יואל גבע
לא מתפשרים.

שאלון 35572 מועד ב׳
קיץ תשפ״ב

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35572 מועד ב׳ קיץ תשפ״ב.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. נתונות הנקודות $A(-5,3)$ ו- $B(0,-2)$.

יש למצוא את המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים, שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

נסמן $P(s,t)$ - מרכז המעגל, ולכן $PA = PB = R$ (רדיוסים שווים זה לזה).

<u>דרך פתרון אחת</u>

כל הנקודות שנמצאות במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאות על האנך האמצעי לקטע.

אחת מהנקודות על המקום הגיאומטרי, היא אמצע המיתר AB.

(מובן שבאחד מהמעגלים AB הוא הקוטר, ואז נקודת האמצע תהייה מרכז המעגל.)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-5+0}{2} = -2.5 \\ y &= \frac{3-2}{2} = 0.5 \end{aligned}\right\} (-2.5, 0.5)$$

$m_{AB} = \frac{3+2}{-5-0} = -1$, ולכן שיפוע האנך האמצעי הוא $+1$ ($m_1 \cdot m_2 = -1$, תנאי ניצבות).

ולכן, משוואת המקום הגיאומטרי היא: $\boxed{y = x+3} \rightarrow \quad y - 0.5 = 1(x+2.5)$.

<u>דרך פתרון שניה</u>

על פי מרחק בין שתי נקודות: $PA = PB = R$.

$$\sqrt{(s+5)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{(s-0)^2 + (t+2)^2}$$

$$s^2 + 10s + 25 + t^2 - 6t + 9 = s^2 + t^2 + 4t + 4$$

$$10s + 30 = 10t$$

$$s + 3 = t$$

$$\boxed{y = x+3}$$

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי, של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם, היא $y = x+3$.

ב. נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואת קנונית.

מכאן שמוקדי האליפסה, $F_1(c,0)$ ו- $F_2(-c,0)$, נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

לכן, מרכז מעגל M נמצא על ציר ה- y, וכאמור גם על המקום הגיאומטרי $y = x+3$.

נקבל שמרכז המעגל הוא $M(0,3)$, ורדיוסו הוא $R = MA = \sqrt{(0+5)^2 + (3-3)^2} = 5$.

משוואת המעגל היא $x^2 + (y-3)^2 = 25$.

תשובה: שיעורי מרכז המעגל M הם $(0,3)$, והרדיוס שלו הוא 5.

ג. נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל, כלומר $2R = 2\cdot 5 = 10$.

לכן, $2a = 10$ ו- $a = 5$.

המוקד $F_1(c,0)$ נמצא על המעגל, לכן: $\boxed{c=4} \rightarrow \quad c^2 + (0-3)^2 = 25$ $(c>0)$.

באליפסה קנונית, שהציר הארוך שלה מונח על ציר ה- x , מתקיים : $a^2 - b^2 = c^2$.

ומכאן ש- $\boxed{b=3} \rightarrow \quad 5^2 - b^2 = 4^2$ $(b>0)$.

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

ד. $F(3,0)$ הוא המוקד <u>הימני</u> של האליפסה.

ישר, המאונך לציר ה- x , עובר במוקד <u>השמאלי</u> של האליפסה, ומכאן שמשוואתו היא $x = -3$.

הישר חותך את האליפסה בנקודות T ו- Q, ואת המעגל M בנקודות K ו- L .

