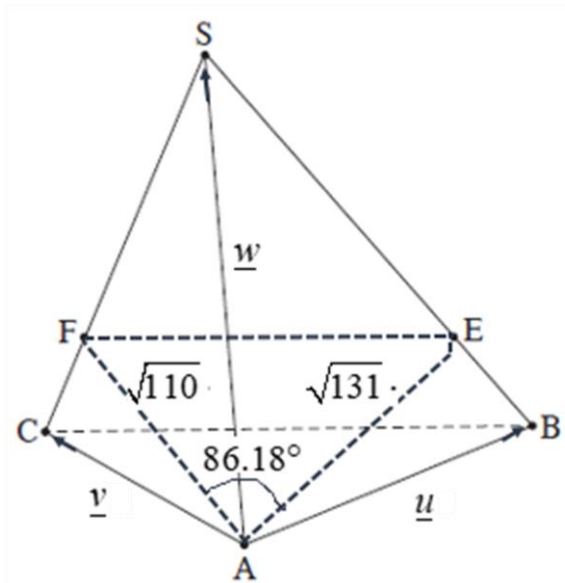
תשובה: גודל הזווית EAF הוא 86.18° .

(2) נחשב את שטח המשולש EAF.

$$S_{\triangle EAF} = \frac{AE \cdot AF \cdot \sin \angle EAF}{2} = \frac{\sqrt{131} \cdot \sqrt{110} \cdot \sin 86.18^\circ}{2}$$

$$S_{\triangle EAF} = 59.887$$

תשובה: שטח המשולש EAF הוא 59.887.



בגרות פה יולי 25 מועד קיץ ב שאלון 35472

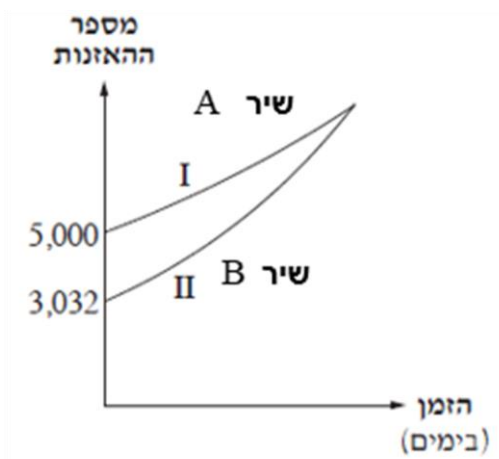
נוסחת הגידול והדעיכה: $f(t) = f(0) \cdot q^t$, כאשר $f(0)$ היא הכמות ההתחלתית
 q הוא מקדם הגדילה/דעיכה, $f(t)$ היא הכמות לאחר t יחידות זמן.

א. לפנינו גדילה מעריכית כי מספר ההאזנות לשני השירים גדל באחוז קבוע בכל יום, כלומר פי מספר קבוע.

מכיוון ומספר ההאזנות לשיר B גדל בכל יום באחוז הגדול פי 2 ממספר ההאזנות לשיר A, הרי שהגרף המתאים לשיר B עולה בקצב גדול יותר, תלול יותר, מזה של שיר A. תשובה: גרף I מתאים לשיר A (גרף II מתאים לשיר B).

ב. כעבור 5 ימים מיום העלאת השירים, מספר ההאזנות לשיר A היה 7,350.

נמצא את מקדם הגדילה (מספר ההאזנות גדל מ- 5,000 ל- 7,350) ולאחר מכן את אחוז הגידול היומי.



$$\begin{aligned} 7,350 &= 5,000 \cdot q^5 \quad / : 5,000 \\ 1.47 &= q^5 \\ \sqrt[5]{1.47} &= q \\ q &\approx 1.08 \\ 1.08 &= \frac{100 + P}{100} \quad / \cdot 100 \\ 108 &= 100 + P \\ P &= 8 \end{aligned}$$

8% בכל יום

ולכן מספר ההאזנות לשיר B גדל ב- $2 \cdot 8\% = 16\%$ מדי יום.

תשובה: מספר ההאזנות לשיר A גדל ב- 8% בכל יום.

$$q = \frac{100 + 16}{100} = 1.16 \quad \text{הוא B שיר}$$

מספר ההאזנות לשיר זה ביום העלאת השירים היה 3,032.

