פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ה, 2025, שאלון 35572:

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת הקובץ

יואל גבע
לא מתפשרים.

בגרות פה ינואר 25 מועד חורף שאלון 35572

א. נתונות הנקודות $\sphericalangle A(-9a,0)$ **ו-** $B(41a,0)$, $a>0$ **פרמטר.**

הנקודה P **מקיימת** $\sphericalangle APB=90^\circ$**.**

נראה שלוש דרכים למציאת משוואת המקום הגיאומטרי.

- **כל הנקודות שמהן רואים קטע בזווית ראיה של** 90°**, נמצאות על מעגל, כך שהקטע הנתון הוא קוטר במעגל.**

  מכאן שמרכז המעגל הוא $M(16a,0) \leftarrow M(\frac{41a-9a}{2},\frac{0+0}{2})$,

  רדיוס $\frac{41a+9a}{2}=25a$ **ומשוואתו:** $(x-16a)^2+y^2=625a^2$.

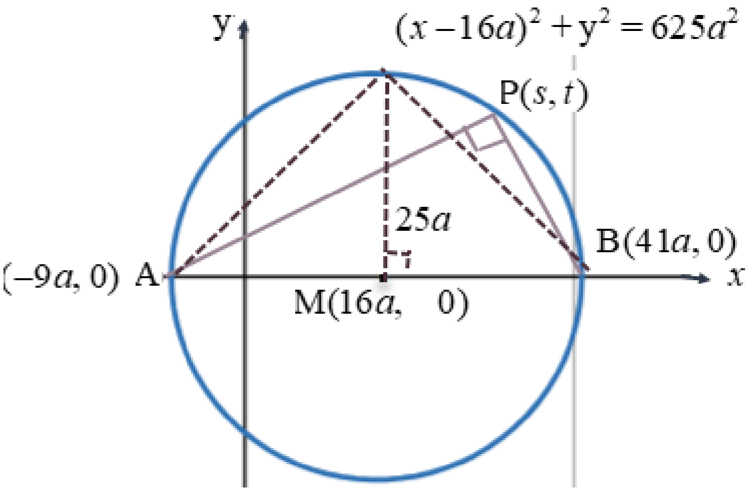
  הערה: קיים גם משפט: אם רואים משתי נקודות שונות את הקטע AB **בזווית שווה ארבע הנקודות נמצאות על אותו מעגל**

- **אם נוריד מהנקודה** P **תיכון** PM **לקטע** AB**, אז נקבל ש-** $PM=AM=BM$,

  כי תיכון ליתר שווה למחצית היתר ב- ΔAPB **וההמשך יהייה זהה.**

- **נסמן נקודה על המקום הגיאומטרי, כלומר** $PA\perp PB$.

$$m_{PA}\cdot m_{PB}=-1$$
$$\frac{t-0}{s+9a}\cdot\frac{t-0}{s-41a}=-1$$
$$t^2=(s+9a)(41a-s)$$
$$t^2=41as-s^2+369a^2-9as$$
$$s^2-32as+t^2=369a^2$$
$$(s-16a)^2+t^2=369a^2+256a^2$$
$$(s-16a)^2+t^2=625a^2$$
$$\boxed{(x-16a)^2+y^2=625a^2}$$



תשובה: הראינו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הוא מעגל, ומשוואתו היא $(x-16a)^2+y^2=625a^2$.

ב. נתון כי השטח הגדול ביותר של המשולש APB **הוא** 156.25.

