



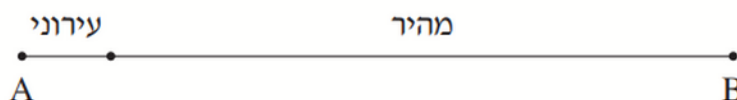
# פתרון הבחינה

## במתמטיקה

חורף תשפ"ה, 2025, שאלון 35581, גרסה 07:  
מונש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"



1. קטע הכביש שבין יישוב A ליישוב B מחולק לשניים: קטע כביש עירוני וקטע כביש מהיר, כמתואר בסרטוט. האורך של קטע הכביש המהיר גדול פי 7 מן האורך של קטע הכביש העירוני.



שתי מכוניות א', ב' יצאו באותה השעה, ונסעו זו לקראת זו: מכונית א' יצאה מיישוב A ומכונית ב' יצאה מיישוב B. במשך כל אותו היום מהירות הנסיעה של כל אחת מן המכוניות בקטע הכביש המהיר הייתה קבועה וגדולה פי 2 ממהירות הנסיעה שלה בקטע הכביש העירוני. המכוניות נפגשו באמצע הקטע AB.

א. מצאו פי כמה גדולה מהירות הנסיעה של מכונית א' בקטע הכביש המהיר ממהירות הנסיעה של מכונית ב' בקטע הכביש המהיר.

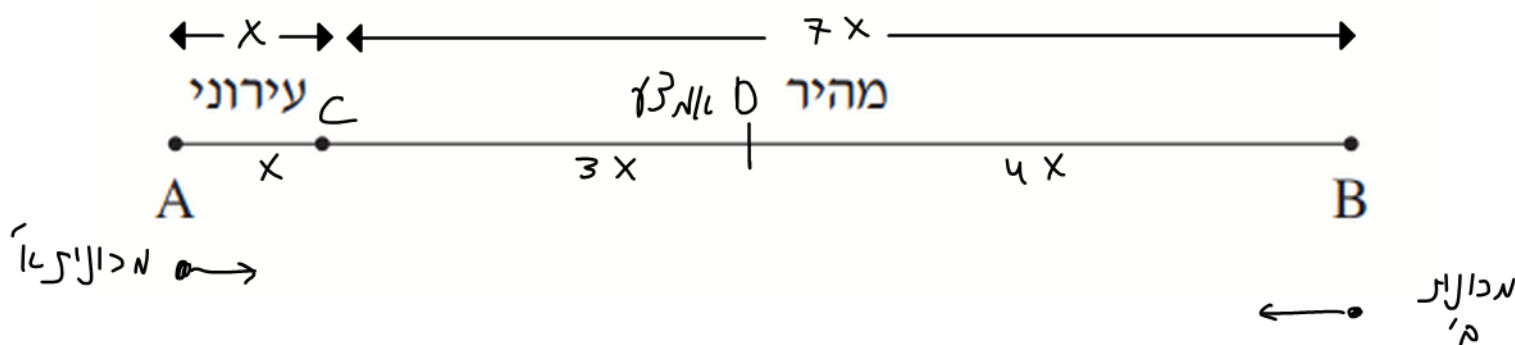
כאשר הגיעה מכונית א' ליישוב B, הייתה מכונית ב' בקטע הכביש העירוני, במרחק 18 ק"מ מיישוב A.

ב. מצאו את המרחק בין יישוב A ובין יישוב B.

כאשר הגיעה מכונית א' ליישוב B היא מייד יצאה חזרה לכיוון היישוב A, וכאשר הגיעה מכונית ב' ליישוב A היא מייד יצאה חזרה לכיוון היישוב B.

בדרכן חזרה נפגשו המכוניות בקטע הכביש המהיר.

ג. מצאו באיזה מרחק מן היישוב B נפגשו המכוניות בדרכן חזרה.



$$x = \text{אורך תצוק בכביש העירוני}$$

$$7x = \text{אורך תצוק בכביש המהיר}$$



סדרה	ציונים	ממוצע	
X	V	$\frac{X}{V}$	מכונת א' $A \rightarrow C$
3X	2V	$\frac{3X}{2V}$	מכונת ב' $C \rightarrow D$
4X	2u	$\frac{4X}{2u} = \frac{2X}{u}$	מכונת ב' $B \rightarrow D$

$V =$  מהירות מכונת א'  
 כק"ס ציוני  
 $2V =$  מהירות קב"ס המהיר  
 $u =$  מהירות מכונת ב'  
 כק"ס ציוני  
 $2u =$  מהירות קב"ס המהיר

הם יקראו באותו זמן ולכן מסכי זמן  
 הנסיעות שלהן שווים

$$? = \frac{2V}{2u} = \frac{V}{u}$$

$$\frac{X}{V} + \frac{3X}{2V} = \frac{2X}{u}$$

$$\frac{1}{V} + \frac{1.5}{V} = \frac{2}{u}$$

$$2.5 u = 2V$$

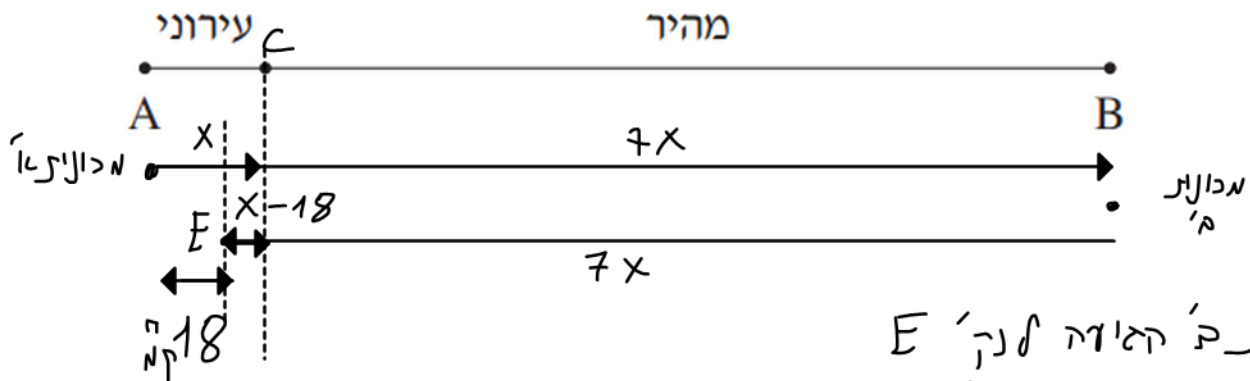
$\cdot X$

$$\frac{V}{u} = \frac{2.5}{2} = \underline{\underline{1.25}}$$

מהירות של מכונת א' כק"ס המהיר  
 גדולה פי 1.25  
 מהירות של מכונת ב' כק"ס המהיר



כאשר הגיעה מכונית א' ליישוב B, הייתה מכונית ב' בקטע הכביש העירוני, במרחק 18 ק"מ מיישוב A.  
ב. מצאו את המרחק בין יישוב A ובין יישוב B.



