יואל גבע
לא מתפשרים.

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ד , 2024 , מועד א', שאלון: 35571

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

נוכיח שהטענה $48+144+288+...+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$ **, נכונה לכל** n **טבעי <u>זוגי</u>.**

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$ **.**

אגף ימין: $2\cdot(2+2)\cdot(2+4)=48$ **אגף שמאל:** 48

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי <u>זוגי</u> כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $48+144+288+...+6k(k+2)=k(k+2)(k+4)$ **,**

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$ **(הטבעי הזוגי העוקב):**

$48+144+288+...+6k(k+2)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$ **.**

$$\Leftrightarrow \underbrace{48+144+288+...+6k(k+2)}_{\downarrow}+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow \quad k(k+2)(k+4)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל (על ידי הוצאת גורם משותף $(k+2)(k+4)$ **.**

$$\Leftrightarrow \quad k(k+2)(k+4)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$
$$\Leftrightarrow \quad (k+2)(k+4)(k+6)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו שהטענה $48+144+288+...+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$ **, נכונה לכל** n **טבעי <u>זוגי</u>.**

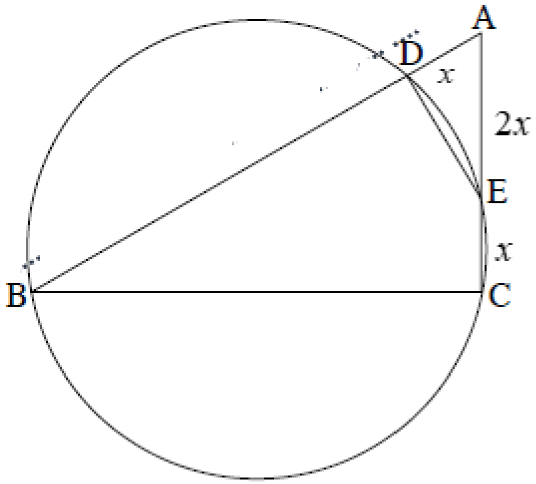
ב1

בגרות פד מארס 24 מועד חורף שאלון 35571

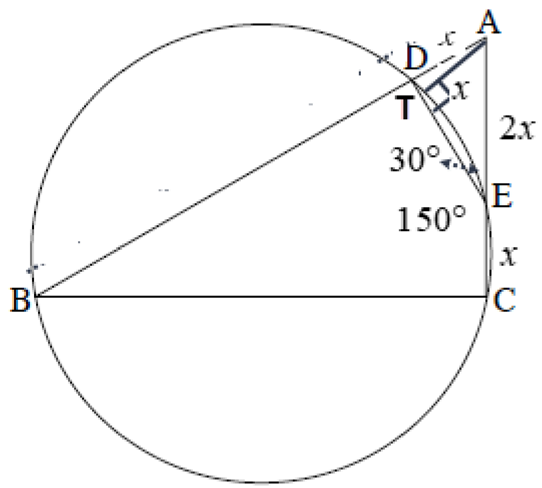
<u>נתונים</u>

.1 $BCED$ **חסום במעגל . .2** $AE = 2CE$ **. .3** $AD = CE$ **עבור (3) .4** $\sphericalangle DEC = 150^\circ$

צ"ל: (1) $\Delta AED \sim \Delta ABC$ **(2)** $\frac{AB}{AC}$ **(3) האם** BE **קוטר ?**



הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	5	$\sphericalangle DEC + \sphericalangle B = 180^\circ$	זוויות נגדיות משלימות ל- 180° במרובע חסום במעגל
	6	$\sphericalangle AED + \sphericalangle DEC = 180^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
5, 6	7	$\sphericalangle B = \sphericalangle AED$ (ז)	
	8	$\sphericalangle A = \sphericalangle A$ (ז)	זווית משותפת
7, 8	9	$\Delta AED \sim \Delta ABC$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. (1)	
2, 3	10	$AD = CE = x \rightarrow AE = 2x$	סימון , חישוב
9, 10	11	$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
10, 11	12	$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}$	
		מ.ש.ל. (2)	



נוכיח בדרך הסתירה			
	13	$\sphericalangle ADE \neq 90^\circ$	**הנחה**
	14	$AT \perp DE, \sphericalangle ATE = 90^\circ$	בניית עזר אנך מ- A לצלע DE (או להמשכה)
4	15	$\sphericalangle AED = 30^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
14, 15	16	$AT = x$	במשולש ישר זווית AET ניצב מול זווית 30° שווה למחצית היתר
10, 16	17	$AT = AD$	
14	18	$AT < AD$	במשולש ישר זווית ADT היתר היא הצלע הארוכה במשולש
17, 18	19	**סתירה להנחה**	
13, 19	20	$\sphericalangle ADE = 90^\circ$	
20, 21	22	$\sphericalangle EDB = 90^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
22	23	BE קוטר	נשען על זווית היקפית ישרה
מ.ש.ל. (3)			

פתרון חלופי בטריגונומטריה

$\sphericalangle AED = 30^\circ$ **(זוויות צמודות משלימות ל- 180°)**

$$\Delta ADE$$

$$\frac{AD}{\sin \sphericalangle AED} = \frac{AE}{\sin \sphericalangle ADE}$$

$$\sin \sphericalangle ADE = \frac{2x \sin 30^\circ}{x} = 1$$

$$\boxed{\sphericalangle ADE = 90^\circ} \quad \sphericalangle EDB = 90^\circ$$

ולכן BE הוא קוטר כי נשען על זווית היקפית ישרה.

תשובה: כן, BE הוא קוטר.

שים לב **שלא קיים, בתוכנית הלימודים, משפט הפוך (ולכן נדרשנו להוכיח)**
למשפט "אם במשולש ישר זווית יש זווית חדה של 30° אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר"

(1) נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x ושתיים המאונכות לציר ה- y .

