פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ה, 2025, שאלון 35482, גרסה 07:

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

סדרות

1. נתונה סדרה הנדסית A שהמנה שלה היא q, ובה 10 איברים.
האיבר השישי בסדרה הוא פי 81 מן האיבר השני בסדרה.

א. מצאו את שני הערכים של q.

נתון כי סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A הוא 1,296, וכי כל איבריה הם חיוביים.

ב. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

נתונה סדרה חשבונית B. סכום הסדרה A גדול פי 11 מסכום הסדרה B.

ג. מצאו את סכום הסדרה B.

בסדרה B יש 32 איברים.
נתון כי האיבר השני בסדרה B גדול פי 16 מן ההפרש שלה.

ד. מצאו את הפרש הסדרה B.

פתרון:

א. האיבר השישי גדול פי 81 מהאיבר השני

כלומר: $a_6=81\cdot a_2$

נעבור לנעלמים a_1 ו-q:

$$a_1\cdot q^5=81\cdot a_1 q$$

נחלק ב-q וב-a_1 (שניהם שונים מאפס):

$$q^4=81 \quad / \sqrt[4]{\ }$$

נוציא שורש רביעי ונקבל:

$$\boxed{q=3 \text{ או } q=-3}$$

ב. בסדרה ההנדסית יש 10 איברים.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \boxed{a_5, a_6}, a_7, a_8, a_9, a_{10}$

האמצעיים

שני האיברים האמצעיים הם a_5 ו- a_6

סכומם הוא 1,296 כלומר:

$$a_5 + a_6 = 1{,}296$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = 1{,}296$$

כל האיברים בסדרה חיוביים, ולכן $q=3$:

$$a_1 \cdot 3^4 + a_1 \cdot 3^5 = 1{,}296$$

$$81 \cdot a_1 + 243 \cdot a_1 = 1{,}296$$

$$324 \cdot a_1 = 1{,}296$$

$$\boxed{a_1 = 4}$$

האיבר הראשון בסדרה הוא 4

ג. נחשב את סכום הסדרה ההנדסית:

$$S_{10} = \frac{4 \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = 118{,}096$$

סכום הסדרה ההנדסית גדול פי 11 מסכום הסדרה החשבונית ולכן

$$11 \cdot S_B = 118{,}096 \quad /:11$$

$$S_B = 10{,}736$$

$$\boxed{\text{סכום סדרה } B \text{ הוא } 10{,}736}$$

3. בסדרה B יש 32 איברים.

כלומר: $S_{32} = 10{,}736$

האיבר השני בסדרה גדול פי 16

מההפרש שלה, כלומר $a_2 = 16d$

נעבור לנעלמים a_1, d:

$$\begin{cases} a_1 + d = 16d \\ \frac{32}{2}[2a_1 + 31 \cdot d] = 10{,}736 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 15d \\ 32a_1 + 496d = 10{,}736 \end{cases}$$

נציב את a_1:

$$32 \cdot 15d + 496d = 10{,}736$$

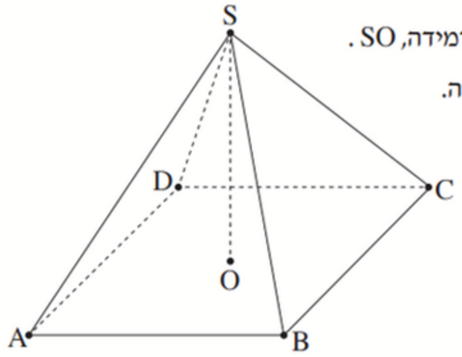
$$976d = 10{,}736 \quad /:976$$

$$d = 11$$

הפרש הסדרה B הוא $\boxed{d=11}$

<u>טריגונומטרייה במרחב</u>

2. בסרטוט שלפניכם פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא מלבן.



נתון כי אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה גדול פי 1.25 מאורך הגובה של הפירמידה, SO.

א. חשבו את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי של הפירמידה ובין בסיס הפירמידה.

נתון כי שטח המשולש SOC הוא 150,

וכי אורך המקצוע AB שווה לאורך הגובה של הפירמידה.

ב. **(1)** מצאו את האורך של SO.

(2) מצאו את נפח הפירמידה SABCD.

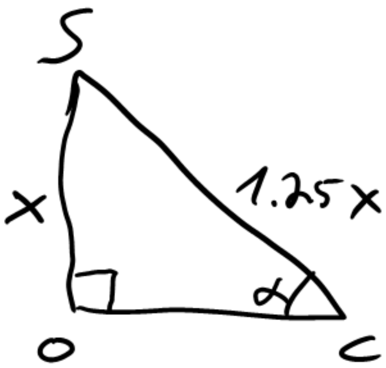
הנקודה P נמצאת על גובה הפירמידה כך שהקטע CP חוצה את הזווית OCS.