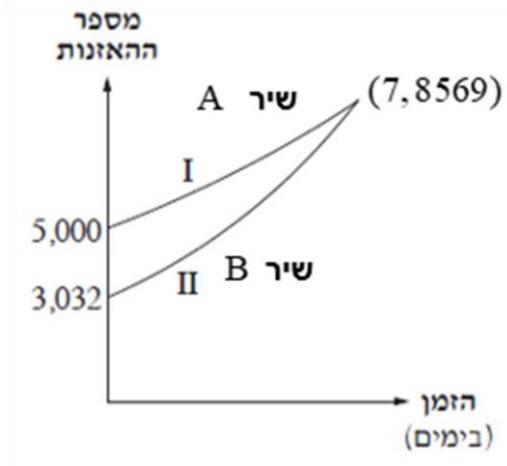
$$f(5) = 3,032 \cdot 1.16^5 \approx 6,368 \quad \text{היה מספר ההאזנות}$$

מספר ההאזנות לשיר A היה גדול ב- $7,350 - 6,368 = 982$.

תשובה: לאחר 5 ימים מספר ההאזנות לשיר A היה גדול ב- 982 ממספר ההאזנות לשיר A.

ד. נמצא לאחר כמה ימים היה מספר ההאזנות לשני השירים שווה,

מספר המיוצג על ידי נקודת החיתוך בין הגרפים.



$$5,000 \cdot 1.08^t = 3,032 \cdot 1.16^t \quad / : 3,032 \cdot 1.08^t$$

$$\frac{5,000}{3,032} = \frac{1.16^t}{1.08^t}$$

$$1.6491 = \left(\frac{1.16}{1.08}\right)^t$$

$$1.6491 = 1.0741^t$$

$$\ln 1.6491 = \ln 1.0741^t$$

$$\ln 1.6491 = t \cdot \ln 1.0741$$

$$t = \frac{\ln 1.6491}{\ln 1.0741}$$

$$\boxed{t \approx 7}$$

תשובה: לאחר 7 ימים מיום העלאת השירים, מספר ההאזנות לשני השירים היה שווה.

ה. כאשר מספר ההאזנות היה שווה, כלומר לאחר 7 ימים, החלה ירידה במספר ההאזנות לשיר A.

אחוז הירידה היה זהה לאחוז הגדילה, כלומר ל- 8% בכל יום.

$$\text{מקדם הדעיכה הוא } q = \frac{100 - 8}{100} = 0.92$$

מספר ההאזנות לאחר 7 ימים, מתחילת העלאת השירים, היה $f(7) = 5,000 \cdot 1.08^7 \approx 8,569$.

(נקודת החיתוך בין שני הגרפים היא (7, 8569)).

נמצא לאחר כמה ימים נוספים, היה מספר ההאזנות 2,450.

$$8,569 \cdot 0.92^t = 2,450 \quad / : 8,569$$

$$0.92^t = 0.2859$$

$$t = \frac{\ln 0.2859}{\ln 0.92}$$

$$\boxed{t \approx 15}$$

ומספר הימים מיום העלאת השירים הוא $7 + 15 = 22$.

תשובה: לאחר 22 ימים מיום העלאת השירים, מספר ההאזנות לשיר A היה 2,450.

בגרות פה יולי 25 מועד קיץ ב שאלון 35472

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 4}$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$e^x - 4 \neq 0 \rightarrow e^x \neq 4 \rightarrow x \neq \ln 4$$

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \neq \ln 4$.

(2) $x = \ln 4$ מאפס את המכנה.

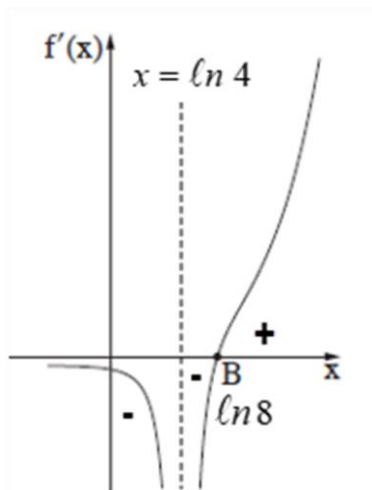
תשובה: האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$ היא $x = \ln 4$

ב. המונה חיובי לכל x ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x .

$$f(0) = \frac{e^{2 \cdot 0}}{e^0 - 4} = -\frac{1}{3} \rightarrow (0, -\frac{1}{3})$$

תשובה: נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים היא $(0, -\frac{1}{3})$.