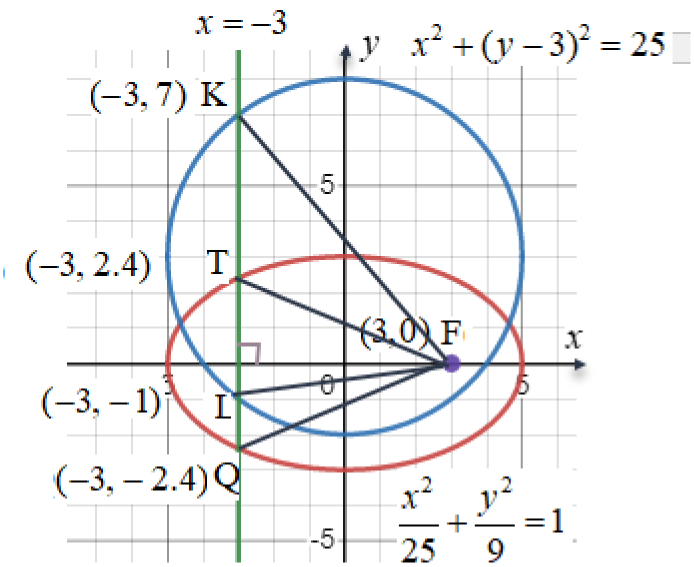
נציב $x = -3$ במשוואת האליפסה, ונמצא את שיעורי הנקודות T ו- Q.

$y = \pm 2.4 \leftarrow \quad y^2 = \frac{144}{25} \leftarrow \quad \frac{(-3)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, ואורך הקטע TQ הוא 4.8.

נציב $x = -3$ במשוואת המעגל, ונמצא את שיעורי הנקודות K ו- L .

$$(-3)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \rightarrow (y-3)^2 = 16$$
$$y - 3 = 4 \quad \rightarrow y = 7$$
$$y - 3 = -4 \quad \rightarrow y = -1$$

ואורך הקטע KL הוא 8.



נסמן את הנקודות בציור (ללא הגבלת הכלליות).

נשים לב שלצלע KL במשולש KLF,

ולצלע TQ במשולש TQF,

יש גובה משותף מהקודקוד F , המונח על ציר ה- x,

ולכן יחס השטחים שווה ליחס הצלעות.

$$\frac{S_{\Delta KLF}}{S_{\Delta TQF}} = \frac{KL}{TQ} = \frac{8}{2.4} = \frac{5}{3}$$

תשובה: היחס בין שטח המשולש KLF לשטח המשולש TQF הוא $5:3$.

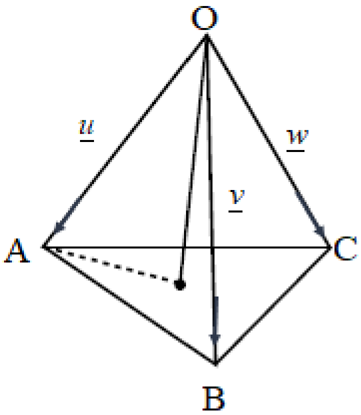
א. נתונה פירמידה OABC **, שבסיסה משולש** ABC .

נראה שהפירמידה ישרה, ושבסיסיה הוא משולש שווה צלעות.

נתון $|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}|$ **, כלומר כל המקצועות הצדדיים שווים זה לזה,**

ולכן <u>הפירמידה ישרה</u>, ו<u>הגובה יורד למרכז המעגל החוסם</u>.

נסמן ב- a **את אורכי המקצועות הצדדיים (גם כהכנה לסעיף ד).**



$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \underline{u}}$ $|\underline{u}| = a$ $\underline{u}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \underline{v}}$ $|\underline{v}| = a$ $\underline{v}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \underline{w}}$ $|\underline{w}| = a$ $\underline{w}^2 = a^2$

$$\sphericalangle \mathrm{AOB} = \sphericalangle \mathrm{BOC} = \sphericalangle \mathrm{COA} = 90^\circ$$

ולכן גם: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

בנוסף, כל הפאות הן משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים,

החופפים זה לזה (משפט חפיפה צ. ז. צ.),

ולכן מקצועות הבסיס שווים, ו<u>הבסיס הוא משולש שווה צלעות</u>.