עבור צלע באורך נתון $AB=50a$ **נקבל שטח מקסימלי כאשר הגובה מקסימלי,**

וזה יקרה כאשר הגובה $h=R=25a$ **יהייה למרכז המעגל.**

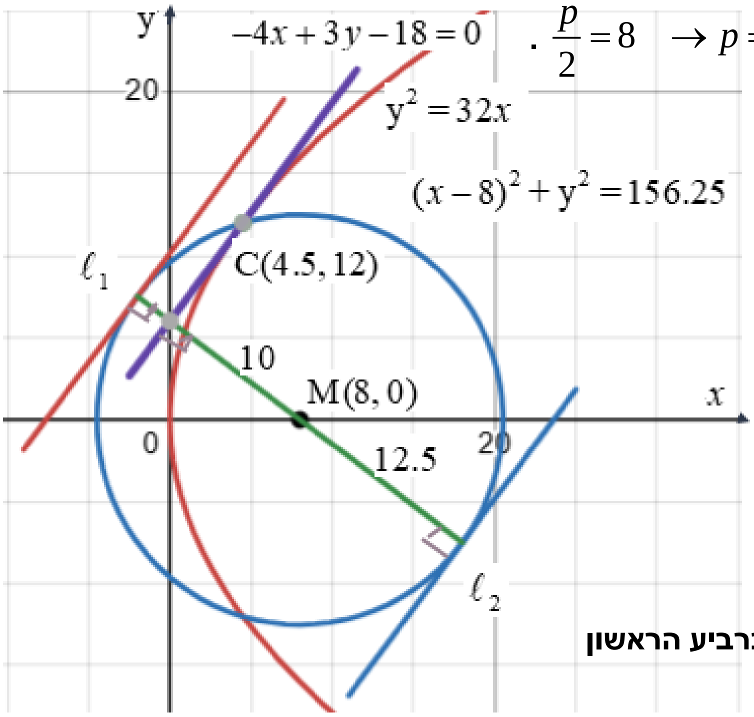
$$\frac{50a\cdot 25a}{2}=156.25$$
$$a^2=0.25$$
$$a>0 \rightarrow \boxed{a=0.5}$$

תשובה: $a=0.5$.

[הקלד כאן]

ג. עבור $a=0.5$ משוואת המעגל היא $(x-8)^2+y^2=156.25$.

$M(8,0)$ הוא מרכז המעגל ואמצע הקטע (הקוטר) AB,



והוא גם מוקד של פרבולה קנונית. מכאן ש- $p=16 \rightarrow \frac{p}{2}=8$.

ומשוואת הפרבולה היא $y^2=32x$.

$$\begin{cases}(x-8)^2+y^2=156.25\\ y^2=32x\end{cases}$$

$$(x-8)^2+32x=156.25$$

$$x^2-16x+64+32x=156.25$$

$$x^2+16x-92.25=0$$

$$\left.\begin{aligned}&x=4.5,\,-20.5\\ &y^2=32\cdot 4.5=144\end{aligned}\right\}\boxed{C(4.5,12)}$$

התשובות האחרות נפסלו כי נתון שהנקודה C ברביע הראשון

(וגם הפרבולה לא עוברת משמאל לציר ה- y).

תשובה: C(4.5, 12).

ד. הישר ℓ משיק לפרבולה בנקודה C(4.5, 12) .

משוואת המשיק לפרבולה, הישר ℓ, היא $-4x+3y-18=0 \rightarrow y\cdot 12=16(x+4.5)$.

מרחק מרכז המעגל מהמשיק לפרבולה הוא : $d=-\frac{-4\cdot 8+3\cdot 0-18}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=-\frac{-50}{5}=10$.

מעבירים משיק למעגל (שרדיוסו 12.5) שמקביל לישר ℓ.

למעשה, כפי שניתן לראות בציור קיימים שני משיקים שכאלו: ℓ_1 ו- ℓ_2.

כאשר המשיק ℓ_1 מעל למשיק לפרבולה אז המרחק בין שני המשיקים הוא $d=12.5-10=2.5$.

כאשר המשיק ℓ_2 מתחת למשיק לפרבולה אז המרחק בין שני המשיקים הוא $d=12.5+10=22.5$.

תשובה: המרחק בין הישר ובין המשיק למעגל הוא 2.5 או 22.5 .

<u>הסבר משלים לסעיף ב</u>

נסמן ב- A את נקודת ההשקה של ישר m שמשיק למעגל, ומקביל למיתר נתון BC.

האנך האמצעי למיתר BC נפגש עם המעגל בנקודה A .