ג. חשבו את אורך הקטע PO.

מן הנקודה P חיברו קטעים אל הקודקודים A, B ו־ D כך שנוצרה פירמידה משולשת וישרה PABD.

ד. מצאו פי כמה גדול נפח הפירמידה SABCD מן הנפח של הפירמידה PABD.

<u>פתרון:</u>



א. נתבונן במשולש SOC:

נסמן $SO=x \leftarrow SC=1.25x$

הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא למעשה זווית OCS:

$$\sin\angle OCS = \frac{x}{1.25x} \rightarrow \sin\angle OCS = 0.8$$

$$\angle OCS = 53.13^\circ$$

תשובה: הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא:

$$\boxed{53.13^\circ}$$

ב.(1) נתון כי שטח משולש SOC הוא 150

נחשב את OC בעזרת משפט פיתגורס,

$$OC^2+x^2=(1.25x)^2 \to OC^2+x^2=\frac{25}{16}x^2$$

$$OC^2=\frac{9}{16}x^2 \;/\sqrt{\ }$$

$$OC=\frac{3}{4}x$$

שטח משולש SOC הוא $\frac{OC\cdot OS}{2}$

ולכן:

$$\frac{x\cdot\frac{3}{4}x}{2}=150$$

$$\frac{3}{4}x^2=300$$

$$x^2=400 \;/\sqrt{\ }$$

$$x=20$$

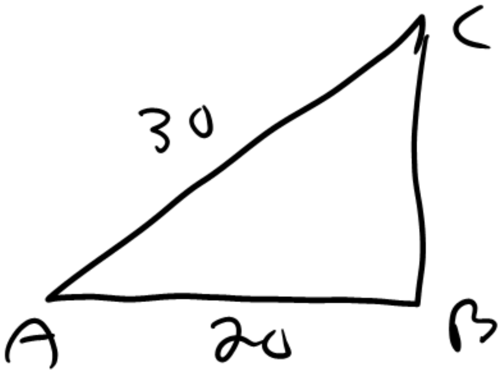
תשובה: $\boxed{SO=20}$

(2) נתון $AB=SO \rightarrow AB=20$

נמצא את הצלע השנייה BC בעזרת משפט פיתגורס.

אלכסונים במלבן חוצים זה את זה

ולכן: $AC=2\cdot OC=2\cdot\frac{3}{4}\cdot 20=30$



משולש ABC:

$BC^2+20^2=30^2$

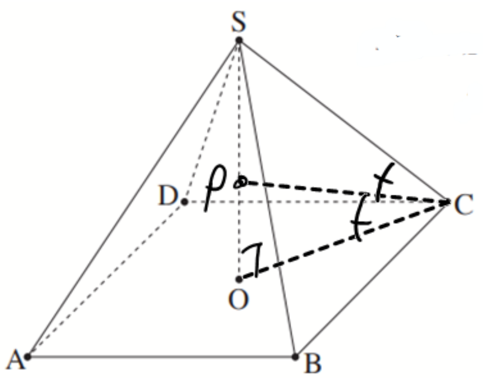
$BC^2=500$

$BC=\sqrt{500}=22.36$

כעת נחשב את הנפח:

$$V_{ABCDS}=\frac{AB\cdot BC\cdot 50}{3}=\frac{20\cdot\sqrt{500}\cdot 20}{3}=$$

$$\boxed{V_{ABCDS}=2,981.42}$$



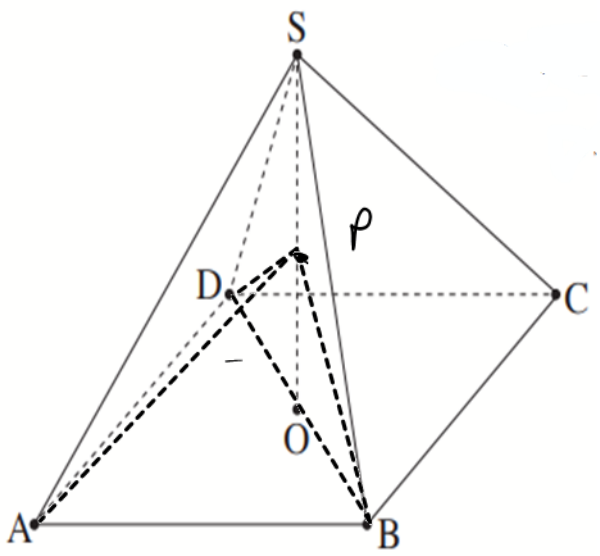
ג. במשולש POC:

$\angle OCP=\frac{\angle OCS}{2}=26.565^\circ$

נשתמש בטנגנס:

$\tan 26.565^\circ=\frac{PO}{15}$

$\boxed{PO=7.5}$



3. נפח פירמידה PABD יחושב על ידי הנוסחה:

$$V_{PABD} = \frac{S_{ABD}\cdot PO}{3}$$

שטח הבסיס, כלומר שטח משולש ABD הוא מחצית משטח המלבן ABCD.

