יואל גבע
לא מתפשרים.

4 יח"ל

התפלגות נורמלית

פתרונות לבחינות בגרות

התוכנית החדשה במתמטיקה

נפתר ע"י עפר ילין

בבית הספר מסוים נערכה בחינת מתכונת במתמטיקה שתוצאותיה מתפלגות נורמלית.

- לבחינת המתכונת ניגשו 300 תלמידים.
- 20% מהציונים נמוכים מהציון 60 .
- הציון הממוצע בבחינה הוא 75 .

א. חשב את סטיית התקן של הציונים של בחינת המתכונת.

בבית ספר החליטו שכל התלמידים שהציון שלהם בבחינה נמוך מ- 55 יקבלו שיעורי עזר.

ב. כמה תלמידים (בערך) יקבלו את שיעורי העזר?

במסגרת התנדבות בבית הספר הציעו ל- 38 התלמידים המצטיינים, בעלי הציונים הגבוהים ביותר, לעזור לתלמידים מתקשים.

ג. מהו הציון המינימלי הנדרש להצטיינות?

א. הציון הממוצע בבחינה הוא $\bar{x}=75$.

20% **מהציונים** **נמוכים** **מהציון** 60 .

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן המתאים.

$$p=0.2 \quad \to z=-0.84$$

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$-0.84=\frac{60-75}{s}$$

$$s=\frac{-15}{-0.84}$$

$$\boxed{s=17.86}$$

תשובה: סטיית התקן של הציונים של בחינת המתכונת היא 17.86 .

ב. לבחינת המתכונת ניגשו 300 **תלמידים.**

תלמידים עם ציון **נמוך** **מ-** 55 **יקבלו שיעורי עזר .**

ציון התקן הוא $z=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{55-75}{17.86}=-\frac{20}{17.86}=-1.12$.

השטח החלקי מימין לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את החלק היחסי (אחוז, או הסתברות) לקבלת ציון שמעל לציון התקן שמצאנו.

היא: $p(x<55)=p(z<-1.12)=0.131$.

מספר התלמידים הוא $0.131\cdot 300\approx 39$.

תשובה: 39 **תלמידים (בערך) יקבלו את שיעורי העזר.**

ג. ל- 38 **התלמידים המצטיינים הוצע לעזור לתלמידים מתקשים, במסגרת ההתנדבות בבית הספר.**

$p(\text{excellence})=\frac{38}{300}\approx 0.127$ **, ובהתאם** $1-0.127=0.873$ **מהתלמידים אינם מצטיינים.**

$z(p<0.873)=1.14$.

$$1.14=\frac{x-75}{17.86}$$

$$20.36=x-75$$

$$\boxed{95.36=x}$$

תשובה: הציון המינימלי הנדרש להצטיינות הוא 95.36 .

2

הגובה של 2,000 מתגייסים בחודש מסוים מתפלג נורמלית. הגובה הממוצע של המתגייסים באותו חודש הוא 170 ס"מ וסטיית התקן היא 10 ס"מ.

א. (1) מצא את אחוז המתגייסים שגובהם מתחת ל- 180 ס"מ.

(2) מצא את מספר המתגייסים (בערך) שגובהם מעל 180 ס"מ.

ב. מהו הגובה ש- $\frac{1}{5}$ מהמתגייסים נמצאים מתחתיו?

נסמן ב- h את הגובה שמצאת בסעיף ב'.

ג. (1) בוחרים באקראי מתגייס. מהי ההסתברות שגובהו בין h ל- 180 ס"מ?

(2) בוחרים באקראי שני מתגייסים. מהי ההסתברות שהגובה של לפחות אחד מהם הוא בין h ל- 180 ס"מ?

א. הגובה הממוצע של המתגייסים באותו חודש הוא 170 **ס"מ** $=\bar{x}$ **, וסטיית התקן היא** 10 **ס"מ** $=s$.

(1) נמצא את אחוז המתגייסים שגובהם מתחת ל- 180 **ס"מ.**

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן המתאים.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$z=\frac{180-170}{10}$$

$$\boxed{z=1}$$

$$z=1 \quad \to p(x<180)=0.8413$$

$$0.8413\cdot 100\%=84.13\%$$

תשובה: גובהם של 84.13% **מהמתגייסים הוא מתחת ל-** 180 **ס"מ.**

(2) מספר המתגייסים בחודש המסוים הוא $2{,}000$.

$0.8413\cdot 2000\approx 1683$ **, ולכן גובהם של** $1{,}683$ **מתגייסים הוא מתחת ל-** 180 **ס"מ.**

$2000-1683=317$ **, ולכן גובהם של** 317 **מתגייסים הוא מעל ל-** 180 **ס"מ.**

תשובה: גובהם של כ- 317 **מתגייסים הוא מעל ל-** 180 **ס"מ.**

ב. נמצא את הגובה ש- $\frac{1}{5}=0.2$ **מהמתגייסים נמצאים מתחתיו.**

$$p=0.2 \quad \to z=-0.84$$

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$-0.84=\frac{x-170}{10} \ .$$

$$-8.4=x-170$$

$$\boxed{161.6=x}$$

תשובה: הגובה של $\frac{1}{5}$ **מהמתגייסים נמצאים מתחתיו הוא** 161.6 **ס"מ.**

ג. $h=161.6$.

(1) נחשב מהי ההסתברות שגובהו של מתגייס, בחודש מסוים זה, היא בין 161.6 **ס"מ ל-** 180 **ס"מ.**

גובהם של 84.13% **מהמתגייסים הוא מתחת ל-** 180 **ס"מ.**

גובהם של $\frac{1}{5}=20\%$ **מהמתגייסים הוא מתחת ל-** 161.6 **ס"מ.**

$$84.13\%-20\%=64.13\%$$

$$p(161.6<x<180)=\frac{64.13\%}{100}=0.6413$$

תשובה: ההסתברות היא 0.6413.

(2) ההסתברות שהגובה אינו בתחום הנדרש, היא $1-0.6413=0.3587$.

ההסתברות שלפחות אחד מהם יהיה בגובה המבוקש היא : $1-0.3587^2=0.8713$

תשובה: ההסתברות, שהגובה של לפחות אחד משני המתגייסים שנבחרו באקראי,
הוא בין 161.6 **ס"מ ל-** 180 **ס"מ, היא** 0.8713.

3

1. ביום ספורט בבית ספר מסוים נמצא כי ההישגים בקפיצה למרחק וההישגים בריצת מאה מטר מתפלגים נורמלית.

יוסי קפץ למרחק 4.9 מטר. ההישג הממוצע בקפיצה למרחק היה 4.6 מטר וסטיית התקן 0.7 מטר.

יוסי רץ מאה מטר ב- 11.8 שניות. ההישג הממוצע בריצת מאה מטר היה 12.6 שניות וסטיית התקן 1.1 שניות.

א. בתחרות ריצה ככל שזמן הריצה קטן יותר, ההישג טוב יותר. מהו אחוז התלמידים בבית ספר שהישגיהם בריצה טובים פחות מההישג של יוסי?

ב. יוסי יכול לייצג את בית ספרו בתחרות הארצית במקצוע אחד בלבד.

האם כדאי שיוסי יתחרה בקפיצה למרחק או בריצת מאה מטר? נמק.

בגרות פ פברואר 20 דוגמה 3 משרד החינוך שאלון 35481

א. בבית הספר נמצא כי ההישגים בקפיצה למרחק וההישגים בריצת מאה מטר מתפלגים נורמלית.

ההישג הממוצע בריצת מאה מטר היה 12.6 **שניות** $=\bar{x}$ **, וסטיית התקן** 1.1 **שניות** $=s$ **.**

יוסי רץ מאה מטר ב- 11.8 **שניות (זמן קטן מהממוצע, שזה טוב בריצה כמובן, כי מראה שהוא מהיר מהרוב).**

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$

$$z=\frac{11.8-12.6}{1.1}=\frac{-0.8}{1.1}=-0.727$$

נמצא את ההסתברות המתאימה בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$p(x<11.8)=p(z<-0.727)=0.234$ **.**

מכאן שרק ל- 23.4% **מהתלמידים הישגים טובים יותר מאלו של יוסי,**

ול- $100\%-23.4\%=76.6\%$ **הישגים טובים פחות.**

תשובה: ל- 76.6% **, מהתלמידים בבית הספר, הישגים בריצה טובים פחות מההישג של יוסי.**

ב. ההישג הממוצע בקפיצה למרחק היה 4.6 **מטר** $=\bar{x}$ **, וסטיית התקן** 0.7 **מטר** $=s$ **.**

יוסי קפץ למרחק 4.9 **מטר (מרחק גדול מהממוצע, שמראה שהוא קופץ רחוק יותר מהרוב).**

$$z=\frac{4.9-4.6}{0.7}=\frac{0.3}{0.7}=0.429$$

כבר ניתן לדעת, שהישגו היחסי של יוסי בריצת מאה מטר טוב יותר, כי ציון התקן גבוה יותר בערכו המוחלט.

ניתן להיעזר בטבלה: $p(x<4.9)=p(z<0.429)=0.666$ **,**

ולראות כי הישגו של יוסי טוב מ- 66.6% **מהתלמידים,**

בהשוואה לריצת מאה מטר, שם הישגו טוב יותר מ- 76.6% **מהתלמידים.**

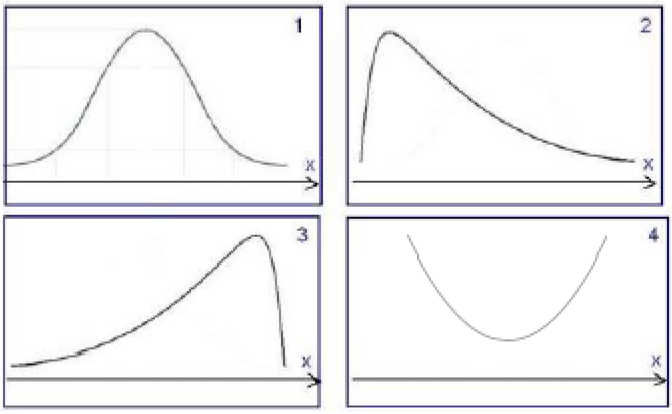
תשובה: כדאי שיוסי יתחרה בריצת מאה מטר.

4

מבחן מסכם של קורס א באוניברסיטה היה קשה מהרגיל. רוב הציונים במבחן היו נמוכים ומעט ציונים היו גבוהים.

במבחן המסכם של קורס ב התפלגות הציונים היתה נורמלית.

לפניכם ארבעה גרפים של התפלגות הציונים במבחן.



א. איזה מבין הגרפים יכול לתאר את ההתפלגות של ציוני המבחן המסכם של קורס א ואיזה מתאים לקורס ב?