I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ II. $\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$ III. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$ IV. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

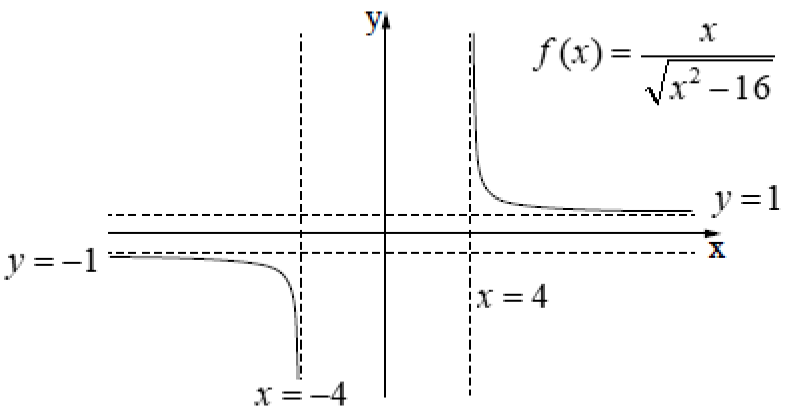
תחום ההגדרה של ביטוי I ו- III הוא כל x , ושל II ו- IV הוא $x>4$ או $x<-4$,
ושני הביטויים האחרונים מתאימים לפונקציה עם שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x, $x=4$ ו- $x=-4$.

הביטויים III ו- IV "נפסלים" מיידית, כי הם ביטויים אי-שליליים
וחלק מהגרף הנתון נמצא מתחת לציר ה- x .

בביטוי III ו- IV חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה, ולפונקציה המתאימה אין אסימפטוטות אופקיות.
בביטויים I ו- II המונה קובע את סימן הביטוי, ולפונקציות המתאימות תהיינה שתי אסימפטוטות אופקיות:
$y=1 \quad (x\to\infty)$ ו- $y=-1 \quad (x\to-\infty)$.

ולכן הביטוי שעונה על כל הדרישות הוא ביטוי II , כלומר $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$.

תשובה: ביטוי II מתאר את הפונקציה $f(x)$.



(2) נתונה הפונקציה $g(x)$ **המוגדרת גם בתחום** $x>4$ **או** $x<-4$ **ומקיימת** $g'(x)=f(x)+\frac{5}{3}$.

מכאן שסימני הנגזרת $g'(x)$

קובעים את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

$g'(x)=f(x)+\frac{5}{3}$ **היא הזזה** $\frac{5}{3}$ **יחידות כלפי מעלה של** $f(x)$ **, ללא שינוי בתחום ההגדרה**

ובתחומי הירידה, אולם עלינו למצוא את נקודת האפס, שעל פי הציור תהייה בתחום $x<-4$,

כדי למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ **גם בתחום זה.**

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}+\frac{5}{3}=0$$

$$3x+5\sqrt{x^2-16}=0$$

$$3x=-5\sqrt{x^2-16} \quad (\ \ )^2 \rightarrow test$$

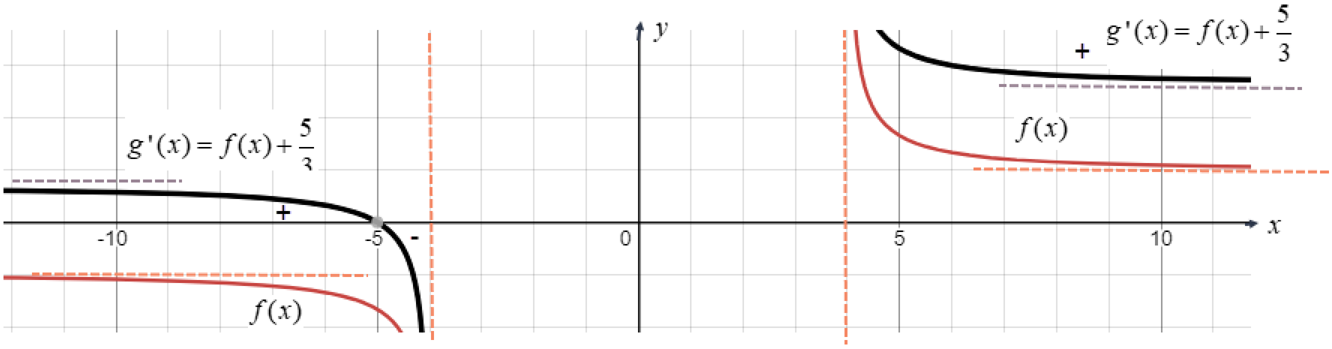
$$9x^2=25(x^2-16)$$

$$-16x^2=-400$$

$$x^2=25$$

$$\cancel{x=5} \quad \leftarrow x<-4$$

$$x=-5: \quad 3(-5)+5\sqrt{(-5)^2-16}\overset{?}{=}0 \quad \rightarrow 0=0\ v \quad \rightarrow x=-5 \quad o.k.$$



תשובה: עבור $g(x)$ **עלייה בתחום** $x>4$ **או** $x<-5$ **וירידה בתחום** $-5<x<-4$.

(1) עבור x_A גרף I עובר מחיוביות לשליליות וגרף II מעלייה לירידה, עם מקסימום בנקודה A .

עבור x_B גרף I עובר משליליות לחיוביות וגרף II מירידה לעלייה, עם מינימום בנקודה B .

עבור x_C גרף I עובר מחיוביות לשליליות וגרף II מעלייה לירידה, עם מקסימום בנקודה C .