ג. גרף הנגזרת הנתון עובר בנקודה B משליליות לחיוביות, ולכן x_B הוא מינימום של $f(x)$.



$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot (e^x - 4) - e^x \cdot e^{2x}}{(e^x - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot [2(e^x - 4) - e^x]}{(e^x - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2e^x - 8 - e^x)}{(e^x - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 8)}{(e^x - 4)^2}$$

$$e^x - 8 = 0 \rightarrow e^x = 8 \rightarrow x = \ln 8$$

תשובה: $x_B = \ln 8$

ד. (1) נרשום תחומי עלייה וירידה של $f(x)$, על פי סימני הנגזרת שהוספנו לציר הנתון.

תשובה: עלייה - $x > \ln 8$, ירידה - $\ln 4 < x < \ln 8$ או $x < \ln 4$.

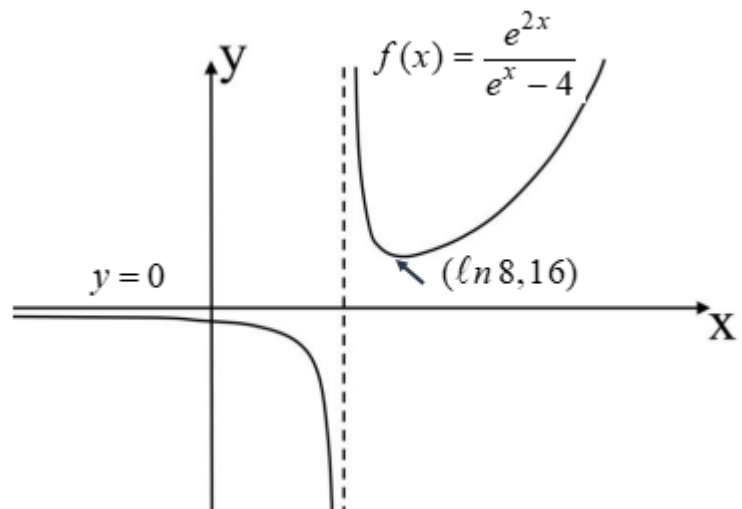
(2) נצייר את הסקיצה של $f(x)$.

$$f(\ln 8) = 16 \text{ ו- } (\ln 8, 16) \text{ נקודת מינימום.}$$

שתי הצבות מומלצות לפני הסרטוט.

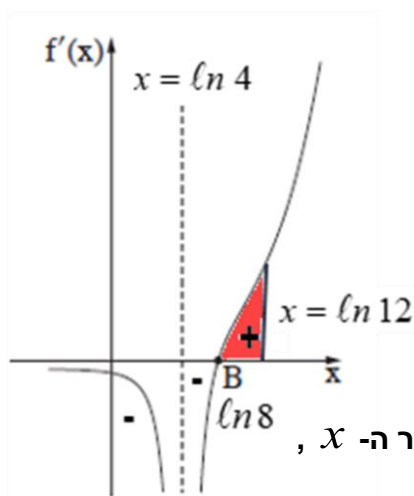
$$f(10) = 22,030 \rightarrow +\infty \text{ ואין אסימפטוטה אופקית לימין}$$

$$f(-10) = -5.2 \cdot 10^{-10} \rightarrow 0 \text{ ו- } y = 0 \text{ אסימפטוטה אופקית לשמאל.}$$



תשובה: הסקיצה מעל.

ה. נחשב את השטח המבוקש (הצבוע באדום בשרטוט).



$$S = \int_{\ln 8}^{\ln 12} (f'(x) - 0) dx = f(x) \Big|_{\ln 8}^{\ln 12}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \ln 12 \quad f(\ln 12) = 18 \\ x = \ln 8 \quad f(\ln 8) = 16 \end{array} \right\} S = 18 - 16 \rightarrow \boxed{S = 2}$$

תשובה: השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x ,

ועל ידי הישר $x = \ln 12$ הוא 2.

בגרות פה יולי 25 מועד קיץ ב שאלון 35472

א. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot (-2 + \ln x)$.

בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x > 0$.
תשובה: תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ הוא $x > 0$.

ב. בנקודת חיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$:

$$0 = x^2 \cdot (-2 + \ln x)$$

$$x^2 = 0 \rightarrow \cancel{x=0} \leftarrow x > 0$$

$$-2 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$$

תשובה: נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים היא $(e^2, 0)$.