ב. קבע, לגבי כל אחד מההיגדים הבאים, לאיזה מהגרפים שבסרטוט הוא מתאים, נמק את קביעתך:

(1) רוב הציונים גבוהים, מעט ציונים נמוכים.

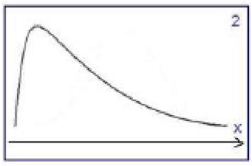
(2) הרבה ציונים גבוהים, הרבה ציונים נמוכים, מעט ציוני ביניים.

ג. בקורס שבו הציונים מתפלגים נורמלית ידוע שציון התקן המתאים ל-78 הוא 0.

(1) מהו הממוצע של הציונים בקורס זה?

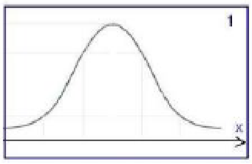
(2) מהו החציון של הציונים בקורס זה?

א. במבחן המסכם של קורס א, רוב הציונים במבחן היו נמוכים ומעט ציונים היו גבוהים.



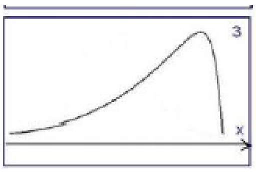
ניתן לראות בגרף 2, שעיקר הציונים נמצאים בחלק השמאלי של העקומה, שם החלק שמתחת לגרף גדול יותר, בעוד שמיעוט מהציונים נמצאים בחלק הימני של העקומה.

במבחן המסכם של קורס ב התפלגות הנתונים הייתה נורמלית.



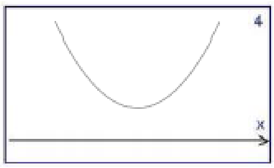
ניתן לראות בגרף 1 את עקומת ההתפלגות הנורמלית, בה רוב הציונים מרוכזים במרכז ומיעוטם בקצוות.
עקומה זו סימטרית ביחס לממוצע (שהוא גם החציון וגם השכיח).
תשובה: גרף 2 מתאים להתפלגות הציונים של ציוני המבחן המסכם של קורס א, וגרף 1 לקורס ב.

ב. (1) רוב הציונים גבוהים, מעט הציונים נמוכים.



ניתן לראות שבחלק הימני, שמתאר את הציונים הגבוהים - העקומה גבוהה יותר והשטח מתחתיה גדול יותר, ומצד שמאל בציונים הנמוכים יש רק מעט נתונים.
תשובה: גרף 3 מתאים להיגד " רוב הציונים גבוהים, מעט הציונים נמוכים".

(2) הרבה ציונים גבוהים, הרבה ציונים נמוכים, מעט ציוני ביניים.



ניתן לראות שהן מימין (בציונים הגבוהים) והן בשמאל (בציונים הנמוכים) יש יותר נתונים.
בעוד, שמרכז, בציונים הבינוניים יש פחות נתונים.
תשובה: גרף 4 מתאים להיגד " הרבה ציונים גבוהים, הרבה ציונים נמוכים, מעט ציוני ביניים ".

יואל גבע
לא מתפשרים.

ג. בקורס שבו הציונים מתפלגים נורמלית, ידוע שציון התקן המתאים ל- 78 **הוא** $z=0$ **.**

התפלגות נורמלית סימטרית סביב ציון תקן 0**,** 50% **מהנתונים מימין ו-** 50% **משמאל ולכן** 78 **הוא החציון.**

בהתפלגות נורמלית ממוצע ציוני התקן הוא 0 **, וציון תקן זה מתאים הן לממוצע, הן לחציון והן לשכיח.**

מעל לציון זה, הציונים גדולים מהממוצע והסיכוי לקבל קטן יותר, ומתחת לציון זה הציונים קטנים מהממוצע.

(1) תשובה: ממוצע הציונים בקורס זה הוא $\overline{x}=78$ **.**

(2) תשובה: החציון של הציונים בקורס זה הוא 78**.**

5

הציונים של נבחנים בבחינת כניסה לאוניברסיטה גדולה מתפלגים נורמלית.

העשירון התשיעי הוא 84. העשירון הראשון הוא 68.

א. חשבו את ממוצע הציונים ואת סטיית התקן.

ב. בוחרים באקראי שני נבחנים. מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם קיבל ציון מעל העשירון התשיעי?

ג. ידוע שלבחינה ניגשו 2000 נבחנים.

כמה נבחנים קיבלו ציון שנמצא בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע לבין סטיית תקן אחת מעל הממוצע?

א. הציונים של נבחנים בבחינת כניסה לאוניברסיטה גדולה מתפלגים נורמלית.

העשירון התשיעי (D_9) הוא הנתון שמתחתיו תשע עשיריות מהנתונים,

כלומר ההסתברות להיות מתחתיו היא 0.9 , וציון התקן המתאים הוא $z=1.28$.

העשירון הראשון (D_1) הוא הנתון שמתחתיו עשירית מהנתונים,

כלומר ההסתברות להיות מתחתיו היא 0.1 , וציון התקן המתאים הוא $z=-1.28$.

ניתן לראות ששני הנתונים סימטריים לממוצע, ולכן אין צורך להשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן,

ומראש להבין שהממוצע הוא $\bar{x}=\frac{68+84}{2}=76$, באמצע בין העשירון הראשון לעשירון התשיעי.

למציאת סטיית התקן, נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$

$$1.28=\frac{84-76}{s}$$

$$s=\frac{8}{1.28}$$

$$\boxed{s=6.25}$$

תשובה: ממוצע הציונים הוא 76, סטיית התקן היא 6.25 .

ב. בוחרים באקראי שני נבחנים .

נחשב את ההסתברות שבדיוק אחד מהם קיבל ציון מעל לעשירון התשיעי.

אפשר גם ללא נוסחת ברנולי.

$$p=0.1\cdot 0.9+0.9\cdot 0.1=0.18$$

תשובה: ההסתברות, שבדיוק אחד מהם קיבל ציון מעל לעשירון התשיעי, היא 0.18 .

ג. ידוע שלבחינה ניגשו 2000 נבחנים.

נחשב את מספר התלמידים שקיבלו ציון בין סטיית תקן אחת מעל לממוצע,

לבין סטיית תקן אחת מעל לממוצע (שעבורה ציון התקן הוא 1).

כיוון שההתפלגות נורמלית, אז היא סימטרית. נחשב תחילה את ההסתברות בין הממוצע לסטיית תקן אחת.

$$z=1 \quad \rightarrow p=0.841 \quad \rightarrow 0<z<1 \quad \rightarrow p=0.341$$

ההסתברות לבחור תלמיד שציונו בין הממוצע לסטיית תקן אחת היא 0.341 ,

וההסתברות המבוקשת היא כפולה, ושווה ל- $0.341\cdot 2=0.682$.

מספר התלמידים הוא: $0.682\cdot 2{,}000=1{,}364$.

תשובה: $1{,}364$ תלמידים קיבלו ציון שנמצא בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע,

לבין סטיית תקן אחת מעל לממוצע.

6

אורך החיים הממוצע של מקרר הוא 10 שנים וסטיית התקן היא 3 שנים. אורך החיים של מקרר מתפלג נורמלית.

א. מהי ההסתברות שאורך החיים של מקרר יהיה בין 11 שנים ל- 14 שנים?

ב. מהו אורך החיים של מקרר שרק 10% מהמקררים גבוה ממנו?

ג. היצרן נותן אחריות להחלפת המקרר אם הוא מתקלקל במהלך השנה הראשונה שלאחר הרכישה.

(1) מהו אחוז המקררים שאורך החיים שלהם הוא עד שנה?

(2) בשנה מסוימת היצרן מכר 50,000 מקררים. כמה מקררים שנמכרו בשנה זאת היצרן צפוי להחליף במסגרת האחריות?

ד. לפניך הטענות הבאות. קבע אילו מהן נכונות. נמק.

(1) אורך החיים החציוני של מקרר הוא 11 שנים.

(2) אחוז המקררים שאורך החיים שלהם מעל 13 שנים שווה לאחוז המקררים שאורך החיים שלהם מתחת ל- 7 שנים.

א. אורך החיים הממוצע של מקרר הוא $\bar{x}=10$ **שנים , וסטיית התקן היא** $s=3$ **שנים.**

נמצא את ההסתברות שאורך החיים של מקרר יהיה בין 11 **שנים ל-** 14 **שנים.**

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן המתאים.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$z(11)=\frac{11-10}{3} \qquad z(14)=\frac{14-10}{3}$$

$$\boxed{z(11)=\frac{1}{3}\approx 0.333} \qquad \boxed{z(14)=1\frac{3}{3}\approx 1.333}$$

$$p(x<11)=0.629 \qquad p(x<14)=0.908$$

וההסתברות המבוקשת היא: $p(11<x<14)=0.908-0.629=0.279$.

תשובה: ההסתברות, שאורך החיים של מקרר יהיה בין 11 **שנים ל-** 14 **שנים, היא** 0.279.

ב. נמצא את אורך החיים של מקרר, שרק 10% **מהמקררים גבוה ממנו,**

כלומר, $0.9=90\%$ **מהמקררים, עם אורך חיים נמוך ממנו.**

$$p=0.9 \quad \rightarrow z=1.28$$

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$1.28=\frac{x-10}{3}.$$

$$3.84=x-10$$

$$\boxed{13.84=x}$$

תשובה: אורך החיים של מקרר, שרק 10% **מהמקררים גבוה ממנו, הוא** 13.84 **שנים.**

ג. היצרן נותן אחריות להחלפת המקרר, אם הוא מתקלקל במהלך השנה הראשונה שלאחר הרכישה.

(1) עבור אורך חיים של שנה אחת, $x=1$.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$z=\frac{1-10}{3}$$

$$\boxed{z=-3}$$

כלומר, 3 **סטיות תקן מתחת לממוצע (מאוד מאוד נמוך...).**

$p(z<-3)=0.0013=0.13\%$.

תשובה: 0.13% **מהמקררים הם עם אורך חיים של עד שנה.**

(2) בשנה מסוימת היצרן מכר $50,000$ **מקררים.**

$0.0013\cdot 50,000=$ 65 **מקררים** ,.

תשובה: היצרן צפוי להחליף 65 **מקררים, במסגרת האחריות.**

ד. נבדוק את שתי הטענות הבאות.

(1) "אורך החיים החציוני של מקרר הוא 11 **שנים."**

התפלגות נורמלית היא סימטרית סביב הממוצע,

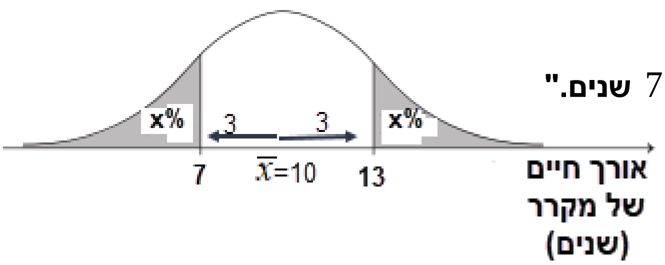
כלומר 50% **מהנתונים מעל לממוצע, או מתחתיו, ולכן זהו החציון (וגם השכיח).**

בשאלה שלנו, הממוצע והחציון הם אורך חיי מקרר של 10 **שנים.**

תשובה: הטענה אינה נכונה.