מכונית ב' הגיעה לנק' E  
במרחק 18 ק"מ מ-A

$$AB = 8x = ?$$

מרחק S	מהירות V	זמן t	הסבר
x	v = 1.25u	$\frac{x}{1.25u}$	מכונית א' A → C
7x	2v = 2.5u	$\frac{7x}{2.5u}$	מכונית א' C → B
7x	2u	$\frac{7x}{2u}$	מכונית ב' B → C
x-18	u	$\frac{x-18}{u}$	מכונית ב' C → E

המרחק בין A ל-B הוא 160 ק"מ

$$\frac{x}{1.25u} + \frac{7x}{2.5u} = \frac{7x}{2u} + \frac{x-18}{u}$$

$$\left(\frac{1}{1.25} + \frac{7}{2.5}\right)x = 3.5x + x - 18$$

$$3.6x = 4.5x - 18 \Rightarrow$$

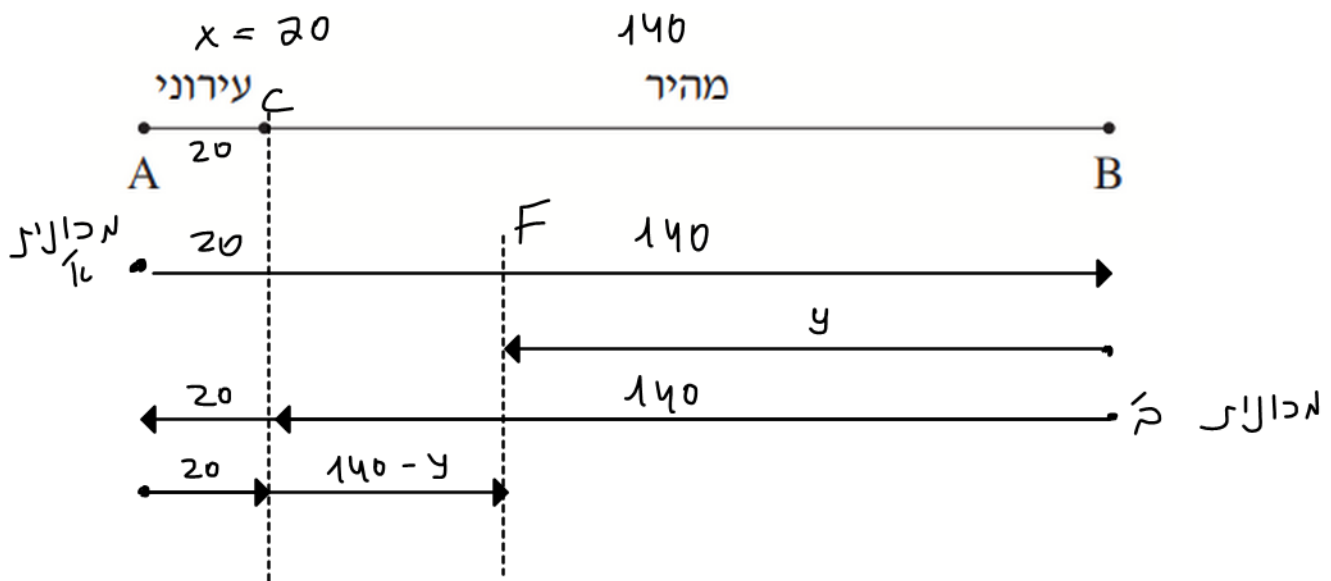
· u

$$0.9x = 18$$

$$\left[ x = 20 \right]$$



כאשר הגיעה מכונית א' ליישוב B היא מייד יצאה חזרה לכיוון היישוב A, וכאשר הגיעה מכונית ב' ליישוב A היא מייד יצאה חזרה לכיוון היישוב B.  
בדרכן חזרה נפגשו המכוניות בקטע הכביש המהיר.  
ג. מצאו באיזה מרחק מן היישוב B נפגשו המכוניות בדרכן חזרה.



$$\frac{20}{v} + \frac{140}{2v} + \frac{y}{2v} = \frac{140}{2u} + \frac{20}{u} + \frac{20}{u} + \frac{140-y}{2u}$$

$$\frac{20}{1.25u} + \frac{140}{2.5u} + \frac{y}{2.5u} = \frac{140}{2u} + \frac{40}{u} + \frac{140-y}{2u} \quad | \cdot u \quad v = 1.25u$$

$$16 + 56 + 0.4y = 70 + 40 + 70 - \frac{y}{2}$$

$$0.9y = 108$$

$$y = \frac{120}{\frac{1}{2}}$$

המכונית נפגשה  
במרחק 120 ק"מ  
מהיישוב B



2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , ובה  $m$  איברים ( $m$  הוא מספר טבעי גדול מ-4). נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.
- סכום  $m - 4$  האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום  $m - 4$  האיברים הראשונים בסדרה.
- א. (1) מצאו את מנת הסדרה A.  
(2) האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.
- המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אינסופית.
- נתונה סדרה אינסופית B שאיבריה מקיימים  $b_n = \frac{k^n}{a_n}$  לכל  $n$  טבעי.  $k$  הוא פרמטר שונה מ-0.
- ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות  $k$ .
- נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.
- ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של  $k$ .
- נתון: מנת הסדרה B היא  $\frac{1}{4}$ .
- סכום הסדרה B הוא -3.
- ד. מצאו את הערך של  $k$  ואת הערך של  $b_1$ .
- בסדרה B מחקו כל איבר שלישי ( $b_3, b_6, b_9, \dots$ ).
- ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

- נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , ובה  $m$  איברים ( $m$  הוא מספר טבעי גדול מ-4). נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.
- סכום  $m - 4$  האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום  $m - 4$  האיברים הראשונים בסדרה.
- א. (1) מצאו את מנת הסדרה A.

$$m > 4$$

נתון שאיברי הסדרה שליליים, לכן המנה חייבת להיות:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m-4} a_i q^i}{\sum_{i=1}^{m-4} a_i} = \frac{a_1 q^4 (q^{m-4} - 1)}{(q-1)} \cdot \frac{(q-1)}{a_1 (q^{m-4} - 1)} = q^4 = 16 \rightarrow q = 2$$

$a_5 = a_1 q^4$	$a_1$	איבר ראשון
$q$	$q$	מנה
$m-4$	$m-4$	כמות

(2) האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

שילוב קין איבר ראשון שלילי, לכן סדרה יורדת.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אינסופית.

נתונה סדרה אינסופית B שאיבריה מקיימים  $b_n = \frac{k^n}{a_n}$  לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ-0.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{k^{n+1}}{a_{n+1}}}{\frac{k^n}{a_n}} = k \frac{a_n}{a_{n+1}} = k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2} = Q_b$$

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k.

$$-1 < Q_b < 1$$

$$-1 < \frac{k}{2} < 1$$

$$-2 < k < 2, k \neq 0$$

נתון: מנת הסדרה B היא  $\frac{1}{4}$ .