הנקודה H **מקיימת** $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\,\underline{u} + s\,\underline{v} + k\,\underline{w}$ **, כאשר** $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ **מאונך לבסיס** ABC **.**

לכן, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ **מאונך לכל וקטור בבסיס.**

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\underline{u} + \underline{v}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\underline{u} + \underline{w}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$
$$(t\,\underline{u} + s\,\underline{v} + k\,\underline{w}) \cdot (-\underline{u} + \underline{v}) = 0$$
$$-t\underline{u}^2 + s\underline{v}^2 = 0$$
$$sa^2 = ta^2 \quad / : a^2 > 0$$
$$\boxed{s = t}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$
$$(t\,\underline{u} + s\,\underline{v} + k\,\underline{w}) \cdot (-\underline{u} + \underline{w}) = 0$$
$$-t\underline{u}^2 + k\underline{w}^2 = 0$$
$$ka^2 = ta^2 \quad / : a^2 > 0$$
$$\boxed{k = t}$$

ולכן, $t = s = k$.

תשובה: הוכחנו כי $t = s = k$ **.**

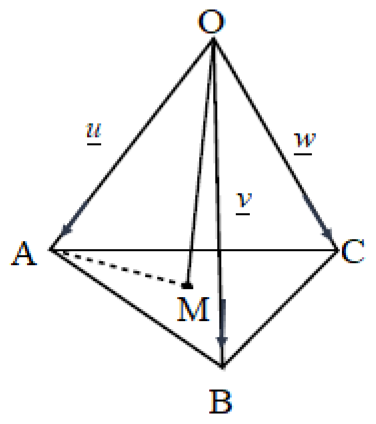
ב. הנקודה M היא נקודת המפגש של התיכונים בבסיס ABC.

OM יוצא מקודקוד הפירמידה ומגיע למפגש התיכונים,

ומכיוון והבסיס הוא משולש שווה צלעות, זה גם מרכז המעגל החוסם,

ומכאן ש- OM הוא גם הגובה של פירמידה ישרה זו,

ולכן הכיוון שלו שווה לכיוון של $\overrightarrow{OH} = t\underline{u} + t\underline{v} + t\underline{w}$.



$\boxed{\overrightarrow{OA} = \underline{u}}$ $\quad |\underline{u}| = a \quad \underline{u}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{OB} = \underline{v}}$ $\quad |\underline{v}| = a \quad \underline{v}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{OC} = \underline{w}}$ $\quad |\underline{w}| = a \quad \underline{w}^2 = a^2$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

התיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ מהקודקוד.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{OM} = \underline{u} + \frac{1}{3}(-\underline{u} + \underline{v} - \underline{u} + \underline{w})$$

$$\overrightarrow{OM} = \underline{u} - \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}}$$

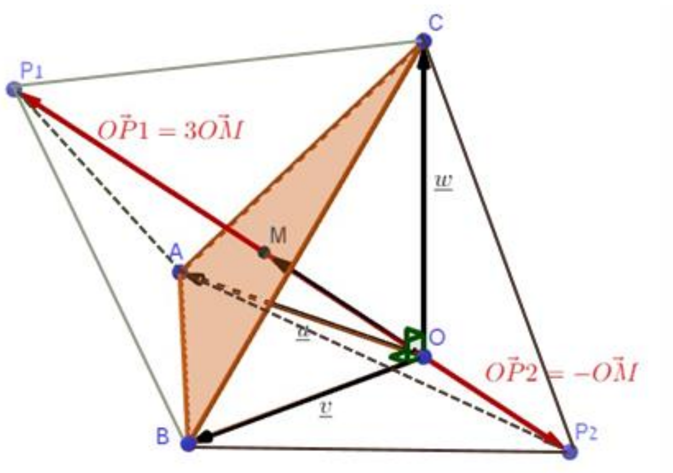
מכאן, גם שעבור $t = \frac{1}{3}$, הנקודה M מתלכדת עם הנקודה H.

תשובה: הוכחנו כי $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסברנו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

ג. הנקודה P נמצאת על הישר ℓ , שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.

מכאן ש- $\overrightarrow{OP} = \alpha\,\overrightarrow{OM}$.

כמו שרואים באיור, ישנם שני מצבים.



עבור הפירמידה P_2ABC, כאשר O אמצע PM :

נפחה כפול מה של הפירמידה $OABC$,

כי הגבהים מקיימים $PM = 2OM$,

והבסיסים של שתי הפירמידות זהים.