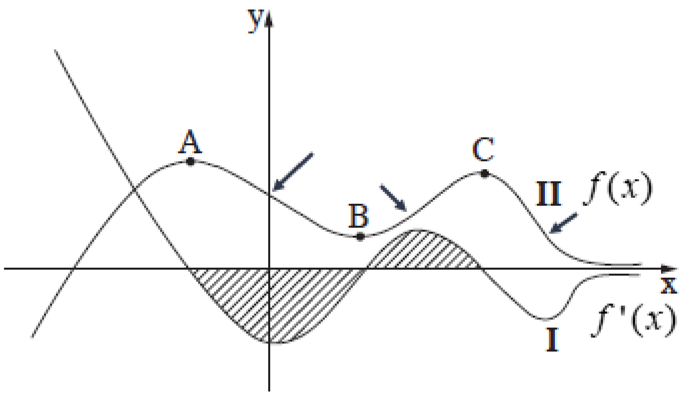
זה כבר מספיק לצורך זיהוי גרף I כגרף של $f'(x)$, ואת גרף II כגרף של $f(x)$.

<u>בנוסף</u>

$f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $x<0$ כאשר $f'(x)$ יורדת בתחום זה.

וניתן לראות את המשך ההשפעה של עלייה וירידה של $f'(x)$,

על הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ או מטה $(\cap)$ של $f(x)$.



תשובה: גרף II מתאר את הפונקציה $f(x)$.

(2) ל- $f'(x)$ יש שלוש נקודות קיצון, שבהן היא עוברת מעלייה לירידה, או מירידה לעלייה,

ועבור אותם שיעורי x מתקבלות נקודות פיתול של $f(x)$, המסומנות בחיצים בסרטוט מעל.

תשובה: ל- $f(x)$ יש 3 נקודות פיתול.

(3) נתון: $f(x_A)=6$, $f(x_B)=2$ וגודל השטח המקווקו שווה ל- 7.

$$\int_{x_A}^{x_B}\left(0-f'(x)\right)dx+\int_{x_B}^{x_C}\left(f'(x)\right)dx=7$$

$$-f(x)\Big]_{x_A}^{x_B}+f(x)\Big]_{x_B}^{x_C}=7$$

$$-f(x_B)-(-f(x_A))+f(x_C)-f(x_B)=7$$

$$-2+6+f(x_C)-2=7$$

$$\boxed{f(x_C)=5}$$

תשובה: $f(x_C)=5$.

א. נתונה סדרה חשבונית A **שבה:** $a_1=-4-4k$ **ו-** $a_3=-16+2k$ **(** k **הוא פרמטר).**

$$-\begin{cases} a_3=-16+2k \\ a_1=-4-4k \end{cases}$$
$$2d=-12+6k$$
$$\boxed{d=3k-6}$$

זהו ביטוי ליניארי, העובר משליליות לחיוביות עבור $k=2$ **.**

תשובה: (1) הסדרה A **עולה עבור** $k>2$ **(2) יורדת עבור** $k<2$ **(3) קבועה עבור** $k=2$**.**

ב. נתון: $a_{17}=-232$**.**

$$a_1+16d=-232$$
$$-4-4k+16(3k-6)=-232$$
$$-4k+48k-96=-228$$
$$44k=-132$$
$$\boxed{k=-3}$$

ולכן הסדרה A **יורדת, כי** $k<2$**.**

תשובה: $k=-3$ **.**

ג. נציב $k=-3$ **ובהתאם בסדרה החשבונית** A **:** $a_1=8$ **ו-** $d_a=-15$**.**

נתונה סדרה חדשה B **שבה:** $b_n=a_n+24n+17$ **.**

נוכיח שהסדרה B **היא סדרה חשבונית.**

$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}+24(n+1)+17-(a_n+24n+17)$$
$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}+24n+24+17-a_n-24n-17$$
$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n+24$$
$$b_{n+1}-b_n=-15+24$$
$$\boxed{b_{n+1}-b_n=9}$$

ולכן זו סדרה חשבונית עולה, כי ההפרש $d_b=9$ **קבוע (אינו תלוי ב-** n **),**

כאשר $b_1=a_1+24\cdot1+17=8+41=49$**.**

לסיכום: $b_1=49$ **ו-** $d_b=9$**.**

תשובה: הוכחנו שהסדרה B **היא סדרה חשבונית.**

ד. נחשב את הסכום $b_1^2-b_2^2+b_3^2-b_4^2+...+b_{29}^2-b_{30}^2$

$$(b_1+b_2)(b_1-b_2)+(b_3+b_4)(b_3-b_4)+...+(b_{29}+b_{30})(b_{29}-b_{30})=$$
$$(b_1+b_2)(-d_b)+(b_3+b_4)(-d_b)+...+(b_{29}+b_{30})(-d_b)=$$
$$-9\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+...+b_{29}+b_{30})=$$
$$-9\cdot\frac{30\cdot(2\cdot49+9\cdot29)}{2}=-48,465$$

תשובה: הסכום של $b_1^2-b_2^2+b_3^2-b_4^2+...+b_{29}^2-b_{30}^2$ **הוא** $-48,465$.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - **מבוגר** $\bar{A}$ - **צעיר**

B - **תומכים בהקמת הפארק** $\bar{B}$ - **לא תומכים בהקמת הפארק**

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

נסמן p **- ההסתברות שתושב שנבחר היה צעיר** $(P(\bar{A}) = p)$.

נסמן k **- ההסתברות שתושב שנבחר היה תומך** $(P(B) = k)$.

כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק,

לכן: $p(A \cap B) = p(A) = 1 - p$ **ו-** $p(A \cap \bar{B}) = 0$.

ומכאן ש-: $p(A \cap B) = 1 - p$ **ו-** $p(\bar{A} \cap B) = k - (1 - p) = k + p - 1$.

	A **מבוגר**	$\bar{A}$ **צעיר**	
B **- תומך**	$1-p$	$k+p-1$	k
$\bar{B}$ **- לא תומך**	0	$1-k$	$1-k$
	$1-p$	p	1

תשובה: ההסתברות, שתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק, היא $k + p - 1$.