סכום הסדרה B הוא -3.

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של  $b_1$ .

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\sum_B = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{4}} = -3 \rightarrow b_1 = \frac{-9}{4}$$

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי ( $b_3, b_6, b_9 \dots$ )

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

נמשך ראשון את סכום האיברים שנשארו ונחסיר מסכום הסדרה B

$$\sum_{\text{נחוקים}} = \frac{\frac{-9}{64}}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{-9}{63}$$

$$\sum_{\text{נשארים}} = \sum_{\text{כולם}} - \sum_{\text{נחוקים}} = -3 + \frac{9}{63} = \frac{-20}{7}$$

$$\sum_{\text{נשארים}} = \frac{-20}{7}$$

$$b_3 = b_1 Q_b^2 = \frac{-9}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{-9}{64}$$

$$\frac{b_6}{b_3} = Q_b^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} = \frac{1}{4}$$





3. בכד א' יש 10 כדורים אדומים ו-15 כדורים צהובים, ובכד ב' יש רק כדורים אדומים.

דנה בוחרת באקראי כד ומוציאה ממנו באקראי כדור.

אם הכדור צהוב, היא מוציאה באקראי כדור שני מאותו הכד (הוצאה ללא החזרה).

אם הכדור הראשון אדום, היא מחזירה את הכדור לכד ושוב מוציאה באקראי כדור מאותו הכד.

א. ידוע שדנה הוציאה שני כדורים באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם צהובים?

דנה מחזירה לכד את הכדורים שהוציאה.

יעל מבצעת את התהליך הזה:

היא בוחרת באקראי כד, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לכד.

יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור אדום, מחזירה אותו לכד ומפסיקה להוציא כדורים.

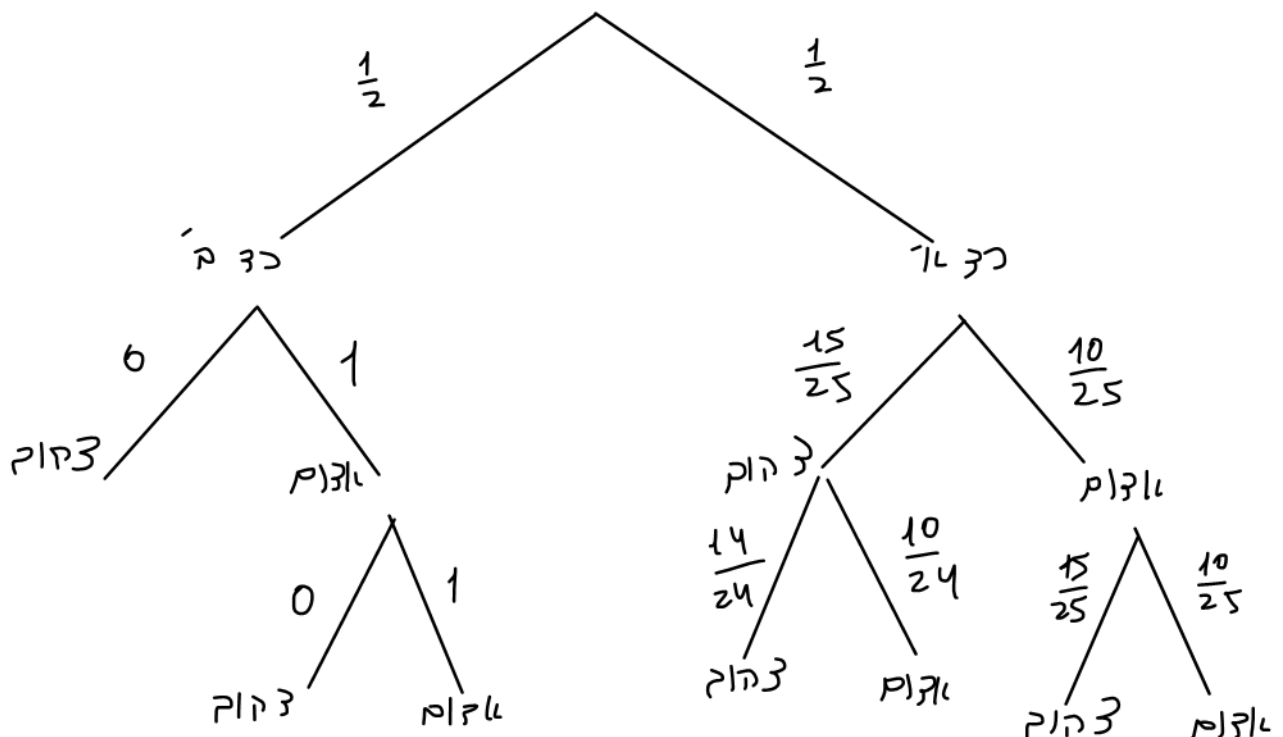
ב. מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה 6 פעמים בדיוק.

העבירו חלק מן הכדורים מכד ב' לכד א'.

לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד.

נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא  $\frac{13}{16}$ .

ג. האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 14 כדורים? נמקו את תשובתכם.



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה







$$P\left(\frac{\text{שניהם צהובים}}{\text{שני צבעים}}\right) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{10}{25} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1} \cdot 1$$

$$= \frac{\frac{7}{40}}{\frac{7}{40} + \frac{2}{25} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{151}{200}} = \frac{35}{151}$$

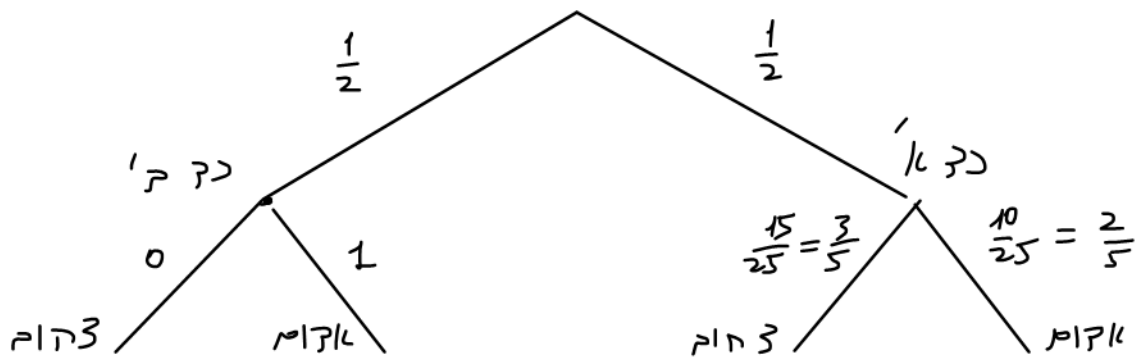
דנה מחזירה לכד את הכדורים שהוציאה.

