



פתרון הבחינה במתמטיקה

קיצ' תשפ"ה, 2025, שאלון 35571, מועד א, גרסה 06:
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"





1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 90^2$.

א/(1) נקודות יאר נכונות ה' צנה עבור $n=1$:

$$(2 \cdot 1)^2 = \frac{2 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) \cdot (1 + 1)}{3}$$

$$2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{3}$$

$$4 = 4 \quad \checkmark$$

ה' צנה נכונה עבור $n=1$ ^{אכן}

נניח יאר נכונות ה' צנה עבור $n=k$ (k מספר טבעי)

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2k)^2 = \frac{2k \cdot (2k+1) \cdot (k+1)}{3}$$

נבדוק יאר נכונות ה' צנה עבור $n=k+1$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2k)^2 + (2 \cdot (k+1))^2 = \frac{2(k+1) \cdot (2(k+1)+1) \cdot (k+1+1)}{3}$$

$$\underbrace{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2k)^2}_{\text{ע"פ ההנחה}} + 4 \cdot (k+1)^2 = \frac{2(k+1)(2k+3)(k+2)}{3}$$

$$2k(2k+1)(k+1) + 12(k+1)^2 = 2(k+1)(2k+3)(k+2) \quad | :k+1 \neq 0$$



$$2k(2k+1) + 12(k+1) = 2(2k+3)(k+2)$$

$$4k^2 + 2k + 12k + 12 = 2 \cdot (2k^2 + 4k + 3k + 6)$$

$$4k^2 + 14k + 12 = 4k^2 + 8k + 6k + 12$$

$$0 = 0$$

הצגתה את נכונותה עקב $n = k+1$,
בהנחה שהיא נכונה עבור k , עבור כל k הבא:

ואכן, עבור n ארבעה אחרים, היא איננה נכונה.
הצגתה נכונה לכל k הבא.

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 90^2$.

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

אנחנו רוצים למצוא את n .

$$(2n)^2 = 90^2 \quad \text{כאשר}$$

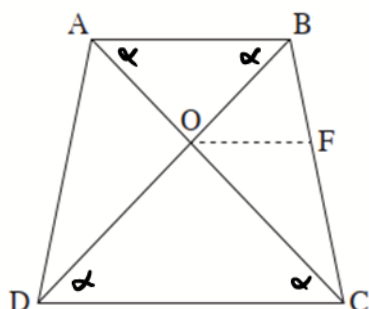
$$n = 45$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 90^2 = \frac{2 \cdot 45 \cdot (2 \cdot 45 + 1) \cdot (45 + 1)}{3}$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 90^2 = 125,580 - 2^2$$

ואכן הסכום הוא

$$125,576$$



ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.

נתון: $\angle BAO = \angle CDO$.

(1) הוכיחו כי הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים.

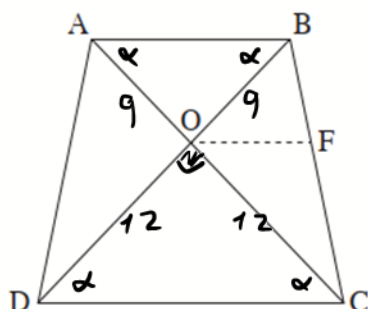
הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $BO = 9$, $DO = 12$.

(2) מצאו את אורך הקטע OF .

הוכחה	נתיב	הוכחה (1)
1	נתון	$AB \parallel CD$
2	נתון + סימון	$\angle BAO = \angle CDO = \alpha$
3	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים	$\angle ABO = \angle DCO = \alpha$
4	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים	$\angle CDO = \angle ABO = \alpha$
5	צלע אחת שווה מול זוויות שוות במשולש ABO (3)	$OA = OB$
6	צלע אחת שווה מול זוויות שוות במשולש DCO (4)	$OC = OD$
7	תיבה 7 (צלע שווה) (5, 6)	$AC = BD$
8	לרבע בעל אלכסונים שווים קנה לרבע שווה שוקיים	$ABCD$ לרבע שווה שוקיים נ.ע.ל. (1)





ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.

נתון: $\angle BAO = \angle CDO$.

(1) הוכיחו כי הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים.

הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $BO = 9$, $DO = 12$.

(2) מצאו את אורך הקטע OF .

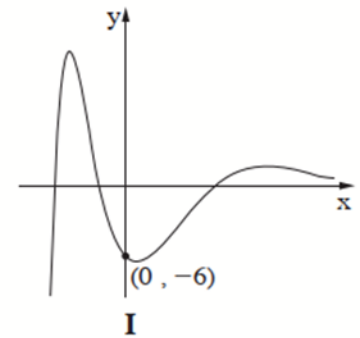
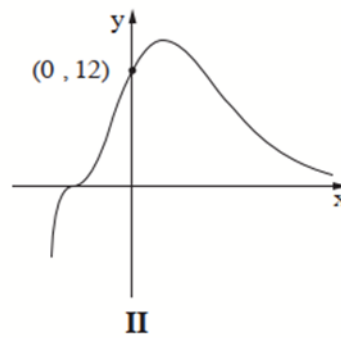
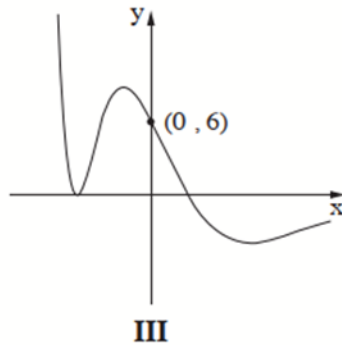
ה (2)

נדרש	נדרש	נדרש
נ"ן	$OF \parallel AB \parallel DC$	9
נ"ן	$AC \perp BD$	10
נ"ן	$BO = 9$, $DO = 12$	11
לצורך 11 ו-6	$OD = OC = 12$	12
משפט פיתגורס במשולש DOC (10)	$DC^2 = 12^2 + 12^2$	13
	$DC = 12\sqrt{2}$	
חיבור קצרים (11)	$BD = 21$	14
משפט חצייתם המנכרת (9)	$\frac{OF}{DC} = \frac{BO}{BD}$	15
	$\frac{OF}{12\sqrt{2}} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$	
	$OF = \frac{36\sqrt{2}}{7}$	





- ג. הפונקצייה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x .
לפניכם שלושה גרפים I–III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$, אחד את פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.
בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x .
על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y .