הגובה PO $\frac{3}{8}$ מהאורך SO $\left(\frac{7.5}{20}\right)$

מכאן שיחס הנפחים יהיה

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$$

כלומר, נפח פירמידה SABCD גדול פי $\boxed{\frac{16}{3}}$ מנפח פירמידה PABD.

.3 נתונה הפונקצייה $f(x)=3\cos(2x)-a$, a הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

הביעו באמצעות a , אם יש צורך.

נתון כי כל נקודות המינימום של הפונקצייה $f(x)$ נמצאות על הישר $y=a-15$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=6$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על סעיפים ג–ד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, ועל ידי הישר $y=a-15$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

פתרון שאלה 3

א. נקודות קיצון בקצה תחום הגדרה:

$f(x)=3\cdot\cos(2x)-a$

$f(-\pi)=3\cdot\cos(-2\pi)-a=3-a$ $(-\pi, 3-a)$

$f(\pi)=3\cdot\cos(2\pi)-a=3-a$ $(\pi, 3-a)$

נגזור: $f'(x)=-2\cdot3\cdot\sin(2x)=-6\sin(2x)$

נשווה לאפס ונמצא שיעורי x בנק' הקיצון

$f'(x)=0$

$-6\sin(2x)=0$

$\sin(2x)=0$

$2x=0+360^\circ k$
$x=180^\circ k$

$2x=180^\circ+360^\circ k$
$x=90^\circ+180^\circ k$

המשך פתרון שאלה 3 ב.

נמיר את התוצאה לרדיאנים:

$$\sin(2x)=0$$

$2x=0+2\pi k$ $2x=\pi+2\pi\cdot k$

$x=\pi\cdot k$ $x=\frac{1}{2}\pi+\pi k$

נרשום את התוצאות שבתחום ההגדרה:

$x=-\pi$ (-180°) $x=-\frac{1}{2}\pi$ (-90°) $x=0$ (0°) $x=\frac{1}{2}\pi$ (90°) $x=\pi$ (180°)

נציב בפונק' לקבלת שיעורי ה y:

$f(-\frac{1}{2}\pi)=3\cdot\cos(-\pi)-a=-3-a$ $(-\frac{1}{2}\pi, -3-a)$

$f(0)=3\cos(0)-a=3-a$ $(0, 3-a)$

$f(\frac{1}{2}\pi)=3\cos(\pi)-a=-3-a$ $(\frac{\pi}{2}, -3-a)$

נסווג את נקודת הקיצון בעזרת בדיקת תחומי עליה וירידה ע"י הצבת ערכי ביניים בנגזרת ובדיקת החיוביות/שליליות בנגזרת בתחומים. נרכז תוצאות בטבלה:

$f'(x)=-6\sin(2x)$

x	$-\pi$	-0.75π	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$f'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0
$f(x)$	max	↘	min	↗	max	↘	min	↗	max

המשך פתרון שאלה 3 ב.

נרכז את התוצאות:

$(-\pi, 3-a)$	$(-\frac{1}{2}\pi, -3-a)$	$(0, 3-a)$	$(\frac{1}{2}\pi, -3-a)$	$(\pi, 3-a)$
מקסימום	מינימום	מקסימום	מינימום	מקסימום