יעל מבצעת את התהליך הזה:

היא בוחרת באקראי כד, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לכד.

יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור אדום, מחזירה אותו לכד ומפסיקה להוציא כדורים.

ב. מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה 6 פעמים בדיוק.



$$P(\text{צהוב}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = 0.3$$

$$P(\text{אקראי}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 0.7$$

$$P_{\hat{p}} = 0.3^5 \cdot 0.7$$

$$P_{\hat{p}} = 0.001701$$



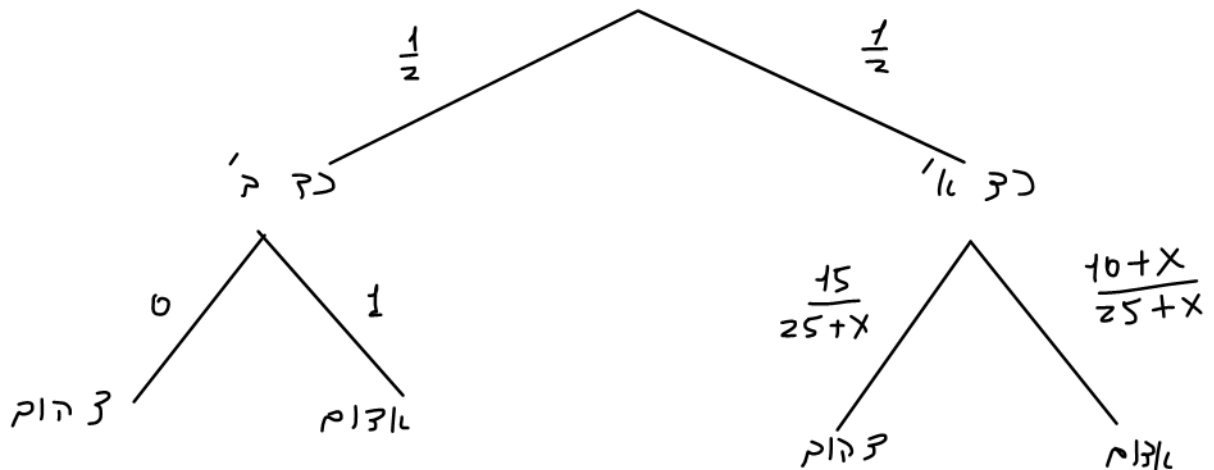
העבירו חלק מן הכדורים מכד ב' לכד א'.

לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד.

נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא  $\frac{13}{16}$ .

ג. האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 14 כדורים? נמקו את תשובתכם.

X כדורים  
צקכו לכד ב'  
P כד א'



$$P(\text{אצקא}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10+X}{25+X} = \frac{13}{16}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10+X}{25+X} = \frac{5}{16} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{10+X}{25+X} = \frac{5}{8}$$

$$80 + 8X = 125 + 5X$$

$$3X = 45$$

$$X = 15$$

כי הוצקכו 15 כדורים

לא ייתכן שהיו 14 כדורים





4. במרובע BKCD הצלע KB מקבילה לצלע CD.

הצלע CD היא מיתר במעגל והצלע KB משיקה למעגל בנקודה K.

הצלע BD חותכת את המעגל בנקודה A.

האלכסון BC חותך את המיתר AK בנקודה E (ראו סרטוט).

א. הוכיחו כי  $\triangle ABK \sim \triangle AKC$ .

ב. הוכיחו כי  $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$ .

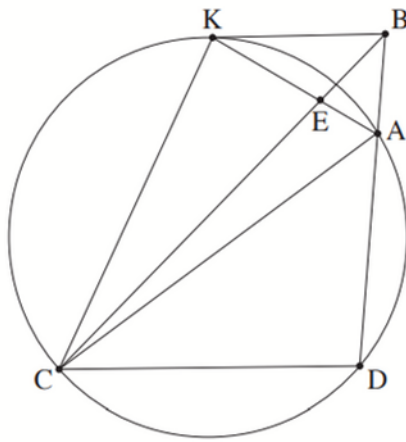
נתון:  $BE = \frac{1}{4}CE$ .

ג. מצאו את היחס  $\frac{AK}{AB}$ .

נתון: שטח המרובע ABKC הוא 30.

נסמן ב-S את שטח המשולש AEB.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש KEC.



פתרון!

נימוק

טענה

המספר

נימוק	טענה	המספר
נתון	BK משיקה למעגל	①
נתון	$BK \parallel CD$	②
זווית בין משיק לאיתר. לפי ד	$\angle AKB = \angle ACK$	③
זווית נגדיות במרובע הכוכב במגעל סכומן $180^\circ$	$\angle CDA + \angle CKA = 180^\circ$	④
זווית הז' נגדיות בין ישני יק' מהבית. משלימה $180^\circ$ לפי 2	$\angle CDA + \angle ABK = 180^\circ$	⑤
כז' המעגל. לפי 4, 5	$\angle ABK = \angle CKA$	⑥
משפט ז'ניון 5. לפי 3, 7	$\triangle ABK \sim \triangle AKC$ נ.ש.ל.ו.	⑧



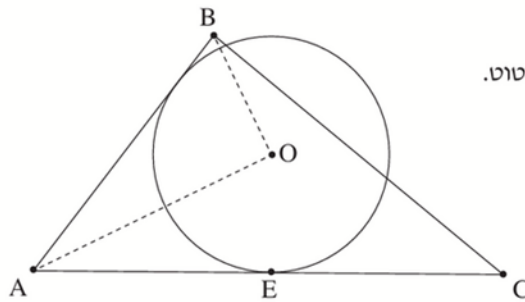
<p>ס'א'ר ל'מ'ג'ל'ל' ק'ל'ש'ל'ג כ'ל'ג'י'ג ע'ל'ל' 15 ל'ס' 8</p> <p>ה'ל'כ'ו'ר ח'ו'ל'ה ס'ל'ת. ל'פ' 9</p> <p>ל'ש'ב'ט ח'ו'ל'ה ה'ס'ל'ת ק'ש'ל'ג ABC. ל'פ' 10</p>	<p><math>\angle BAK = \angle CAK</math></p> <p>ח'ו'ל'ה BAC ~ ACE</p> <p><math>\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}</math></p> <p>ל'ש'ב'ט</p>	<p>(9)</p> <p>(10)</p> <p>(11)</p>
<p>ל'פ' 11, 13</p> <p>י'ח'ס ה'כ'ל'ע'ל' ה'מ'ת'ל'ל' ל'ל'ג כ'ל'ש'ל'ג'י'ג כ'ו'ל'ג'י'ג. ל'פ' 8</p> <p>ל'פ' 14</p> <p>ה'ל'כ'ב' ל'פ' 16, 17</p> <p>ח'י'ש'ו'ק</p> <p>ח'י'ש'ו'ק</p>	<p><math>BE = \frac{1}{4} CE</math></p> <p><math>\frac{BE}{CE} = \frac{1}{4}</math></p> <p><math>\frac{AB}{AC} = \frac{1}{4}</math></p> <p><math>\frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AK} = \frac{KC}{BK}</math></p> <p><math>AK^2 = AC \cdot AB</math></p> <p><math>AC = 4AB</math></p> <p><math>AK^2 = 4AB^2</math></p> <p><math>AK = 2AB</math></p> <p><math>\frac{AK}{AB} = 2</math></p> <p>ל'ש'ב'ט</p>	<p>(12)</p> <p>(13)</p> <p>(14)</p> <p>(15)</p> <p>(16)</p> <p>(17)</p> <p>(18)</p> <p>(19)</p> <p>(20)</p>