במקרה זה, $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OM}$, כי הכיוונים שונים,

ולכן $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$.

עבור הפירמידה P_1ABC, כאשר O אמצע $P_1M : MO = 2:1$: *תודה לדוד בחור על האיור המקסים*

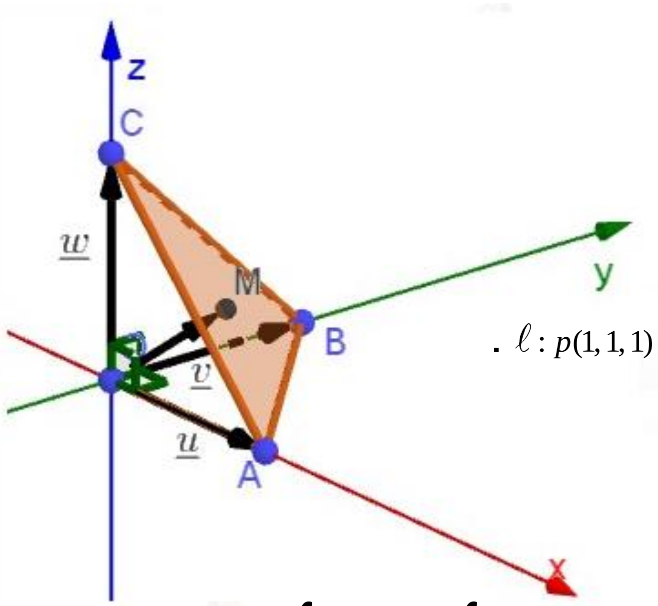
נפחה כפול מה של הפירמידה $OABC$, כי הגבהים מקיימים, גם הפעם, $PM = 2OM$,

והבסיסים של שתי הפירמידות זהים.

במקרה זה, $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OM}$, כי הכיוונים זהים, ולכן $\overrightarrow{OP} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$.

תשובה: $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$, או $\overrightarrow{OP} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, עבורם $V_{PABC} = 2V_{OABC}$.

ד. ממקמים את הפירמידה PABC **על הצירים, כמתואר באיור, כאשר הנקודה** O **היא בראשית הצירים.**



תודה לדוד בחור על האיור המקסים

(ניתן לעשות זאת, כי $\underline{u}$ **,** $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$ **מאונכים זה לזה.)**

$|\underline{u}|=a$ **ובהתאם** $|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=a$ **, על סמך סעיף א .**

מכאן ש- $\underline{u}=(a,0,0)$ **,** $\underline{v}=(0,a,0)$ **, ו-** $\underline{w}=(0,0,a)$ **.**

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ **, ולכן** $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\underline{x}=(a,a,a)$ **.**

הקטע OP **מונח על הישר** ℓ **, ולכן משוואת הישר היא** $\ell: p(1,1,1)$ **.**

תשובה: ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ **,**

שעליו נמצא הקטע OP **, היא** $\ell: p(1,1,1)$ **.**

ה. OP **מאונך למישור** ABC **.**

בהתאם, הנורמל למישור הוא $\underline{n}=(1,1,1)$ **, ומשוואת המישור** ABC **היא** $x+y+z+d=0$ **.**

$\underline{u}=(a,0,0)$ **, ולכן שיעורי הנקודה** A **הם:** $(a,0,0)$ **.**

נציב את שיעורי הנקודה A **במשוואת המישור:** $a+0+0+d=0 \quad \rightarrow d=-a$ **.**

תשובה: משוואת המישור ABC **היא** $x+y+z-a=0$ **.**

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC **הוא** $20\frac{5}{6}$ **.**

משולש ABO **הוא משולש ישר זווית, שבו** $\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$ **.**

