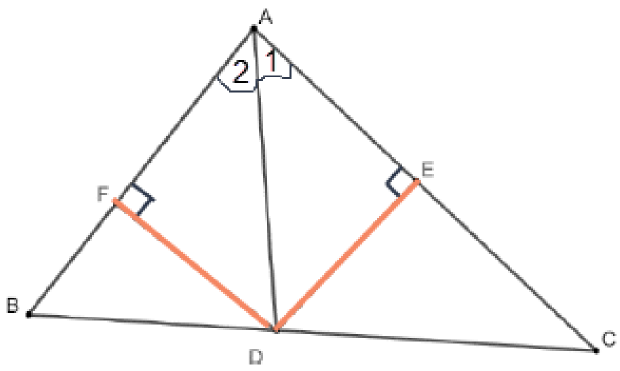
בגרות פא יוני 21 מועד מיוחד שאלון 35581

נתונים

1. $\sphericalangle A_1 \sphericalangle A_2$
2. $DE \perp AC$
3. $DF \perp AB$
4. D מרכז מעגל
5. $DE = R$

צ"ל: (1) האם המעגל עובר בנקודה F

(2) האם המעגל עובר בנקודה C



הסבר	מס'	טענה	נימוק
1, 2, 3	6	$DF = DE$	חוצה זווית הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה משוקי הזווית
4, 5, 6	7	DF רדיוס במעגל	
7	8	המעגל עובר בנקודה F	חישוב
מ.ש.ל. (1)			

דרך נוספת להוכחה:

- $\Delta ADF \cong \Delta ADE$ (על פי משפט חפיפה זווית צלע זווית)
- $DF = DE$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים)
- ההמשך זהה

הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	9	$DC > DE$	ב- ΔDEC היתר הוא הצלע הגדולה ביותר
7, 9	10	$DC > R$ רדיוס במעגל	
10	11	המעגל לא עובר בנקודה C	הנקודה מחוץ למעגל
מ.ש.ל. (2)			

א. נמצא את המספר שנמחק, בחוברת הלימוד הישנה:

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{(2n-1)3^n+\ }{4}$$

נציב $n=1$ **בשני האגפים**

אגף שמאל: $1\cdot1=1$.

אגף ימין: $\frac{3+\square}{4}=\frac{(2\cdot1-1)3^1+\square}{4}$ **.**

שני האגפים צריכים להיות שווים:

$$\frac{3+\square}{4}=1$$

$$3+\square=4$$

$$\square=1$$

תשובה: המספר שנמחק הוא 1 **.**

יש להוכיח כי $\frac{(2n-1)3^n+1}{4} = 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}$ נכון לכל n טבעי .

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{(2\cdot1-1)3^1+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ **אגף שמאל:** $1\cdot1=1$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין, ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{(2k-1)3^k+1}{4} = 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+k\cdot3^{k-1}$.

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **, לכן צ"ל:**

$$\underbrace{1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+k\cdot3^{k-1}}_{\downarrow}+(k+1)\cdot3^{k+1-1} = \frac{(2(k+1)-1)3^{k+1}+1}{4}$$

$$\frac{(2k-1)3^k+1}{4} \qquad +(k+1)\cdot3^k = \frac{(2k+1)\cdot3^{k+1}+1}{4}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\frac{(2k-1)3^k+1}{4} \qquad +(k+1)\cdot3^k = \frac{(2k+1)\cdot3^{k+1}+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2k-1)3^k+1+4(k+1)\cdot3^k}{4} = \frac{(2k+1)\cdot3^{k+1}+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^k(2k-1+4k+4)+1}{4} = \frac{(2k+1)\cdot3^{k+1}+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^k(6k+3)+1}{4} = \frac{(2k+1)\cdot3^{k+1}+1}{4}$$

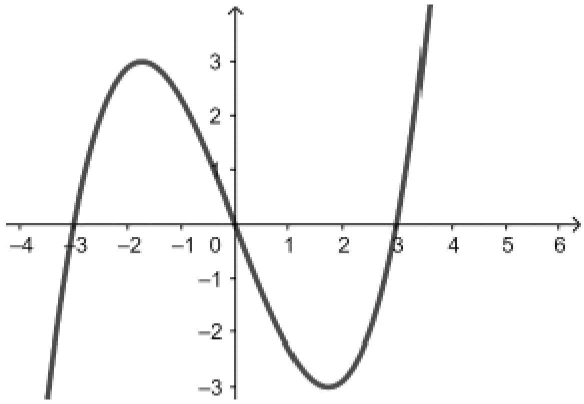
$$\Leftrightarrow \frac{3\cdot3^k(2k+1)+1}{4} = \frac{(2k+1)\cdot3^{k+1}+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2k+1)\cdot3^{k+1}+1}{4} = \frac{(2k+1)\cdot3^{k+1}+1}{4}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: **הוכחנו ש-** $\frac{(2n-1)3^n+1}{4} = 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}$ **נכון לכל** n **טבעי.**