נ"ו	$S_{ABKC} = 30$	(21)
נ"ו	$S_{AEB} = 5$	(22)
נוסחה שטח משולש	$S_{AEB} = \frac{BE \cdot h}{2}$	(23)
נוסחה שטח משולש	$S_{AEC} = \frac{CE \cdot h}{2}$	(24)
חיסוק. אפי 13, 24, 23	$\frac{S_{AEC}}{S_{AEB}} = \frac{CE}{BE} = 4$	(25)
אפי 22, 25	$S_{AEC} = 4S$	(26)
יחס השטחים של משולש 3 ו-1 שווה אריקות יחס ה-3 אגם המאגן	$\frac{S_{AKC}}{S_{ABK}} = \left(\frac{AK}{AB}\right)^2 = 4$	(27)
חיבור שטחים. אפי 21	$S_{AKC} + S_{ABK} = 30$	(28)
חיסוק. אפי 28, 27	$S_{AKC} = 24$	(29)
חיסוק שטחים. אפי 29, 26	$S_{KEC} = 24 - 4S$	(30)
	נ.ש. 3	



5. נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.



מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל.  
הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט.

נתון:  $BO \perp AO$ ,  $AE = CE$ .

נסמן ב- $\beta$  את הזווית BAC.

א. הביעו באמצעות R ו- $\beta$  את האורך של AB.

נתון כי האורך של AB הוא  $2.5R$ ,

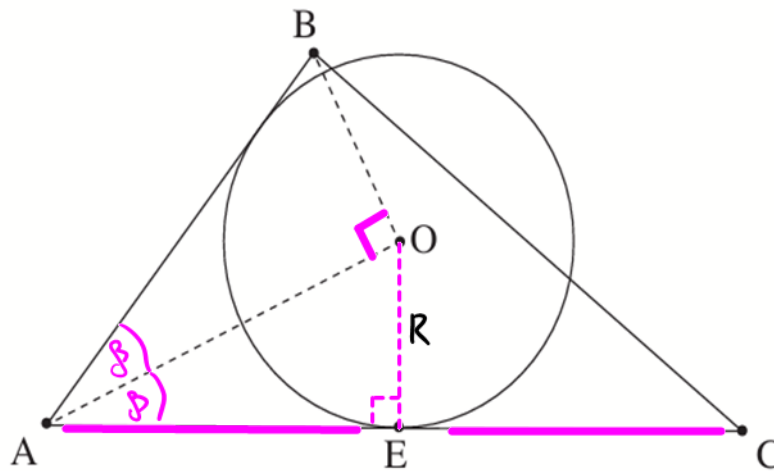
והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של  $\beta$ .

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של R.



א. הביעו באמצעות R ו- $\beta$  את האורך של AB.

כידוע, קטע הנחקר אה מרכז המעגל עם נקודת המגע יוצאים 2 לשיקים למעגל  
חוצה את הזווית בין השיקים.

$OE \perp AE$  ← זוהי קו לשיק סרטוט

$\triangle AOE$   $\sin(\beta) = \frac{OE}{OA} \rightarrow OA = \frac{R}{\sin(\beta)}$

$\triangle ABO$   $\cos(\beta) = \frac{AO}{AB} \rightarrow AB = \frac{AO}{\cos(\beta)} \rightarrow AB = \frac{\frac{R}{\sin(\beta)}}{\cos(\beta)} \rightarrow AB = \frac{R}{\sin(\beta)\cos(\beta)}$

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



נתון כי האורך של AB הוא  $2.5R$ ,

והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של  $\beta$ .

נתון:  $2\beta < 90$

$\beta < 45$

$$AB = \frac{R}{\sin(\beta) \cos(\beta)} = 2.5R \quad | :R$$

$$\frac{1}{\sin(\beta) \cos(\beta)} = 2.5$$

$$\frac{1}{2.5} = \frac{1}{2} \sin(2\beta)$$

$$\frac{2}{2.5} = \sin(2\beta)$$

$$2\beta = 53.13^\circ$$

$$\beta = 26.56^\circ$$

$$2\beta = 126.869^\circ$$

$$\beta = 63.43^\circ$$

(סג)

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{\frac{AB \cdot AC \cdot \sin(2\beta)}{2}}{\frac{AB \cdot AO \cdot \sin(\beta)}{2}} = \frac{2AE \cdot 2\sin(\beta) \cos(\beta)}{AO \cdot \sin(\beta)} = \frac{4 \cdot \frac{R}{\tan(\beta)} \cdot \cos \beta}{\frac{R}{\sin(\beta)}} = \frac{4 \sin \beta \cdot \cos \beta}{\tan(\beta)} = 4 \cos^2(\beta) = 3.2$$

↓  
משולש AOE  
שונה הבאה

ΔAOE  $\tan(\beta) = \frac{OE}{AE} \rightarrow AE = \frac{R}{\tan(\beta)}$



נתון כי האורך של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של R.

(חשב את BC ע"י משפט הקוסינוסים?  $\Delta ABC$  ולתת את (אתה חושב)  
הסינוסים על חשב את רדיוס המעגל החוסם את  $\Delta ABC$

$$AC = 2AE = 2 \cdot \frac{R}{\tan(\beta)} = 4R$$

$$AB = \frac{R}{\sin(\beta) \cos(\beta)} = \frac{5R}{2}$$

$\Delta ABC$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(2\beta)$$

$$BC^2 = (4R)^2 + \left(\frac{5R}{2}\right)^2 - 2 \cdot 4R \cdot \frac{5R}{2} \cdot \cos(2\beta)$$

$$BC = \frac{\sqrt{41}R}{2}$$

$\Delta ABC$

$$\frac{BC}{\sin(2\beta)} = 2R_{\Delta ABC}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{41}R}{2}}{\sin(2\beta)} = 2 \cdot 14$$

$$R = \frac{28 \cdot \sin(2\beta)}{\frac{\sqrt{41}}{2}}$$

$$R = 6.996 \approx 7$$

$$R = 7$$





6. נתון כי  $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - a^2)^3}$  היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ .  $a$  הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$  מוגדרות באותו התחום.

בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות  $a$ , אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

נתון כי לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 0$ .