משולש ABO **הוא גם בסיס לפירמידה** OABC,

כאשר OC **, שמאונך למשולש** ABO **, הוא הגובה לבסיס זה.**

$|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|=a$ **, ולכן** $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=a$ **.**

$$V=\frac{S_{\Delta \mathrm{ABO}} \cdot \mathrm{CO}}{3}$$

$$20\frac{5}{6}=\frac{\frac{a \cdot a}{2} \cdot a}{3}$$

$$20\frac{5}{6}=\frac{a^3}{6}$$

$$125=a^3$$

$$\boxed{a=5}$$

תשובה: $a=5$ **.**

א. המספר $z = Rcis\,\alpha$ **נמצא במישור גאוס ברביע השלישי, ולכן** $180° < \alpha < 270°$.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

נעבור להצגה קוטבית של $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$R = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

$$\boxed{\theta = 120°} \quad \leftarrow 2nd\ quadrant$$

הזוויות שנבחרה מתאימה לרביע השני, בו מצוי $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$**, ולכן** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = cis120$.

$$\frac{Rcis\,\alpha}{Rcis\,(-\alpha)} = cis\,120°$$

$$cis\,2\alpha = cis\,120°$$

$$2\alpha = 120° + 360°k$$

$$\alpha = 60° + 180°k$$

$$\boxed{\alpha = 240°} \quad \leftarrow 180° < \alpha < 270°$$

תשובה: $\alpha = 240°$.

ב. נתון $|2iz| + \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| - \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 8$.

$Rcis\alpha \cdot cis\beta = Rcis(\alpha+\beta)$ **, כלומר האורך לא משתנה.**

לכן: $|2iz| = 2R$, $\left|\frac{\bar{z}}{i}\right| = R$ **, ובנוסף** $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{Rcis\,\alpha}{Rcis\,(-\alpha)}\right| = |cis\,(2\alpha)| = 1$.

$$|2iz| + \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| - \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 8$$

$$2R + R - 1 = 8$$

$$3R = 9$$

$$\boxed{R = 3}$$

ונקבל גם ש- $z = 3cis\,240°$

תשובה: $R = 3$.

ג. נתונה המשוואה $w^9=\frac{z^3}{27}$.

$$w^9=\frac{(3cis\,240°)^3}{27}$$
$$w^9=\frac{3^3cis\,(240°\cdot 3)}{27}$$
$$w^9=\frac{27cis\,(720°)}{27}$$
$$w^9=cis0°$$
$$w^9=1$$

דרך פתרון ראשונה ומומלצת

כדי להראות כי המספר $\frac{z}{\overline{z}}=cis\,120°$ **הוא אחד מהפתרונות של המשוואה** $w^9=\frac{z^3}{27}$,

נציב את המספר במשוואה $w^9=1$.

$$(cis\,120°)^9=1$$
$$cis\,(120°\cdot 9)=1$$
$$cis\,(1080°)=1$$
$$cis\,(0°)=1$$
$$1=1 \quad o.k$$

ולכן, המספר $\frac{z}{\overline{z}}=cis\,120°$ **הוא אחד מהפתרונות של המשוואה** $w^9=\frac{z^3}{27}$ **.**

דרך פתרון שנייה

נמצא את פתרונות המשוואה, בהתאם לנוסחת השורשים:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\ cis(\frac{\theta}{n}+\frac{360°k}{n}) \quad \to w_k=\sqrt[9]{1}\ cis\ (\frac{0°}{9}+\frac{360°k}{9})$$

$$\boxed{w_k=cis\ 40°k}$$

$$\frac{z}{\overline{z}}=\frac{3cis\ 240°}{3cis\ (-240°)}=cis\ 480°=cis\,120°$$

ועבור $k=3$ **,** $w_k=cis\ 120°$ **.**

תשובה: הראינו כי המספר $\frac{z}{\overline{z}}=cis\,120°$ **הוא אחד מהפתרונות של המשוואה** $w^9=\frac{z^3}{27}$ **.**

ד. (1) ΔABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקוד הבסיס B מתאים למספר $\frac{z}{\bar{z}} = cis\,120° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, ובהתאם $B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

קודקוד הבסיס C מתאים למספר $\frac{\bar{z}}{z} = cis\,(-120°) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, ובהתאם $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

קודקודים אלו סימטריים לציר ה- x , ולכן ציר ה- x הוא אנך אמצעי לצלע BC.