שיעור ה y בנקי המינימום: $-3-a$

נשווה לנתון: $a-15=-3-a$

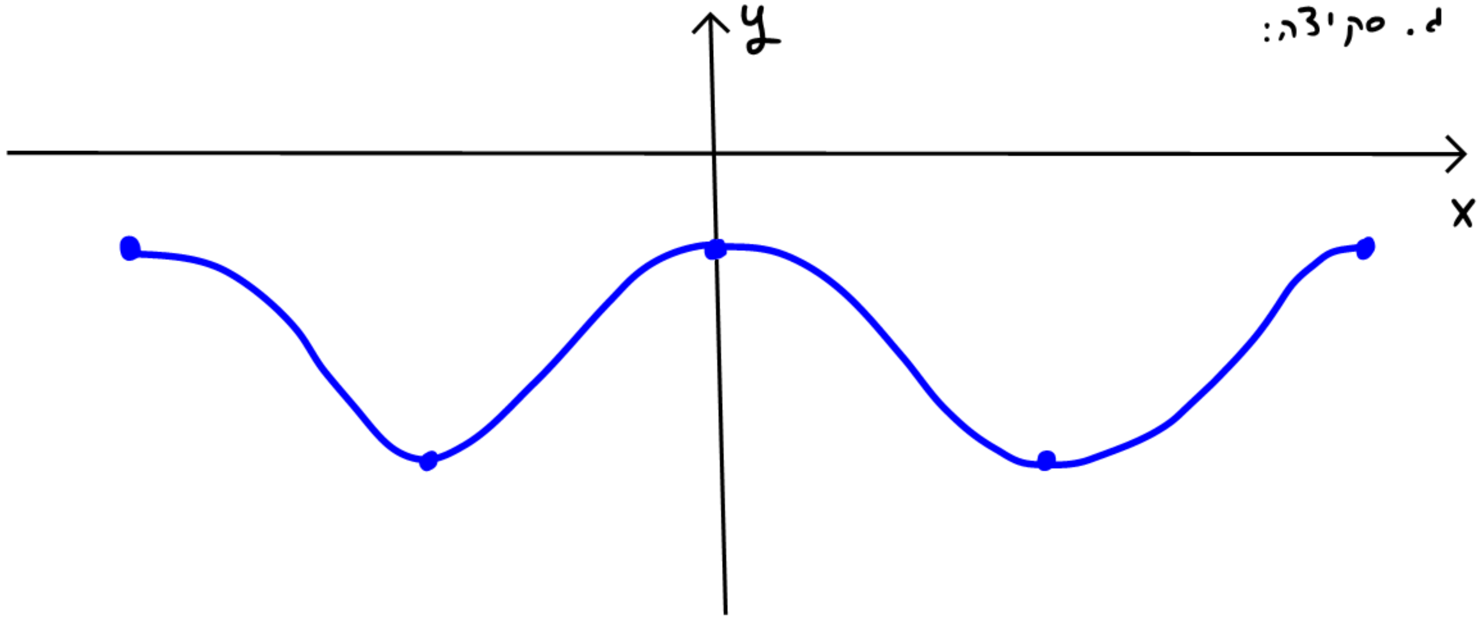
$$2a=12$$

$$a=6$$

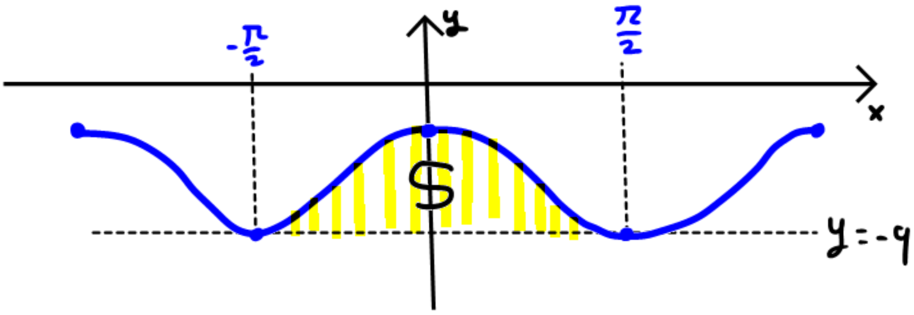
נרשום מחדש: $f(x)=3\cos(2x)-6$

$(-\pi, -3)$	$(-\frac{1}{2}\pi, -9)$	$(0, -3)$	$(\frac{1}{2}\pi, -9)$	$(\pi, -3)$
מקסימום	מינימום	מקסימום	מינימום	מקסימום

ג. סקיצה:



המשך שאלה 3



3. שיעור הע
לאורך הישר:
$y=a-15=6-15=-9$

נכתוב אינטגרל מסוים עבור השטח הנ"ל:

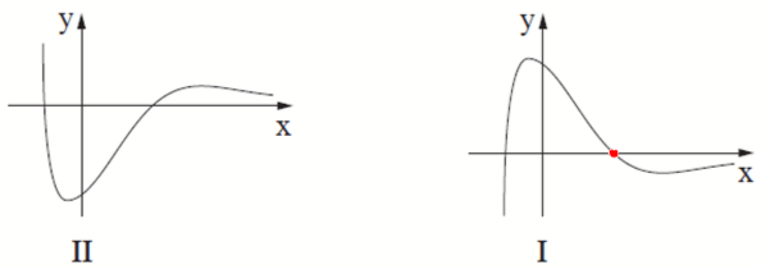
$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos(2x)-6-(-9)\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos(2x)+3\right)dx=\left[\frac{3\sin(2x)}{2}+3x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left(\frac{3\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)-\left(\frac{3\cdot\sin\left(-2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)=3\pi=9.425$$

.4 הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות לכל x.