(2) "אחוז המקררים שאורך החיים שלהם מעל 13 **שנים,**

שווה לאחוז המקררים שאורך החיים שלהם מתחת ל- 7 **שנים."**



התפלגות נורמלית היא סימטרית סביב הממוצע.

בשאלה שלנו, הממוצע הוא אורך חיי מקרר של 10 **שנים,**

ושני הנתונים נמצאים באותו מרחק ממנו (של 3 **שנים),**

ולכן השטח שמימין ל- 13 **שנים** **<u>שווה</u>** **לשטח שמשמאל ל-** 7 **שנים.**

תשובה: הטענה נכונה.

7

בבית ספר גדול הציונים בבחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 70 וסטיית תקן 25.

הציונים בבחינת הבגרות באנגלית מתפלגים אף הם נורמלית עם ממוצע 75 וסטיית תקן 20.

ציון עובר בכל אחת מן הבחינות הוא 55 ומעלה.

א. מהי ההסתברות לעבור את בחינת הבגרות במתמטיקה?

ב. האם ההסתברות לעבור את בחינת הבגרות באנגלית גדולה יותר מן ההסתברות לעבור את הבחינה במתמטיקה? נמק.

בוחרים באקראי תלמיד מבית הספר.

ג. מהי ההסתברות שהוא יעבור את הבחינה בשני המקצועות?

בוחרים באקראי 2 תלמידים מבית הספר.

ד. מהי ההסתברות שרק אחד מהם יעבור את הבחינה בשני המקצועות?

א. הציון הממוצע בבחינה במתמטיקה הוא $\bar{x}=70$, וסטיית התקן היא $s=25$.

ציון עובר הוא 55 ומעלה.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$
$$z=\frac{55-70}{25}=-0.6$$
$$p(z<-0.6)=0.274$$
$$p(z>-0.6)=1-0.274=0.726$$
$$\boxed{p=0.726}$$

תשובה: ההסתברות, לעבור את בחינת הבגרות במתמטיקה, היא 0.726 .

ב. הציון הממוצע בבחינה באנגלית הוא $\bar{x}=75$, וסטיית התקן היא $s=20$.

ציון עובר הוא 55 ומעלה.

$$z=\frac{55-75}{20}=-1$$
$$p(z<-1)=0.159$$
$$p(z>-1)=1-0.159=0.841$$
$$\boxed{p=0.841}$$

לכן, ההסתברות לעבור את הבחינה באנגלית גבוהה יותר.

ניתן היה לדעת את זה כבר לאחר חישוב ציון התקן הנדרש,

שהיה נמוך יותר באנגלית מאשר במתמטיקה.

תשובה: ההסתברות לעבור את בחינת הבגרות באנגלית גדולה יותר,

מן ההסתברות לעבור את הבחינה במתמטיקה .

ג. נחשב את ההסתברות המבוקשת, בהנחה של אי תלות בין סיכויי המעבר בשתי הבחינות.

$$\mathrm{P}(v\ math \cap v\ english)=\mathrm{P}(v\ math)\cdot\mathrm{P}(v\ english)=0.726\cdot 0.841$$
$$\mathrm{P}(v\ math \cap v\ english)=0.6106$$

תשובה: ההסתברות, שתלמיד שנבחר באקראי יעבור את הבחינה בשני המקצועות, היא 0.6106 .

ד. יש שתי אפשרויות מתאימות, שהראשון יעבור והשני ייכשל, או שהשני יעבור והראשון ייכשל.

$$\mathrm{P}(one\ will\ \ pass\ both\ exams)=0.6106\cdot(1-0.6106)+(1-0.6106)\cdot 0.6106$$
$$\mathrm{P}(one\ will\ \ pass\ both\ exams)=0.4756$$

תשובה: ההסתברות, שרק אחד מהם יעבור את הבחינה בשני המקצועות, היא 0.4756 .

8

בבית ספר מסוים נערכו שני מבחני מתכונת במתמטיקה. הציונים בכל אחד ממבחני המתכונת מתפלגים נורמלית.

במתכונת הראשונה היה הציון הממוצע 65.05 , וסטיית התקן של הציונים הייתה 15 .

הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה היה 70 .

א. מהו אחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה?

הציון שקיבלה שירה במתכונת השנייה היה 78 .

אחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה במתכונת השנייה זהה לאחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מן הציון שלה במתכונת הראשונה.

סטיית התקן של הציונים במתכונת השנייה הייתה 10 .

ב. (1) חשב את הציון הממוצע במתכונת השנייה.

(2) מהו החציון של הציונים במתכונת השנייה? נמק.

אריאל קיבל ציון זהה בשתי המתכונות. ידוע כי במתכונת הראשונה קיבלו 29.8% מן התלמידים ציון גבוה ממנו.

ג. (1) מהו הציון שקיבל אריאל בשתי המתכונות?

(2) באיזו משתי המתכונות הצליח אריאל יותר יחסית לכל התלמידים שנבחנו? נמק את תשובתך.

א. הציון הממוצע במתכונת הראשונה היה $\overline{x}=65.05$, וסטיית התקן של הציונים הייתה $s=15$.

הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה היה 70 .

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$z=\frac{70-65.05}{15}=0.33$$

$$p(z<0.33)=0.629=62.9\%$$

$$\boxed{p(x<70)=0.629=62.9\%}$$

תשובה: 62.9% מן התלמידים קיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה.

ב. (1) גם בבחינת המתכונת השנייה, קיבלו 62.9% מהתלמידים ציון נמוך משירה, כלומר $z=0.33$.

סטיית התקן של ציוני המתכונת השנייה הייתה $s=10$, כאשר שירה קיבלה ציון 78 במתכונת זו.

$$0.33=\frac{78-\overline{x}}{10}$$

$$3.3=78-\overline{x}$$

$$\boxed{\overline{x}=74.7}$$

תשובה: הציון הממוצע במתכונת השנייה היה 74.7 .

(2) גרף ההתפלגות הנורמלית סימטרי סביב הממוצע, לכן הממוצע שווה לחציון ושווה גם לשכיח.

תשובה: החציון של הציונים במתכונת השנייה היה 74.7 .

ג. אריאל קיבל ציון זהה בשתי המתכונות.

(1) ידוע כי במתכונת הראשונה קיבלו $0.298=29.8\%$ מהתלמידים ציון גבוה ממנו.

לכן, זה הציון ש- $1-0.298=0.702$ מהתלמידים, קיבלו ציון נמוך ממנו.

$$z(p<0.702)=0.53$$

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$0.53=\frac{x-65.05}{15}$$

$$7.95=x-65.05$$

$$\boxed{x=73}$$

תשובה: הציון שאריאל קיבל בשתי המתכונות היה 73.

(2) במתכונת הראשונה אריאל קיבל ציון 73 , שהיה מעל לממוצע 65.05 .

גם במתכונת השנייה אריאל קיבל ציון 73 , אבל הפעם ציון זה היה מתחת לממוצע 74.

תשובה: תשובה: אריאל הצליח יותר במתכונת הראשונה, יחסית לכל התלמידים שנבחנו.

9

בשירות הטלפוני של חברת הביטוח "אלון" זמן ההמתנה של אדם למענה אנושי מתפלג נורמלית.
זמן ההמתנה הממוצע של אדם למענה אנושי הוא 1.8 דקות.
ידוע כי 30.8% מהאנשים שפונים לשירות הטלפוני של החברה ממתינים למענה אנושי מעל 2 דקות.

א. מהו החציון של זמן ההמתנה?

ב. חשב את סטיית התקן של זמן ההמתנה למענה אנושי.

ג. (1) מהו אחוז האנשים שממתינים למענה אנושי פחות מדקה אחת?

(2) מהו אחוז האנשים שזמן ההמתנה שלהם למענה אנושי הוא בין הממוצע לבין סטיית תקן אחת מעל הממוצע?

בעקבות פניות של לקוחות החברה נעשו שינויים בשירות המענה האנושי, ובעקבותיהם זמן ההמתנה הממוצע למענה אנושי ירד ל- 1.2 דקות אך סטיית התקן נשארה ללא שינוי.
לאחר השינוי בשירות נבדק אחוז האנשים שזמן ההמתנה שלהם למענה אנושי הוא בין הממוצע לבין סטיית תקן אחת מעל הממוצע.

ד. האם האחוז שנבדק השתנה לעומת האחוז שהיה לפני השינוי בשירות? נמק.

א. זמן ההמתנה של אדם למענה אנושי מתפלג נורמלית.

זמן ההמתנה הממוצע של אדם למענה אנושי הוא 1.8 דקות $\bar{x}=$.

הגרף של התפלגות נורמלית סימטרי סביב הממוצע, כך שהחציון שווה לממוצע (וגם לשכיח).

תשובה: החציון של זמן ההמתנה הוא 1.8 דקות.

ב. ידוע כי 30.8% מהאנשים שפונים לשירות הטלפוני של החברה ממתינים למענה אנושי מעל 2 דקות.

מכאן ש- 69.2% ממתינים מתחת ל- 2 דקות, ו- $p(x<2)=0.692$.

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ציון התקן המתאים הוא $z=0.5$.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$0.5=\frac{2-1.8}{s}$$

$$0.5s=0.2$$

$$\boxed{s=0.4}$$

תשובה: סטיית התקן, של זמן ההמתנה למענה אנושי, היא 0.4 דקות.

ג. (1) נחשב את אחוז האנשים שממתינים למענה אנושי פחות מדקה אחת.

$$z=\frac{1-1.8}{0.4}$$

$$\boxed{z=-2}$$

$$p(z<-2)=0.0227=2.27\%$$

תשובה: 2.27% מהאנשים, ממתינים למענה אנושי פחות מדקה אחת.

(2) התשובה לשאלה זו, לא תלויה בנתוני השאלה, אלא רק בציוני התקן המתאימים.

$$p(0<z<1)=0.841-0.5=0.341=34.1\%$$

תשובה: זמן ההמתנה של 34.1% מהאנשים, הוא בין הממוצע לבין סטית תקן אחת מעל לממוצע.

ד. כפי שאמרנו כבר בתת-הסעיף הקודם ג(2), התשובה מגיעה למעשה ישירות מהטבלה,

ותמיד ההסתברות שנתון יהייה בין הממוצע לסטיית תקן אחת הוא 0.341 .

תשובה: האחוז שנבדק לא השתנה, לעומת השינוי שהיה לפני השינוי בשירות.