<u>הקדמה</u>

נשים לב, שמכיוון ש- $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית, הרי שהיא סימטרית לראשית הצירים,**

ולכן שני השטחים שבין הפונקציה לציר ה- x **שווים בגודלם,**

אולם כיוון שאחד מעל הציר, והשני מתחתיו, הרי שאחד "חיובי" ואחד "שלילי" וסכומם 0 **.**

ובצורה דומה, כל אינטגרל מסוים, בגבולות מנוגדים, יהייה שווה ל- 0 **.**

(1) נבדוק את הטענה $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx > \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ **.**

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{1} f(x)\,dx > \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$

ונקבל ש- $\int_{1}^{2} f(x)\,dx > 0$

אולם, בתחום $1 < x < 2$ **:** $f(x)$ **מתחת לציר ה-** x **, ולכן זהו שטח "שלילי" ובהתאם** $\int_{1}^{2} f(x)\,dx < 0$ **.**

מכאן ש- $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx < \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ **, והטענה אינה נכונה.**

תשובה: הטענה אינה נכונה.

(2) נמצא את a **עבורו מתקיים השוויון הבא** $\int_{0}^{4} f(x+a)\,dx = 0$ **.**

$f(x+a)$ **היא הזזה אופקית** $+a$ **יחידות של** $f(x)$ **.**

כפי שהסברנו $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$ **, ולכן אם נזיז** 2 **יחידות ימינה, נקבל** $\int_{0}^{4} f(x-2)\,dx = 0$ **.**

תשובה: $a = -2$ **.**

בקופסה יש 5 **חטיפי שוקולד חלב, ו-** 7 **חטיפי שוקולד מריר.**

לכן, ההסתברות להוצאה הראשונה של חטיף שוקולד מריר היא $\frac{7}{12}$ **.**

אמיר מוציא חטיפי שוקולד, ללא החזרה, עד שהוא מוציא חטיף שוקולד חלב.

אמיר הוציא 5 **חטיפים, אם ב-** 4 **ההוצאות הראשונות הוציא חטיף שוקולד מריר,**

ובהוצאה החמישית והאחרונה (כאשר נשארו רק 8 **חטיפים) הוציא חטיף שוקולד חלב.**

ההסתברות המתאימה, כאמור בהוצאה ללא החזרה, היא: $\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{35}{792}$

תשובה: ההסתברות שאמיר הוציא 5 **חטיפים היא** $\frac{35}{792}$**.**

א. בסדרה חשבונית יש $2n+1$ איברים, מספר אי-זוגי של איברים.

$a_1, a_2, a_3, ... a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... a_{2n+1}$, ולכן a_{n+1} הוא האיבר האמצעי בסדרה.

נמצא את ההפרש בין סכום האיברים במקומות האי-זוגיים לאלו שבמקומות הזוגיים.

$$+\begin{cases} a_1 - a_2 = -d \\ a_3 - a_4 = -d \\ . \\ . \\ . \\ a_{2n-1} - a_{2n} = -d \\ \underline{a_{2n+1} \qquad\qquad} \end{cases}$$

$$S_{n\ odd} - S_{n\ even} = -nd + a_{2n+1}$$

$$S_{n\ odd} - S_{n\ even} = a_{2n+1} - nd$$

$$\boxed{S_{n\ odd} - S_{n\ even} = a_{n+1}}$$

אפשר גם

$$+\begin{cases} a_1 \\ a_3 - a_2 = d \\ a_4 - a_3 = d \\ . \\ . \\ . \\ \underline{a_{2n+1} - a_{2n} = d} \end{cases}$$

$$S_{n\ odd} - S_{n\ even} = a_1 + nd$$

$$\boxed{S_{n\ odd} - S_{n\ even} = a_{n+1}}$$

תשובה: הוכַח.

ב. נמצא את ההפרש בין סכום האיברים ב- n המקומות האחרונים, לבין אלו שב- n המקומות הראשונים.

	n המקומות הראשונים	n המקומות האחרונים
A_1	a_1	$a_{n+2} = a_1 + (n+2-1)d = a_1 + (n+1)d$
D	d	d
N	n	n

$$S_{last\ n} - S_{start\ n} = \frac{n\left[2(a_1 + (n+1)d) + (n-1)d\right]}{2} - \frac{n\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2}$$

$$T = \frac{n\left[2a_1 + 2(n+1)d) + (n-1)d - 2a_1 - (n-1)d\right]}{2}$$

$$T = \frac{n\left[2(n+1)d)\right]}{2}$$

$$\boxed{T = n(n+1)d}$$

תשובה: $T = n(n+1)d$.