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת מקסימום אחת בלבד ושיעור ה־ x שלה חיובי.

לפניכם שני גרפים, I ו־ II, אחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



א. קבעו איזה מן הגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ונמקו את קביעתכם.

נתון: $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{(-2x+1)}$.

ב. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה־ x.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 7 \cdot e^{(-2x+1)}$ המוגדרת לכל x.

ד. **(1)** הסבירו מדוע הפונקצייה $g(x)$ חיובית לכל x.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

דרך כל אחת מן הנקודות שמצאתם בסעיף ד העבירו אנך לציר ה־ x.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי האנכים.

פתרון שאלה 4

א. הגרף המתאים הוא גרף I לפי הנתון המציין נקודת מקסימום בשיעור x חיובי, גרף הנגזרת צריך לחתוך את צ.ר ה x בנק' מקסימום כך שהנגזרת חיובית משמאל לנקודה ושלילית מימין לנקודה

המשך פתרון שאלה 4

$$f(x)=(x^2-2)\cdot e^{(-2x+1)}$$

ב.(1) נציב $f(x)=0$ לנק' החיתוך:

$$0=(x^2-2)\cdot e^{(-2x+1)}$$

$$x^2-2=0$$

$$x=-\sqrt{2} \qquad x=\sqrt{2}=1.414$$

$$0=e^{(-2x+1)}$$

אין פתרון

נק' החיתוך עם ציר ה x הן $(\sqrt{2},0)$ $(-\sqrt{2},0)$

(2) נגזור את הפונקציה:

$$f(x)=(x^2-2)\cdot e^{(-2x+1)}$$

$$f'(x)=2x\cdot e^{-2x+1}-2\cdot(x^2-2)\cdot e^{-2x+1}=2\cdot e^{-2x+1}\left(x-(x^2-2)\right)$$

$$\boxed{f'(x)=2\cdot e^{-2x+1}(-x^2+x+2)}$$

המשך שאלה 4 סעיף ב (2)

נשווה נגזרת לאפס ונבודד שיעור x בנק' הקיצון

$$f'(x)=0$$

$$2\cdot e^{-2x+1}\left(-x^2+x+2\right)=0$$

$$e^{-2x+1}=0$$

אין פתרון

$$-x^2+x+2=0$$

נוסחת שורשים

$$x_1=2 \qquad x_2=-1$$

נציב בפונק' לקבלת שיעורי ה y:

$$f(-1)=\left((-1)^2-2\right)\cdot e^{2+1}=-e^3 \qquad \left(-1,-e^3\right)$$

$$f(2)=\left(2^2-2\right)e^{-4+1}=2\cdot e^{-3}=\frac{2}{e^3} \qquad \left(2,\frac{2}{e^3}\right)$$

נסווג את נקודת הקיצון בעזרת בדיקת תחומי עליה וירידה ע"י הצבת ערכי ביניים בנגזרת ובדיקת החיוביות/שליליות בנגזרת בתחומים. נרכז תוצאות בטבלה:

המשך שאלה 4 סעיף ב (2)

