



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיץ תשפ"ו, 2025, שאלון 35472 מועד א:
תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת הקובץ



א. נתונה סדרה חשבונית A, ובה 57 איברים: $a_1, a_2, a_3, \dots$.

נתון: $a_2 + a_4 = a_6$, וכי האיבר האחרון בסדרה זו הוא 171, כלומר $a_{57} = 171$.

$$a_{57} = 171$$

$$a_1 + 56d = 171$$

$$a_1 + 56a_1 = 171 \leftarrow a_1 = d$$

$$57a_1 = 171 \quad / :57$$

$$\boxed{a_1 = 3} \rightarrow \boxed{d = 3}$$

$$a_2 + a_4 = a_6$$

$$a_1 + d + a_1 + 3d = a_1 + 5d$$

$$\boxed{a_1 = d}$$

תשובה: הפרש הסדרה הוא 3, $a_1 = 3$.

ב. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית B, שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, \dots$.

נתון: $b_1 = a_6$, ו- $3 \cdot b_3 = a_8$.

$$3 \cdot b_3 = a_8$$

$$3 \cdot 18 \cdot q^2 = a_1 + 7 \cdot d$$

$$54q^2 = 3 + 7 \cdot 3$$

$$54q^2 = 24 \quad / :54$$

$$q^2 = \frac{4}{9}$$

$$\boxed{q = \pm \frac{2}{3}}$$

$$b_1 = a_6$$

$$b_1 = a_1 + 5d$$

$$b_1 = 3 + 5 \cdot 3$$

$$\boxed{b_1 = 18}$$

תשובה: המנה של הסדרה B היא $\pm \frac{2}{3}$.

ג. נתון כי הסדרה B אינה עולה ואינה יורדת, מכאן שמנחה שלילית והיא $q = -\frac{2}{3}$.

מקומות זוגיים בסדרה b_n	b_n	
$b_2 = b_1 q_b = 18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -12$	$b_1 = 18$	A_1
$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{b_n q_b^2}{b_n} = q_b^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$	Q
אינסוף	אינסוף	N
$S_b = \frac{-12}{1 - \frac{4}{9}} = -21.6$		S

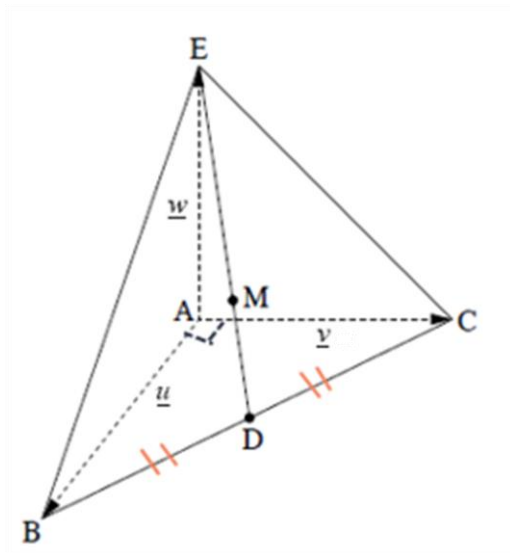
תשובה: סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה B הוא (-21.6).

א. בסרטוט מתוארת פירמידה $ABCE$, שבסיסה משולש ישר זווית $\angle BAC = 90^\circ$,

המקצוע AE הוא גובה בפירמידה (כלומר גובה לבסיס ABC)

כאשר הנקודה D היא אמצע המקצוע BC .

מכאן ניתן ללמוד שהגובה מאונך לניצבי משולש הבסיס, שמאונכים זה לזה.



$$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{v}$$

$$\overrightarrow{AE} = \underline{w}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{v} \leftarrow \angle BAC = 90^\circ$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w} \leftarrow \angle AEB = 90^\circ$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w} \leftarrow \angle AEC = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{ED}$$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} (-\underline{w} + \frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v})$$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3} \underline{u} + \frac{1}{3} \underline{v} - \frac{2}{3} \underline{w}$$

נביע את הווקטורים $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$ ו- $\overrightarrow{AM}$, באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{ED} = -\underline{w} + \frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v}$$

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v} - \underline{w}$$

הערה: חישובנו קודם את $\overrightarrow{EM}$ ישירות על פי הנתון.

אם לא עשיתם זאת, אפשר גם עכשיו

$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{ED} \rightarrow \overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v} - \underline{w} \right) \rightarrow \overrightarrow{EM} = \frac{1}{3} \underline{u} + \frac{1}{3} \underline{v} - \frac{2}{3} \underline{w}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM}$$

$$\overrightarrow{AM} = \underline{w} + \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{BC} = -\underline{u} + \underline{v}$, $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.