ג. סכום כל איברי הסדרה (S_{2n+1}) **שווה לסכום האיברים ב-** $2n$ **המקומות האחרונים, ולכן** $\boxed{a_1 = 0}$ **.**

סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204 **, ולכן** $\boxed{a_{2n+1} = 204}$ **.**

$$a_{2n+1} = 204$$
$$a_1 + (2n+1-1)d = 204$$
$$0 + 2nd = 204$$
$$\boxed{nd = 102}$$

$$\mathrm{T} = 3,468$$
$$3,468 = n(n+1)d$$
$$3,468 = 102(n+1) \quad \leftarrow nd = 102$$
$$34 = n+1$$
$$\boxed{n = 33}$$

ומכאן, שמספר איברי הסדרה הוא: $2n+1 = 2\cdot 33+1 = 67$ **.**

תשובה: בסדרה יש 67 **איברים.**

א. נסמן p **- ההסתברות לבחור באקראי פרח סגול, ובתאם** $(1-p)$ **היא ההסתברות לבחירת פרח לבן.**

ההסתברות לבחירת שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 **מן ההסתברות לבחירת שני פרחים סגולים.**

$(1-p)^2=2.25p^2$ **. כיוון שכל הגורמים חיוביים, ניתן להוציא שורש ריבועי.**

$$1-p=1.5p$$
$$1=2.5p$$
$$\boxed{p=0.4=40\%}$$

תשובה: 40% **מהפרחים בחממה הגדולה הם סגולים. (ו-** 60% **מפרחי החממה הם פרחים לבנים.)**

ב. (1) נסמן x **- ההסתברות לבחור באקראי פרח עם עלים גדולים,**

ובתאם $(1-x)$ **היא ההסתברות לבחירת פרח עם עלים קטנים.**

ירדן בחרה באקראי שני פרחים, מתוך החממה הגדולה.

ידוע שההסתברות שירדן בחרה פרח אחד עם עלים גדולים ואחר עם עלים קטנים היא 0.455 **.**

ניתן לפתור עם נוסחת ברנולי, וניתן גם ללא שימוש בנוסחה.

$$x\cdot(1-x)+(1-x)\cdot x=0.455$$
$$2x\cdot(1-x)=0.455$$
$$-2x^2+2x-0.455=0$$
$$x=0.65\,,\ x=0.35$$

בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים. לשאר הפרחים יש עלים קטנים.

כיון ש- 60% **מפרחי החממה הם פרחים לבנים, אז** $x<0.6$ **,**

והפתרון המתקבל הוא $x=0.35=35\%$ **.**

תשובה: 35% **מהפרחים בחממה הגדולה הם עם עלים גדולים.**

(ו- 65% **מפרחי החממה הם עם עלים קטנים.)**

(2) נחשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול,

אם ידוע שרק לאחד מהפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.

(כלומר, ההסתברות שבחרה פרח סגול ולאחר מכן פרח עם עלים גדולים, או להפך,

כאשר ידוע שרק לאחד מהפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.)

$$\mathrm{P}(purple\ \ flower\,/\,1\ \ flower\ \ with\ big\ leaves)=\frac{\mathrm{P}(purple\ \ flower\cap 1\ \ flower\ \ with\ big\ leaves)}{\mathrm{P}(1\ \ flower\ \ with\ big\ leaves)}$$

$$\mathrm{P}(purple\ \ flower\,/\,1\ \ flower\ \ with\ big\ leaves)=\frac{0.4\cdot0.35+0.35\cdot0.4}{0.455}=\frac{0.28}{0.455}=\frac{8}{13}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{8}{13}$ **.**

ג. כינרת הכינה זר מ- 7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה .

נחשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים,
כלומר את המאורע המשלים לאפשרות של 7 פרחים עם עלים גדולים או 7 פרחים עם עלים קטנים.

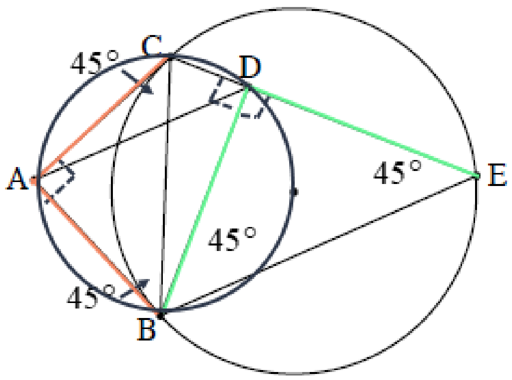
נסמן ב- t את ההסתברות לבחור פרח עם עלים גדולים, מתוך הפרחים הלבנים.