ג. מצאו פונקציה  $f(x)$  המקיימת תנאים אלה.

נתונות הפונקציה  $g(x) = \frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$  והפונקציה  $h(x) = \frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$ .

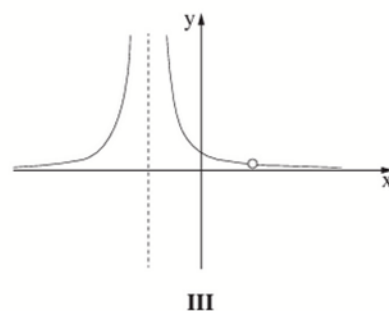
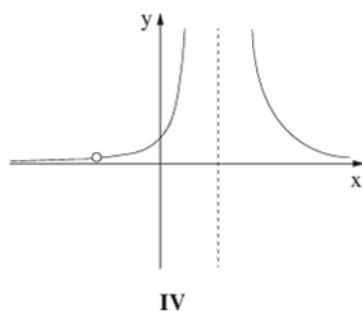
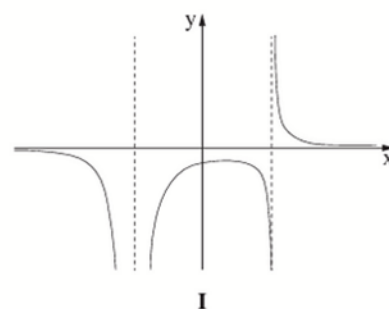
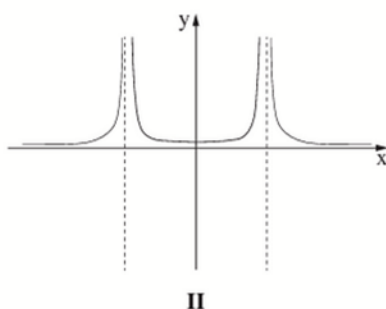
הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$  ו- $h(x)$  מוגדרות באותו התחום.

ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$  ו- $h(x)$  גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים IV-I שבסוף השאלה.

נמקו את תשובותיכם.

נתון כי לפונקציה  $h(x-9)$  יש אסימפטוטה שמשוואתה  $x = 0.8a$ .

ה. מצאו את הערך של  $a$ .



א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

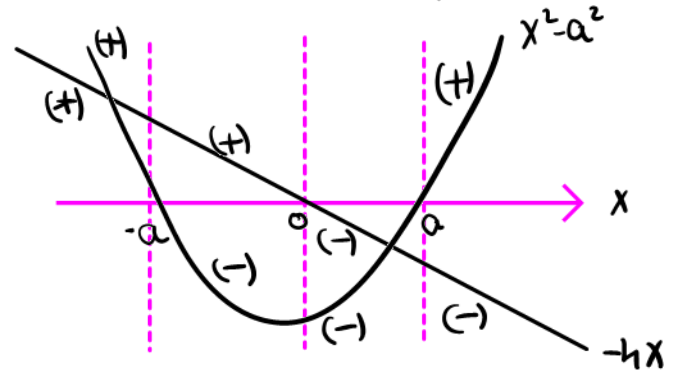
$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - a^2)^3} \rightarrow x^2 - a^2 = 0 \rightarrow \boxed{x \neq \pm a \text{ ת.נ.פ.}}$$

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה  $f(x)$ .

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-a^2)^3} = 0 \rightarrow -4x=0 \rightarrow x=0$$

נבדוק את הדינאמיקה של אוקטיוס חלק  
בקיצור סימן הנשנוג ומגיק  
הגיונולק קיצ סימן נשנוג:

$x$	$x < -a$	$-a < x < 0$	$0 < x < a$	$x > a$
$f'(x)$	+	-	0	-
$f(x)$	↗	↘	מיני	↘



תחומי עלייה של  $f(x)$ :  $x < -a$  ו  $0 < x < a$   
תחומי ירידה של  $f(x)$ :  $x > a$  ו  $-a < x < 0$

נתון כי לפונקצייה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 0$ .  
ג. מצאו פונקצייה  $f(x)$  המקיימת תנאים אלה.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{-4x}{(x^2-a^2)^3} dx = \int -2 \cdot 2x(x^2-a^2)^{-3} dx = \frac{-2(x^2-a^2)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{(x^2-a^2)^2} + C$$

רק אם  $C=0$  האסימטוטה האופקית של  $f(x)$  תהיה קזוקה אנס.

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-a^2)^2}$$

סיכום:



נתונות הפונקצייה  $g(x) = \frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$  והפונקצייה  $h(x) = \frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$ .

הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$  ו- $h(x)$  מוגדרות באותו התחום.

ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$  ו- $h(x)$  גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I-IV שבסוף השאלה. נמקו את תשובותיכם.

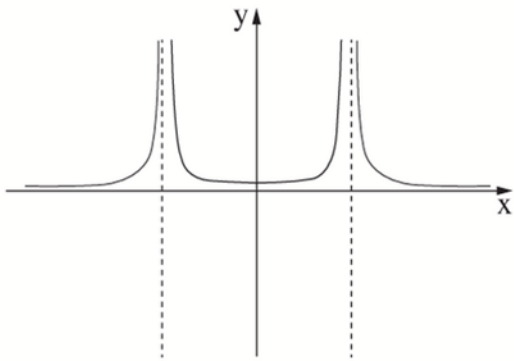
$f(x)$  מתוארת ע"י גרף II מאחר ומגיישק דמיוניק אר הנתונים שאזינו אר  $f(x)$  אר כה.

$$g(x) = \frac{x-a}{(x^2-a^2)^2} = \frac{x-a}{(x-a)^2(x+a)^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)^2}$$

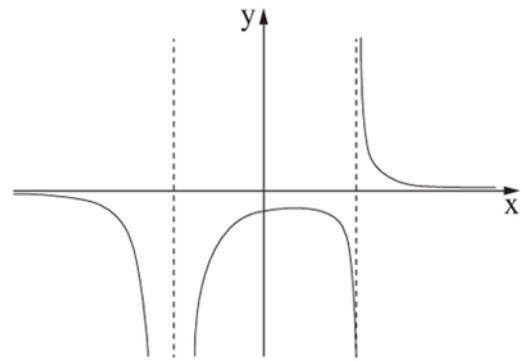
$g(x)$  ניתן לשייח שלמה כישוי  
יש  $g(x)$  שט אסימט אנכית  
כמו  $g(x)$  אכן הגרף  
שיגאיה אה הוא I

$$h(x) = \frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2} = \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2(x+a)^2} = \frac{1}{(x+a)^2} (x \neq -a)$$