מכאן שהקודקוד השלישי, A , נמצא על ציר ה- x.

נתון שקודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$ (k הוא מספר מדומה טהור).

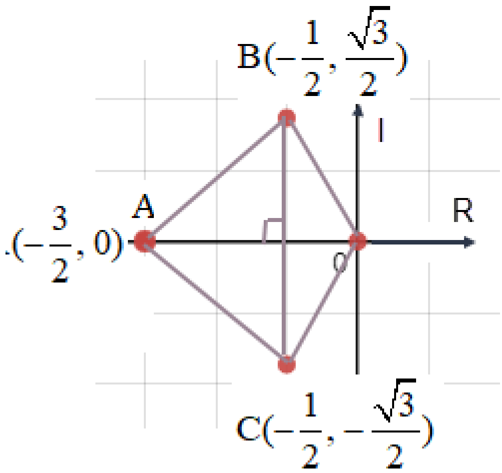
$z = 3cis\,240° = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, ומכיוון ו- A נמצא על ציר ה- x , אז החלק המדומה שלו שווה ל- 0 .

ולכן $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, ובהתאם $A(-\frac{3}{2}, 0)$.

תשובה: $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

(2) אלכסוני המרובע $ABOC$ מאונכים זה לזה, ולכן שטחו שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

(הערה משלימה - המרובע הוא דלתון)



$$S_{ABOC} = \frac{AO \cdot BC}{2} = \frac{1.5 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

תשובה: שטח המרובע $ABOC$ הוא $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2e^{a-x^3}$, המוגדרת לכל x (a הוא פרמטר).

(1) נמצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

$x^2>0$ **לכל** $x\neq 0$ **, ו-** $e^{a-x^3}>0$ **לכל** x **.**

ומכאן שהפונקציה חיובית לכל $x\neq 0$ **.**

(2) נמצא את שיעור ה- x **של נקודות הקיצון של הפונקציה** $f(x)$ **, ונקבע את סוגן.**

$$f'(x)=2xe^{a-x^3}+x^2e^{a-x^3}\cdot(-3x^2)$$

$$\boxed{f'(x)=xe^{a-x^3}(2-3x^3)}$$

$$0=xe^{a-x^3}(2-3x^3)\quad /:e^{a-x^3}>0$$

$$x(2-3x^3)=0$$

$$x=0$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.874$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1)<0 \quad \searrow \\ f'(0.5)>0 \quad \nearrow \\ f'(1)<0 \quad \searrow \end{array}\right\} x=0,\ \min \quad x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.874,\ \max$$

תשובה: $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.874$ **מקסימום,** $x=0$ **מינימום.**

ב. נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

עבור $x=0$ הגרף של פונקציית הנגזרת עובר משליליות לחיוביות,

ועבור $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.874$ עובר מחיוביות לשליליות.

לכן בתחום $0<x<\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ הנגזרת חיובית, והשטח הכלוא בינה לבין ציר ה- x חיובי.

$$\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}(f'(x)-0)\,dx$$

$$\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}=f(x)\Big]_0^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}=f(\sqrt[3]{\frac{2}{3}})-f(0)$$

$$\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}=(\sqrt[3]{\frac{2}{3}})^2e^{a-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{4e}{9}=\frac{4}{9}e^{3a-2}$$

$$e=e^{3a-2}$$

$$1=3a-2$$

$$3=3a$$

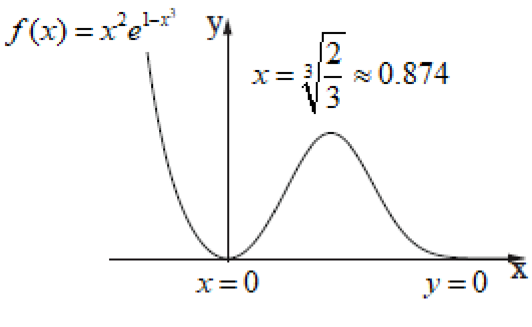
$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$.