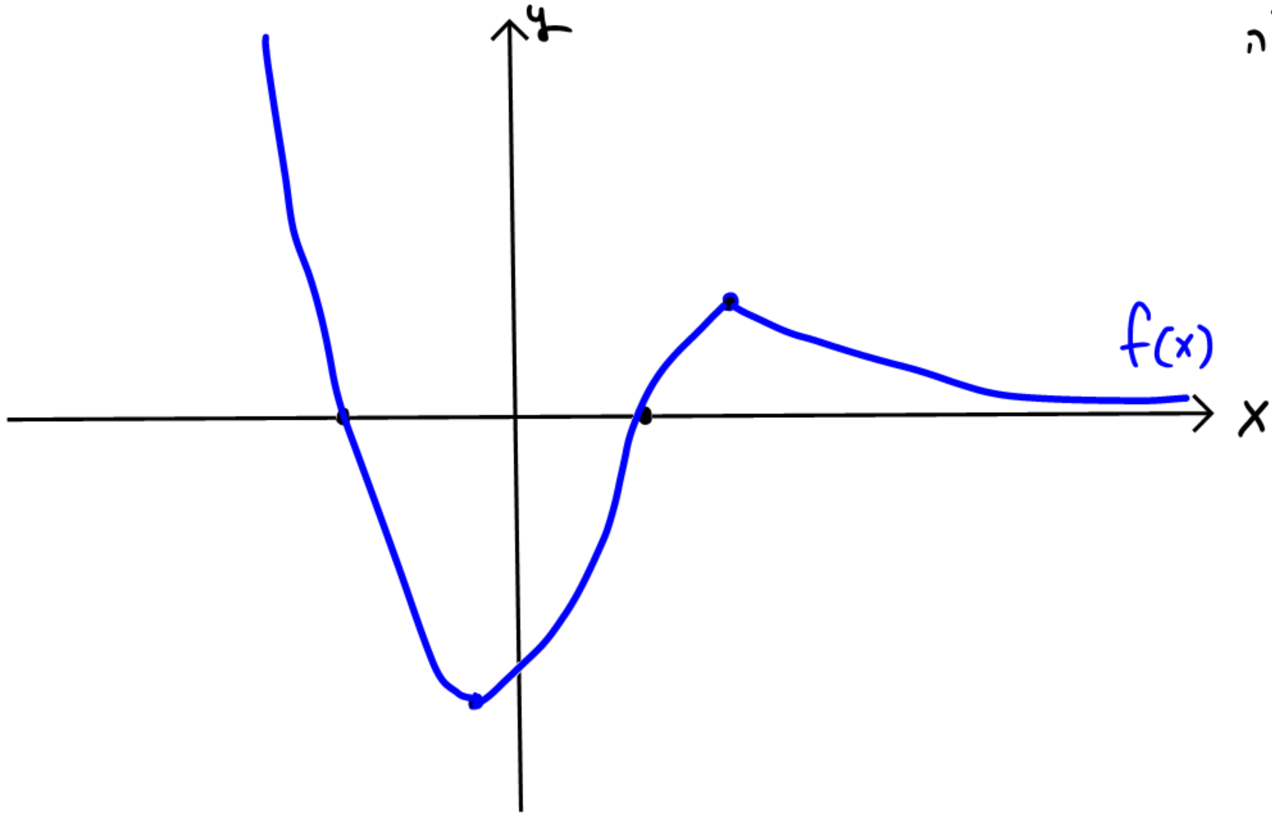
x	-2	-1	0	2	3
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-2x+11}\left(-x^2 + x + 2\right)$$

כלומר יש נקודת מינימום $(-1, -e^3)$

ונקודת מקסימום $\left(2, \frac{2}{e^3}\right)$

ג. סקיצה



המשך שאלה 4

3.

$$f(x) = (x^2-2)\cdot e^{(-2x+1)}$$

$$g(x) = 7\cdot e^{(-2x+1)}$$

(1) הפונקציה $g(x) > 0$ לכל x כיוון שכפל בין מספרים חיוביים יהיה תמיד חיובי. אנו יודעים שהביטוי המעריכי e^{-2x+1} יהיה חיובי בכל חזקה כיוון שבסיס e הוא מספר חיובי.

(2) נפתור את המשוואה $f(x) = g(x)$

$$(x^2-2)\cdot e^{(-2x+1)} = 7\cdot e^{(-2x+1)} \quad / -7e^{(-2x+1)}$$

$$(x^2-2)e^{-2x+1} - 7e^{-2x+1} = 0$$

$$e^{-2x+1}(x^2-2-7) = 0$$

$$e^{-2x+1}(x^2-9) = 0$$

$$e^{-2x+1} = 0$$

אין פתרון

$$x^2-9=0$$

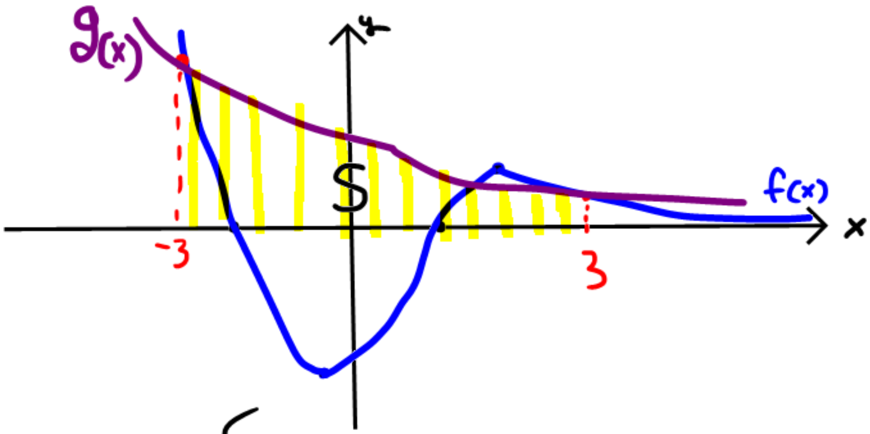
$$x=-3 \qquad x=3$$

המשך שאלה 4 .3 (ב)