ב. נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}| = 12$.

ובהתאם נעדכן את הנתונים שרשמנו בעמוד הקודם.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{u}} \quad |\underline{u}| = 12 \quad \underline{u}^2 = 144$$

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \underline{v}} \quad |\underline{v}| = 12 \quad \underline{v}^2 = 144$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE} = \underline{w}} \quad |\underline{w}| = 12 \quad \underline{w}^2 = 144$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

(1) נוכיח כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל- $\overrightarrow{ED}$.

נזכור כי הוכחנו ש- $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$, ולכן אין צורך לרשום את המכפלות שלהם.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ED} = \left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}\right) = \frac{1}{6}\underline{u}^2 + \frac{1}{6}\underline{v}^2 - \frac{1}{3}\underline{w}^2$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ED} = \frac{1}{6} \cdot 144 + \frac{1}{6} \cdot 144 - \frac{1}{3} \cdot 144 = 0 \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}}$$

תשובה: הוכחנו כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל- $\overrightarrow{ED}$.

(2) נוכיח כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך למישור BEC.

הוכחנו כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל- $\overrightarrow{ED}$, נראה ש- $\overrightarrow{AM}$ מאונך גם ל- $\overrightarrow{BC}$.

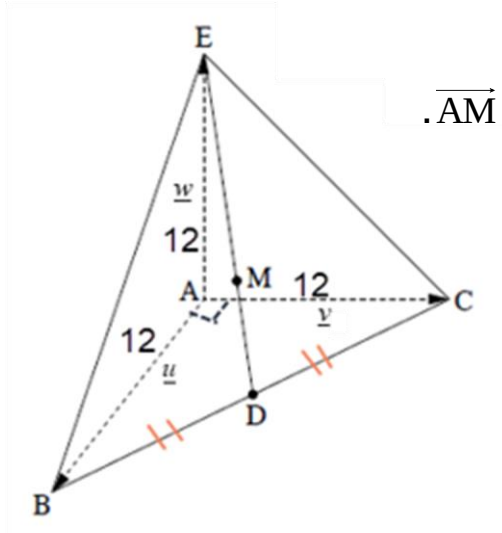
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}\right) \cdot (-\underline{u} + \underline{v}) = -\frac{1}{3}\underline{u}^2 + \frac{1}{3}\underline{v}^2$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3} \cdot 144 + \frac{1}{3} \cdot 144 = 0 \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}}$$

מכיוון ו- $\overrightarrow{AM}$ מאונך לשני וקטורים שאינם תלויים זה בזה (אינם קולינאריים) במישור BEC,

הרי שהוא מאונך למישור.

תשובה: הוכחנו כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך למישור BEC.



ג. נתון: הקודקוד $A(0, 0, 0)$ כלומר הוא בראשית הצירים.

(1) הקודקוד B מונח על החלק החיובי של ציר ה- x , כאשר $AB = |\underline{u}| = 12$, ולכן $B(12, 0, 0)$.

הקודקוד C מונח על החלק החיובי של ציר ה- y , כאשר $AC = |\underline{v}| = 12$, ולכן $C(0, 12, 0)$.

הקודקוד E מונח על החלק החיובי של ציר ה- z , כאשר $AE = |\underline{w}| = 12$, ולכן $E(0, 0, 12)$.

תשובה: $B(12, 0, 0)$, $C(0, 12, 0)$, $E(0, 0, 12)$.

(2) נמצא את שיעורי הנקודות D ו- M .

על פי נוסחת אמצע קטע BC :

$$D\left(\frac{12+0}{2}, \frac{0+12}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

$$\boxed{D(6, 6, 0)}$$

נמצא את שיעורי הנקודה M .

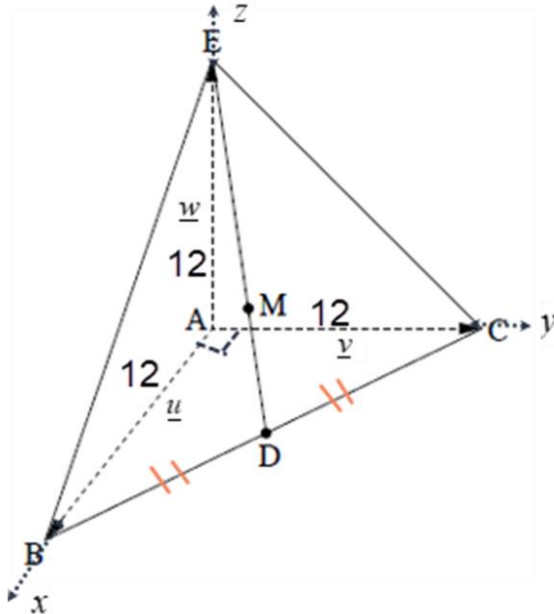
$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{ED}$$