ב. (1) $P(\bar{B}/\bar{A}) = 0.5 \rightarrow P(B/\bar{A}) = 0.5$

(2) $P(A/B) = \frac{4}{7} \rightarrow P(\bar{A}/B) = \frac{3}{7}$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$
$$\frac{3}{7} = \frac{k+p-1}{k}$$
$$3k = 7k + 7p - 7$$
$$4k = 7 - 7p$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$
$$0.5 = \frac{k+p-1}{p}$$
$$0.5p = k + p - 1$$
$$k = 1 - 0.5p$$

$$\begin{cases} 4k = 7 - 7p \\ k = 1 - 0.5p \end{cases}$$
$$4 - 2p = 7 - 7p$$
$$\boxed{p = 0.6} \rightarrow \boxed{k = 0.7}$$

תשובה: $p = 0.6$, $k = 0.7$.

ג. מצאנו כי ההסתברות לתומכים היא 0.7 וההסתברות לצעירים היא 0.6 .

וגם ההסתברות לתומך מבין הצעירים היא , כבר על פי הנתונים, $P(B/\overline{A})=0.5$, וגם $P(\overline{B}/\overline{A})=0.5$.

ההסתברות שלפחות אחד מששת הצעירים שנבחרו על ידי יוסי תומך ואחד מתנגד,

היא המאורע המשלים לאין מתנגדים או אין תומכים.

$$p=1-(0.5^6+0.5^6)=\frac{31}{32}$$

תשובה: ההסתברות, שלפחות אחד מששת הצעירים שנבחרו תומך ולפחות אחד מתנגד, היא $\frac{31}{32}$.

ד. יוסי ראיין באקראי 5 תושבים שהשתתפו בסקר .

נחשב את ההסתברות שהמרואיין האחרון היה צעיר (0.6) <u>וגם</u> שבדיוק 2 מ- 4 האחרים היו צעירים.

אלו מאורעות בלתי תלויים ולכן נכפול את ההסתברויות.

את $P_4(2)$ נחשב בעזרת נוסחת ברנולי, כאשר $p=0.6$, $k=2$, $n=4$.

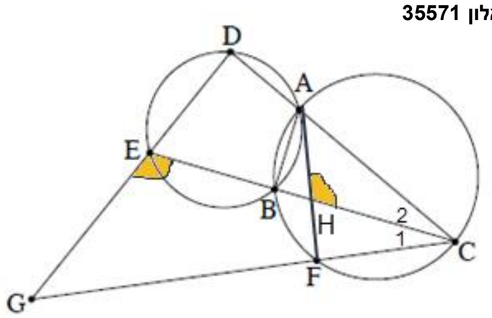
$$0.6\cdot P_4(2)=$$

$$0.6\cdot\binom{4}{2}\cdot 0.6^2\cdot(1-0.6)^{4-2}=$$

$$0.6\cdot\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot 0.6^2\cdot 0.4^2$$

$$0.6\cdot 6\cdot 0.6^2\cdot 0.4^2=\frac{648}{3{,}125}$$

תשובה: ההסתברות, שבדיוק 3 מהמרואיינים האלו היו צעירים ושהאחרון היה צעיר, היא $\frac{648}{3{,}125}$.



נתונים

עבור ג: 1. $\measuredangle GEC = \measuredangle CHA$.

עבור ד: 2. $\measuredangle CBA = 90°$ **.3** $DE = 18$ **.4** $CD = 36$

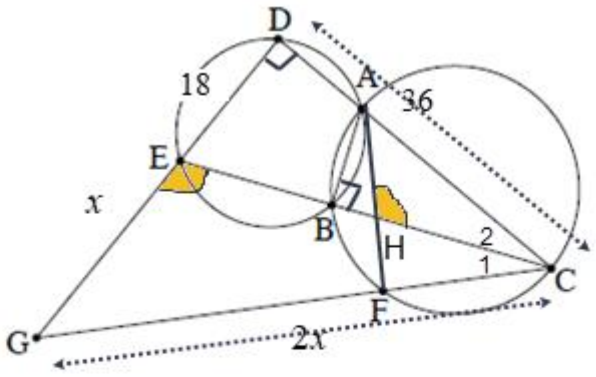
צ"ל: א. $\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ **ב.** $GDAF$ **בר חסימה**

ג. $\frac{GE}{DE} = \frac{CG}{CD}$ **ד.** EG , CG.

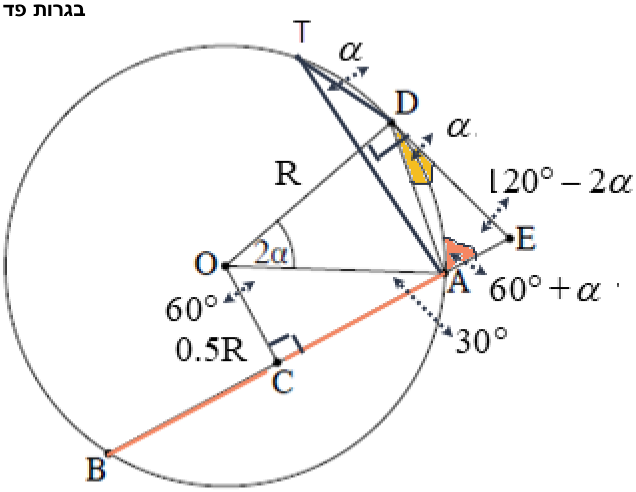
הסבר	מס'	טענה	נימוק
	5	$\measuredangle EDA + \measuredangle ABE = 180°$	**סכום זוויות נגדיות** $180°$ **במרובע חסום במעגל**
	6	$\measuredangle CBA + \measuredangle ABE = 180°$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
5, 6	7	$\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$	
		מ.ש.ל. א	
	8	$\measuredangle AFC = \measuredangle CBA$	**זוויות היקפיות שוות על קשת משותפת** AC
	9	$\measuredangle AFG + \measuredangle AFC = 180°$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
5, 7, 8, 9	10	$\measuredangle EDA + \measuredangle AFG = 180°$	
10	11	$GDAF$ **בר חסימה**	**סכום זוויות נגדיות** $180°$ **ולכן בר חסימה**
		מ.ש.ל. ב	
	12	$\measuredangle CHA = \measuredangle AFC + \measuredangle C_1$	**זווית חיצונית ל-** ΔAFC **שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שאינן צמודות לה**
	13	$\measuredangle GEC = \measuredangle EDA + \measuredangle C_2$	**זווית חיצונית ל-** ΔCDE **שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שאינן צמודות לה**
1, 7, 8	14	$\measuredangle AFC = \measuredangle EDA$	
12, 13, 14	15	$\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$	
15	16	$\frac{GE}{DE} = \frac{CG}{CD}$	**משפט חוצה זווית** ΔGDC
		מ.ש.ל ג	