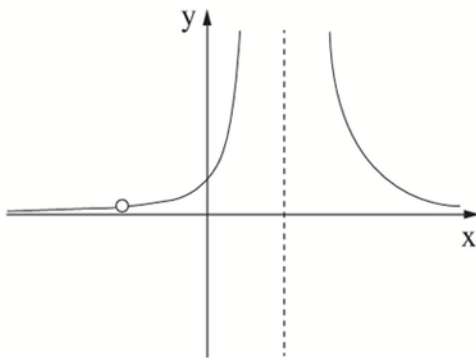
$h(x)$  ניתן לשייח שלמה כישוי  
יש חור  $x=a$  אכן  
מתואר אה גרף III



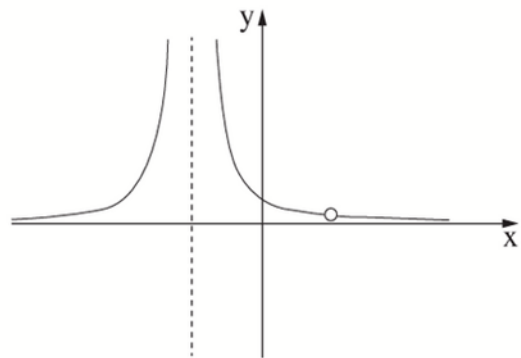
II



I



IV



III

הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה





נתון כי לפונקצייה  $h(x - 9)$  יש אסימפטוטה שמשוואתה  $x = 0.8a$   
ה. מצאו את הערך של  $a$ .

אפוא נאט יש אנכי  $x = -a$   
הפונקציה  $h(x-9)$  הנה הנכונה אפקט של  $h(x)$   
9 צעדים ימינה ואינן כזו האסימפטוטה האנכית  
עליו אפוא  $x = 9 - a$   
נשווה אפוא התנאים ונצור משוואה.

$$9 - a = 0.8a$$

$$9 = 1.8a$$

$$\frac{9}{1.8} = a$$

$$5 = a$$



7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \cos x + \frac{4}{(\cos x)^2} + a$  , בתחום  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  .

a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$  .

ב. האם הפונקצייה  $f(x)$  היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקצייה  $f(x)$  משיק לישר  $y = 4$  בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו  $a = 1$  וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$  , וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$  .

נתונות הפונקצייה  $g(x) = f(x) - k$  והפונקצייה  $h(x) = \frac{1}{g(x)}$  , שתיהן בתחום  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  .

k הוא פרמטר,  $k \neq 6$  ,  $k \neq 4$  .

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקצייה  $g(x)$  וגרף הפונקצייה  $h(x)$  נפגשים בכל אחת

מנקודות הקיצון שלהן.

כ.  $f(x) = \cos x + \frac{4}{(\cos x)^2} + a$   $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$  תחום הגדרה :

$x \neq -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

אפשר גם לכתוב  $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  ואם  $x \neq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$



ה. הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית

לפי ההגדרה  $f(-x) = f(x)$  מתקיים

נתון כי גרף הפונקציה  $f(x)$  משיק לישר  $y = 4$  בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של  $a$ .  
בתחום  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ,  $f(x) = \cos x + \frac{4}{(\cos x)^2} + a$

הסקה לישר אופקי היא הנקודה שבה סיבוב הגרף הוא אכס  
כלומר  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -\sin x + \frac{0 - 4 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} + 0$$

קולר

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \cos^4 x + 8 \sin x \cos x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{\sin x \cos x (-\cos^3 x + 8)}{\cos^4 x} = \frac{\sin 2x \cdot (-\cos^3 x - 8)}{2 \cos^4 x}$$

$$f'(x) = \frac{\sin 2x (-\cos^3 x + 8)}{2 \cos^4 x} = 0 \quad \text{וילסימים}$$

$$-\cos^3 x + 8 = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad 2x = k\pi \quad x = \frac{\pi}{2} k$$

$$\cos^3 x = 8 \quad \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$x = 0, \pi, -\pi$$

$$\cos x = 2$$

$\emptyset$

$y = 4$  משיק קטעי נתונים וכן שני סיבובים

יהיו עם אותו ערך  $y$





$$f(0) = 5+a, \quad f(\pi) = 3+a, \quad f(-\pi) = 3+a$$

$$a=1$$

$$3+a=4$$

אם כן נסיק כי

הציבו  $a=1$  וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

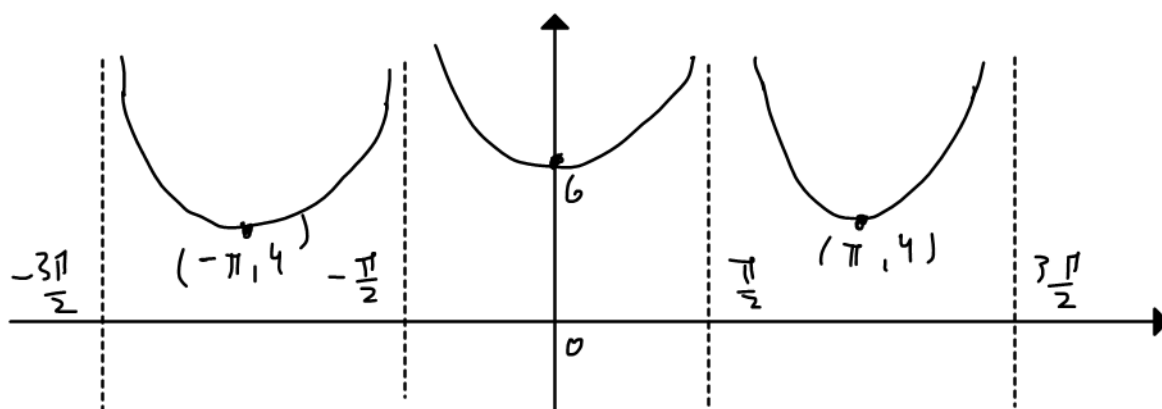
x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$f'$	///	-	0	+	///	-	0
$f$	///	↓ min	↗	///	↓ min	↗	///

$$\begin{aligned} f'(-1.1\pi) &= - & f'(-0.9\pi) &= + & f'(-0.4\pi) &= - \\ f'(1.1\pi) &= + & f'(0.9\pi) &= - & f'(0.4\pi) &= + \end{aligned}$$

$$f(x) = \cos x + \frac{4}{\cos x} + 1$$

$$f(-\pi) = f(\pi) = 4 \quad f(0) = 6$$

$$\begin{aligned} &\min(-\pi, 4) \\ &\min(0, 6) \\ &\min(\pi, 4) \end{aligned}$$



הזדמנות לעתודה יש פעם חיים. אל תתפשרו עליה



נתונות הפונקצייה  $g(x) = f(x) - k$  והפונקצייה  $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ , שתיהן בתחום  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .  
k הוא פרמטר,  $k \neq 4$ ,  $k \neq 6$ .

1. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקצייה  $g(x)$  וגרף הפונקצייה  $h(x)$  נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

בנקודות המפגש של  $h(x)$  ו-  $g(x)$  :

$$g(x) = h(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{g(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$(g(x))^2 = 1 \Rightarrow$$

$$g(x) = 1$$

$$g(x) = -1$$

$$g(x) = 4 - k$$

$$g(x) = 6 - k$$

בנקודות הקיצון של  $g(x)$  מתקיים

ערך יחיד של k שעבורו הפונקציות נפגשות  
הכל נקודות הקיצון צריכות להיות

$$4 - k = -1 \quad \text{או} \quad 6 - k = 1$$

$$k = 5$$

$$|k| = 5$$





8. נתונה הפונקצייה  $f(x) = x\sqrt{8-x}$ .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה  $f(x)$ .

ידוע כי לפונקצייה  $f(x)$  יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם החלק החיובי של ציר ה-x.

מן הנקודה A העבירו שני אנכים:

אחד לציר ה-x החותך אותו בנקודה B, ואנך נוסף לישר  $x = 8$  החותך אותו בנקודה D.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.

$$8 - x \geq 0$$

$$8 \geq x \Rightarrow$$

$$x \leq 8$$

א(1) תחום ההגדרה

$$x\sqrt{8-x} = 0$$

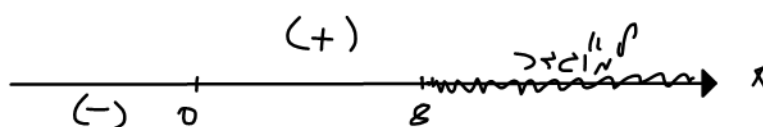
$x=0$                        $x=8$

א(2) נחלק את הנקודה הנתונה

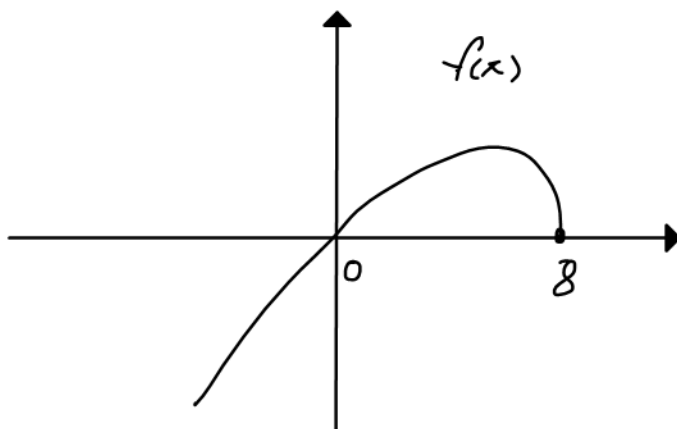
לחלקים שלילי וחיובי

$$f(1) = +$$

$$f(-1) = -$$



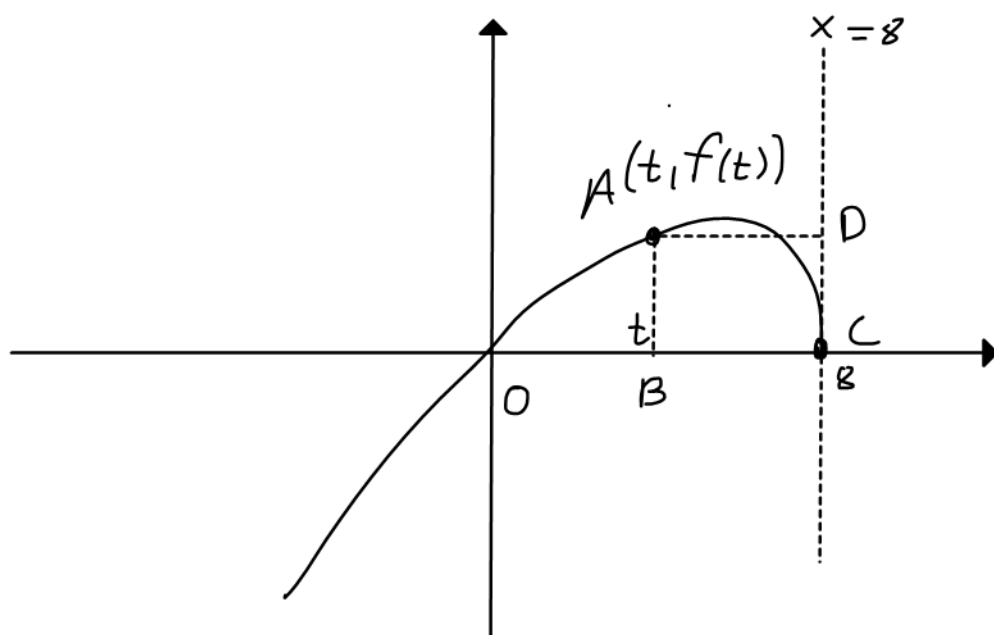
חיוביות:  $0 < x < 8$   
שליליות:  $x < 0$



ה. סקיצה



- הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקצייה  $f(x)$ .
- הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם החלק החיובי של ציר ה-x.
- מן הנקודה A העבירו שני אנכים:
- אנך אחד לציר ה-x החותך אותו בנקודה B, ואנך נוסף לישר  $x = 8$  החותך אותו בנקודה D.
- ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.



$$h(t) = \text{היקף המלבן } ABCD$$

$$A(t, t\sqrt{8-t}) \quad AB = t\sqrt{8-t}$$

$$B(t, 0) \quad C(8, 0) \quad BC = 8-t$$

$$h(t) = 2AB + 2BC = 2t\sqrt{8-t} + 2(8-t)$$

$$\left[ h(t) = 2t\sqrt{8-t} + 16 - 2t \right]$$



$$h'(t) = 2 \cdot \sqrt{8-t} + \cancel{2t} \cdot \frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{8-t}} - 2$$

$$= \frac{2\sqrt{8-t}}{1} - \frac{t}{\sqrt{8-t}} - 2$$

$$= \frac{2(8-t) - t - 2\sqrt{8-t}}{\sqrt{8-t}}$$

$$\left[ h'(t) = \frac{16 - 3t - 2\sqrt{8-t}}{\sqrt{8-t}} \right] = 0$$

$$\rightarrow 16 - 3t = 2\sqrt{8-t}$$

$$(16 - 3t)^2 = (2\sqrt{8-t})^2$$

$$256 - 96t + 9t^2 = 4 \cdot (8-t)$$

$$9t^2 - 96t + 256 - 32 + 4t = 0$$

$$9t^2 - 92t + 224 = 0$$

$$t = 6\frac{2}{3}$$

נסו  
בהצבה

$$-\frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$t = 4$$

באזן



$t$	0		4		8
$h'(t)$	///	+	0	-	///
$h(t)$	///	↗	max	↘	///

$0 < t < 8$   
קרביס  
היראש'ן A

$$h'(2) = + \quad h'(5) = -$$

$\Rightarrow$

$$A(4, 8)$$

$$f(4) = 4\sqrt{8-4} = 8$$