כיוון שפרחים עם עלים גדולים הם רק פרחים לבנים, הרי ש- $0.6t = 0.35 \quad \rightarrow t = \frac{7}{12}$ **.**

$$P = 1 - \left[\left(\frac{7}{12}\right)^7 + \left(\frac{5}{12}\right)^7 \right] = 0.9748$$ **.**

תשובה: ההסתברות היא 0.9748 **.**

בגרות פא יוני 21 מועד מיוחד שאלון 35581



<u>נתונים</u>

1. AC **משיק למעגל הימני בנקודה** C .

2. AB **משיק למעגל הימני בנקודה** B .

3. $\sphericalangle CAB = 90°$.

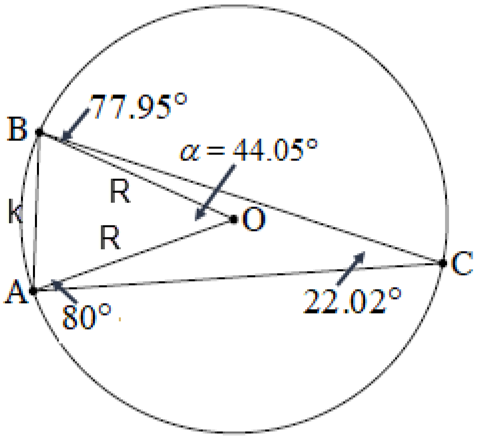
4. המעגל החוסם את ΔABC **, חותך את המיתר** CE **בנקודה** D.

צ"ל: א. $BD = DE$ **ב.** $\Delta ADB \sim \Delta CEB$ **ג.** $S_{\Delta CEB} = 2 \cdot S_{\Delta ADB}$.

הסבר	מס'	טענה	נימוק
2 ,1	5	$AB = AC$	אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הם שווים זה לזה
5 ,3	6	$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC = 45°$	זוויות בסיס שוות ב- ΔABC שווה השוקיים
6 ,1	7	$\sphericalangle E = 45°$	זווית בין משיק למיתר
4 ,3	8	$\sphericalangle CDB = 90°$	סכום זוויות נגדיות, במעגל השמאלי, $180°$
8 ,7	9	$\sphericalangle DBE = 45°$	זווית חיצונית ל- ΔBDE שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שאינן צמודות לה
9 ,7	10	$\sphericalangle DBE = \sphericalangle E$	
10	11	$BD = DE$	ב- ΔABC מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות
		מ.ש.ל. א	
	12	$\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBD$	
9 ,6	13	$\sphericalangle DBE = \sphericalangle ABC$	
13 ,12	14	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBE$ (ז)	כלל החיבור
4	15	$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD$ (ז)	על קשת משותפת (BD) במעגל השמאלי נשענות זוויות היקפיות שוות
15 ,14	16	$\Delta ADB \sim \Delta CEB$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ב	
16	17	$\frac{AD}{CE} = \frac{AB}{CB} = \frac{DB}{EB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
5 ,3	18	$\frac{CB}{AB} = \sqrt{2}$	משפט פיתגורס ב- ΔABC
18 ,17	19	$S_{\Delta CEB} = 2 \cdot S_{\Delta ADB}$	יחס שטחים במשולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
		מ.ש.ל. ג	

א. R **הוא רדיוס המעגל שמרכזו** O **,** $AB = k$.

$\sphericalangle BAC = 80°$ **.** $\sphericalangle AOB = \alpha$ **.**



$\underline{\Delta AOB}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$\cos \sphericalangle AOB = \frac{(OB)^2 + (OA)^2 - (AB)^2}{2OB \cdot OA}$$

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + R^2 - k^2}{2R \cdot R}$$

$$\cos \alpha = \frac{2R^2 - k^2}{2R^2}$$

$$\boxed{\cos \alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}}$$

תשובה: הוכחנו ש- $\cos \alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

ב. $k = \frac{3}{4}R$.

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{R}\right)^2$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\boxed{\alpha = 44.05°}$$

$\sphericalangle BCA = 22.02°$ **(זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית, הנשענת על אותה הקשת)**

$\sphericalangle ABC = 77.95°$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔABC**)**

$$S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin \sphericalangle A \cdot \sin \sphericalangle B \cdot \sin \sphericalangle C$$

$$S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin 80° \cdot \sin 77.95° \cdot \sin 22.02°$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = 0.722R^2}$$

תשובה: שטח ΔABC **הוא** $0.722R^2$.

ג. r **הוא רדיוס המעגל החסום ב-** ΔAOB.

מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות.