דרך חלופית להוכחת סעיף ג

	12	$\measuredangle CAF + \measuredangle DAF = 180°$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
11	13	$\measuredangle EGC + \measuredangle DAF = 180°$	**זוויות נגדיות משלימות ל-** $180°$ **במרובע חסום במעגל**
12, 13	14	$\measuredangle CAF = \measuredangle EGC$	
1, 14	15	$\measuredangle C_1 = \measuredangle C_2$	**סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔHAC **ו-** ΔGEC
15	16	$\frac{GE}{DE} = \frac{CG}{CD}$	**משפט חוצה זווית** ΔGDC



נימוק	טענה	מס'	הסבר
	$\frac{CG}{36}=\frac{GE}{18} \rightarrow CG=2GE$	17	3, 4, 16
	$EG=x\,,\,CG=2x$	18	17
	$\sphericalangle EDA=90^\circ$	19	2, 7
משפט פיתגורס ΔGDC	$36^2+(18+x)^2=(2x)^2$ $1,296+324+36x+x^2=4x^2$ $0=3x^2-36x-1,620$ $\boxed{x=30}\,,\,\cancel{x=-18} \leftarrow x>0$	20	3, 4, 18, 19
	$EG=30\,,\,CG=60$	21	18, 20
מ.ש.ל. ד			



א. $\sphericalangle ADE = \alpha$ (זווית בין משיק למיתר , וזווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת)

$\sphericalangle ODE = 90°$ (הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)

$\sphericalangle OCA = 90°$ (קטע שעובר במרכז המעגל וחוצה מיתר גם מאונך לו) .

$\sphericalangle OAC = 30°$ (אם ניצב שווה למחצית היתר ב- ΔOAC אז הזווית מולו שווה $30°$) .

$\sphericalangle COA = 60°$ (סכום זוויות $180°$ ב- ΔOAC) .

$\sphericalangle COD = 60° + 2\alpha$.

$\sphericalangle E = 120° - 2\alpha$ (סכום זוויות $360°$ במרובע $DOCE$)

תשובה: $\sphericalangle ODE = 90°$, $\sphericalangle OCA = 90°$, $\sphericalangle COD = 60° + 2\alpha$, $\sphericalangle E = 120° - 2\alpha$.

ב. $\sphericalangle ATD = \alpha$ (זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת,

כאשר T נקודה כלשהי על המעגל)

(לחילופין ניתן משפט סינוסים ב- ΔAOD וזהויות בהמשך,

או להוריד תיכון שהוא גובה וחוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים ΔAOD)

<u>ΔADT</u> לפי משפט הסינוסים.

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\boxed{AD = 2R\sin\alpha}$$

<u>ΔADE</u> לפי משפט הסינוסים, כאשר $\sphericalangle DAE = 60° + \alpha$.

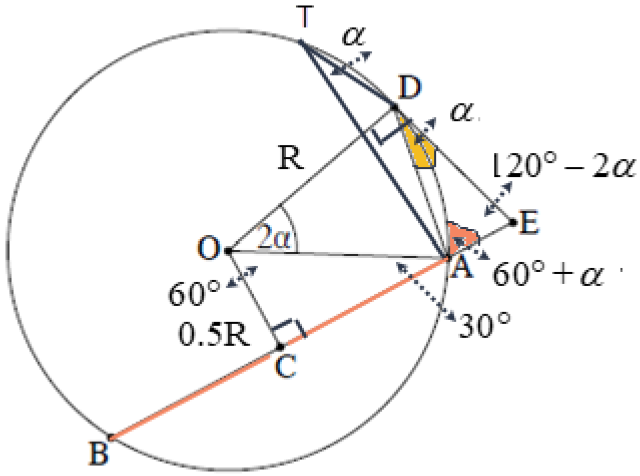
$$\frac{DE}{\sin(60° + \alpha)} = \frac{AD}{\sin(120° - 2\alpha)}$$

$$\boxed{DE = \frac{2R\sin\alpha \cdot \sin(60° + \alpha)}{\sin(120° - 2\alpha)}}$$

תשובה: $\frac{2R\sin\alpha \cdot \sin(60° + \alpha)}{\sin(120° - 2\alpha)}$.

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את ΔAOD הוא $\frac{4}{7}R$. נמצא את α .

$\underline{\Delta ADO}$ לפי משפט הסינוסים.



$$\frac{AD}{\sin 2\alpha}=2R_{\Delta ADO}$$
$$\frac{2R\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=2\cdot\frac{4}{7}R \quad /:2R>0$$
$$7\sin\alpha=8\sin\alpha\cos\alpha /:8\sin\alpha>0$$
$$\frac{7}{8}=\cos\alpha$$
$$\boxed{\alpha=28.96°}$$

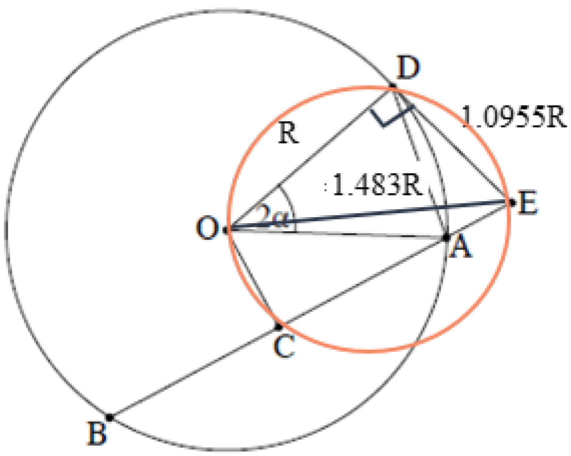
תשובה: $\alpha=28.96°$.