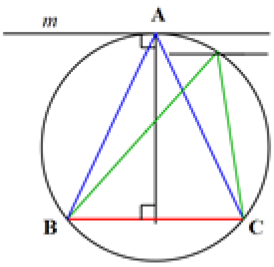
(m מאונך לרדיוס בהשקה ומקביל ל- BC) ונקבל ΔABC שווה שוקיים.

נשים לב שהמשולש מקבל שטח מקסימלי כאשר הנקודה A נמצאת

על האנך האמצעי והמשולש הוא שווה שוקיים, כי אז המרחק למיתר BC מקסימלי .

הסיבה לכך היא שבנקודה A הישר שמקביל ל- BC משיק למעגל,

ובכל נקודה אחרת מצד זה של המיתר, הישר המקביל יחתוך את המעגל.

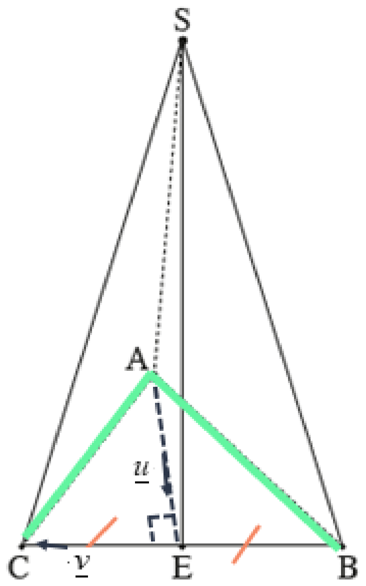


א. נתונה פירמידה משולשת $SABC$.

$\boxed{\overrightarrow{AE} = \underline{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{EC} = \underline{v}}$

נתון: $|\underline{u}+\underline{v}| = |\underline{u}-\underline{v}|$.

נוכיח כי $\overrightarrow{AE}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{BC}$.



$$|\underline{u}+\underline{v}| = |\underline{u}-\underline{v}|$$
$$\sqrt{(\underline{u}+\underline{v})^2} = \sqrt{(\underline{u}-\underline{v})^2}$$
$$\underline{u}^2 + 2\underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}^2 = \underline{u}^2 - 2\underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{v}^2$$
$$4\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$$
$$\underline{u}\cdot\underline{v} = 0 \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}}$$

תשובה: הוכחנו כי $\overrightarrow{AE}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{BC}$.

ב. הנקודה E **היא אמצע הצלע** BC .

כיוון ש- $\overrightarrow{AE}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{BC}$ **, אז** ΔABC **שווה שוקיים** $(AC = AB)$ **כי הגובה מתלכד עם התיכון.**

נתון $A(0,0,0)$ **ראשית הצירים, ו-** $B(6,8,0)$.

הקודקוד C **נמצא על החלק החיובי של ציר ה-** x **, ובהתאם נסמן** $C(c,0,0)$ **כאשר** $(c > 0)$.

$$AC = AB$$
$$c = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2 + (0-0)^2}$$
$$c = 10 \quad \rightarrow \boxed{C(10,0,0)}$$

כאמור, הנקודה E **היא אמצע הצלע** BC **ובהתאם** $E(8,4,0) \leftarrow \quad E(\frac{6+10}{2}, \frac{8+0}{2}, 0)$.

הקטע SE **הוא גובה בפירמידה והאורך שלו הוא** 20 **, כאשר** $z_S > 0$.

נשים לב שנאמר גובה בפירמידה , כי בפירמידה משולשת יש ארבע פאות ולכל אחת גובה משלה,
כפי שנאמר בהקשר אחר גובה במשולש ולא גובה המשולש.
בכל מקרה לא מדובר סתם בגובה של פאה, אלא גובה של הפירמידה.
משוואת המישור ABC **היא** $z = 0$ **על פי שלושת קודקודי** ΔABC,
ולכן הגובה לבסיס הוא מקביל לציר ה- z

ומכאן ש: $x_S = x_E = 8$, $y_S = y_E = 4$ **;ו-** $z_S = 20$ **כי** $SE = 20$ **ו-** $S(8,4,20)$.