10

חברה להפצת תוכן דיגיטלי בדקה כמה זמן ביום אנשים מאזינים לפודקאסטים (הֶסְכֵּתִים) באתר אינטרנט מסוים.

על פי הבדיקה, 100,000 אנשים מאזינים לפודקאסטים באתר, וזמן ההאזנה שלהם ביום מתפלג נורמלית.

התברר כי זמן ההאזנה הממוצע לאדם הוא 35.65 דקות, וסטיית התקן של זמן ההאזנה היא 15 דקות.

א. מהו אחוז האנשים שמאזינים לפודקאסטים <u>פחות</u> מ־ 10 דקות ביום?

ב. כמה אנשים מאזינים לפודקאסטים <u>יותר</u> משעה אחת (60 דקות) ביום?

אחרי שינוי בתוכני הפודקאסטים באתר, החברה בדקה שוב את משך זמן ההאזנה של אותם 100,000 אנשים,

ומצאה שזמן ההאזנה הממוצע ביום לאדם גָדַל: הממוצע לאחר השינוי היה 42 דקות.

עם זאת, אחוז האנשים שמאזינים לפודקאסטים באתר פחות מ־ 10 דקות נשאר ללא שינוי.

ג. (1) חשבו את סטיית התקן של זמן ההאזנה לאחר השינוי.

(2) פי כמה גדל מספר האנשים שמאזינים לפודקאסטים יותר משעה אחת ביום – לאחר השינוי?

א. זמן ההזנה של אנשים לפודקאסט (הסכתים) מתפלג נורמלית.

על פי בדיקה של $100,000$ מאזינים, התברר כי

זמן ההאזנה לאדם הוא בממוצע של 35.65 דקות $\bar{x}=$, וסטיית התקן של זמן ההאזנה היא 15 דקות $s=$.

נחשב את ציון התקן של 10 דקות ליום.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$z=\frac{10-35.65}{15}$$

$$z=\frac{-25.65}{15}$$

$$\boxed{z=-1.71}$$

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p(z<-1.71)=0.0436=0.0436\cdot 100\%=4.36\%$.

תשובה: 4.36% מהאנשים, מאזינים לפודקאסטים <u>פחות</u> מ- 10 דקות ליום.

ב. נמצא את ציון התקן של שעה אחת ביום, של 60 דקות ביום.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$z=\frac{60-35.65}{15}$$

$$z=\frac{24.35}{15}$$

$$\boxed{z\approx 1.62}$$

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p(z<1.62)=0.947$.

ולכן, ההסתברות להאזנה של יותר משעה אחת, היא: $p(z>1.62)=1-0.947=0.053$.

מתוך $100,000$ אנשים: $0.053\cdot 100,000=5,300$ מאזינים יותר משעה אחת ביום.

תשובה: כ- $5,300$ אנשים מאזינים לפודקאסטים יותר משעה אחת ליום (60 דקות).

ג. לאחר שינוי בתוכני הפודקאסטים שבאתר של אותם $100,000$ אנשים,

התברר שממוצע ההאזנה לאדם גדל ל- 42 דקות $\bar{x}=$.

(1) אחוז האנשים שמאזינים לפודקאסטים פחות מ- 10 דקות ליום

נותר ללא שינוי , כלומר 4.36% , ומכאן שציון התקן זהה והוא $z=-1.71$.

נמצא את סטיית התקן.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$-1.71=\frac{10-42}{s}$$

$$-1.71s=-32$$

$$\boxed{s\approx 18.713}$$

תשובה: סטיית התקן של זמן ההאזנה, לאחר השינוי, היא 18.713 דקות ליום.

(2) נחשב, לאור הנתונים החדשים, את ההסתברות להאזנה של יותר משעה אחת ליום (60 דקות).

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$z=\frac{60-42}{18.713}$$

$$z=\frac{18}{18.713}$$

$$\boxed{z\approx 0.96}$$

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p(z<0.96)=0.832$.

ולכן, ההסתברות להאזנה של יותר משעה אחת, היא: $p(z>0.96)=1-0.832=0.168$.

ההסתברות גדלה פי $0.168:0.053\approx 3.17$, וכך גדל גם מספר האנשים.

ניתן גם , כמובן, לחשב את מספר המאזינים.

מתוך $100,000$ אנשים: $0.168\cdot 100,000=16,800$ מאזינים יותר משעה אחת ביום.

ואז היחס המבוקש הוא: $16,800:5,300\approx 3.17$

תשובה: מספר האנשים, שמזינים לפודקאסטים יותר משעה אחת ביום – לאחר השינוי,

גדל פי 3.17 בערך.

11

כדי להתקבל לאוניברסיטה, המועמדים נדרשים לעבור מבחן כניסה. ציון המעבר במבחן הוא 75. השנה נערכו שני מבחני כניסה לאוניברסיטה.
במבחן הראשון נבחנו 80% מהמועמדים. שאר המועמדים נבחנו במבחן השני.
התפלגות הציונים בשני המבחנים הייתה נורמלית.
הציון הממוצע של המבחן הראשון היה: 70, וסטיית התקן הייתה 10.
במבחן השני היה הציון הממוצע 79, וסטיית התקן הייתה 12.

א. בוחרים באקראי מועמד שנבחן במבחן הראשון.
מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן ?

ב. בוחרים באקראי מועמד שנבחן במבחן השני.
מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?

ג. בוחרים באקראי מועמד שנבחן באחד מהמבחנים.
מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?

א. ציון המעבר, במבחן הכניסה לאוניברסיטה, הוא 75 .

במבחן הראשון, הממוצע היה $\bar{x}=70$ **וסטיית התקן הייתה** $s=10$.

ציון התקן הוא $z=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{75-70}{10}=0.5$.

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן שמצאנו.

ההסתברות, לקבל מעבר לציון זה,

היא: $p(x>75)=p(z>0.5)=1-p(z<0.5)=1-0.692=0.308$.

תשובה: ההסתברות, שנבחן שבחר באקראי עבר את המבחן הראשון, היא 0.308 .

ב. ציון המעבר, במבחן הכניסה לאוניברסיטה, הוא 75 .

במבחן השני, הממוצע היה $\bar{x}=79$ **וסטיית התקן הייתה** $s=12$.

ציון התקן הוא $z=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{75-79}{12}=-\frac{1}{3}\approx-0.33$.

השטח החלקי מימין לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את החלק היחסי (אחוז, או הסתברות) לקבלת ציון שמעל לציון התקן שמצאנו.

סך כל השטח הוא כמובן 1 **, כי ההתפלגות הנורמלית מייצגת את כלל הציונים.**

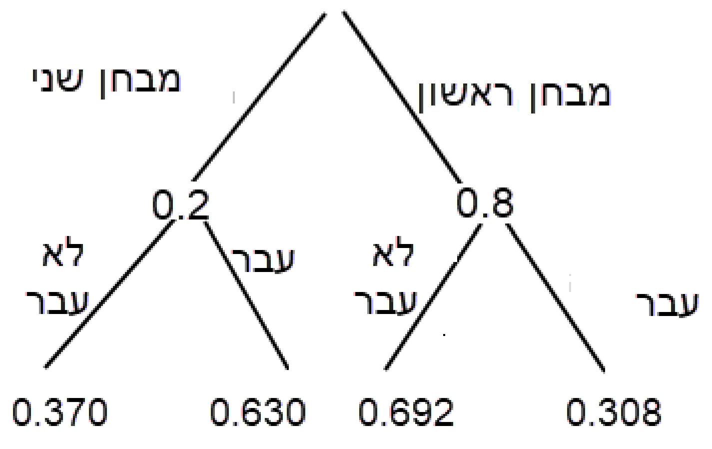
ההסתברות, לקבל מעבר לציון זה,

היא: $p(x>75)=p(z>-0.33)=1-p(z<-0.33)=1-0.370=0.630$.

תשובה: ההסתברות, שנבחן שנבחר באקראי עבר את המבחן השני, היא 0.630 .

ג. נבדוק מה ההסתברות, שנבחן שניגש לאחד המבחנים, עבר את המבחן.

נתון כי במבחן הראשון נבחנו $80\%=0.8$ **מהנבחנים, כלומר במבחן השני נבחנו** $0.2=20\%$.



ההסתברות היא: $p(pass)=0.8\cdot0.308+0.2\cdot0.630=0.3724$.

תשובה: ההסתברות, שמועמד שנבחן באחד מהבחנים ונבחר באקראי, עבר את המבחן, היא 0.3724 .

12

במטע דובדבנים גדול בדקו כמה קילוגרם דובדבנים מניב כל עץ בשנה רגילה.

המשקל הממוצע של הדובדבנים שמניב עץ במטע הוא 40 ק"ג.

ההתפלגות של משקל הדובדבנים שמניב כל אחד מן העצים במטע היא נורמלית.

א. מהו החציון של משקל הדובדבנים שמניב עץ במטע?

נתון: אחוז העצים במטע שמניבים פחות מ- 30 ק"ג דובדבנים בשנה הוא 18.1% .

ב. מהי סטיית התקן?

בתשובתכם דייקו שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

במטע יש 300 עצי דובדבן.

בעבור העצים במטע שמניבים יותר מ- 55 ק"ג דובדבנים מתבצע סבב קטיף נוסף.

ג. בעבור כמה עצים במטע (בקירוב) מתבצע סבב קטיף נוסף?

ד. בשנה מסוימת ירד הממוצע של משקל הדובדבנים שהניבו העצים במטע ב- 20% לעומת שנה רגילה,

וסטיית התקן לא השתנתה.

כמה עצים במטע (בקירוב) הניבו יותר מ- 55 ק"ג דובדבנים בשנה זו?

א. משקל הדובדבנים, שמניב כל אחד מהעצים במטע, מתפלג נורמלית.

המשקל הממוצע של הדובדבנים, שמניב עץ במטע בשנה רגילה, הוא 40 **ק"ג** $=\bar{x}$.

הגרף של התפלגות נורמלית סימטרי סביב הממוצע, כך שהחציון שווה לממוצע (וגם לשכיח).

תשובה: החציון של משקל הדובדבנים, שמניב עץ במטע, הוא 40 **ק"ג.**

ב. נתון כי 18.1% **מהעצים במטע מניבים פחות מ-** 30 **ק"ג בשנה.**

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ציון התקן המתאים עבור $p=0.181$ **הוא** $z=-0.91$.