ד. נציב $\alpha=28.96°$ **, ונקבל** $DE=1.0955R$ **(לא דומה לסרטוט, אבל זה מה שיש).**

כיוון ש- $\sphericalangle ODE=90°$ **, אז** OE **הוא קוטר במעגל החוסם את מרובע** $DOCE$ **(ע"פ סעיף א) .**

$$\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}}=\frac{\pi\cdot(\frac{OE}{2})^2}{\pi R^2}=\frac{(OE)^2}{4R^2}$$

$\underline{\Delta DOE}$ **משפט פיתגורס**



$$(OE)^2=(OD)^2+(DE)^2$$
$$(OE)^2=R^2+(1.0955R)^2$$
$$(OE)^2=2.2R^2$$
$$\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}}=\frac{2.2R^2}{4R^2}$$
$$\boxed{\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}}=0.55}$$

תשובה: $\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}}=0.55$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי , לכן $x\ge 0$,

והמכנה שונה מ- 0**, ולכן** $x\ne 4$ $\sqrt{x}-2\ne 0 \rightarrow \sqrt{x}\ne 2 \rightarrow x\ne 4$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\ne 4$, $x\ge 0$.

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

(ניתן למצוא גם על ידי הצבות, או נימוקים. אין חובה לרשום בעזרת גבולות !, ואין צורך לנמק !!!)

$x=4$ **מאפס מונה ולא מכנה, ולכן הישר** $x=4$ **אסימפטוטה אנכית.**

חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה ולכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

תשובה: אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y : $y=0\ (x\rightarrow +\infty)$.

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x : $x=4$.

(3) $(0,-1)$ **היא נקודת החיתוך עם ציר ה-** y **, שהיא גם קיצון קצה.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$,

ולכן $\sqrt{x}-4=0 \rightarrow \sqrt{x}=4 \rightarrow x=16 \rightarrow (16,0)$.

תשובה: $(0,-1)$, $(16,0)$.

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

$$\boxed{f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{2\sqrt{x}}-\frac{2\cdot(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$f'(x)==\frac{\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2-2\sqrt{x}+8)}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(\sqrt{x}-2)(-\sqrt{x}+6)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^4}}$$

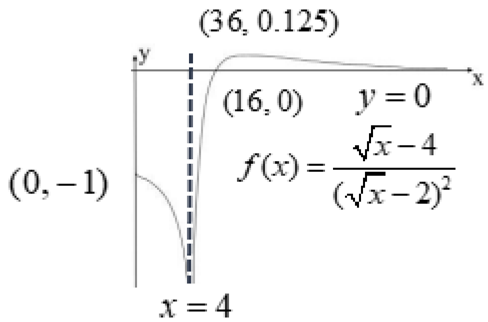
$$-\sqrt{x}+6=0 \quad \to \sqrt{x}=6 \quad \to x=36 \quad \to (36,\,0.125)$$

$$f'(1)=\frac{-5}{(+)}>0 \quad \searrow \quad \to \boxed{(0,-1),\max}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(35)=\frac{0.32}{(+)}>0 \quad \nearrow \\ f'(37)=\frac{-0.34}{(+)}<0 \quad \searrow \end{array}\right\} \boxed{(36,\,0.125),\max}$$

תשובה: $(36,\,0.125)$ **מקסימום,** $(0,-1)$ **מקסימום.**

ב. נסרטט את גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$ **(לא בפרופורציה מדויקת על ציר ה-** x **).**



תשובה: הסרטוט מעל.

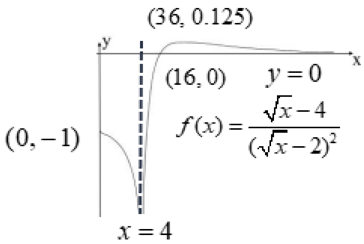
ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ **, המוגדרת כמו הפונקציה** $f(x)$ **בתחום** $x\neq 4$ **,** $x\geq 0$ **.**

$$g'(x)=2\cdot\frac{\sqrt{x}-2-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$g'(x)=2\cdot\frac{0.5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)^2}\quad\leftarrow\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\quad\leftarrow x>0$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}}\quad\rightarrow\boxed{g'(x)=f(x)}$$

תשובה: הראינו שלכל $x>0$ **, בתחום ההגדרה של הפונקציות, מתקיים** $g'(x)=f(x)$ **.**



ד. נבדוק את שתי הטענות.

I. **יש משיק לגרף הפונקציה** $g(x)$ **ששיפועו הוא** 2 **.**

הערך המקסימלי של $f(x)$ **הוא** 0.125 **, המתקבל בנקודת המקסימום המוחלט שלה.**

מכאן שזה גם הערך המקסימלי של $g'(x)$ **ואין ל-** $g(x)$ **משיק ששיפועו הוא** 2 .

תשובה: הטענה אינה נכונה.

II. **לפונקציה** $g(x)$ **יש נקודת פיתול אחת בלבד.**

$g'(x)=f(x)$ **, ולכן ל-** $g'(x)$ **יש נקודת קיצון פנימית אחת בלבד,**

שבו היא עוברת מעלייה, כאשר $g''(x)>0$ **ו-** $g(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **,**

לירידה, כאשר $g''(x)<0$ **ו-** $g(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **, ומתקבלת נקודת פיתול שבה** $x=36$ **.**

תשובה: הטענה נכונה.