נציב באחת הפונקציות לקבלת שיעורי y בנק':

$$g_{(-3)} = 7 \cdot e^{-2\cdot(-3)+1} = 7 \cdot e^{7} = 7676.4$$ $\boxed{(-3, 7e^{7})}$

$$g_{(3)} = 7 \cdot e^{-2\cdot 3+1} = 7 \cdot e^{-5} = 0.047$$ $\boxed{(3, \frac{7}{e^5})}$



ה. נחשב חישוב עבור השטח המתואר בעזרת אינטגרל מסוים:

$$S = \int_{-3}^{3} 7 \cdot e^{-2x+1}\, dx = \left[\frac{7 \cdot e^{-2x+1}}{-2}\right]_{-3}^{3} = -\frac{7}{2} \cdot e^{-2\cdot 3+1} - \left(-\frac{7}{2} \cdot e^{-2\cdot(-3)+1}\right)$$

$$= \frac{g(3)}{-2} - \left(\frac{g(-3)}{-2}\right) = \frac{7 \cdot e^{-5}}{-2} + \frac{7e^{7}}{2} = -\frac{0.047}{2} + \frac{7676.4}{2} = \boxed{3838.2}$$

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{6x}{(\ell nx)^2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה האנכית לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

(3) האם לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את תשובתכם.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה של הפונקצייה $f(x)$.

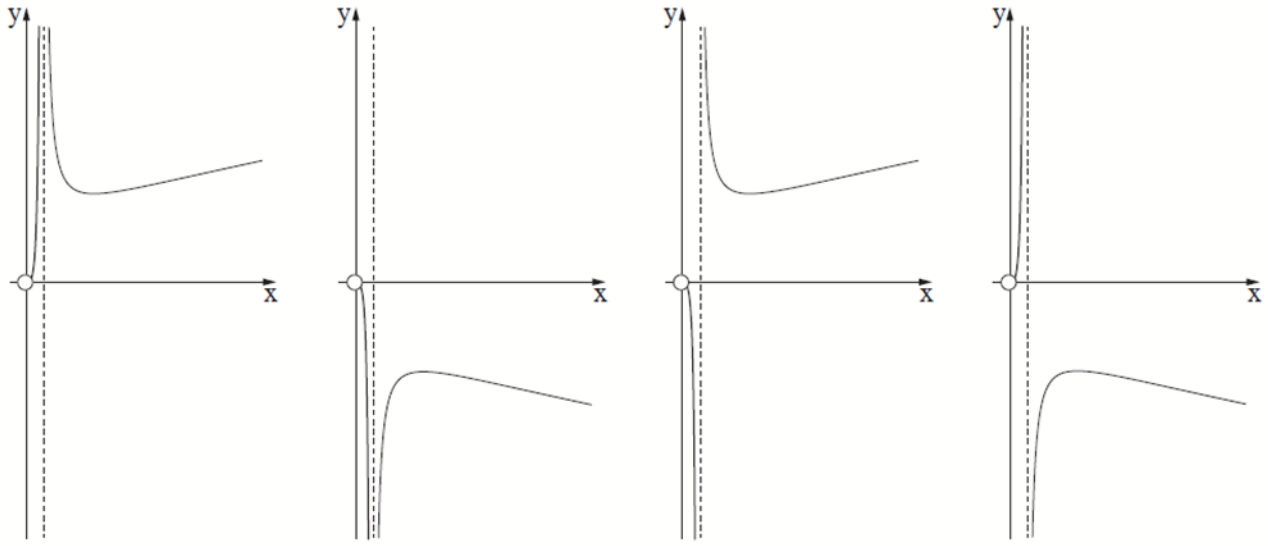
ג. קבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקצייה שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נגזרת הפונקצייה $g(x)$ מקיימת $g'(x)=f(x)-c$, c הוא פרמטר.

ד. (1) מצאו בעבור $c=5$ כמה נקודות קיצון יש לפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).
נמקו את תשובתכם.

(2) רשמו ערך כלשהו של c שבעבורו יש לפונקצייה $g(x)$ שלוש נקודות קיצון. נמקו את תשובתכם.



IV III II I

פתרון שאלה 5

א. (1) תחום הגדרה:

$(\ln x)^2 \neq 0$

$\ln x \neq 0$

$x \neq e^0$

$\boxed{0<x}$ וגם $\boxed{x \neq 1}$

המשך שאלה 5 סעיף א.