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$-0.91=\frac{30-40}{s}$$

$$-0.91s=-10$$

$$\boxed{s=10.99\approx 11}$$

תשובה: סטיית התקן היא $10.99\approx 11$ **ק"ג.**

ג. במטע יש 300 **עצי דובדבן.**

בעבור העצים שמניבים <u>יותר</u> מ- 55 **ק"ג דובדבנים מתבצע סבב קטיף נוסף.**

נחשב את ההסתברות המתאימה.

$$z=\frac{55-40}{11}$$

$$\boxed{z=1.36}$$

$$p(z>1.36)=1-p(z<1.36)=1-0.913=0.087$$

בהתאם, מספר העצים הוא $0.087\cdot 300=26.1\approx 26$

תשובה: בעבור 26 **עצים (בקירוב) מתבצע סבב קטיף נוסף.**

ד. בשנה מסוימת ירד הממוצע של משקל הדובדבנים במטע ב- 20% **לעומת שנה רגילה,**

כאשר סטיית התקן לא השתנתה.

הממוצע החדש הוא 32 **ק"ג** $=(100\%-20\%)\cdot 40=0.8\cdot 40=\bar{x}$.

$$z=\frac{55-32}{11}$$

$$\boxed{z=2.09}$$

$$p(z>2.09)=1-p(z<2.09)=1-0.9817=0.0183$$

בהתאם, מספר העצים הוא $0.0183\cdot 300=5.49\approx 5$.

תשובה: 5 **עצים (בקירוב) במטע הניבו יותר מ-** 55 **ק"ג דובדבנים בשנה זו.**

13

בבריכת "גַלֵי גיל" מתאמנים לתחרות במִשְׂחֶה של "100 מטר חופשי".

השיא שנקבע בעבר במשחה זה היה 51 שניות.

קבוצה גדולה של שחיינים מתאמנת לקראת התחרות במשחה זה.

זמני השחייה של השחיינים בקבוצה מתפלגים נורמלית עם ממוצע של 57 שניות וסטיית תקן של 2 שניות.

בוחרים באקראי שחיין מן הקבוצה.

א. מהי ההסתברות שהשחיין שנבחר ישבור את השיא שנקבע בעבר (כלומר, ישחה בזמן קצר יותר מזמן השיא)?

בבריכה מתאמנות שתי קבוצות:

קבוצה של 150 שחיינים שממוצע זמן המשחה שלהם הוא 57 שניות,

וקבוצה של 150 שחיינים שממוצע זמן המשחה שלהם הוא 58 שניות.

ב. מהו הממוצע של זמן המשחה של כל 300 השחיינים?

נתון כי זמני המשחה של כל 300 השחיינים מתפלגים נורמלית, וכי זמן המשחה של 50 מבין 300 השחיינים הוא פחות מ- 54 שניות.

ג. מהי סטיית התקן של זמני המשחה של כל 300 השחיינים?

בוחרים באקראי שחיין מבין כל 300 השחיינים.

ד. מהי ההסתברות שהשחיין שנבחר ישבור את השיא שנקבע בעבר?

א. זמני השחייה של השחיינים בקבוצה, במשחה של "100 מטר חופשי" מתפלגים נורמלית.

57 שניות $=\bar{x}$, וסטיית התקן 2 שניות $=s$.

השיא שנקבע בעבר במשחה זה היה 51 שניות.

נמצא מהי ההסתברות , ששחיין שנבחר באקראי מן הקבוצה, שבר את השיא,

כלומר שזמן השחייה שלו <u>קטן</u> מ- 51 שניות.

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$

$z=\frac{51-57}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ **(הערה: ציון תקן נמוך משמעותית, ממקום בתחילת הטבלה ממש).**

נמצא את ההסתברות המתאימה בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$p(x<51)=p(z<-3)=0.0013$ **.**

תשובה: ההסתברות , ששחיין שנבחר באקראי מן הקבוצה שבר את השיא, היא 0.0013.

ב. נבנה טבלת שכיחויות (לא חובה), שתתאר את הנתונים עבור שתי הקבוצות שמתאמנות בבריכה.

x - ממוצע הקבוצה	57	58	**סה"כ**
f - מספר שחיינים	150	150	$N=300$

כיוון שמספר השחיינים בשתי הקבוצות הוא שווה, אז הממוצע הכולל הוא $57.5=\frac{57+58}{2}$ **.**

או, על פי הנוסחה הרגילה: 57.5 **שניות** $=\frac{17,250}{300}=\frac{57\cdot150+58\cdot150}{300}=\bar{x}$ **.**

תשובה: הממוצע, של זמן המשחה של כל 300 השחיינים, הוא 57.5 שניות.

ג. נתון כי זמני השחייה של כל 300 השחיינים מתפלג נורמלית,

וזמן המשחה של 50 מבין 300 השחיינים הוא פחות מ- 54 שניות,

כלומר $p(x<54)=\frac{50}{300}=0.167$.

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ציון התקן המתאים עבור $p=0.167$ **הוא** $z=-0.965$.

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$-0.965=\frac{54-57.5}{s}$$

$$-0.965s=-3.5$$

$$\boxed{s=3.627}$$

תשובה: סטיית התקן, של זמני המשחה של כל 300 השחיינים, היא כ- 3.627 שניות.

ד. בוחרים באקראי שחיין מבין כל 300 השחיינים.

57.5 **שניות** $=\overline{x}$ **, וסטיית התקן** 3.627 **שניות** $=s$.

השיא שנקבע בעבר במשחה זה היה 51 שניות.

נמצא מהי ההסתברות , ששחיין שנבחר באקראי מן הקבוצה, שבר את השיא,

כלומר שזמן השחייה שלו קטן מ- 51 שניות.

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\overline{x}}{s}$

$z=\frac{51-57.5}{3.627}=\frac{-6.5}{3.627}=-1.792$ **(הערה: ציון התקן גבוה מסעיף א, בעיקר כי הפיזור של הנתונים גדל).**

נמצא את ההסתברות המתאימה בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$p(x<51)=p(z<-1.792)=0.0367$.

תשובה: ההסתברות , ששחיין שנבחר באקראי מבין כל 300 השחיינים שבר את השיא, היא 0.0367.

14

בבית ספר מסוים נערכו שני מבחני מתכונת במתמטיקה. הציונים בכל אחד ממבחני המתכונת מתפלגים נורמלית.

במתכונת הראשונה היה הציון הממוצע 65.05 , וסטיית התקן של הציונים הייתה 15 .

הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה היה 70 .

א. מהו אחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה?

הציון שקיבלה שירה במתכונת השנייה היה 78 .

אחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה במתכונת השנייה זהה לאחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מן הציון שלה במתכונת הראשונה.

סטיית התקן של הציונים במתכונת השנייה הייתה 10 .

ב. חשבו את הציון הממוצע במתכונת השנייה.

אריאל קיבל ציון זהה בשתי המתכונות. ידוע כי במתכונת הראשונה קיבלו 29.8% מן התלמידים ציון גבוה ממנו.

ג. (1) מהו הציון שקיבל אריאל בשתי המתכונות?

(2) באיזו משתי המתכונות הצליח אריאל יותר יחסית לכל התלמידים שנבחנו? נמקו.

א. הציונים של כל אחד ממבחני המתכונת במתמטיקה, שנערכו בבית ספר מסוים, מתפלגים נורמלית.

$\bar{x}=65.05$ **, וסטיית התקן** $s=15$.

הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה היה 70 .

נמצא מהו האחוז של התלמידים שיקבלו ציון נמוך משירה, כלומר שקיבלו ציון נמוך מ- 70.

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$.

$z=\frac{70-65.05}{15}=\frac{4.95}{15}=0.33$.

נמצא את ההסתברות המתאימה בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$p(x<70)=p(z<0.33)=0.629=0.629\cdot 100\%=62.9\%$.

תשובה: 62.9% **מהתלמידים, קיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה.**

ב. הציון שקיבלה שירה במתכונת השנייה היה 78 .

גם במתכונת זו 62.9% **מהתלמידים, קיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה.**

לכן ציון התקן של שירה, גם במתכונת השנייה, היה 0.33 .

סטיית התקן של המתכונת השנייה הייתה $s=10$.

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$

$$0.33=\frac{78-\bar{x}}{10} \quad /\cdot 10$$

$$3.3=78-\bar{x}$$.

$$\boxed{\bar{x}=74.7}$$

תשובה: הציון הממוצע במתכונת השנייה היה 74.7 .

ג. אריאל קיבל ציון זהה בשתי המתכונות.

(1) ידוע כי במתכונת הראשונה קיבלו 29.8% **מן התלמידים ציון גבוה ממנו.**

כלומר $100\%-29.8\%=70.2\%=0.702$ **מן התלמידים, קיבלו ציון נמוך מאריאל.**

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ציון התקן המתאים עבור $p=0.702$ **הוא** $z=0.53$ **.**

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$0.53=\frac{x-65.05}{15} \quad / \cdot 15$$

$$7.95=x-65.05$$

$$\boxed{x=73}$$

תשובה: הציון שקיבל אריאל בשתי המתכונות הוא 73**.**

(2) במתכונת הראשונה אריאל קיבל ציון 73 **, שהיה גבוה מהממוצע** 65.05 **.**

במתכונת השנייה אריאל קיבל ציון 73 **, שהיה נמוך מהממוצע** 74.7 **.**

מכאן, שהצליח יותר במתכונת הראשונה (שם יותר מ- 50% **מהתלמידים קיבלו ציון נמוך ממנו),**

מאשר המתכונת השנייה (שם יותר מ- 50% **מהתלמידים קיבלו ציון גבוה ממנו).**

<u>אפשר גם</u>

נבדוק את ציון התקן, שקיבל אריאל בשתי המתכונות.

במתכונת הראשונה, ציון התקן היה 0.53 **.**

במתכונת השנייה, ציון התקן היה $z=\frac{73-74.7}{10}=\frac{-1.7}{10}\approx -0.17$ **.**

מכאן שבמתכונת הראשונה אחוז התלמידים שקיבלו ציון <u>נמוך</u> ממנו היה גדול יותר.

<u>אפשר גם</u>

להמשיך ולחשב את ההסתברויות המתאימות, אבל זה כבר הרבה יותר מדי מהנדרש

תשובה: אריאל הצליח יותר, יחסית לכל התלמידים שנבחנו, במתכונת הראשונה.

15

בבית הספר מסוים נערכה בחינת מתכונת במתמטיקה שתוצאותיה מתפלגות נורמלית.

- לבחינת המתכונת ניגשו 300 תלמידים.
- 20% מהציונים נמוכים מהציון 60 .
- הציון הממוצע בבחינה הוא 75 .

א. חשב את סטיית התקן של הציונים של בחינת המתכונת.

בבית ספר החליטו שכל התלמידים שהציון שלהם בבחינה נמוך מ- 55 יקבלו שיעורי עזר.

ב. כמה תלמידים (בערך) יקבלו את שיעורי העזר?

במסגרת התנדבות בבית הספר הציעו ל- 38 התלמידים המצטיינים, בעלי הציונים הגבוהים ביותר, לעזור לתלמידים מתקשים.

ג. מהו הציון המינימלי הנדרש להצטיינות?