תשובה: $C(10,0,0)$ **,** $S(8,4,20)$.

ג. הנקודה F נמצאת על המקצוע SC כך ש- $\overline{SF}=\frac{1}{4}\overline{SC}$.

נתון: $A(0,0,0)$ ראשית הצירים, ו- $B(6,8,0)$, ומצאנו: $C(10,0,0)$, $S(8,4,20)$,
$E(8,4,0)$.

על פי חלוקת קטע ביחס נתון: $F(\frac{3\cdot 8+1\cdot 10}{4},\frac{3\cdot 4+1\cdot 0}{4},\frac{3\cdot 20+1\cdot 0}{4})\rightarrow F(8.5,3,15)$.

(1) דרך הנקודה F מעבירים ישר המקביל לישר AC , המונח על ציר ה- x.

לכן, הישר המבוקש FM מקביל לציר ה- x ווקטור הכיוון שלנו הוא $\underline{(1,0,0)}$.

הישר גם מקביל למישור $z=0$ כי הוא מקביל לישר במישור, והנקודה F לא במישור.

תשובה: הצגה פרמטרית של הישר FM היא $\underline{x}=(8.5,3,15)+t(1,0,0)$.

(2) FM חותך את המישור ABS , בנקודה M.

על פי משפט תאלס במשולש ACS

$$\frac{SM}{MA}=\frac{SF}{FC}=\frac{1}{3}$$

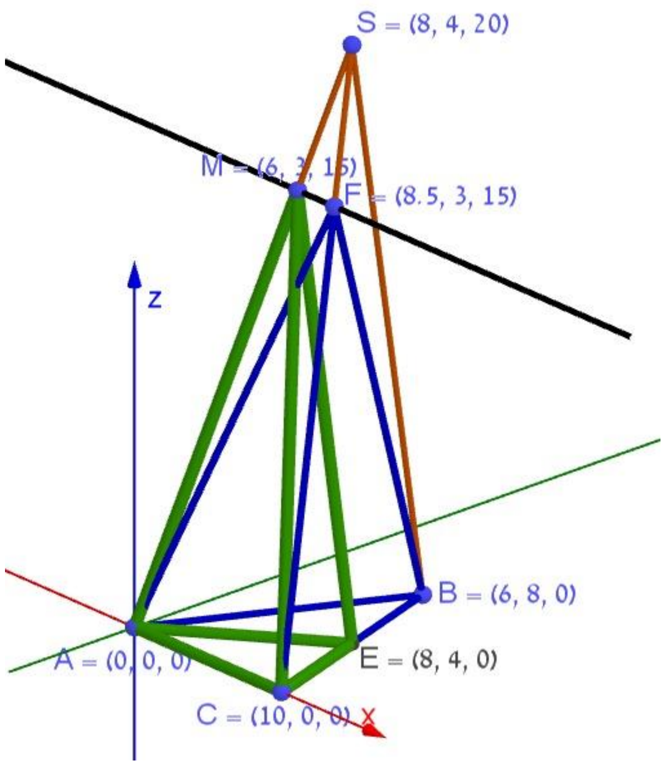
$$M(\frac{3\cdot 8+1\cdot 0}{4},\frac{3\cdot 4+1\cdot 0}{4},\frac{3\cdot 20+1\cdot 0}{4})$$

$$\boxed{M(6,3,15)}$$

מובן גם שרק שיעור ה- x משתנה

כי הישר FM מקביל לציר ה- x.

תשובה: $M(6,3,15)$.



תודה למורה דוד בחור על האיור המקסים

ד. הנקודה E היא אמצע הצלע BC.

לכן $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AEC}$, כי התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.

הגבהים של שתי הפירמידות ל- ΔABC ול- ΔAEC שווים,

כי המשולשים מונחים על המישור $z=0$ והישר FM מקביל למישור זה.