- (1) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה. נמקו את תשובתכם.
(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.
שיעורי נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הם $(a, 15)$.
(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקצייה $f''(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- y .

ע(1)

עכ"פ I - $f''(x)$, עכ"פ II - $f(x)$, עכ"פ III - $f'(x)$

נקודות החיתוך של עכ"פ I עם ציר ה- x (נקודות
המחיצה סימן) מתאימות בנקודות היחס, לנקודות
הקיצון של עכ"פ III (וואונן מתאימות לנקודות הקיצון
של עכ"פ II). נכון, תחילה השליש והחיתוך של עכ"פ I
תואמת מתחילה הצלחה והיכרות של עכ"פ III.
אכן - עכ"פ I הוא עכ"פ הנגזרת של עכ"פ II.





נקודת החיתוך של f עם x היא נקודת קיצון
של f אם ורק אם הנגזרת f' היא 0 או איננה
מתקיימת בזה. איבואר אפס סאינה נק' קיצון.
מכאן שהיא f היא f' הנגזרת של f היא 0 .
אם f היא f' הנגזרת של f היא 0 או f' היא 0
ואכן $f' = 0$, $f' = 0$, $f' = 0$

ג(2) שאלה נקודת פירוק.

יש שאלה נקודת קיצון f היא f . הנקודה קיצון f היא f
הנגזרת הסגורה f' היא f' הנגזרת הסגורה f' ,
כי f' היא f' הנגזרת של f .
ואכן יש שאלה נקודת פירוק f היא f .



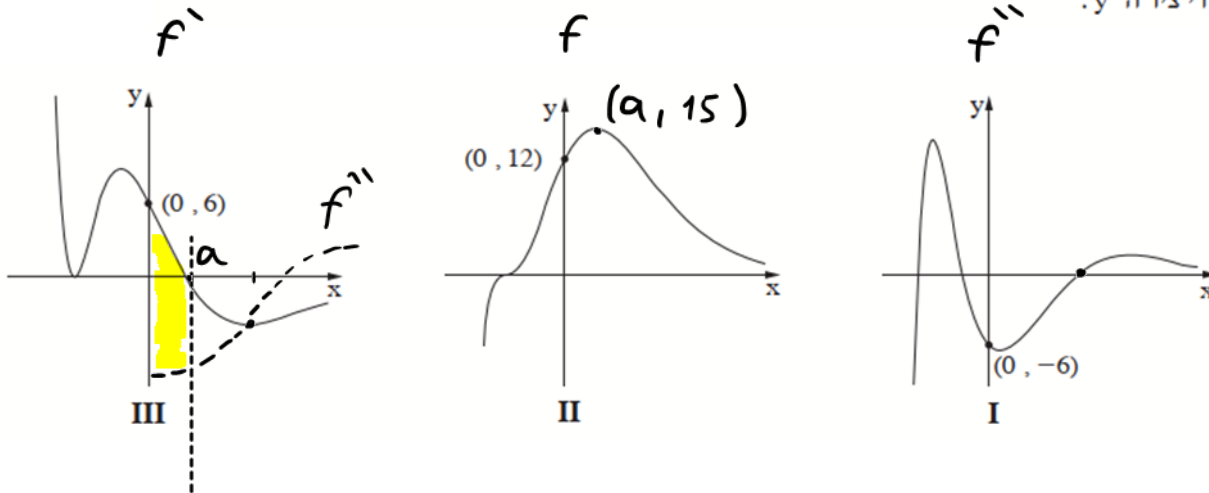


שיעורי נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הם $(a, 15)$.

(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקצייה $f''(x)$, על ידי הישר $x = a$

ועל ידי ציר ה- y .

ג (3)



$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^a (f'(x) - f''(x)) dx = [f(x) - f'(x)] \Big|_0^a \\
 &= (f(a) - f'(a)) - (f(0) - f'(0)) = \\
 &= (15 - 0) - (12 - 6) = 15 - 6 = 9
 \end{aligned}$$

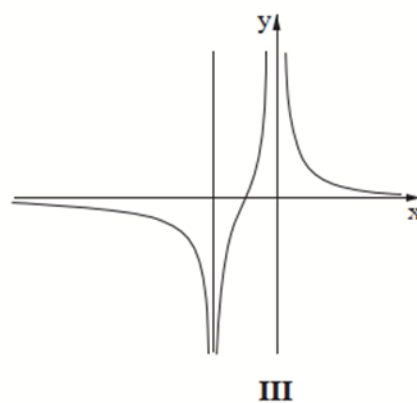
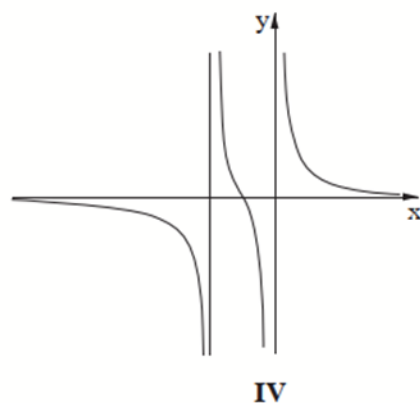
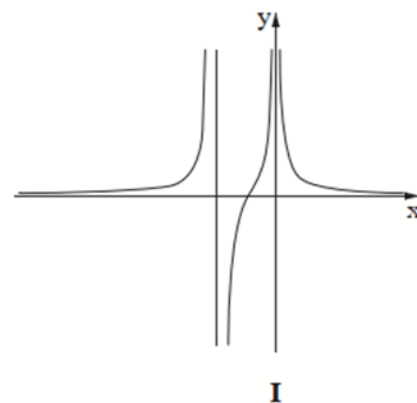
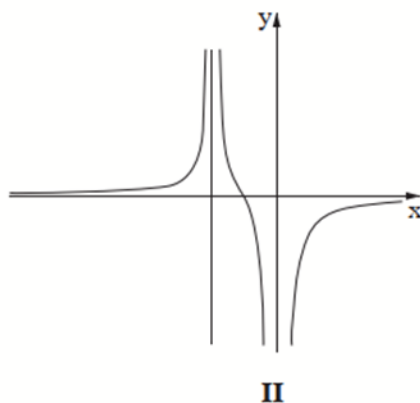
$$S = 9$$





ד. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$, המוגדרת בתחום $x \neq -2, x \neq 0$.