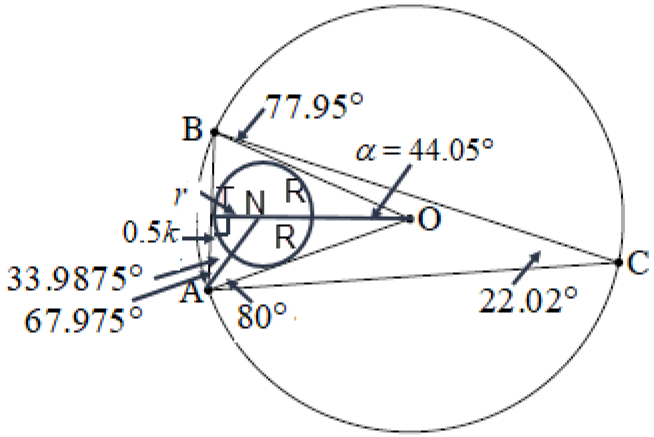
OT **אנך למיתר ממרכז המעגל (בניית עזר), ולכן גם חוצה אותו וגם את הזווית המרכזית.**

N **מפגש חוצי הזוויות ב-** ΔAOB **, ולכן** $NT = r$ **(** AB **משיק למעגל החסום).**

$$\sphericalangle BAO = \frac{180° - 44.05°}{2} = 67.975°$$ **(זוויות בבסיס שוות ב-** ΔAOB **שווה השוקיים)**

$$\sphericalangle NAT = \frac{67.975°}{2} = 33.9875°$$ **(** N **מפגש חוצי הזוויות ב-** ΔAOB **)**

<u>ΔATN</u>



$$\tan \sphericalangle NAT = \frac{NT}{AT}$$

$$\tan 33.9875° = \frac{r}{0.5k}$$

$$\tan 33.9875° = \frac{r}{0.5 \cdot \frac{3}{4}R} \quad \leftarrow k = \frac{3}{4}R$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{0.5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \tan 33.9875°}$$

$$\boxed{\frac{R}{r} = 3.96}$$

תשובה: $\frac{R}{r} = 3.96$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0 .

$$1-2x \ge 0$$
$$-2x \ge -1 \quad /:(-2<0)$$
$$x \le \frac{1}{2}$$

$$x^2-x \ne 0$$
$$x \ne 0,1$$

והתחום המשותף הוא $x \ne 0\,,\ x \le \frac{1}{2}$.

תשובה: תחום ההגדרה: $x \ne 0\,,\ x \le \frac{1}{2}$.

(2) אין נקודות חיתוך עם ציר ה- y **, שכן בתחום ההגדרה אין** $x=0$.

הראינו, בתת סעיף א(1) כי $x=\frac{1}{2}$ **, בלבד, מאפס את מונה הפונקציה, ולכן** $(\frac{1}{2},0)$ **חיתוך עם ציר ה-**x .

תשובה: נקודות חיתוך עם ציר ה- x **:** $(\frac{1}{2},0)$.

(3) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים (בבגרות מספיקה התשובה הסופית, וכך נעשה).

תשובה: אסימפטוטה אופקית: $y=0\ (x\to-\infty)$ **, אסימפטוטה אנכית:** $x=0$.

(4) נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x)=\frac{\dfrac{-\cancel{2}(x^2-x)}{\cancel{2}\sqrt{1-2x}}-(2x-1)\cdot\sqrt{1-2x}}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{-(x^2-x)-(2x-1)(1-2x)}{\sqrt{1-2x}}}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2+x-(2x-4x^2-1+2x)}{\sqrt{1-2x}\cdot(x^2-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2+x-2x+4x^2+1-2x}{\sqrt{1-2x}\cdot(x^2-x)^2}$$

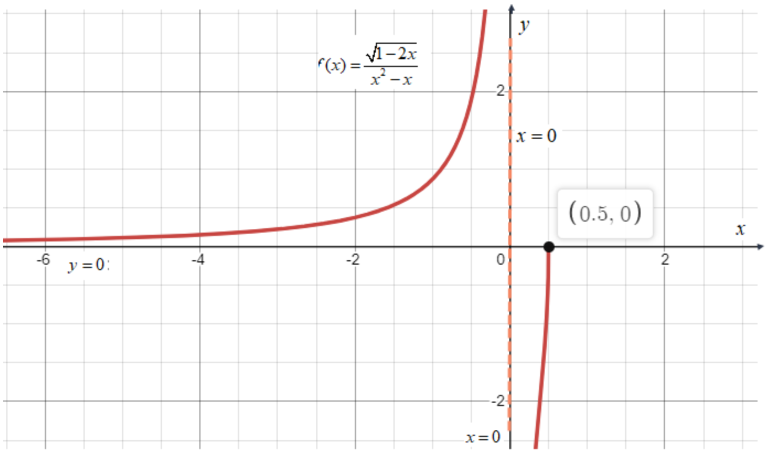
$$\boxed{f'(x)=\frac{3x^2-3x+1}{\sqrt{1-2x}\cdot(x^2-x)^2}}$$

מונה הנגזרת אינו מתאפס, כאשר הוא פרבולה בעלת מינימום (מחייכת), ולכן חיובי, וגם המכנה חיובי.

לכן אין לפונקציה נקודות קיצון פנימיות, כאשר $(\frac{1}{2},0)$ **מקסימום קצה.**

תשובה: עלייה: $0<x<\frac{1}{2}$ **או** $x<0$ **, ירידה: אף** x .