ה. נחשב את ערך הביטוי $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx$ **, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx=\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot g'(x)\,dx=\left.\frac{(g(x))^2}{2}\right]_{0.25}^{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1:\quad \frac{(g(1))^2}{2}=2 \\ x=0.25:\quad \frac{(g(0.25))^2}{2}=\frac{1}{18} \end{array}\right\} 2-\frac{1}{18}=1\frac{17}{18}$$

תשובה: $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx=1\frac{17}{18}$

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$ **(** $a>0$ **פרמטר), המוגדרת לכל** x **המקיים** $\sin(x)\neq -a$ **.**

נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ **משיק לציר ה-** x **__בכל__ נקודות הקיצון שלה.**

כלומר, בכל נקודות הקיצון מתקיים $f'(x)=0$ **וגם** $f(x)=0$ **.**

$$f'(x)=\frac{\cos(x)(\sin(x)+a)-\cos(x)(\sin(x)-a)}{(\sin(x)+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos(x)\left[\sin(x)+a-(\sin(x)-a)\right]}{(\sin(x)+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2a\cos(x)}{(\sin(x)+a)^2}$$

$$0=\cos(x) \quad \leftarrow a>0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

כיוון שמדובר על כל נקודות הקיצון, אז למשל עבור $x=\frac{\pi}{2}$ **,**

- **מונה הנגזרת מחליף סימן עבור** $x=\frac{\pi}{2}$ **, ולכן זה שיעור** x **של נקודת קיצון.**
- **נקבל ש-** $f(x)=0$ **כאשר** $\sin(\frac{\pi}{2})-a=0$ **ולכן** $a=1$ **.**

במקרה זה מתקיים $\sin(x)\neq -a$ **כי** $\sin(\frac{\pi}{2})\neq -1$ **(ולא היה מתקיים עבור** $\sin(\frac{3\pi}{2})=-1$ **).**

תשובה: $a=1$ **.**

ב. נציב $a=1$ **והפונקציה היא** $f(x)=\frac{\sin(x)-1}{\sin(x)+1}$ **ונחקור אותה בתחום** $-2\pi\leq x\leq 2\pi$ **.**

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס, לכן $\sin x\neq -1 \quad \rightarrow x\neq \frac{3\pi}{2}+2\pi k$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq -\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ **,** $-2\pi\leq x\leq 2\pi$ **.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$\sin x=1 \quad \rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$(\frac{\pi}{2},0),(-\frac{3\pi}{2},0) \quad \leftarrow x\neq -\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, ונקבל** $(0,-1)$ **.**

תשובה: $(\frac{\pi}{2},0),(-\frac{3\pi}{2},0)$ **,** $(0,-1)$ **.**

(3) נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x __בכל__ נקודות הקיצון שלה.

מכאן שנקודות הקיצון הפנימיות הן: $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$.

ונקודות הקיצון בקצה הן: $(2\pi, -1)$ ו- $(-2\pi, -1)$.

נשים לב שהפונקציה $f(x) = \frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1}$ היא אי-חיוביות,

כי המכנה חיובי בתחום ההגדרה והערך המקסימלי של המונה הוא אפס.

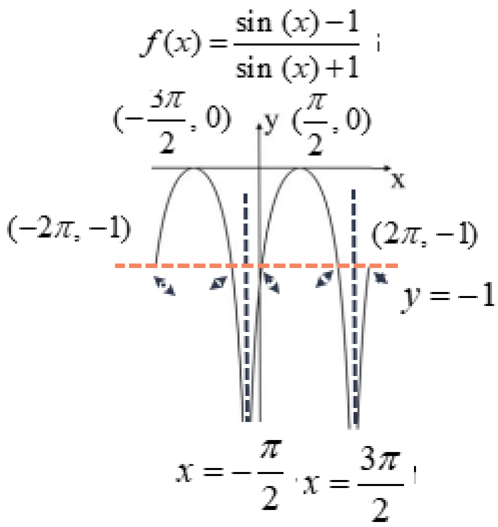
לכן, בהתאם ניתן לקבוע ש- $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ו- $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ הן נקודות מקסימום.

עקב הצורך להיצמד לאסימפטוטה האנכית $x = \frac{3\pi}{2}$ אז $(2\pi, -1)$ היא נקודת מקסימום.

כאשר $(-2\pi, -1)$ היא מינימום כי עולים ממנה לנקודת המקסימום $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$.

תשובה: $(2\pi, -1)$ מקסימום, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ מקסימום, $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ מקסימום, $(-2\pi, -1)$ מינימום.

ג. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, כולל שתי האסימפטוטות האנכיות שלה, וסימון הישר $y = -1$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. לישר $y = -1$ יש חמש נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $f(x)$, מסומנות בחיצים.

תשובה: למשוואה $f(x) = -1$ יש 5 פתרונות בתחום הנתון.

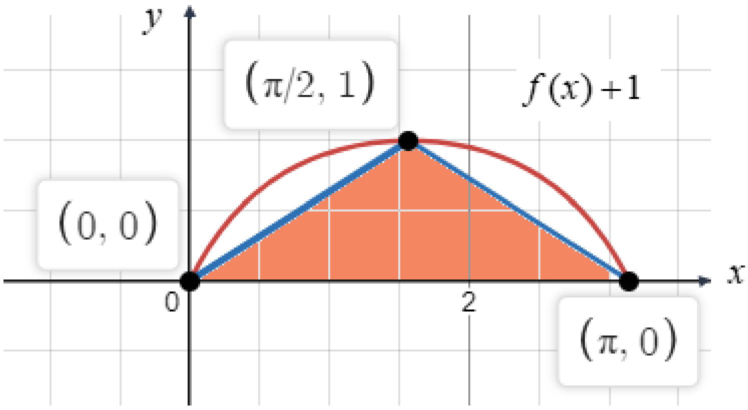
ה. נבדוק את נכונות הטענה $\int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx > \frac{\pi}{2}$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ **קעורה כלפי מטה בתחום** $x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $-2\pi \le x \le 2\pi$,

ולכן היא קעורה כלפי מטה גם בתחום $0 \le x \le \pi$.