- (1) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) קבעו איזה מן הגרפים IV-I שלפניכם מתאר את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.
- (3) חשבו את השטח הכלוא על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 3$.



$$f(x) = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}, \quad x \neq 0, x \neq -2$$

$$\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} = 0$$

$$x = -1$$

x	-2	-1	0
f	-	0	+

$$-1 < x < 0, x > 0$$

ד(1)

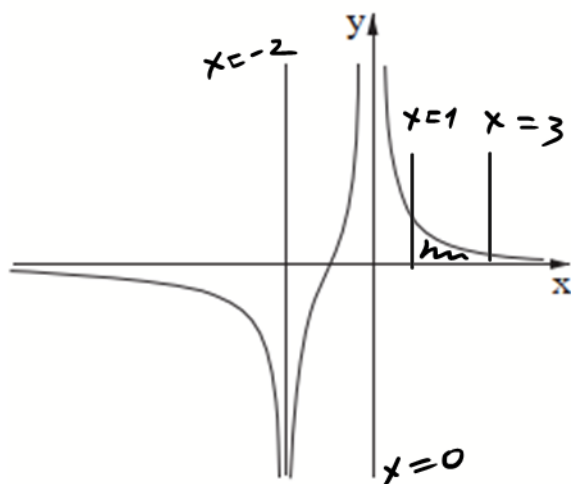
תחומי חיוביות



היחידה פורמליזם וסימנים בלבד לא צוין.

III 4-2 (2) T

(3) חשבו את השטח הכלוא על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=3$.



III



$$\int (f'(x)) \cdot (f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

$$S = \int_1^3 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} dx \quad (3) T$$

$$= \int_1^3 (2x+2)(x^2+2x)^{-2} dx$$

$$= \left[\frac{(x^2+2x)^{-1}}{-1} \right]_1^3$$

$$= \left. \frac{-1}{x^2+2x} \right|_1^3$$

$$= \frac{-1}{9+6} - \frac{-1}{1+2}$$

$$= -\frac{1}{15} + \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

$$S = \frac{4}{15}$$



2. נתונה סדרה הנדסית אינסופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$.

$$\text{נתון: } \frac{a_4}{a_2} = 4, 2a_2 + 8 = a_4.$$

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אינסופית חדשה B.

$$\text{נתון כי איברי הסדרה B מקיימים } b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אינסופית נוספת C.

איברי הסדרה C הם: $\dots, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_1 \cdot a_2}$. $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. (1) מצאו את מנת הסדרה C.

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B, וב- S_C את סכום הסדרה C.

$$\text{נתון: } S_C = 12 \cdot S_B.$$

ד. מצאו את הערך של k.

נתונה סדרה הנדסית אינסופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$.

$$\text{נתון: } \frac{a_4}{a_2} = 4, 2a_2 + 8 = a_4.$$

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

$$\text{I } 2a_2 + 8 = a_4 \rightarrow 2a_1q + 8 = a_1q^3 \rightarrow 8 = a_1q(q^2 - 2)$$

$$\text{II } \frac{a_4}{a_2} = 4 \rightarrow \frac{a_1q^3}{a_1q} = 4 \rightarrow q^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} q = 2 \rightarrow a_1 = 2 \\ q = -2 \rightarrow a_1 = -2 \end{cases}$$

$$a_3 = a_1q^2 \rightarrow \boxed{a_3 = \pm 8}$$



נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אינסופית חדשה B.

נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

מאתר והסדרה אנני עזאזי ואנני יורג נסיך ע: $a_1 = -2$, $q = -2$

כעור נראה ע: $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ נמן קבוע.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}}{\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4} = Q_b$$

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אינסופית נוספת C.

איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \dots$ $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג. (1) מצאו את מנת הסדרה C.

$$Q_c = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{k}{a_3 \cdot a_4}}{\frac{k}{a_1 \cdot a_2}} = \frac{a_1 \cdot a_2}{a_3 \cdot a_4} = \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{16} = Q_c$$

(2) מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

מאתר והסדרה C בין 0 ו-1, רק אם C_1 יהיה שלילי הסדרה תעלה. אם C_1 יהיה חיובי הסדרה תרד. / צוה: $C_1 < 0$

$$\frac{k}{a_1 \cdot a_2} < 0 \rightarrow \frac{k}{-2 \cdot 4} < 0 \rightarrow k > 0$$



נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B, וב- S_C את סכום הסדרה C.

נתון: $S_C = 12 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k.

$$S_C = 12S_B$$

$$\frac{-\frac{k}{8}}{1 - \frac{1}{16}} = 12 \cdot \frac{-\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{-\frac{k}{8}}{\frac{15}{16}} = \frac{-\frac{12}{8}}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{-16k}{15 \cdot 8} = \frac{-12 \cdot 4}{8 \cdot 3}$$

$$\frac{2k}{15} = 2$$

$$k = 15$$

C	B	
$-\frac{k}{8}$	$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} = -\frac{1}{8}$	I א' בר
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	ג/√



3. במדינה גדולה התקיימו בחירות. המצביעים בבחירות אלה יכולים להצביע למפלגה א' או למפלגה ב' בלבד. נסמן ב- P את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע למפלגה א' ($0 < P < 1$).
בוחרים באקראי 3 מצביעים.
נתון כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע למפלגה א' גדולה פי 2 מן ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב'.
א. מצאו את הערך של P .
בוחרים באקראי 4 מצביעים.
ב. ידוע כי ארבעתם הצביעו לאותה המפלגה. מהי ההסתברות שהם הצביעו למפלגה א'?
חלק מן המצביעים הם מבוגרים והשאר צעירים.
נתון כי 49% מן המצביעים המבוגרים הצביעו למפלגה ב' ו-18% מן המצביעים הצעירים הצביעו למפלגה א'.
ג. מהי ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר אחד מבין כל המצביעים?
לאחר הבחירות נערך סקר טלפוני בקרב המצביעים. דני, אחד הסוקרים, התקשר באקראי למצביעים צעירים בלבד. הוא התקשר אליהם בזה אחר זה והפסיק מייד לאחר שריאיון צעיר אחד שהצביע למפלגה אחת וצעיר נוסף שהצביע למפלגה האחרת.
ד. מהי ההסתברות שדני התקשר ל-5 צעירים בדיוק?