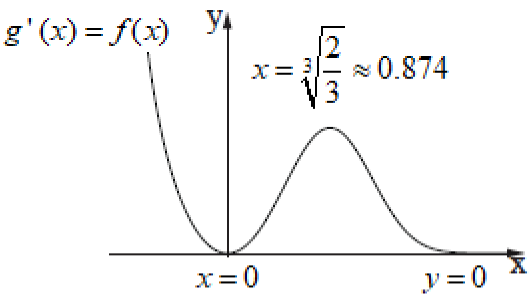
ג. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=x^2e^{1-x^3}$.

שתי הצבות במחשבון: $f(-5)=+1.3\cdot 10^{56}\to+\infty$, $f(5)=+3.5\cdot 10^{-53}\to(x\to+\infty)\ y=0$,

ומכאן ש $y=0$ $(x\to+\infty)$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**



תשובה: הסרטוט מעל.



ד. הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x)=f(x)$).

(1) תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)=f(x)$ קובעים את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

$f(x)\geq 0$ לכל x, ולכן גם $g'(x)\geq 0$ ו- $g(x)$ עולה לכל x.

תשובה: $g(x)$ עולה לכל x, ויורדת לאף x.

(2) תחומי העלייה והירידה של $g'(x)=f(x)$ קובעים את תחומי הקעירויות של $g(x)$.

בתחום $0<x<\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ - $g'(x)$ עולה, ולכן $g''(x)>0$ ו- $g(x)$ קעורה כלפי מעלה $(\cup)$.

בתחום $x>\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ או $x<0$ - $g'(x)$ יורדת, ולכן $g''(x)<0$ ו- $g(x)$ קעורה כלפי מטה $(\cap)$.

לכן, ל- $g(x)$ יש שתי נקודות פיתול, שבהן $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\approx 0.874$, $x=0$.

תשובה: לפונקציה $g(x)$ יש שתי נקודות פיתול.

ה. $g(x)$ עולה לכל x, לכן עבור $x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ שיעור ה- y יהייה גבוה מאשר עבור $x=0$.

לכן, בנקודה B מתקיים $g(\sqrt[3]{\frac{2}{3}})=\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

נמצא את הפונקציה $g(x)$ בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$g(x)=\int x^2e^{1-x^3}dx$$

$$g(x)=\int -\frac{1}{3}e^{1-x^3}\cdot(-3x^2)dx$$

$$g(x)=-\frac{1}{3}e^{1-x^3}+c$$

$$\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}=-\frac{1}{3}e^{1-\frac{2}{3}}+c \quad \leftarrow g(\sqrt[3]{\frac{2}{3}})=\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$$

$$e-\sqrt[3]{e}=-\sqrt[3]{e}+3c$$

$$\frac{e}{3}=c$$

$$\boxed{g(x)=-\frac{1}{3}e^{1-x^3}+\frac{e}{3}=\frac{e-e^{1-x^3}}{3}}$$

תשובה: $g(x)=-\frac{1}{3}e^{1-x^3}+\frac{e}{3}=\frac{e-e^{1-x^3}}{3}$.

א. נסרטט את הפונקציה $f(x)$, בהתאם לכל המאפיינים המובאים והבנת המשמעויות שלהם.

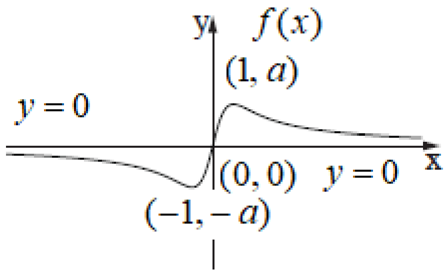
$f(x)$ מוגדרת לכל x ורציפה – משמעות: לא קיימות אסימפטוטות אנכיות, או נקודות אי רציפות.

$f(x)$ היא אי-זוגית: משמעות: הגרף סימטרי לראשית הצירים, והנקודה $(0,0)$ היא נקודת פיתול.

$y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה – משמעות: $y=0$ אסימפטוטה אופקית עבור $x \to \pm\infty$.