$$\overrightarrow{ED} = \underline{D} - \underline{E} = \underline{x} = (6, 6, -12)$$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} (6, 6, -12) = \underline{x} = (4, 4, -8)$$

$$\underline{M} = \underline{(0, 0, 12)} + \underline{(4, 4, -8)}$$

$$\boxed{M(4, 4, 4)}$$



תשובה: $M(4, 4, 4)$, $D(6, 6, 0)$.

ד. נחשב את שטח המשולש AMD .

הוכחנו כי $\overrightarrow{AM}$ מאונך ל- $\overrightarrow{ED}$, ולכן זהו משולש ישר זווית ($\angle AMD = 90^\circ$).

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2 + (4-0)^2} \rightarrow |\overrightarrow{AM}| = 4\sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{DM}| = \sqrt{(4-6)^2 + (4-6)^2 + (4-0)^2} \rightarrow |\overrightarrow{DM}| = 2\sqrt{6}$$

$$S_{\triangle AMD} = \frac{AM \cdot DM}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{2}$$

$$\boxed{S_{\triangle AMD} = 12\sqrt{2} \approx 16.97}$$

תשובה: שטח המשולש AMD הוא $12\sqrt{2} \approx 16.97$.

א. באותו יום שתלו במשתלה א' 600 צמחים ובמשתלה ב' שתלו a צמחים.

מספר הצמחים במשתלה א' גדל ב- 5% בכל שבוע, ולכן $q = \frac{100+5}{100} = 1.05$ במשתלה זו.

מספר הצמחים במשתלה ב' גדל ב- 10% בכל שבוע, ולכן $q = \frac{100+10}{100} = 1.1$ במשתלה זו.

כעבור זמן מסוים מתחילת השנה היה מספר הצמחים במשתלה א' שווה למספר הצמחים המשתלה ב'. מכיוון שמקדם הגדילה במשתלה ב' גדול יותר, אז כמות הפרחים במשתלה זו גדלה מהר יותר, ומכאן שבתחילת השתילות היו בה פחות פרחים – פער שהלך והצטמצם מדי שבוע עד שהשתוו.

תשובה: טענה I. $a < 600$ נכונה.

ב. כעבור 17 שבועות מתחילת השתילה היה מספר הצמחים במשתלה ב' גדול פי 2.

ממספר הצמחים במשתלה א'.

נמצא את הערך של a .

$$2 \cdot 600 \cdot 1.05^{17} = a \cdot 1.1^{17} \quad / : 1.1^{17}$$

$$\frac{2 \cdot 600 \cdot 1.05^{17}}{1.1^{17}} = a$$

$$\boxed{a \approx 544}$$

תשובה: $a \approx 544$.

ג. כעבור 17 שבועות מתחילת השתילה בשתי המשתלות הפסיקו את השתילה והחלו למכור את הצמחים.

נרשום את מספר הצמחים ביום זה.

$$M_{17} = 600 \cdot 1.05^{17} \approx 1,375 \text{ במשתלה א'}$$

$$\text{במשתלה ב': } M_{17} = 544 \cdot 1.1^{17} \approx 2,750, \text{ בדיוק פי שנים מאלו שבמשתלה א' (סימן שצדקנו בסעיף ב).}$$

כעבור 5 שבועות מן היום שבו החלו למכור,

היה מספר הצמחים במשתלה ב' 53% ממספרם בתחילת המכירה.

$$2,750 \cdot q^5 = 0.53 \cdot 2,750 \quad / : 2,750$$

$$q^5 = 0.53$$

$$q = \sqrt[5]{0.53} = q_m$$

$$\boxed{q_m \approx 0.8808}$$

נמצא את אחוז הדעיכה השבועי.

$$0.8808 = \frac{100 - P}{100} \cdot 100$$

$$88.08 = 100 - P$$

$$\boxed{P = 11.92}$$

תשובה: מספר הצמחים במשתלה ב' קטן ה- 11.92% מדי שבוע.