א. הציון הממוצע בבחינה הוא, הוא $\bar{x}=75$.

20% **מהציונים <u>נמוכים</u> מהציון** 60 .

השטח החלקי משמאל לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את ההסתברות לקבלת ציון שמתחת לציון התקן המתאים.

$$p=0.2 \quad \to z=-0.84$$

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$-0.84=\frac{60-75}{s}$$

$$s=\frac{-15}{-0.84}$$

$$\boxed{s=17.86}$$

תשובה: סטיית התקן של הציונים של בחינת המתכונת היא 17.86 .

ב. לבחינת המתכונת ניגשו 300 **תלמידים.**

תלמידים עם ציון <u>נמוך</u> מ- 55 **יקבלו שיעורי עזר .**

ציון התקן הוא $z=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{55-75}{17.86}=-\frac{20}{17.86}=-1.12$.

השטח החלקי מימין לציון התקן, שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית,

מייצג את החלק היחסי (אחוז, או הסתברות) לקבלת ציון שמעל לציון התקן שמצאנו.

היא: $p(x<55)=p(z<-1.12)=0.131$.

מספר התלמידים הוא $0.131\cdot 300\approx 39$.

תשובה: 39 **תלמידים (בערך) יקבלו את שיעורי העזר.**

ג. ל- 38 **התלמידים המצטיינים הוצע לעזור לתלמידים מתקשים, במסגרת ההתנדבות בבית הספר.**

$p(\text{excellence})=\frac{38}{300}\approx 0.127$ **, ובהתאם** $1-0.127=0.873$ **מהתלמידים אינם מצטיינים.**

$z(p<0.873)=1.14$.

$$1.14=\frac{x-75}{17.86}$$

$$20.36=x-75$$

$$\boxed{95.36=x}$$

תשובה: הציון המינימלי הנדרש להצטיינות הוא 95.36 .

16

חברת קוסמטיקה החליטה לערוך מחקר, ובו לבדוק את קצב התארכות שְׂעַר הראש של אנשים בס"מ לשָנה. החברה בדקה מספר רב של אנשים.

היא גילתה שקצב התארכות השיער שלהם מתפלג נורמלית, והתבררו שני נתונים:

i. השיער של 50% מן הנבדקים התארך בפחות מ־ 12 ס"מ בשנה.

ii. השיער של 33% מן הנבדקים התארך ביותר מ־ 12.56 ס"מ בשנה.

א. מהו קצב ההתארכות הממוצע של השיער של הנבדקים?

ב. מהי סטיית התקן של קצב התארכות השיער של הנבדקים?

חברת הקוסמטיקה הכריזה שהיא הצליחה לפתח שמפו שמגביר ב־ 10% את קצב התארכות השיער.

ג. לפי ההכרזה, מה יהיה הממוצע החדש ומה תהיה סטיית התקן החדשה של קצב התארכות השיער בקרב אוכלוסיית האנשים שישתמשו בשמפו זה?

ד. החברה בדקה מהו אחוז הנבדקים במחקר שקצב התארכות השיער שלהם הוא בין הממוצע ובין סטיית תקן אחת מעל הממוצע.

לפי הכרזת החברה, אם ישתמשו כל הנבדקים בשמפו שהיא פיתחה, האם אחוז זה יגדל, יקטן או לא ישתנה? נמקו את תשובתכם.

א. קצב התארכות שער הראש של אנשים, על פי המחקר של חברת קוסמטיקה, מתפלג נורמלית.

$i.$ השיעור של 50% מן הנבדקים התארך בפחות מ- 12 ס"מ לשנה.

התפלגות נורמלית סימטרית סביב לממוצע, כאשר 50% מהנתונים מימין, ו- 50% משמאל.

לכן, הממוצע הוא 12 ס"מ לשנה.

תשובה: קצב ההתארכות הממוצע, של השיעור של הנבדקים, הוא 12 ס"מ לשנה.

ב. 12 ס"מ $= \bar{x}$.

$ii.$ השיעור של $33\% = 0.33$ מן הנבדקים התארך ביותר מ- 12.56 ס"מ לשנה.

נמצא את ציון התקן המתאים בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$$p(x > 12.56) = 1 - p(x < 12.56)$$
$$0.33 = 1 - p(x < 12.56).$$
$$p(x < 12.56) = 0.67 \quad \rightarrow z = 0.44$$

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.

$$0.44 = \frac{12.56 - 12}{s}$$
$$0.44s = 0.56$$
$$\boxed{s = 1.273}$$

תשובה: סטיית התקן, של קצב ההתארכות השיעור של הנבדקים, היא 1.273 ס"מ .

ג. חברת הקוסמטיקה הכריזה שהיא הצליחה לפתח שמפו שמגביר ב- 10% את קצב התארכות השיער .

כאשר יש גידול באחוזים, הן הממוצע והן סטיית התקן משתנים בהתאם לשינוי.

כל הנתונים גדלים פי $110\% = 1.1$, ולכן הממוצע החדש הוא 13.2 ס"מ$= 12 \cdot 1.1$,

וסטיית התקן החדשה תהיה 1.4 ס"מ$= 1.273 \cdot 1.1$.

תשובה: הממוצע החדש יהייה 13.2 ס"מ, וסטיית התקן החדשה תהיה 1.4 ס"מ.

ד. בכל התפלגות נורמאלית (ללא תלות בערך של הממוצע שלה או סטיית התקן שלה),

אחוז הערכים תלוי רק בכמה סטיות תקן התרחקנו מהממוצע (זהו הערך של z).

לכן, אחוז זה לא ישתנה גם אם שינינו את ערכם של הממוצע וסטיית התקן.

ניתן לחשב בשאלה זו את האחוז הזה אך זה לא נדרש בשאלה (חישוב בעמוד הבא).

תשובה: אחוז זה לא ישתנה, גם אם כל הנבדקים ישתמשו בשמפו שהחברה פיתחה.

<u>הרחבה והעשרה</u>

לסעיף ג

תוספת או החסרה של קבוע מכל דגימה משנה את הממוצע אך לא את סטיית התקן שכן הפיזור לא משתנה.
לעומת זאת, תוספת של אחוז קבוע לכל דגימה אינה בעצם תוספת של קבוע,
אלא הכפלה (כי אחוזים זהים משלמים שונים זה מזה).
לכן, במקרה של תוספת באחוזים, גם סטיית התקן מוכפלת באותו פקטור כי התוספת באחוזים מגדילה יותר את הדגימות בעלות הערכים הגבוהים, מאשר את אלו בעלות הערכים הקטנים כך שהפיזור גדל.
(והפוך לגבי החסרה של אחוזים).

לסעיף ד

מתחת לממוצע יש 50% **מהנתונים .**

אם סטיית התקן היא 1 **, אז זהו ציון התקן** $(z=1)$ **,**

ועל-פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p(z<1)=0.841=84.1\%$ **.**

מכאן שבין הממוצע לסטיית תקן אחת ישנם $84.1\%-50\%=34.1\%$ **מהנבדקים.**
אחוז זה לא תלוי בכלל בשיעורו של הממוצע, או בגודלה של סטיית התקן,
כל עוד כמובן ההתפלגות נורמלית.

17

משקלי התינוקות שנולדים בעיר מסוימת מתפלגים נורמלית.

נתון כי המשקל הממוצע של התינוקות שנולדים בעיר זו הוא 3.4 ק"ג.

96.41% מן התינוקות בעיר זו נולדים במשקל נמוך מ- 5.02 ק"ג.

א. מצאו את סטיית התקן של משקל התינוקות שנולדים בעיר זו.

אורי נולד בעיר זו במשקל נמוך ממשקלם של 9% מן התינוקות שנולדים בה.

ב. מצאו את המשקל שבו נולד אורי.

משקל הנמוך מ- 1.5 ק"ג נחשב למשקל נמוך מאוד לתינוק שנולד.

ג. (1) מהו אחוז התינוקות שנולדים במשקל נמוך מאוד בעיר זו?

(2) בשנה מסוימת נולדו בעיר זו $20{,}000$ תינוקות. על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, כמה מן התינוקות האלה נולדו במשקל נמוך מאוד?

שחר נולד בעיר אחרת, באותו המשקל שבו נולד אורי.

משקל התינוקות בעיר שבה נולד שחר מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן של 0.8.

משקל הלידה של שחר ומשקל הלידה של אורי הם בעלי אותו ציון תקן.

ד. מצאו את המשקל הממוצע של התינוקות בעיר שבה נולד שחר.

א. משקלי התינוקות שנולדים בעיר מסוימת מתפלגים נורמלית.

המשקל הממוצע של התינוקות שנולדים בעיר זו הוא 3.4 **ק"ג** $\bar{x}=$.

96.41% **מהתינוקות נולדים במשקל נמוך מ-** 5.02 **ק"ג .**

נמצא את ציון התקן המתאים בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$p(x<5.02)=0.9641 \quad \rightarrow z=1.8$.

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}$.

$$1.8=\frac{5.02-3.4}{s}$$
$$1.8s=1.62$$
$$\boxed{s=0.9}$$

תשובה: סטיית התקן, של משקלי התינוקות, היא 0.9 **ק"ג .**

ב. אורי נולד במשקל נמוך ממשקלם של 9% **מן התינוקות שנולדים בה.**

כלומר, הוא שוקל יותר מ- $100\%-9\%=91\%$ **מן התינוקות שנולדים בעיר.**

$p=0.91 \quad \rightarrow z=1.34$.

$$1.34=\frac{x-3.4}{0.9} \quad / \cdot 0.9$$
$$1.206=x-3.4$$
$$\boxed{x=4.606}$$

תשובה: המשקל שבו נולד אורי הוא 4.606 **ק"ג.**

ג. משקל הנמוך מ- 1.5 **ק"ג נחשב למשקל נמוך מאוד לתינוק שנולד.**

(1) נחשב את ציון התקן עבור $x=1.5$ **, ובהתאם את האחוז המבוקש .**

$$z=\frac{1.5-3.4}{0.9}=\frac{-1.9}{0.9}=-2.11$$
$$z=-2.11 \quad \rightarrow p(z<-2.11)=0.0174=\boxed{1.74\%}$$

תשובה: 1.74% **מהתינוקות נולדים במשקל נמוך מאוד בעיר זו.**

(2) בשנה מסוימת נולדו בעיר זו $20{,}000$ **תינוקות.**

348 **תינוקות** $=0.0174\cdot 20{,}000$.

תשובה: 348 **תינוקות נולדים במשקל נמוך מאוד בעיר זו, בשנה המסוימת,**

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית.