לפונקציה יש נקודת מינימום יחידה, ששיעורי הם $(-1,-a)$ - משמעות: $(1,a)$ נקודת מקסימום יחידה.

a הוא פרמטר חיובי – משמעות: $(-1,-a)$ מתחת לציר ה- x , $(1,a)$ מעל לציר ה- x.



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. נתונה הפונקציה $h(x)=\ell n(f(x))$

(1) פונקציית ה- ℓn מקבלת רק ביטויים חיוביים.

$f(x)$ חיובית, בתחום $x>0$, על פי הסרטוט בסעיף א.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ הוא $x>0$.

(2) כאשר $f(x)\to 0$ אז $\ell n(f(x))\to -\infty$ ונקבל אסימפטוטה אנכית.

כאשר $x\to +\infty$, אז $f(x)\to 0$ $\ell n(f(x))\to -\infty$ ואין אסימפטוטה אופקית.

תשובה: $x=0$ אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x, של הפונקציה $h(x)$.

(3) על פי תת סעיף (2), אם ל- $h(x)$ תהייה נקודה אחת לפחות מעל לציר ה- x ,

אז הגרף של $h(x)$ יחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות.

$$h'(x)=\left[\ell n(f(x))\right]'$$

$$\boxed{h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

מכאן, שבתחום $x>0$, תחומי העלייה והירידה של שתי הפונקציות זהים,

ולכן $(1,\ell n\, a)$ נקודת מקסימום יחידה של הפונקציה $h(x)$.

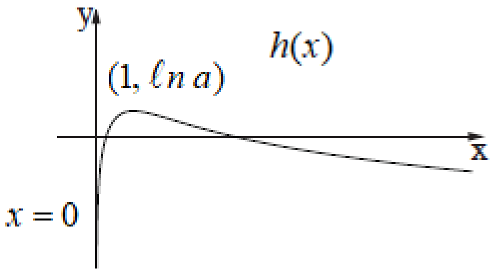
נבדוק מתי שיעור ה- y בנקודת המקסימום חיובי.

$$\ell n\, a>0$$

$$\boxed{a>1}$$

תשובה: עבור $a>1$, הגרף של $h(x)$ יחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, בהינתן שהגרף שלו חותך את ציר ה- x בשתי נקודות .



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתון: $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$, המוגדרת לכל x ורציפה.

(1) הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x)=f(x)$), וגם נתון כי $g(0)=0$.

נמצא את הפונקציה $g(x)$ בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$g(x)=\int\frac{4x}{1+x^2}dx$$

$$g(x)=\int 2\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\,dx$$

$$g(x)=2\ell n(1+x^2)+c \quad \leftarrow 1+x^2>0$$

$$0=2\ell n(1+0^2)+c \quad \leftarrow g(0)=0$$

$$0=c$$

$$\boxed{g(x)=2\ell n(1+x^2)}$$

הערה: כיוון ש- $1+x^2>0$, לא נדרש לשים ערך מוחלט על הארגומנט של הפונקציה הלוגריתמית.

תשובה: $g(x)=2\ell n(1+x^2)$.

(2) נבדוק את הזוגיות של הפונקציה $g(x)$.

$$g(-x)=2\ell n(1+(-x)^2)$$

$$g(-x)=2\ell n(1+x^2)$$

$$\boxed{g(-x)=g(x)}$$

ולכן, הפונקציה $g(x)$ זוגית, כאשר הגרף שלה סימטרי לציר ה- y , עם נקודת קיצון על ציר זה.

תשובה: הפונקציה $g(x)$ זוגית.

ד. מכיוון ש- $g(x)$ זוגית, והגרף שלה סימטרי לציר ה- y , אז $\int_{-5}^{0} g(x)dx=\int_{0}^{5} g(x)dx$.

מכאן, ש- $\int_{-5}^{5} g(x)dx=2\cdot\int_{-5}^{0} g(x)dx$ ולכן $t=0$.

תשובה: עבור $t=0$ מתקיים $\int_{-5}^{5} g(x)dx=2\cdot\int_{-5}^{t} g(x)dx$.