3(א)

$$p_2(1) = 2(1-p)^3$$

$$\binom{3}{1} p(1-p)^2 = 2(1-p)^3 \quad | : (1-p)^2 \neq 0 \quad (0 < p < 1)$$

$$3p = 2(1-p)$$

$$3p = 2 - 2p$$

$$5p = 2 \rightarrow p = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{p = 0.4}$$

3(ב)

$$P\left(\frac{\text{קצת יותר מ-18\%}}{\text{מבוגרים}} \mid \frac{\text{קצת יותר מ-49\%}}{\text{צעירים}}\right) \rightarrow \frac{P\left(\frac{\text{קצת יותר מ-18\%}}{\text{מבוגרים}}\right) \cap P\left(\frac{\text{קצת יותר מ-49\%}}{\text{צעירים}}\right)}{P\left(\frac{\text{קצת יותר מ-18\%}}{\text{מבוגרים}} \cup \frac{\text{קצת יותר מ-49\%}}{\text{צעירים}}\right)} \rightarrow \frac{0.4^4}{0.4^4 + 0.6^4}$$

WWW.GEVA.CO.IL | 1-800-20-40-60 | פסיכומטרי, בגרות, GMAT



4. בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r.

הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.

הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K.

הנקודה E נמצאת על המעגל הקטן בתוך המשולש KAO.

א. הוכיחו כי $\angle AOE = 2\angle KAE$.

המשך הקטע AE חותך את הקטע OK בנקודה M.

נתון כי הנקודה M היא אמצע הקטע OK.

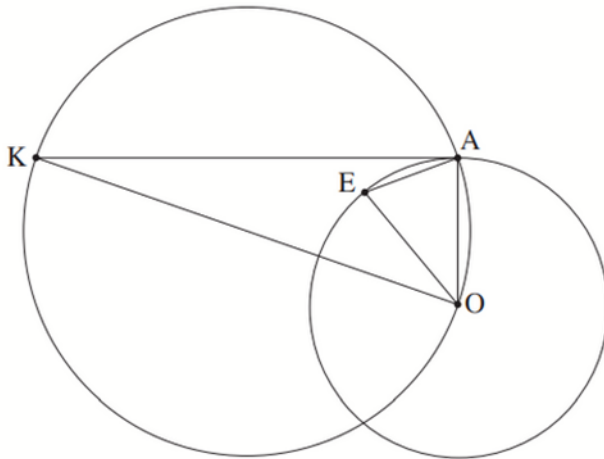
ב. הוכיחו כי הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

ג. הוכיחו כי $\triangle MOA \sim \triangle OEA$.

נתון: $R = 1.5r$.

נסמן ב-S את שטח המשולש MEO.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש OKA.



פתרון: (שיטות עם תוספות בסוף הפתרון)

המספר	טענה	נימוק
①	O היא מרכז המעגל הגדול	נתון
②	KA משיק למעגל הקטן	נתון
③	E היא המעגל הקטן	נתון
④	A נהוגת חיתוך של שני המעגלים	נתון
⑤	AO רדיוס במעגל הקטן	כפי ש
⑥	$\angle KAO = 90^\circ$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת החיתוך ההשקה לפי 5, 2



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה 

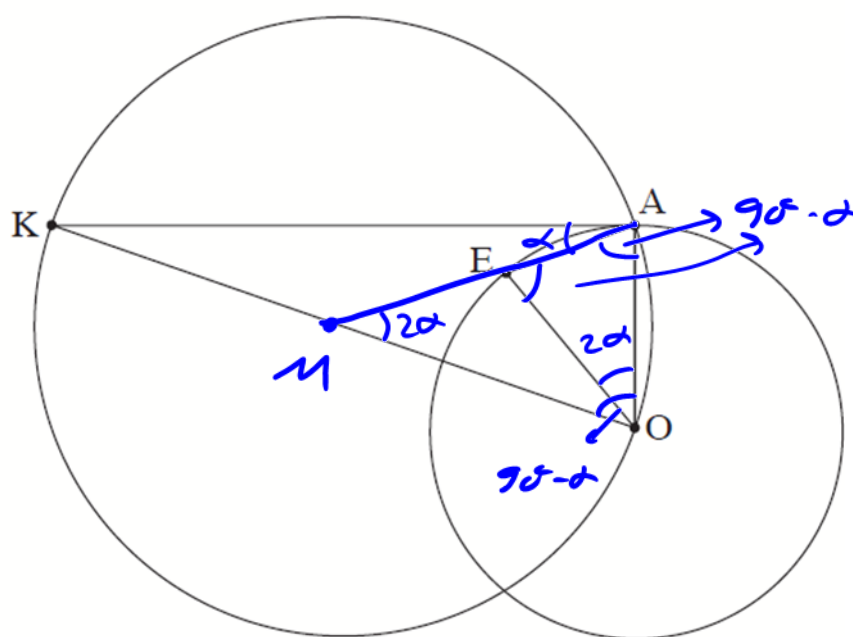


הנחם פר	לוח	נימוק
(17)	$\$MAU = \$EAU = 90 - 2$	כל לוח ש/ה אקטיו
(18)	$AM = OM = R$	לפי 16
(19)	$\$AOM = \$MAU = 90 - 2$	הזזת צלע נ"ל במשולש מסמך מיוחד ש/ו"ל נ"ל. לפי 17, 18
(20)	$\$AOM = \$AEO = 90 - 2$	לפי 19, 20
(21)	$\triangle MOA \sim \triangle OEA$ נ.ש.ל. ז'	משפט דמיון ז.ז. לפי 17, 20
(22)	$R = 1.5r$	נ"ל
(23)	$S_{\triangle MOE} = S$	נ"ל
(24)	$\frac{MO}{OE} = \frac{MA}{OA} = \frac{OA}{EA}$	יחס הזלע המתאימה במשולשים הדומים. לפי 22
(25)	$MO = R = 1.5r$	לפי 22, 23
(26)	$\frac{MO}{OE} = \frac{1.5r}{r} = 1.5$	חיסוק. לפי 25, 26
(27)	$\frac{S_{MOA}}{S_{OEA}} = 1.5^2 = 2.25$	יחס השטחים של משולשים דומים ש/ה יחס הזלע המתאימה בקיבוצי.
(28)	$S_{OEA} + S_{MOE} = S_{MOA}$	לפי 26, 27 חיבור שטחים