ד. מאותו היום שבו החלו למכור, קטן מספר הצמחים במשתלה א' בכל שבוע ב- 8%.

$$q = \frac{100 - 8}{100} = 0.92 \text{ לכן}$$

נמצא כעבור כמה זמן מן היום שהו החלו למכור, היה מספר הצמחים במשתלה א', שווה למספר הצמחים במשתלה ב'.

$$1,375 \cdot 0.92^t = 2,750 \cdot 0.8808^t \quad / : 2,750 \cdot 0.92^t$$

$$0.5 = \frac{0.8808^t}{0.92^t}$$

$$0.5 = \left(\frac{0.8808}{0.92}\right)^t$$

$$0.5 = 0.9574^t$$

$$\ln 0.5 = \ln 0.9574^t$$

$$\ln 0.5 = t \cdot \ln 0.9574$$

$$t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.9574}$$

$$\boxed{t \approx 15.92}$$

תשובה: כעבור כ- 16 שבועות מן היום שבו החלו למכור, היה מספר הצמחים בשתי המשתלות שווה.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + a}$, a הוא פרמטר.

לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה היא $x = 2$, לכן $x = 2$ מאפס את המכנה.

$$2^2 - 4 \cdot 2 + a = 0 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

תשובה: $a = 4$.

ב. נציב $a = 4$ ונקבל $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + 4}$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$x^2 - 4x + 4 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \neq 2$.

(2) המונה e^{2x} חיובי לכל x , וגם המכנה $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ חיובי לכל $x \neq 2$,

ולכן גם המנה חיובית בתחום ההגדרה ואין חיתוך עם ציר ה- x .

$$f(0) = \frac{e^{2 \cdot 0}}{0^2 - 4 \cdot 0 + 4} = 0.25 \rightarrow (0, 0.25)$$

וזו נקודת החיתוך עם ציר ה- y .

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך של עם הצירים הם $(0, 0.25)$..

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגה.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot (x^2 - 4x + 4) - (2x - 4) \cdot e^{2x}}{(x^2 - 4x + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot [2(x^2 - 4x + 4) - (2x - 4)]}{(x^2 - 4x + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2x^2 - 8x + 8 - 2x + 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{2x}(2x^2 - 10x + 12)}{(x^2 - 4x + 4)^2}}$$

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x = 3, \cancel{x = 2}$$

$$x = 3 \rightarrow y = \frac{e^{2 \cdot 3}}{3^2 - 4 \cdot 3 + 4} = e^6$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2.5) < 0 \\ f'(4) > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{(3, e^6), \min}$$

תשובה: $(3, e^6)$, מינימום.

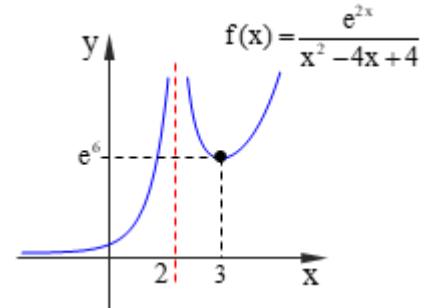
ג. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(1.5) > 0$ ולכן בתחום $x < 2$ הפונקציה עולה.

שתי הצבות מומלצות לפני הסרטוט.

ואין אסימפטוטה אופקית לימין $f(10) = 7,580,706 \rightarrow +\infty$

$f(-10) = 1.43 \cdot 10^{-11} \rightarrow 0$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.



תודה לחברי לדרך סרור אסעד

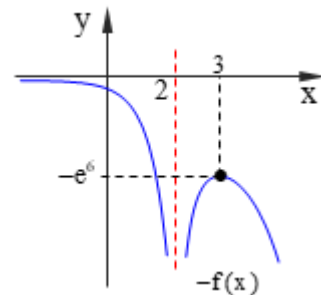
תשובה הסרטוט מעל.

ד. נתונה הפונקציה $h(x) = -f(x) + e^8$, k הוא פרמטר,

שהיא טרנספורמציה בשני שלבים של $f(x)$.

• $-f(x)$ סיבוב סביב ציר ה- x , כאשר $(3, -e^6)$ נקודת מקסימום,

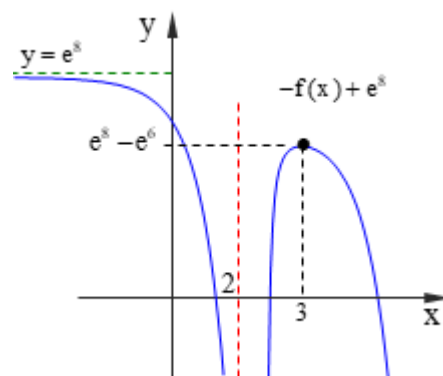
ומשמאל לאסימפטוטה $x=2$ נקבל שהפונקציה יורדת, מתחת ל- $y=0$.