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה.

$$f(x) = x^2 \cdot (-2 + \ln x)$$

$$f'(x) = 2x \cdot (-2 + \ln x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -4x + 2x \ln x + x$$

$$f'(x) = -3x + 2x \ln x$$

$$\boxed{f'(x) = x \cdot (-3 + 2 \ln x)}$$

$$x \cdot (-3 + 2 \ln x) = 0 \rightarrow \cancel{x=0} \leftarrow x > 0$$

$$-3 + 2 \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1.5 \rightarrow x = e^{1.5} \approx 4.48$$

$$f'(4) < 0, \quad f'(5) > 0$$

$$f(e^{1.5}) = (e^{1.5})^2 \cdot (-2 + \ln e^{1.5}) = e^3(-0.5) \rightarrow \boxed{(e^{1.5}, -0.5e^3), \min}$$

תשובה: $(e^{1.5}, -0.5e^3)$ מינימום (או $(e^{1.5}, -10.04)$).

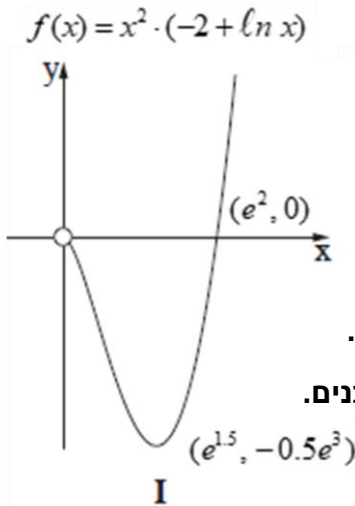
ד. הגרף המתאים הוא גרף I כי הוא היחיד המראה את מיקומה הנכון של נקודת המינימום $(e^{1.5}, -0.5e^3)$.

ניתן לראות גם בהצבה,

$$, f(0.001) = 0.001^2 \cdot (-2 + \ln 0.001) = -8.9 \cdot 10^{-6} \rightarrow 0$$

ולכן הגרף של שואף לנקודה הריקה $(0, 0)$.

תשובה: גרף I מתאר את הפונקציה $f(x)$.



ה. נתונה הפונקציה $g(x) = a \cdot f(x)$ ($a \neq 0$ פרמטר).

גם $g(x)$ מוגדרת בתחום $x > 0$ ושיעור ה- y שלה בנקודת הקיצון הוא $0.6 \cdot e^3$.

(1) נשים לב ש- $g'(x) = a \cdot f'(x)$ ולכן שיעורי ה- x בנקודת הקיצון אינם משתנים.

$$\text{לכן, } g(e^{1.5}) = 0.6 \cdot e^3$$

$$g(e^{1.5}) = 0.6 \cdot e^3$$

$$a \cdot f(e^{1.5}) = 0.6 \cdot e^3$$

$$a \cdot (-0.5e^3) = 0.6 \cdot e^3 \quad / : (-0.5e^3)$$

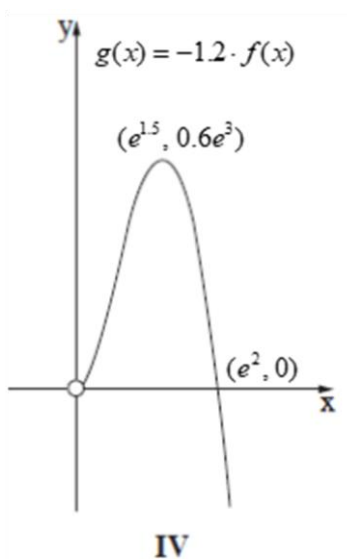
$$\boxed{a = -1.2}$$

תשובה: $a = -1.2$.

(2) מכאן ש- $g(x) = -1.2 \cdot f(x)$ היא טרנספורמציה כפולה: מתיחה אנכית פי 1.2, וסיבוב סביב ציר ה- x .

הסיבוב סביב ציר ה- x משנה את סוג הקיצון ולכן $(e^{1.5}, 0.6e^3)$ היא נקודת מקסימום.

תשובה: נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא נקודת מקסימום.



(3) הגרף המתאים הוא גרף IV

כי הוא מראה את מיקומה הנכון של נקודת המקסימום $(e^{1.5}, 0.6e^3)$,

וללא שינוי בנקודת האפס $(e^2, 0)$

שאינה משתנה בטרנספורמציה של מתיחה אנכית ושיקוף לציר ה- x .

תשובה: גרף IV מתאר את הפונקציה $g(x)$.