המסבר	לענה	נימוק
(29)	$S_{OEA} = 0.8$	חשיב. אבי 28, 27, 23
(30)	$S_{MOA} = 1.8$	חיבור שטחים. אבי 29, 23
(31)	מא תיבון 35 אק במשולש OKA	הגדרת תיבון. אבי 14
(32)	$S_{AKA} = S_{MOA} = 1.8$	תיבון מהלך משולש אס' משולש-ק שווה בשטח
(33)	$S_{OKA} = 3.6$ נ.ש. 3	חיבור שטחים





$$1 - x = 0.6 - 0.4x + 0.18 - 0.18x$$

$$0.22 = 0.35x$$

$$x = \frac{2}{3}$$

3(א) $p(\bar{B}) = \frac{1}{3}$

3(ב)

אני הנמן

הסתברות ארצות אמסלזי א
הצעות היא 0.18, מכאן
שבהסתברות ארצות אמסלזי 0.82
היא 0.82

האנציה אצרה אחי חשיב צעיר
בחקרה זה, זה או 4 אנציות אמסלזי
אך בזה את וגחמישי אמסלזי 0.18
אנין וכן:

	אמסלזי $\bar{A}$	אמסלזי A	
אקראי $\frac{2}{3}$	$\frac{49}{150}$	$\frac{17}{50}$	B
אקראי $\frac{1}{3}$	$\frac{4}{150}$	$\frac{3}{50}$	$\bar{B}$
1	0.6	0.4	

$$p(\text{קצור } S-\bar{S} \text{ צעיר}) = 0.18 \cdot 0.82 + 0.82 \cdot 0.18 = 0.08224$$





5. במשולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט).

נסמן: $\angle ACB = 2\alpha$.

א. (1) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הקטע CO .

(2) הביעו באמצעות r ו- α את אורך הצלע AC .

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO .

ב. מצאו את הערך של α .

הציבו $\alpha = 30^\circ$ וענו על הסעיפים ג-ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K .

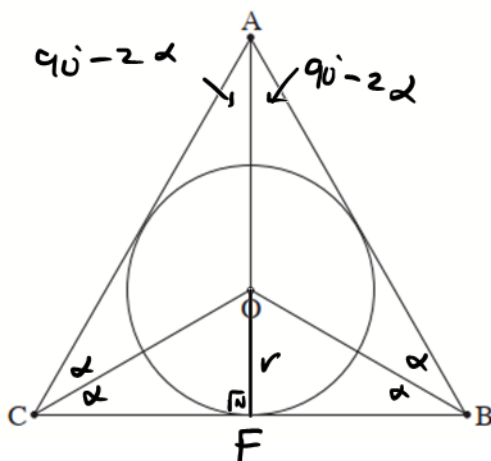
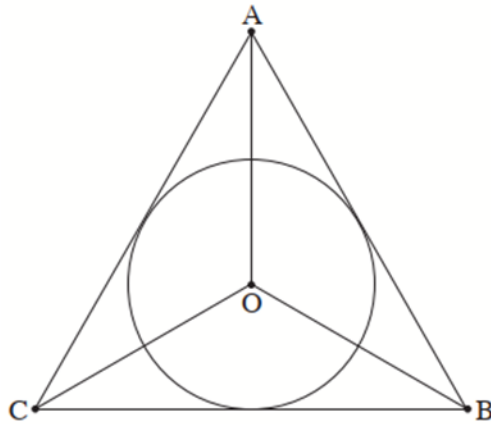
נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{63}$.

ג. מצאו את הערך של r .

הנקודה E נמצאת על הצלע CB .

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 6.

ד. חשבו את אורך הקטע BE .



במשולש ABC :

$$\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha$$

$$\angle BAO = \angle CAO = 90^\circ - 2\alpha$$

$\triangle COF$:

$$\frac{r}{CO} = \sin \alpha$$

$$CO = \frac{r}{\sin \alpha}$$

במשולש ABC שווה שוקיים

זווית הבסיס $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha$

$$\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$$

מכיון שהמסלול הנחשב הוא

הוא נכנס תחת זווית המשולש

$$\angle ACO = \angle BCO = \angle ABO = \angle CBO = \alpha$$

נמנה נת' F נת' הסדר BC נמצא.

$$OF \perp BC, OF = r$$

כדיים קמאלוק למסין BC בנק' תהסר.

א(1)





(2) k

$$\Delta ACO: \angle AOC = 180 - (90 - 2\alpha) - \alpha$$

$$= 90 + \alpha$$

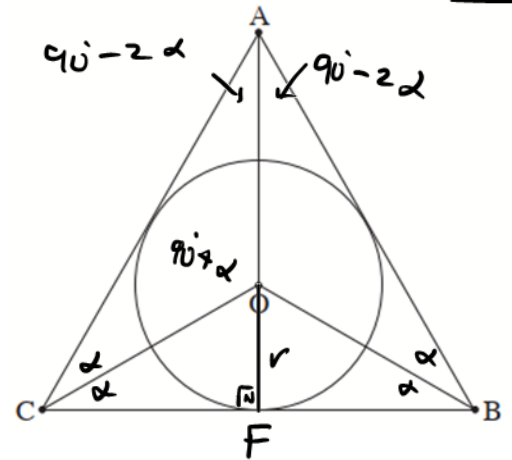
$$\frac{AC}{\sin(90 + \alpha)} = \frac{CO}{\sin(90 - 2\alpha)}$$

$$\frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{CO}{\cos 2\alpha}$$

$$AC \cdot \cos 2\alpha = CO \cdot \cos \alpha$$

$$AC = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \cdot CO$$

$$AC = \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{r}{\sin \alpha}$$



$$AC = \frac{r \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}$$

$$AC = \sqrt{3} \cdot CO$$

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO.
ב. מצאו את הערך של α .