ב. הסקיצה המתאימה.



תשובה: הסקיצה מעל.

ג. נתון $f(k)=1$, ולכן $k<0$ כי רק בתחום $x<0$ הפונקציה $f(x)$ חיובית.

הפונקציה $g(x)=(f(x))^2$, בתחום $x<0$ חיובית אף היא,

כאשר עבור $t<k$ מתקיים $g(t)<f(t)$ עקב העלאה בריבוע של מספרים שבין 0 ל- 1,

לפי הכלל שבו ככל שמעלים מספר שכזה בחזקה טבעית גבוהה יותר, אז התוצאה קטנה יותר .

לכן: $\int_t^k g(x)\,dx<\int_t^k f(x)\,dx$, כי הגרף של $f(x)$ מעל לגרף של $g(x)$,

והשטח החיובי, שבין הגרף של $f(x)$ ובין ציר ה- x , גדול יותר.

תשובה: הביטוי $\int_t^k f(x)\,dx$ גדול יותר.

ד. כפי שהסברנו, בסעיף הקודם, הגרף של $g(x)=(f(x))^2$, בתחום $x<0$, הוא מעל ציר ה- x .

נחשב את האינטגרל המבוקש, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S=\int_{-8}^{-1}\left[(f(x))^2-0\right]dx$$

$$S=\int_{-8}^{-1}\left[\frac{1-2x}{(x^2-x)^2}\right]dx$$

$$S=\int_{-8}^{-1}-\left[(x^2-x)^{-2})\cdot(2x-1)\right]dx$$

$$S=\frac{-(x^2-x)^{-1}}{-1}\Big]_{-8}^{-1}$$

$$S=\frac{1}{x^2-x}\Big]_{-8}^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} x=-1: &\quad \frac{1}{(-1)^2-(-1)}=\frac{1}{2}\\ x=-8: &\quad \frac{1}{(-8)^2-(-8)}=\frac{1}{72}\end{aligned}\right\} S=\frac{1}{2}-\frac{1}{72}\quad\rightarrow\quad \boxed{S=\frac{35}{72}}$$

תשובה: גודל השטח המוגבל הוא $\frac{35}{72}$ יח"ר.

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos(mx)+\cos(2x)$, המוגדרת לכל x , כאשר $m\neq 0$ פרמטר.

$f'(\frac{\pi}{4})=-2$ כי בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$, שיפוע המשיק הוא (-2) .

$$f'(x)=-m\sin(mx)-2\sin(2x)$$

$$-2=-m\sin(m\cdot\frac{\pi}{4})-2\sin(2\cdot\frac{\pi}{4}) \quad \leftarrow f'(\frac{\pi}{4})=-2$$

$$-2=-m\sin(m\cdot\frac{\pi}{4})-2$$

$$\sin(m\cdot\frac{\pi}{4})=0$$

$$m\cdot\frac{\pi}{4}=\pi k$$

$$\boxed{m=4k}$$

ומכיוון ש- k הוא מספר שלם, הרי ש- m מתחלק ב- 4 ללא שארית.

תשובה: הוכחנו ש- m מתחלק ב- 4 ללא שארית.

ב. נציב $m=4$, ונחקור את הפונקציה $f(x)=\cos(4x)+\cos(2x)$ בתחום $0\le x\le\pi$.

(1) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$, ונקבל $(0,2)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$:

$$0=\cos(4x)+\cos(2x)$$

$$0=2\cos(3x)\cdot\cos(x)$$

$$\cos(3x)=0 \qquad \cos(x)=0$$

$$3x=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$$

$$\boxed{(\frac{\pi}{6},0)}\ ,\ \boxed{(\frac{\pi}{2},0)}\ ,\ \boxed{(\frac{5\pi}{6},0)}$$

תשובה: $(0,2)$, $(\frac{5\pi}{6},0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{6},0)$.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ונקבע את סוגן.

$(0,2)$, $(\pi,2)$ **מקסימום קצה.**

$$\boxed{f'(x)=-4\sin(4x)-2\sin(2x)}$$

$$0=-4\sin(4x)-2\sin(2x)$$

$$0=-8\sin(2x)\cos(2x)-2\sin(2x)$$

$$0=-2\sin(2x)(4\cos(2x)+1)$$

$$\sin(2x)=0 \qquad \cos(2x)=-0.25=\cos(1.824)$$

$$2x=\pi k \qquad 2x=1.824+2\pi k \qquad 2x=-1.824+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{2}k \qquad x=0.912+\pi k \qquad x=-0.9112+\pi k$$

$$\boxed{(0,2)}, \boxed{(\frac{\pi}{2},0)}, \boxed{(\pi,2)}, \boxed{(0.912,-1.125)}, \boxed{(2.230,-1.125)}$$

סוג הקיצון נקבע על פי ערכי הפונקציה, כאשר הגרף רציף בתחום הנתון.