• $-f(x) + e^8$ תזוזה אנכית e^8 יחידות כלפי מעלה, כאשר $(3, -e^6 + e^8 \approx 2,578)$ נקודת מקסימום,

ונקבל שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x מימין לאסימפטוטה $x=2$.

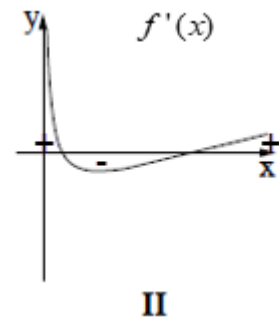
ובנוסף תהייה אסימפטוטה אופקית $y=e^8$ לשמאל, ולכן נקבל עוד נקודת חיתוך משמאל ל- $x=2$.



תשובה: לגרף הפונקציה $h(x)$ יש 3 נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

בגרות פה מאי 25 מועד קיץ א שאלון 35472

- א. הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות בתחום $x > 0$.
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום אחת בלבד, ונקודת מקסימום אחת בלבד,
כאשר נקודת המינימום נמצאת מימין לנקודת המקסימום.
בנקודת המקסימום הנגזרת עוברת משליליות לשליליות, ובנקודת המינימום משליליות לחיוביות,
ולכן גרף II הוא המתאים.



- תשובה: גרף II ממתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
ב. נתון כי $f(x) = 3x \cdot (\ln x)^2$, המוגדרת בתחום $x > 0$.
(1) בנקודת חיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$:
 $3x = 0 \rightarrow \cancel{x=0}$
 $(\ln x)^2 = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
(הפתרון נפסל כי אינו בתחום ההגדרה).
תשובה: נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים היא $(1, 0)$.

- (2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן נרשום בהתאם לנתון בתחילת השאלה.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x \cdot (\ln x)^2 \\ f'(x) &= 3 \cdot (\ln x)^2 + 3x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \\ f'(x) &= 3 \cdot (\ln x)^2 + \cancel{6} \cdot \ln x \cdot \cancel{x} \\ f'(x) &= 3 \ln x \cdot (\ln x + 2) \\ \ln x &= 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0) \\ \ln x &= -2 \rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \rightarrow y = 3 \cdot \frac{1}{e^2} \cdot (\ln \frac{1}{e^2})^2 = \frac{12}{e^2} \rightarrow (\frac{1}{e^2}, \frac{12}{e^2}) \\ \frac{1}{e^2} &< 1 \rightarrow (\frac{1}{e^2}, \frac{12}{e^2}), \max, (1, 0), \min \end{aligned}$$

תשובה: $(1, 0)$ מינימום, $(\frac{1}{e^2}, \frac{12}{e^2})$ מקסימום.

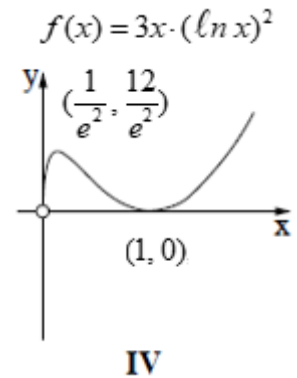
ג. שתי הצבות מומלצות לפני זיהוי הסרטוט המתאים.

$f(0.0000002) = 7.8 \cdot 10^{-5} \rightarrow 0$ והגרף שואף לנקודה הריקה $(0, 0)$ בראשית הצירים.

$f(100) = 6,362 \rightarrow +\infty$ ואין אסימפטוטה אופקית לימין.

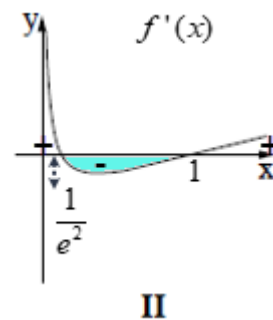
הגרף המתאים הוא גרף IV על פי הנקודה הריקה $(0, 0)$,

ומיקום נקודת המקסימום משמאל לנקודת המינימום שעל ציר ה- x .



תשובה: גרף IV הוא גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x (צבוע בירוק).



$$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^1 (0 - f'(x)) dx = -f(x) \Big|_{\frac{1}{e^2}}^1$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \quad -f(1)=0 \\ x=\frac{1}{e^2} \quad -f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{12}{e^2} \end{array} \right\} S = 0 - \left(-\frac{12}{e^2}\right) \rightarrow \boxed{S = \frac{12}{e^2} \approx 1.624}$$

תשובה: השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x , הוא $\frac{12}{e^2} \approx 1.624$.