$$\frac{r \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{3} \cdot r}{\sin \alpha} \quad \left| : \frac{r}{\sin \alpha} \right.$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \sqrt{3} \quad t = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3} (2 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$t = 2\sqrt{3} t^2 - \sqrt{3}$$

$$0 = 2\sqrt{3} t^2 - t - \sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

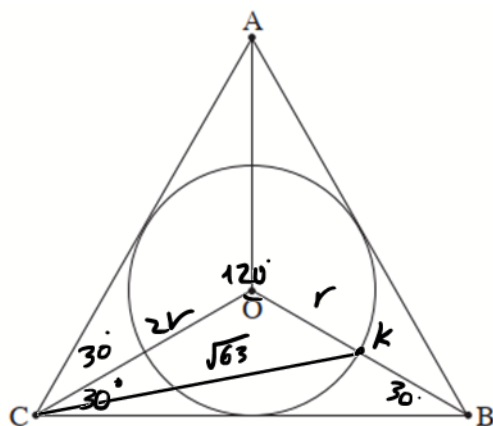
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 125.3^\circ$$

כי, $\cos$
 $4\alpha < 180^\circ$

$$\alpha = 30^\circ$$





הציבו $\alpha = 30^\circ$ וענו על הסעיפים ג-ד.

המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K.

נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{63}$.

ג. מצאו את הערך של r.

$$CO = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r$$

$$\triangle CKO: \angle KOC = 180^\circ - 2\alpha = 120^\circ$$

$$\sqrt{63}^2 = r^2 + (2r)^2 - 2 \cdot r \cdot 2r \cdot \cos 120^\circ$$

$$63 = 5r^2 - 4r^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5r^2 + 2r^2 = 7r^2$$

$$7r^2 = 63$$

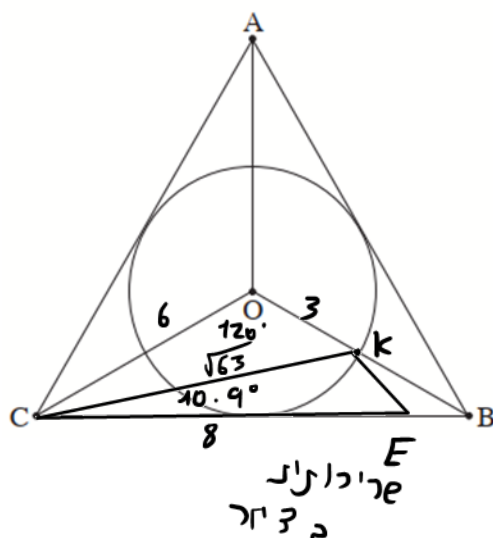
$$r^2 = 9$$

$$r = 3$$

הנקודה E נמצאת על הצלע CB.

נתון כי שטח המשולש CKE הוא 6.

ד. חשבו את אורך הקטע BE.



$$\triangle CKO: \frac{3}{\sin \angle C} = \frac{\sqrt{63}}{\sin 120^\circ}$$

$$\sin \angle C = \frac{3 \sin 120^\circ}{\sqrt{63}}$$

$$\angle OCK = 19.1^\circ$$

$$\angle KCB = 30^\circ - 19.1^\circ = 10.9^\circ$$

$$\text{עבור } \angle = 30^\circ \text{ היתרון הוא } 3/4$$

$$\triangle CKE: \frac{\sqrt{63} \cdot CE \cdot \sin 10.9^\circ}{2} = 6$$

$$CE = \frac{12}{\sqrt{63} \sin 10.9^\circ} = 8$$

$$BC = AC = \frac{3 \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}$$

$$BC = 6\sqrt{3} = 10.39$$

$$BE = 6\sqrt{3} - 8 = 2.39$$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על הסעיפים א-ג. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

6k(1)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

יָקָן $x^2 - a^2 > 0$ $\rightarrow$ $\boxed{-a < x < a}$

6k(2)

$x = a$! $x = -a$ אסימפטוטי אנכי ולא אסימפטוטי אנכי

($a > 0$) ולכן אפילו אסימפטוטי: $\boxed{x = a, x = -a}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0}} = -1$$

אפילו אסימפטוטי: $\boxed{y = 1, y = -1}$

6ז.

(נכין כ"י: $-f(x) = f(-x)$)

$$-\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - a^2}}$$



$$-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

62.

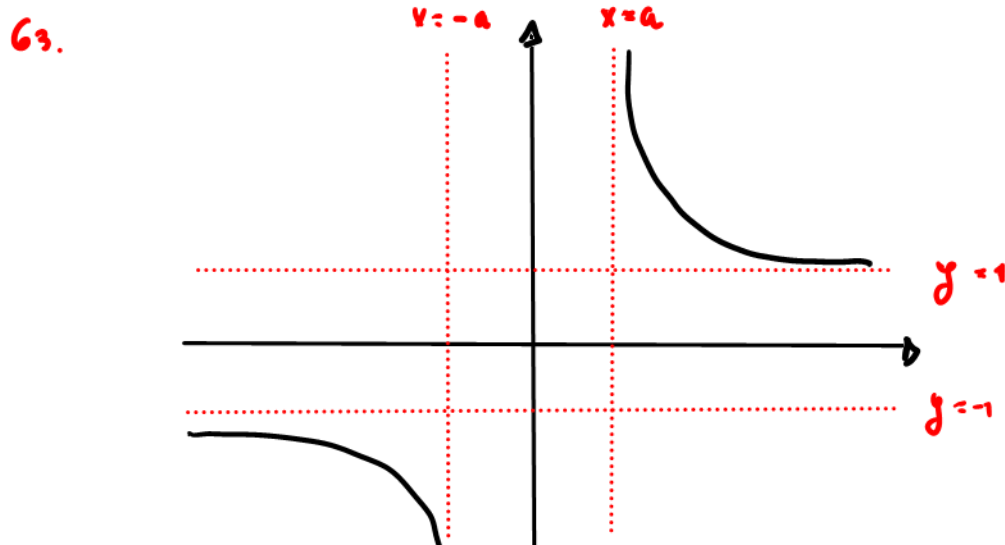
$$f'(x) = \frac{1(\sqrt{x^2-a^2}) - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2} \rightarrow \frac{\sqrt{x^2-a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}$$

$$f'(x) = \frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2} (x^2-a^2)}$$