תשובה: $(\pi,2)$ **מקסימום,** $(2.230,-1.125)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **מקסימום ,** $(0.912,-1.125)$ **מינימום,**

$(0,2)$ **מקסימום .**

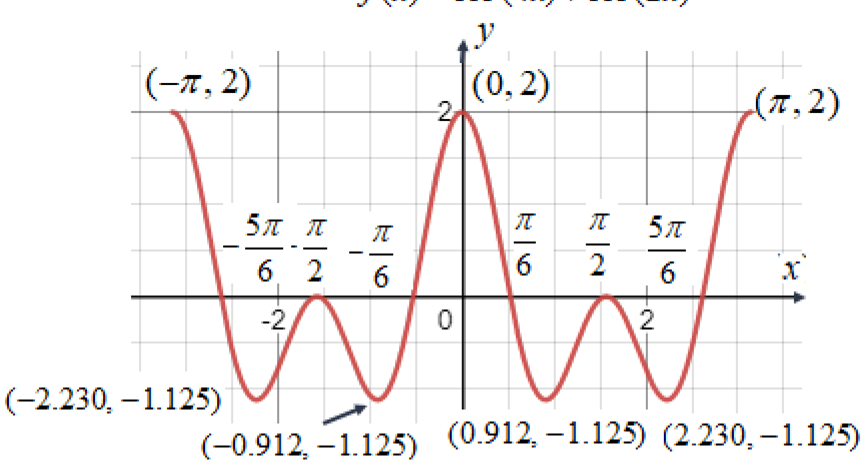
ג. נחקור את הפונקציה $f(x)=\cos(4x)+\cos(2x)$ **בתחום** $-\pi\le x\le\pi$ **.**

כיוון ש- $f(x)$ **היא סכום של שתי פונקציות זוגיות, הרי שהיא גם זוגית,**

כאשר הגרף שלה סימטרי לציר ה- y **ו-** $(0,2)$ **נקודת קיצון פנימית.**

ומכאן ש: $(-0.912,-1.125)$ **מינימום ,** $(-\frac{\pi}{2},0)$ **מקסימום ,** $(-2.230,-1.125)$ **מינימום,** $(-\pi,2)$ **מקסימום.**

כמו כן: $(-\frac{\pi}{6},0)$ **,** $(-\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(-\frac{5\pi}{6},0)$ **- נקודות חיתוך נוספות עם ציר ה-** x **.**



תשובה: הגרף מעל.

ד. נתונה הפונקציה $k(x)$ המקיימת $k'(x)=f(x)$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$, כאשר $k(0)=0$.

- תחומי העלייה והירידה של $k(x)$ תואמים לתחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

נקודות קיצון: $x=\frac{5\pi}{6}$ מינימום , $x=\frac{\pi}{6}$ מקסימום , $x=-\frac{\pi}{6}$ מינימום, $x=-\frac{5\pi}{6}$ מקסימום,

ובקצוות: $x=\pi$ מקסימום , $x=-\pi$ מינימום.

- $k''(x)=f'((x)$, ולכן תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ תואמים

לתחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ וכלפי מטה $(\cap)$ של $k(x)$,

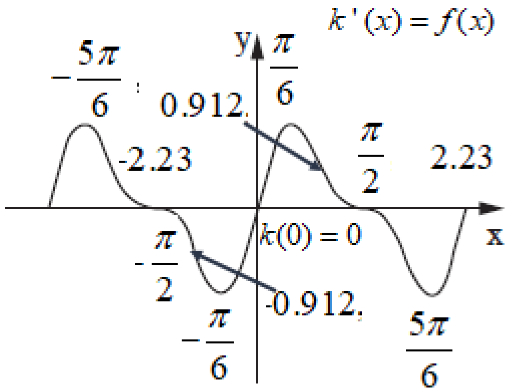
ושיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של $f(x)$ יהיו שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של $k(x)$.

$x=-2.23, -\frac{\pi}{2}, -0.912, 0, 0.912, \frac{\pi}{2}, 2.23$.

- $f(x)$ זוגית ו- $k(x)$ אי זוגית כי עוברת בראשית הצירים ויש לה נגזרת זוגית,

ומכאן שהיא סימטרית לראשית הצירים, ויש לה נקודת פיתול בראשית.

גרף א



תשובה: גרף א מתאר את הפונקציה $k(x)$.

א. נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$ **ו-** $g(x)=\frac{x-3}{x-1}$.

(1) תשובה: תחום ההגדרה של $f(x)$ **הוא** $x\neq 3$ **, ושל** $g(x)$ **הוא** $x\neq 1$.

(2) תשובה: $f(x)$ **-** $(1,0)$ **,** $(0,\frac{1}{3})$ **, ושל** $g(x)$ **-** $(3,0)$ **,** $(0,3)$.