מכאן שיחס הנפחים הוא $2:1$.

$$\frac{V_{MABC}}{V_{FAEC}}=\frac{S_{\Delta ABC}\cdot h_M\cdot\frac{1}{3}}{S_{\Delta AEC}\cdot h_F\cdot\frac{1}{3}}=2$$

תשובה: נפח הפירמידה MABC גדול פי 2 מנפח הפירמידה FAEC.

[הקלד כאן]

א. נתון המספר המרוכב $w = r\cos\theta + i\sin\theta = r\,cis\,\theta$ $(90° < \theta < 180°\,,\, r > 0)$.

נביע באמצעות r **ו-** θ **הצגה קוטבית של המספר** $\frac{1}{w}$.

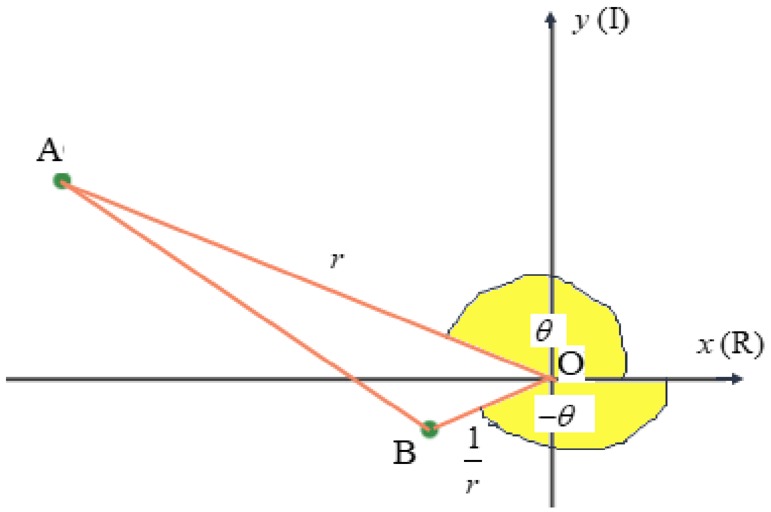
$$\frac{1}{w} = \frac{1\,cis\,0°}{r\,cis\,\theta}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\cdot cis\,(-\theta)$$

תשובה: $\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\cdot cis\,(-\theta)$.

ב. נתון כי שטח המשולש AOB **(ראו סרטוט) הוא** $\frac{\sqrt{2}}{4}$, **כאשר** $\measuredangle 0° \measuredangle \text{AOB} < 90°$.

נמצא את הערך של θ .



$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{1}{r}\cdot\sin\measuredangle AOB$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\sin\measuredangle AOB$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\measuredangle AOB$$

$$\boxed{\measuredangle AOB = 45°} \leftarrow \measuredangle 0° \measuredangle AOB < 90°$$

$$\theta = \frac{360° - 45°}{2} = 157.5°$$

תשובה $\theta = 157.5°$.

ג. נתונות שתי משוואות: I. $z^8 = w^8$ ו- II. $z^8 = (w \cdot \bar{w})^4$.

z הוא מספר מרוכב, כאשר $w = r\, cis\, 157.5°$ על פי הסעיפים הקודמים.

נתון מצולע קמור שקודקודיו הם כל הנקודות המייצגות את הפתרונות של שתי המשוואות.

(1) נמצא כמה קודקודים יש למצולע.

לכאורה אין צורך לפתור את המשוואות, אך יש לזהות שאין פתרונות חופפים, ומכיוון ונקבל שכולם על אותו מעגל בהמשך אז גם יש לפתור את המשוואות.

I. $z^8 = w^8$

למשוואה הזאת יהיו שמונה פתרונות,

שכל אחד מהם יהייה על המעגל הקנוני $x^2 + y^2 = r^2$ שרדיוס r.

אחד מהפתרונות יהייה $A: w = r\, cis\, 157.5°$

וכל שבעת הפתרונות האחרים יהיו עם אותו רדיוס וארגומנט בהפרש של $\frac{360°}{8} = 45°$.