הנהגות
הנהגות
הנהגות

קוצצית תמיד שלילית בתחום ההגדרה ולכן:

א: $x > a$
ב: $-a > x$



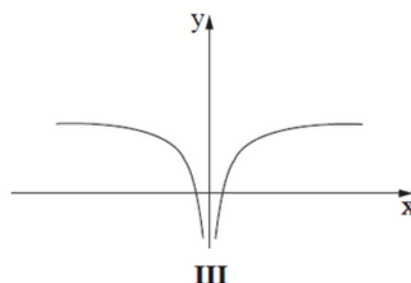
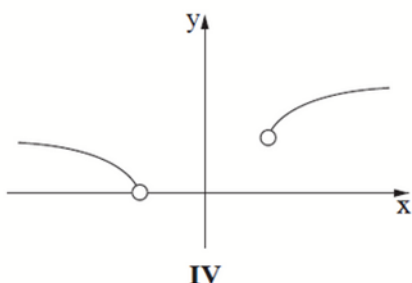
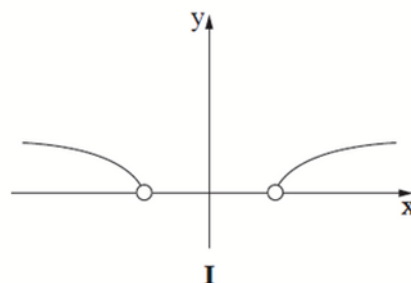
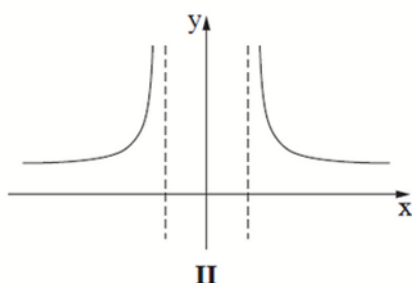


נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ה. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) קבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 2a$ ו- $x = 3a$ הוא 2.5. נ. מצאו את הערך של a .



חידה 6

$$g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{0 \cdot (f(x))^2 - 1 \cdot 2f(x)f'(x)}{[f(x)]^4}$$

$$g'(x) = \frac{-2f(x)f'(x)}{[f(x)]^4}$$

תמיד
חזיתי
וזין
אזכור
פשוט
למחזק
הגורם



$g'(x) < 0$: $f'(x) < 0$: $x < -a$ $\rightarrow$ $f(x)$ $\uparrow$ $\rightarrow$ $f(x)$ $\downarrow$

$$\frac{-2f(x)f'(x)}{[f(x)]^4} = 0 \rightarrow -2 \underset{\substack{\downarrow \\ \#}}{f(x)} \underset{\substack{\downarrow \\ \#}}{f'(x)} = 0$$

דוגמה 6

-∞ ! ∞ f(x) F(x) x=-a ! x=a , x > 0

(lim_{x→∞} \frac{1}{x} = 0) . f(x) g(x) פונקציה ופונקציה

אם f(x) וg(x) חזותיות על אותו קטע x אז x=-a ! x=a : f(x), g(x)





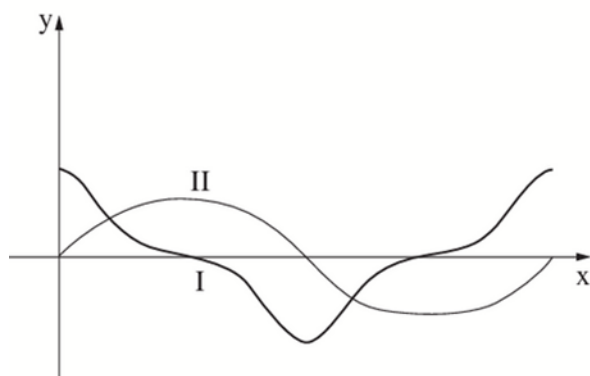
$$\int_{2a}^{3a} \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) dx \rightarrow \int_{2a}^{3a} (1 - a^2 x^{-2}) dx \rightarrow \left[x - a^2 \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{2a}^{3a}$$

$$x + \frac{a^2}{x} \Big|_{2a}^{3a} \rightarrow \left(3a + \frac{a^2}{3a}\right) - \left(2a + \frac{a^2}{2a}\right) = 2.5$$

$$3a + \frac{a}{3} - 2a - \frac{a}{2} = 2.5$$

$$\frac{5}{6}a = 2.5$$

$$a = 3$$



7. בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים, II-I, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$,

ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$.

הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.

א. קבעו איזה מן הגרפים II-I מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקצייה $g(x) = |f(x) - 0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

א. קבעו איזה מן הגרפים II-I מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעתכם.

ניתן לזהות הגרפים בין תחומי עליה וירידה של $f(x)$ ו- $f'(x)$

$$\begin{array}{l} f(x) - II \\ f'(x) - I \end{array}$$

נתון כי $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

$$0 = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} \rightarrow 0 = \sin x \rightarrow x = 0 + \pi k \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$(2\pi, 0) \quad (\pi, 0) \quad (0, 0)$$



(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$$f'(x) = \frac{\cos x (1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x & u' &= \cos x \\ v &= 1 + \sin^2 x & v' &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x (1 + \sin^2 x - 2 \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{\cos x (1 - \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{\cos^3 x}{(1 + \sin^2 x)^2} = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\min_{\text{בג}}$	$\nearrow$	$\max_{\text{בג}}$	$\searrow$	$\min_{\text{בג}}$	$\nearrow$	$\max_{\text{בג}}$

הצורה: כוכבי לכת
השדה למעלה הגדול
גזרים יחסיים.

$$\left(0, 0\right)_{\min}, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\max}, \left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right)_{\min}, \left(2\pi, 0\right)_{\max}$$

נתונה הפונקצייה $g(x) = |f(x) - 0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

$$0 = |f(x) - 0.4| \rightarrow 0 = f(x) - 0.4 \rightarrow f(x) = 0.4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} = 0.4 \rightarrow \sin x = 0.4 + 0.4 \sin^2 x \rightarrow 0.4 \sin^2 x - \sin x + 0.4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin x = 2 \quad (\text{בסג})$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