ד. שחר נולד בעיר אחרת, באותו המשקל שבו נולד אורי, כלומר במשקל של 4.606 **ק"ג.**

משקל התינוקות בעיר שבה נולד שחר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 0.8 **ק"ג** $s=$ **.**

משקל הלידה של שחר ומשקל הלידה של אורי הם בעלי אותו ציון תקן, כלומר $z=1.34$ **.**

$$1.34=\frac{4.606-\bar{y}}{0.8} \quad /\cdot 0.8$$

$$1.072=4.606-\bar{y}$$

$$\boxed{\bar{y}=3.534}$$

תשובה: המשקל הממוצע של התינוקות, בעיר שבה נלד שחר, הוא 3.534 **ק"ג.**

במפעל מסוים אורזים מלפפונים על פי אורכם. האורכים של המלפפונים מתפלגים נורמלית.

כל המלפפונים שאורכם קטן מ- 12 ס"מ נארזים בקופסאות שימורים רגילות.

שאר המלפפונים נארזים בקופסאות שימורים גדולות.

ידוע כי האורך הממוצע של מלפפונים הוא 10.56 ס"מ, וסטיית התקן היא 3 ס"מ.

א. מצאו את אחוז המלפפונים שנארזים בקופסאות שימורים רגילות.

התברר שיש ביקוש למלפפונים קצרים במיוחד, לכן הוחלט כי המלפפונים יעברו מיון מחדש.

נמצא כי רבע מן המלפפונים שאורכם קטן מ- 12 ס"מ נחשבים מלפפונים קצרים במיוחד.

ב. (1) מצאו את אחוז המלפפונים הקצרים במיוחד.

(2) מצאו את אורכו של המלפפון הארוך ביותר מבין המלפפונים הקצרים במיוחד.

לאחר זמן מה הגיע למפעל משלוח חדש של מלפפונים. גם במשלוח זה האורכים של המלפפונים מתפלגים נורמלית.

50% מן המלפפונים במשלוח זה היו קצרים מ- 11.5 ס"מ.

12.5% מן המלפפונים במשלוח זה היו ארוכים מ- 14.26 ס"מ.

ג. מצאו את סטיית התקן של אורכי המלפפונים במשלוח החדש.

א. האורכים של המלפפונים במפעל מסוים מתפלגים נורמלית.

האורך הממוצע הוא $\bar{x} = 10.56$ **ס"מ וסטיית התקן היא** 3 **ס"מ.**

כל המלפפונים שאורכם קטן מ- 12 **ס"מ נארזים בקופסאות שימורים רגילות,**

והשאר נארזים בקופסאות שימורים גדולות.

נחשב את ציון התקן עבור $x = 12$ **ס"מ, ובהתאם את האחוז המבוקש .**

$$z = \frac{12-10.56}{3} = \frac{1.44}{3} = 0.48$$

$$z = 0.48 \quad \to p(z < 0.48) = 0.684 = \boxed{68.4\%}$$

תשובה: 68.4% **מהמלפפונים נארזים בקופסאות שימורים רגילות**

ב. התברר שיש ביקוש למלפפונים קצרים במיוחד, ולכן הוחלט כי המלפפונים עברו מיון מחדש.

(1) רבע מן המלפפונים שאורכם קטן מ- 12 **ס"מ נחשבים למלפפונים קצרים במיוחד .**

$$\frac{1}{4} \cdot 68.4\% = 17.1\%$$

תשובה: 17.1% **מהמלפפונים קצרים במיוחד.**

(2) נמצא את אורכו של המלפפון הארוך ביותר מבין הקצרים במיוחד, שעבורו $p = 17.1\% = 0.171$ **.**

$$p = 0.171 \quad \to z = -0.95$$

$$-0.95 = \frac{x-10.56}{3} \quad / \cdot 3$$

$$-2.85 = x - 10.56$$

$$\boxed{x = 7.71\, cm}$$

תשובה: אורכו של המלפפון הארוך ביותר, מבין המלפפונים הקצרים במיוחד, הוא 7.71 **ס"מ.**

ג. לאחר זמן מה הגיע למפעל משלוח חדש של מלפפונים (נסמן משתנה y **), שגם אורכיהם מתפלגים נורמלית.**

50% **מן המלפפונים במשלוח זה היו קצרים מ-** 11.5 **ס"מ, ולכן** $\bar{y} = 11.5$ **ס"מ .**

12.5% **מן המלפפונים במשלוח זה היו ארוכים מ-** 14.26 **ס"מ,**

ולכן: $p(y < 14.26) = 100\% - 12.5\% = 87.5\% = 0.875$ **.**

$$p = 0.875 \quad \to z = 1.15$$

$$1.15 = \frac{14.26-11.5}{s}$$

$$1.15s = 2.76$$

$$\boxed{s = 2.4\, cm}$$

תשובה: סטיית התקן של אורכי המלפפונים במשלוח החדש היא 2.4 **ס"מ.**

19

במשתלה מסוימת האורכים של גבעולי פרחים מתפלגים נורמלית. הממוצע של אורך גבעולי הפרחים במשתלה הוא 20 ס"מ.

במשתלה ממיינים את הפרחים לשלוש קבוצות:

קבוצה א' – פרחים שאורך הגבעול שלהם קצר מ- 22 ס"מ.

קבוצה ב' – פרחים שאורך הגבעול שלהם בין 22 ס"מ ל- 26 ס"מ.

קבוצה ג' – שאר הפרחים.

נתון כי שיעור הפרחים בקבוצה א' הוא 65.5% .

א. מצאו את סטיית התקן של אורך גבעולי הפרחים במשתלה.

ב. מצאו מהו אחוז הפרחים שבקבוצה ג' מתוך כל הפרחים במשתלה.

יום אחד היו במשתלה 2,000 פרחים סך הכול.

במשתלה החליטו להכין זרים מכל הפרחים שבקבוצה ב' כך שבכל זר יהיו 10 פרחים.

ג. על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, כמה זרים הכינו במשתלה ביום זה?

במשתלה אחרת, שגם בה האורכים של גבעולי הפרחים מתפלגים נורמלית, אחוז הפרחים שאורך הגבעול שלהם ארוך מ- 24 ס"מ שווה לאחוז הפרחים שבקבוצה ב'.

נתון כי סטיית התקן של אורך גבעולי הפרחים בשתי המשתלות זהה.

ד. מצאו את הממוצע של אורך גבעולי הפרחים במשתלה האחרת.

א. האורכים של גבעולי הפרחים במשתלה מסוימת מתפלגים נורמלית.

האורך הממוצע הוא 20 **ס"מ** $=\bar{x}$.

בקבוצה א' ישנם פרחים שאורך הגבעול שלהם <u>קצר</u> מ- 22 **ס"מ,**

והם מהווים 65.5% **מכלל הפרחים במשתלה.**

$$p=65.5\% \quad \to p=0.655 \quad \to z=0.4$$

$$0.4=\frac{22-20}{s} \quad / \cdot s$$

$$0.4s=2 \quad / :0.4$$

$$\boxed{s=5\,cm}$$

תשובה: סטיית התקן של אורך גבעולי הפרחים במשתלה היא 5 **ס"מ.**

ב. בקבוצה ג' יש פרחים שאורך הגבעול שלהם הוא 26 **ס"מ ומעלה.**

נחשב את ציון התקן עבור 26 **ס"מ** $=x$ **, ובהתאם את האחוז המבוקש .**

$$z=\frac{26-20}{5}=\frac{6}{5}=1.2$$

$$z=1.2 \quad \to p(z<1.2)=0.885$$

$$\to p(z>1.2)=1-0.885=0.115 \quad \to \boxed{11.5\%}$$

ומכאן שאחוז הפרחים שבקבוצה ב', שאורכם בין 22 **ל-** 26 **ס"מ הוא** $100\%-11.5\%-65.5\%=23\%$.

תשובה: 11.5% **מכל הפרחים במשתלה הם בקבוצה ג'.**

ג. יום אחד היו במשתלה 2,000 **פרחים סך הכול.**

במשתלה החליטו להכין זרים מכך הפרחים שבקבוצה ב', כך שבכל זר יהיו 10 **פרחים.**

מספר הפרחים שבקבוצה ב' הוא : $23\%\cdot 2000=0.23\cdot 2000=460$,

ובהתאם מספר הזרים הוא $460:10=46$.

תשובה: על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, במשתלה הכינו 46 **זרים ביום זה.**

ד. במשתלה אחרת, שגם בה האורכים של גבעולי הפרחים מתפלגים נורמלית,

אחוז הפרחים שאורך הגבעול שלהם <u>ארוך</u> מ- 24 **ס"מ שווה לאחוז הפרחים שבקבוצה ב', כלומר** 23% .

$$p(x>24)=23\% \quad \to p(x<24)=77\% \quad \to p=0.77 \quad \to z=0.74$$

נתון כי סטיית התקן של אורכי גבעולי הפרחים בשתי המשתלות זהה, כלומר 5 **ס"מ** $=s$.

$$0.74=\frac{24-\bar{x}}{5} \quad / \cdot 5$$

$$3.7=24-\bar{x}$$

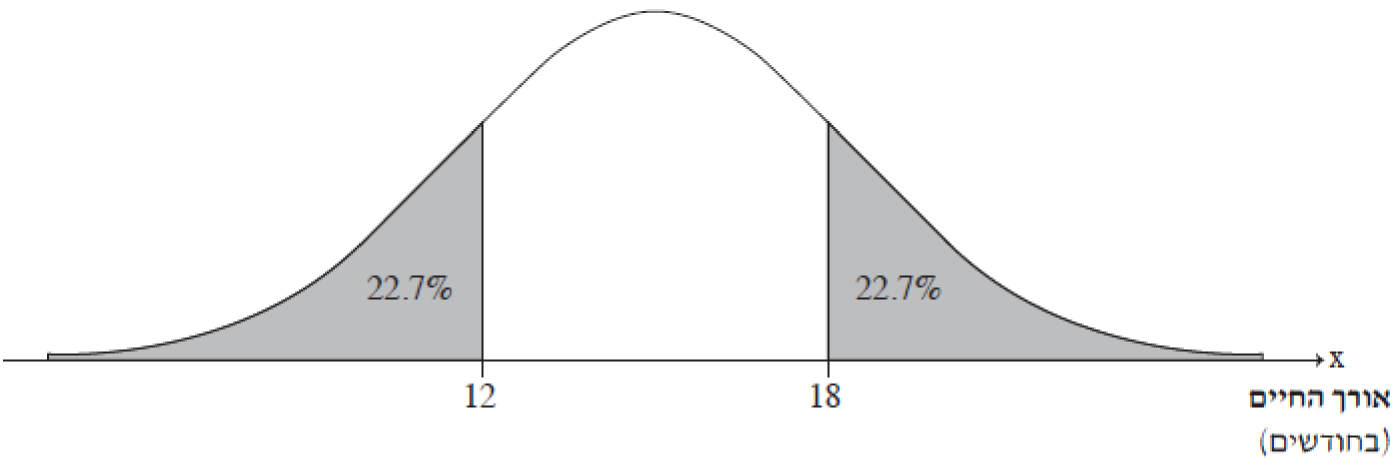
$$\boxed{\bar{x}=20.3\,cm}$$

תשובה: הממוצע של אורך גבעולי הפרחים במשתלה האחרת הוא 20.3 **ס"מ.**

20

אורך החיים של טלפונים שמייצרים במפעל מסוים מתפלג נורמלית.