ב. קל לזהות את ההתאמה בין הפונקציות לגרפים הנתונים, על-פי נקודות החיתוך עם ציר ה- x .

$x_A=t$ **, ולכן שיעורי הנקודה הם** $A(t,\frac{t-3}{t-1})$.

נשווה את הפונקציות, על מנת למצוא את שיעור ה- x **של נקודת החיתוך.**

$$\frac{x-1}{x-3}=\frac{x-3}{x-1}$$
$$(x-1)^2=(x-4)^2$$
$$x-1=x-3 \quad \rightarrow \textit{no solution}$$
$$x-1=-x+3 \quad \rightarrow \boxed{x=2}$$

ומכאן ש- $t>2$ **, ולאור נקודת החיתוך עם ציר ה-** x **אז גם** $t<3$.

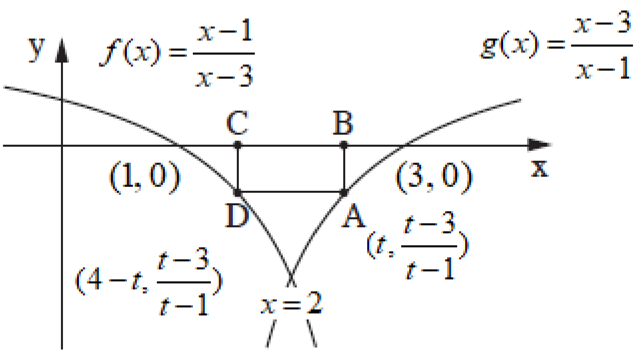
תשובה: $2<t<3$.

ג. בסעיף זה נביע את שטח המלבן $ABCD$ **, כהכנה לסעיף ד.**

(1) AB **מקביל לציר ה-** y .

$$AB=0-y_A=0-\frac{t-3}{t-1}=\frac{3-t}{t-1}$$

תשובה: אורך הקטע AB **הוא** $\frac{3-t}{t-1}$.

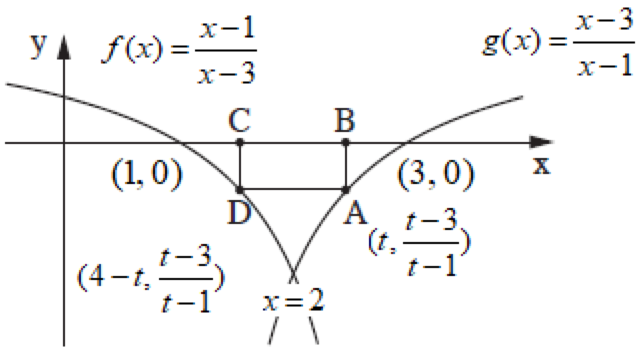


(2) AD **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $y_D=y_A=\frac{t-3}{t-1}$.

$$\frac{t-3}{t-1}=\frac{x_D-1}{x_D-3}$$
$$tx_D-3t-3x_D+9=tx_D-t-x_D+1$$
$$-2x_D=2t-8 \quad /:(-2)$$
$$\boxed{x_D=4-t}$$

תשובה: הוכחנו ש- $x_D=4-t$.

(3) AD **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $AD = x_A - x_D = t-(4-t) = 2t-4$.



$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = \frac{3-t}{t-1} \cdot (2t-4)$$

$$S_{ABCD} = \frac{6t-12-2t^2+4t}{t-1}$$

$$S_{ABCD} = \frac{-2t^2+10t-12}{t-1}$$

$$\boxed{S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{-t^2+5t-6}{t-1}}$$

תשובה: שטח המלבן ABCD **הוא** $2 \cdot \frac{-t^2+5t-6}{t-1}$.

ד. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* **היא** *שטח המלבן* ABCD.

$$\boxed{S = 2 \cdot \frac{-t^2+5t-6}{t-1}}$$

$$S' = 2 \cdot \frac{(-2t+5)(t-1)-(-t^2+5t-6)}{(t-1)^2}$$

$$S' = 2 \cdot \frac{-2t^2+2t+5t-5+t^2-5t+6}{(t-1)^2}$$

$$\boxed{S' = 2 \cdot \frac{-t^2+2t+1}{(t-1)^2}}$$

$$-t^2+2t+1=0$$

$$\cancel{t = 0.414} \quad \leftarrow 2<t<3$$

$$\boxed{t = 2.414} \quad o.k.$$

$$\left.\begin{array}{l} S'(2.4) = 2 \cdot \frac{(+)}{(+)} > 0 \\ S'(2.5) = 2 \cdot \frac{(-)}{(+)} < 0 \end{array}\right\} \boxed{t = 2.414, \max}$$

תשובה: תשובה: עבור $t = 2.414$**, שטח המלבן** ABCD **הוא מקסימלי.**