(2) אסימפטוטה אנכית בישר $\boxed{x=1}$

(3) אין חיתוך עם ציר y בגלל תחום ההגדרה

נבדוק אם יש חיתוך עם ציר x:

$$f(x)=0$$

$$\frac{6x}{\cancel{(\ln x)^2}}=0$$

נכפול במכנה $(\ln x)^2 \neq 0$ ת.ה

$$6x=0$$

$\cancel{x=0}$ תוצאה זו נפסלת בגלל תחום ההגדרה

ולכן נסיק שאין נקודות חיתוך עם הצירים

ב. (1) $f(x)=\frac{6x}{(\ln x)^2}$

נגזור:

$$f'(x)=\frac{6\cdot(\ln x)^2-6\cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{(\ln^2 x)^2}=\frac{6\cdot(\ln x)^2-12\ln x}{(\ln^2 x)^2}=$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{6\cdot\ln x(\ln x-2)}{(\ln^2 x)^2}}$$

המשך שאלה 5 סעיף ב.

נשווה נגזרת לאפס ונבודד שיעור x בנק' הקיצון

$$f'(x)=0$$

$$\frac{\cancel{6}\cdot\ln x(\ln x-2)}{\cancel{(\ln^2 x)^2}}=0$$

ככל במ"מ $\div 6$

$\cdot(\ln x)^2\neq 0$ ת.ה

$$\ln x(\ln x-2)=0$$

$\cancel{\ln x=0}$ ת.ה

$$\ln x-2=0$$
$$\ln x=2$$
$$x=e^2$$

נציב בפונק' לקבלת שיעור y:

$$f(e^2)=\frac{6\cdot e^2}{(\ln(e^2))^2}=\frac{6\cdot e^2}{4}=\frac{3e^2}{2}=1.5e^2=11.08$$

$$\left(e^2,\ \frac{3}{2}e^2\right)$$

נסווג את נקודת הקיצון בעזרת בדיקת תחומי עליה וירידה ע"י הצבת ערכי ביניים בנגזרת ובדיקת החיוביות/שליליות בנגזרת בתחומים. נרכז תוצאות בטבלה:

המשך פתרון שאלה 5 סעיף ב.

$$f'(x)=\frac{6\cdot \ln x(\ln x-2)}{(\ln^2 x)^2}$$

x	0	0.5	1	2	e^2	
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

מכאן נסיק כי מנק' $\left(e^2, \frac{3}{2}e^2\right)$ יש נקודת מינימום

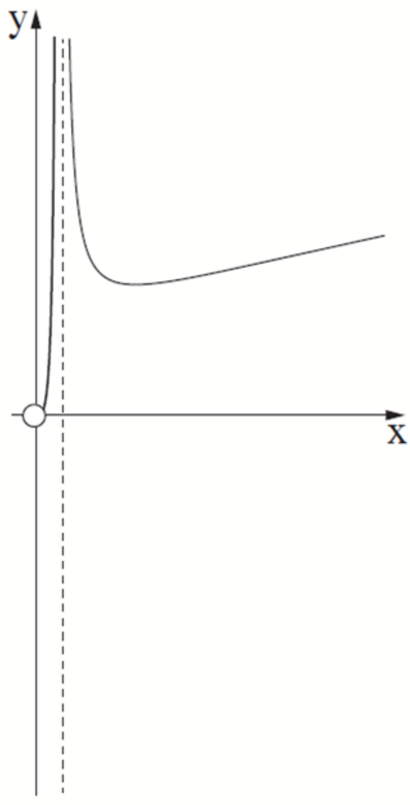
(2) תחום ירידה: $1<x<e^2$

תחומי עלייה: $e^2<x$ וגם $0<x<1$

ג. הגרף היחיד המתאים לתחומי העלייה/ירידה שמצאנו הוא גרף IV

המשך פתרון שאלה 5

3. $g'(x)=f(x)-C$



IV

(1) עבור $C=5$ לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד. הגרף $f(x)$ מעלה ב 5 יח' תיוצר נקודת חיתוך בתחום $0<x<1$ לפי האיור של $f(x)$ והעובדה ששיעור ה y בנק' המינימום גדולה מ-5.

הנקודה תהיה נקודת מינימום כיוון שבתחום זה $f(x)$ עולה ולכן גם $f(x)-5$ תעלה. ולכן משמאל לנק' החיתוך $g'(x)$ תהיה שלילית ומימין לנק' החיתוך $g'(x)$ תהיה חיובית בהתאם לנק' מינימום.

(2) עבור ערכים של C הגדולים משיעור ה y בנק' המינימום כלומר $\frac{3}{2}e^2<C$ נקודת המינימום תזוז אל מתחת לציר ה x וכך נקבל עוד 2 נקודות חיתוך מימין לאסימפטוטה בנוסף לאחת עליה דנו בתת סעיף 3. (1).

הערך שנבחר עבור C הוא: $C=12$