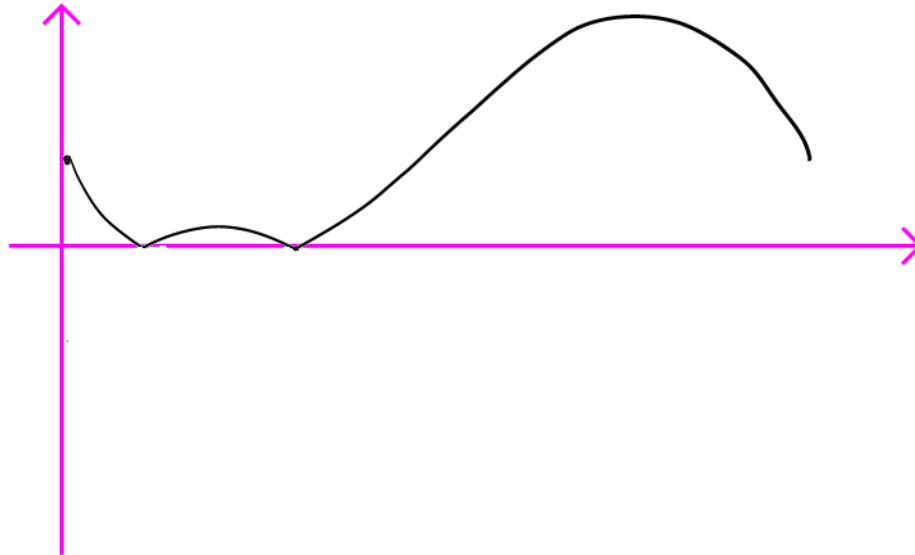
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6}, 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{5\pi}{6}, 0 \end{pmatrix}$$





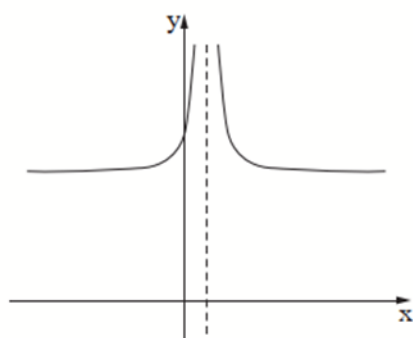
ד. (1) סרטוט סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.



(2) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

$$(0, 0.4) \max, \left(\frac{\pi}{6}, 0\right) \min, \left(\frac{\pi}{2}, 0.1\right) \max, \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right) \min, \left(\frac{3\pi}{2}, 0.9\right) \max, (2\pi, 0.4) \min$$





8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 6$.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, ושיעור ה- x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x=1$ בנקודה B.

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1, 0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB.

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0 + 6$$

ל

$$\begin{array}{l} x=1 \text{ אסימפּטוטה אנכית} \\ y=6 \text{ אסימפּטוטה אופקית} \end{array}$$

ב

$$y_c = f(2) = \frac{a}{(2-1)^2} + 6 = a + 6$$

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 6$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - a \cdot 2(x-1) \cdot 1}{((x-1)^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2a(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2a}{(x-1)^3}$$

מסלול המשיק

$$m = f'(2) = \frac{-2a}{1^3} = -2a$$

$$y - (a+6) = -2a(x-2)$$

$$y = -2ax + 4a + a + 6$$

$$y = -2ax + 5a + 6$$



המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x = 1$ בנקודה B .

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1, 0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB .

$$y = -2ax + 5a + 6$$

ח' ינק $x = 1$

$$y_B = -2a \cdot 1 + 5a + 6$$

$$= 3a + 6$$

$$B(1, 3a + 6)$$

ח' ינק x $0 = -2ax + 5a + 6$

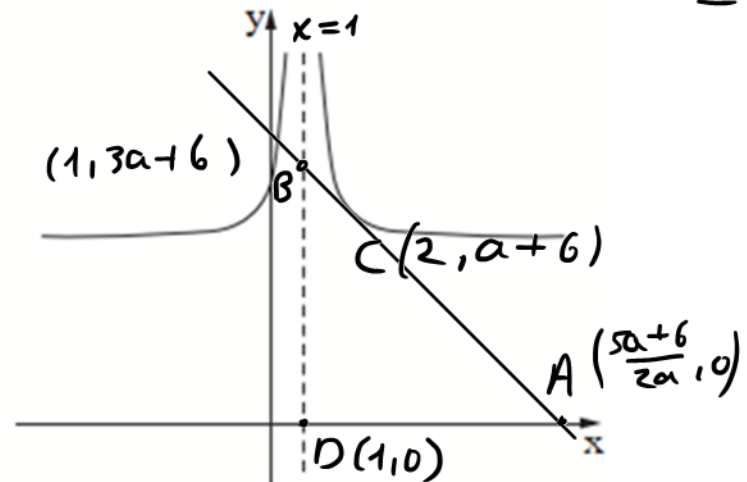
$$2ax = 5a + 6$$

$$x = \frac{5a + 6}{2a}$$

$$A\left(\frac{5a + 6}{2a}, 0\right)$$

$$BD = y_B - y_D = 3a + 6 - 0$$

$$BD = 3a + 6$$



$$AD = \frac{5a + 6}{2a} - 1$$

$$AD = \frac{5a + 6 - 2a}{2a}$$

$$AD = \frac{3a + 6}{2a}$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot (3a + 6) \cdot \frac{(3a + 6)}{2a} = \frac{3 \cdot (a + 2) \cdot 3 \cdot (a + 2)}{4a}$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{9}{4} \cdot \frac{(a + 2)^2}{a} = \frac{9}{4} \cdot \frac{a^2 + 4a + 4}{a} = \frac{9}{4} \cdot \left(a + 4 + \frac{4}{a}\right)$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{(3a + 6)^2}{4a}$$





7. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

$$S_{\triangle ADB} = \frac{9}{4} \cdot \left(a + 4 + \frac{4}{a} \right)$$

$$S'(a) = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{4}{a^2} \right) = 0$$

$$1 = \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

a	1		2	
$S'(a)$	$\parallel \parallel$	-	0	+
$S(a)$	$\parallel \parallel$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$S'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{4}{1.5^2} \right) = -$$

$$S'(3) = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{4}{3^2} \right) = +$$

$a = 2$