II. $z^8 = (w \cdot \bar{w})^4$

$$z^8 = (r\, cis\, 157.5° \cdot r\, cis\, (-157.5°))^4$$

$$z^8 = (r^2)^4$$

$$z^8 = r^8$$

גם למשוואה הזאת יהיו שמונה פתרונות,

שכל אחד מהם יהייה על המעגל הקנוני $x^2 + y^2 = r^2$ שרדיוס r.

אחד מהפתרונות יהייה r

וכל שבעת הפתרונות האחרים יהיו עם אותו רדיוס וארגומנט בהפרש של $\frac{360°}{8} = 45°$.

מכאן שאין התלכדות של פתרונות והפתרונות הם $r\, cis\, 45°k$ ו- $r\, cis\, (157.5° + 45°k)$.

סה"כ 16 פתרונות $= 8 + 8$.

תשובה: למצולע יש 16 פתרונות.

(2) כאמור כל הפתרונות על אותו מעגל קנוני $x^2 + y^2 = r^2$ שרדיוס r.

תשובה: כל קודקודי המצולע נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים, ורדיוס r.

[הקלד כאן]

ד. נתון כי שטוח המצולע הוא 49**.**

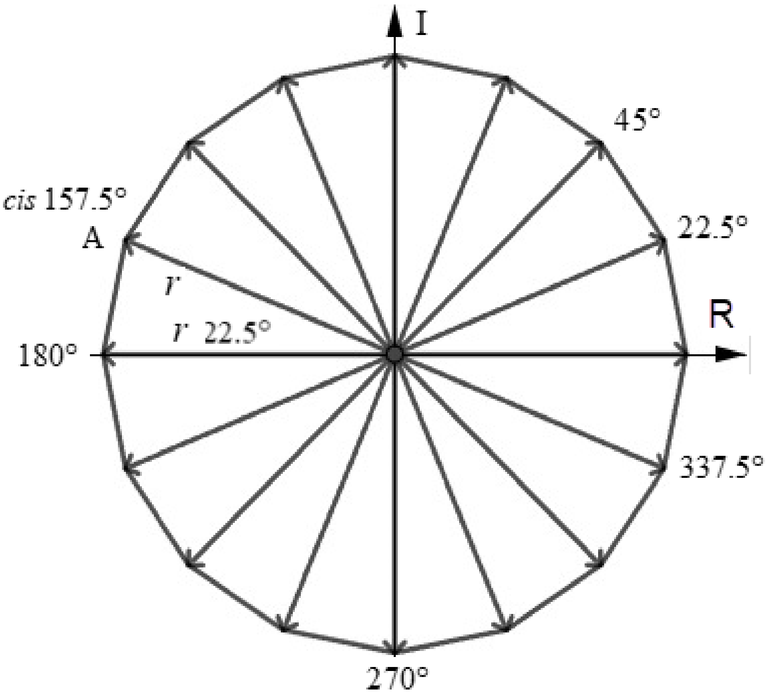
נמצא את r.

למעשה נוצר כאן מצולע משוכלל, נסביר זאת.

אחד הפתרונות הוא $r\ cis\ (157.5°+45°\cdot 5)=r\ cis\ (382.5°)=r\ cis\ (22.5°)$ **.**

עבור k **אי-זוגי** $r\ cis\ (22.5°+45°k)$ **נקבל את אחד הפתרונות של** $r\ cis\ 45°k$ **.**

מכאן, שניתן לייצג את כל קודקודי המצולע על ידי $z=r\ cis\ 22.5°k$**.**



תודה לחברי ושותפי לדרך המורה סרור אסעד

נקבל ששטח המצולע המשוכלל הוא $16\cdot\dfrac{r\cdot r\cdot\sin 22.5°}{2}=3.0614r^2$

$$3.0614r^2=49$$
$$r^2=16.0054$$
$$\boxed{r\approx 4}$$

תשובה: $r\approx 4$. I

[הקלד כאן]

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^x-\frac{1}{1-e^x}$ **, המוגדרת לכל** $x\neq 0$ **.**