לפניכם גרף ההתפלגות הנורמלית של אורך חיי הטלפונים ועליו חלק מנתוני אורך החיים (בחודשים).



א. מצאו את ממוצע אורך החיים של הטלפונים ואת סטיית התקן.

3.5% מן הטלפונים – אלה שאורך החיים שלהם הוא הקטן ביותר – נחשבים פגומים.

ב. מהו אורך החיים הגדול ביותר של טלפון שנחשב פגום?

בחודש מסוים ייצרו במפעל $2{,}000$ טלפונים.

ג. על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, לכמה מן הטלפונים שיִיצרו בחודש זה יש אורך חיים גדול מ־ 20 חודשים?

מהנדסים הצליחו להגדיל פי 1.5 את אורך החיים של כל הטלפונים שהמפעל מייצר.

ד. (1) מהו ממוצע אורך החיים החדש של הטלפונים ומהי סטיית התקן החדשה, לאחר ההגדלה?

(2) מצאו את אחוז הטלפונים שאורך החיים שלהם קטן מ־ 12 חודשים, לאחר ההגדלה.

א. אורך החיים של טלפונים שמייצרים במפעל מסוים מתפלג נורמלית.

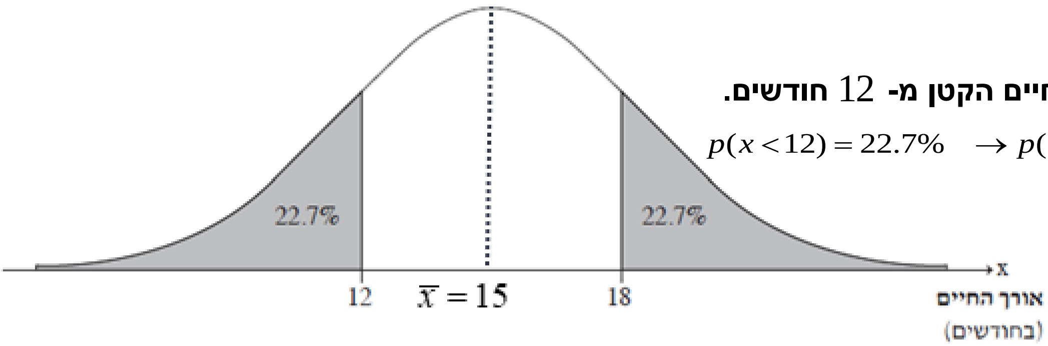
<u>נחשב תחילה את הממוצע:</u>

גרף ההתפלגות הנורמלית הוא סימטרי, ומכיוון ועל-פי הגרף הנתון

יש 22.7% **מהטלפונים עם אורך חיים הגדול מ-** 18 **חודשים,**

ובדיוק 22.7% **(אחוז זהה) מהטלפונים עם אורך חיים הקטן מ-** 12 **חודשים,**

הרי שהממוצע של ההתפלגות הוא 15 **חודשים** $= \dfrac{12+18}{2} = \bar{x}$ **.**



<u>נחשב עתה את סטיית התקן:</u>

22.7% **מהטלפונים עם אורך חיים הקטן מ-** 12 **חודשים.**

$$p(x<12)=22.7\% \rightarrow p(x<12)=0.227 \rightarrow z=-0.75$$

$$-0.75=\frac{12-15}{s} \quad / \cdot s$$

$$-0.75s=-3 \quad / :(-0.75)$$

$$\boxed{s=4\ months}$$

תשובה: ממוצע אורך החיים של הטלפונים הוא 15 **חודשים וסטיית התקן היא** 4 **חודשים.**

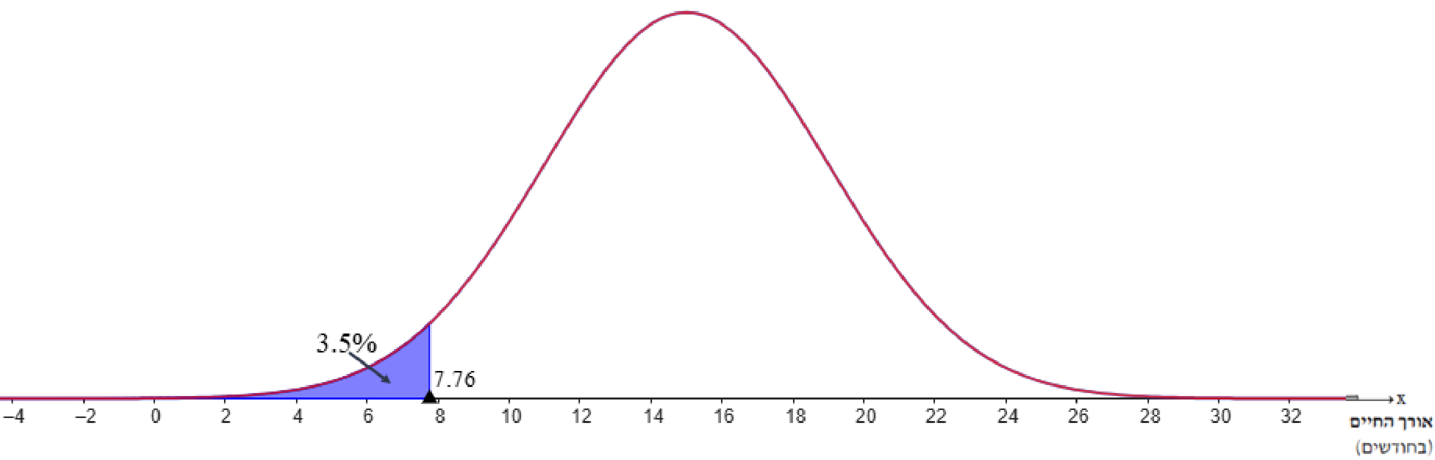
ב. 3.5% **מן הטלפונים, אלו שאורך החיים שלהם הוא הקטן ביותר, נחשבים פגומים.**

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p=3.5\% \rightarrow p=0.035 \rightarrow z=-1.81$

$$-1.81=\frac{x-15}{4} \quad / \cdot 4$$

$$-7.24=x-15$$

$$\boxed{x=7.76\ months}$$



תשובה: אורך החיים הגדול ביותר של טלפון שנחשב פגום הוא 7.76 **חודשים.**

ג. בחודש מסוים ייצרו במפעל $2,000$ טלפונים.

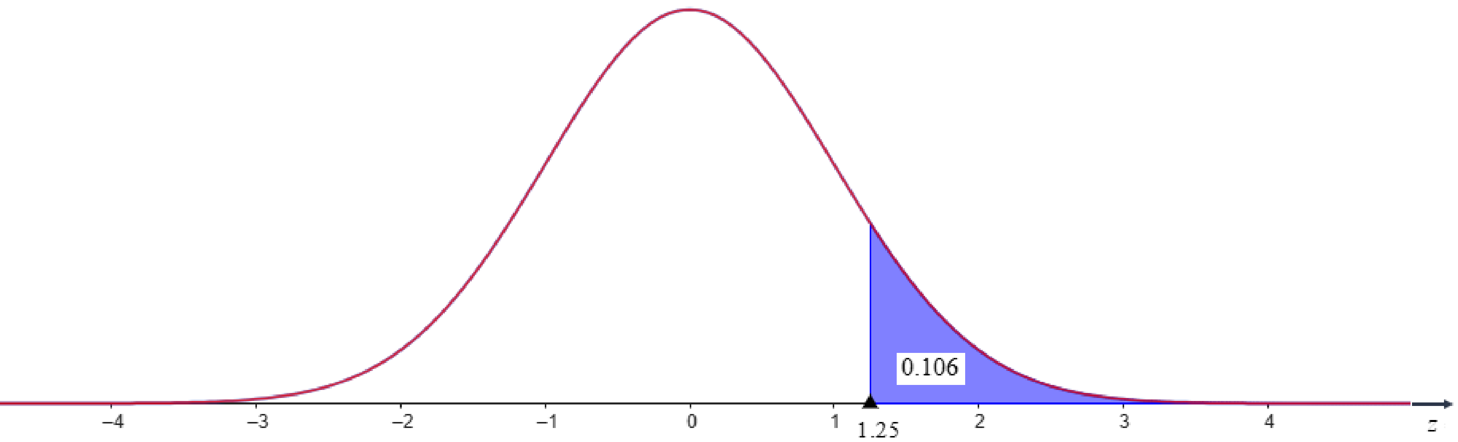
נמצא את ציון התקן המתאים לאורך חיים של 20 חודשים:

$$z=\frac{20-15}{4}=1.25$$

ונחשב מהי ההסתברות המתאימה לאורך חיים גדול יותר.

$$z=1.25 \quad \rightarrow p(z<1.25)=0.894 \quad \rightarrow p(z>1.25)=1-0.894=0.106$$

מספר הטלפונים המתאים הוא: $0.106\cdot 2000=212$,



תשובה: על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ל- 212 טלפונים יש אורך חיים גדול מ- 20 חודשים.

ד. מהנדסים הצליחו להגדיל פי 1.5 את אורך החיים של כל הטלפונים שהמפעל מייצר.

זוהי טרנספורמציה ליניארית, כאשר כל ערכי המשתנים גדלים פי 1.5,

מה שגם מגדיל את הממוצע פי אותו מספר, כאשר הפיזור גדל וסטיית התקן גדלה אף היא פי אותו מספר.

(1) ממוצע אורך החיים של הטלפונים, לפני ההגדלה, היה 15 חודשים.

כיוון שכל המשתנים גדלו פי 1.5, אז גם הממוצע גדל פי 1.5 והוא 22.5 חודשים $=15\cdot 1.5$.

גם סטיית התקן גדלה פי 1.5 והיא 6 חודשים $=4\cdot 1.5$.

תשובה: ממוצע אורך החיים החדש הוא 22.5 חודשים וסטיית התקן החדשה היא 6 חודשים.

(2) נמצא את אחוז הטלפונים שאורך החיים שלהם קטן מ- 12 חודשים.

נמצא את ציון התקן המתאים לאורך חיים של 12 חודשים:

$$z=\frac{12-22.5}{6}=-1.75$$

ונחשב מהי ההסתברות המתאימה לאורך חיים קטן יותר.

$$z=-1.75 \quad \rightarrow p(z<-1.75)=0.0401=0.0401\cdot 100\%=4.01\%$$

תשובה: 4.01% מהטלפונים, לאחר ההגדלה, הם בעלי אורך החיים קטן מ- 12 חודשים.