$f(x)+1$ **היא הזזה אנכית ב-** 1 **יחידות כלפי מעלה של** $f(x)$.

מכאן שבתחום זה הגרף ייראה כך (כולל סימון של משולש שחסום בו) :



כיוון שהפונקציה, בתחום $0 \le x \le \pi$, **היא אי-שלילית,**

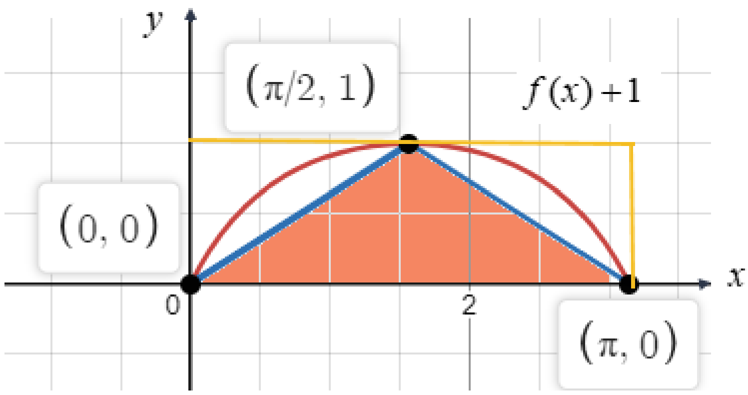
הרי שהאינטגרל המסוים $\int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx$ **מחזיר את השטח שבין הפונקציה לציר ה-** x .

עקב הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ **של** $f(x)$ **ניתן לחסום בעקום משולש, ששטחו הוא** $\frac{\pi \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{2}$.

ולכן הטענה $\int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx > \frac{\pi}{2}$ **היא טענה נכונה.**

תשובה: הטענה נכונה.

הערת העשרה: **ניתן להראות שיש גם חסם עליון לביטוי.**



ניתן לחסום את העקום במלבן , ששטחו הוא $\pi \cdot 1 = \pi$,

ולכן $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx < \pi$.

הערה נוספת: $f(x)+1 = f(x)-(-1)$, **ובצורה דומה ניתן לחסום גם בגרף המקורי משולש בשטח** $\frac{\pi}{2}$.

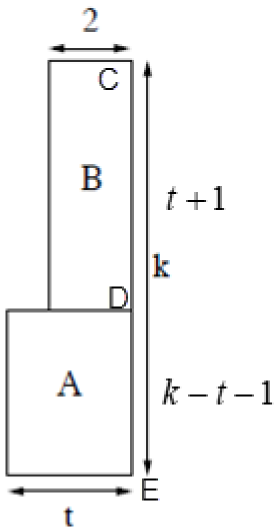
נכתב ע"י עפר ילין

א. $S_B = 2t + 2$, **ולכן** $CD = \frac{2t+2}{2} = t + 1$.

מכאן ש- $DE = k - (t+1) = k - t - 1$.

ושטח המלבן התחתון הוא $S_A = t(k-t-1) = -t^2 + kt - t$

תשובה: שטח הגינה A **הוא** $-t^2 + kt - t$.



ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא היחס $f(t) = \frac{S_B}{S_A}$.

נשים לב שהמשתנה הוא t **, כאשר** k **הוא קבוע (פרמטר).**

$$\boxed{f(t) = \frac{2(t+1)}{-t^2 + kt - t}}$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{-t + kt - t - (t+1)(-2t + k - 1)}{(-t^2 + kt - t)^2}$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{-t^2 + kt - t - (-2t^2 + kt - t - 2t + k - 1)}{(-t^2 + kt - t)^2}$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{-t^2 + kt - t + 2t^2 - kt + t + 2t - k + 1}{(-t^2 + kt - t)^2}$$

$$\boxed{f'(t) = 2 \cdot \frac{t^2 + 2t - k + 1}{(-t^2 + kt - t)^2}}$$

$$t^2 + 2t + k + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-k+1)}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4k}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{k}}{2} = -1 \pm \sqrt{k}$$

$$t_1 = -1 + \sqrt{k} \quad , \quad t_2 = -1 - \sqrt{k}$$.

המונה של הנגזרת הוא של פרבולה ישרה, בעלת מינימום ("צוחקת"),

העוברת משליליות לחיוביות עבור $t = -1 + \sqrt{k}$ **,**

ולכן $f(t)$ **עוברת מירידה לעלייה ו-** $t = -1 + \sqrt{k}$ **מינימום.**

(נשים לב ש- $t_1 = -1 + \sqrt{k}$ **חיובי כי** $k > 1$ **, ו-** $t_2 = -1 - \sqrt{k}$ **שלילי ואינו מתאים כי** t **גודל חיובי))**

תשובה: $t = -1 + \sqrt{k}$ **, עבורו היחס** $\frac{S_B}{S_A}$ **הוא מינימלי.**

ג. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא היחס $g(t)=\frac{S_{\text{A}}}{S_{\text{B}}}$.

קל לראות **ש-** $g(t)=\frac{1}{f(t)}$ **, כאשר שתיהן מוגדרות באותו תחום** $t>0$.

טרנספורמציה שכזו הופכת את תחומי העלייה והירידה,

כאשר היא שומרת על ערכי ה- t **בנקודות הקיצון, כאשר סוגן משתנה וערכי הפונקציה מתהפכים.**

ניתן לראות זאת גם על ידי $g'(t)=-\frac{f'(t)}{f^2(t)}$ **, כאשר סימני הנגזרת משתנים,**

אך היא עדיין מתאפסת עבור אותם ערכי t .

תשובה: $t=-1+\sqrt{k}$ **, עבורו היחס** $\frac{S_{\text{A}}}{S_{\text{B}}}$ **הוא מקסימלי.**