(1) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ **.**

כאשר $x\to+\infty$ **אז** $e^x\to+\infty$ **ו-** $f(x)\to+\infty-(-0)\to+\infty$ **ובהתאם אין אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\to-\infty$ **אז** $e^x\to 0^+$ **, ו- -** $f(x)\to 0-\frac{1}{1-0}\to-1$ **,**

ו- $y=-1$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

כאשר $x\to 0$ **אז** $e^x\to 1^+$ **, ו- -** $f(x)\to\pm\infty$ **, ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=-1$ $(x\to-\infty)$ **אסימפטוטה אנכית לציר** y **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

$x=0$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** x **.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, שלא בתחום ההגדרה .**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=e^x-\frac{1}{1-e^x}$$
$$0=e^x(1-e^x)-1$$
$$e^{2x}-e^x+1=0$$
$$\textit{no solution}\ \leftarrow\Delta<0$$

תשובה: אין לגרף הפונקציה $f(x)$ **נקודות חיתוך עם הצירים.**

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגה.

$$\boxed{f(x)=e^x-\frac{1}{1-e^x}}$$

$$f'(x)=e^x-\frac{0-(-e^x)}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x(1-e^x)^2-e^x}{(1-e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\left((1-e^x)^2-1\right)}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x(1-2e^x+e^{2x}-1)}{(1-e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(-2e^x+e^{2x})}{(1-e^x)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}(-2+e^x)}{(1-e^x)^2}}$$

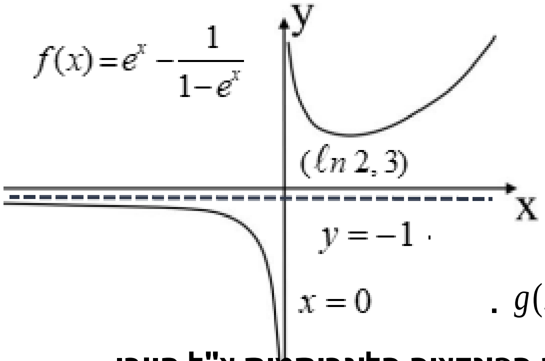
$$-2+e^x=0$$

$$e^x=2$$

$$x=\ell n\,2$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0.5)<0 \quad \searrow \\ f'(0.7)>0 \quad \nearrow \end{array}\right\}\boxed{(\ell n\,2,3),\min}$$

$$f'(-1)<0 \quad \searrow$$



תשובה: $(\ell n\,2,3)$, מינימום.

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה: הסרטוט משמאל.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=-x+\ell n(e^x-1)$.

(1) בתחום ההגדרה הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי.

$$e^x-1>0 \quad \to e^x>1 \quad \to x>0$$

תשובה: $x>0$.

(2) נראה ש- $g'(x)=f(x)-e^x$ בתחום.

$$\boxed{g(x)=-x+\ell n(e^x-1)}$$

$$g'(x)=-1+\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{-(e^x-1)+e^x}{e^x-1}=\frac{-e^x+1+e^x}{e^x-1}=\frac{1}{e^x-1}$$

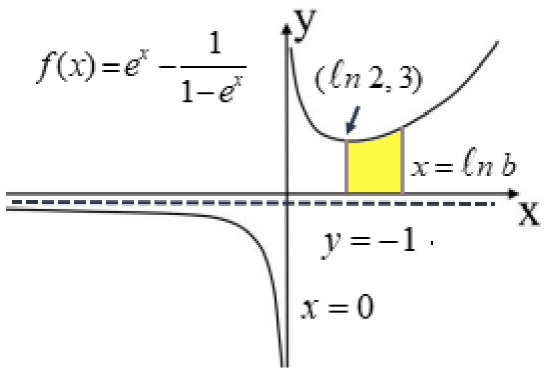
$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=-\dfrac{1}{1-e^x} \\ f(x)=e^x-\dfrac{1}{1-e^x} \end{array}\right\}\boxed{g'(x)=f(x)-e^x}$$

תשובה: הראינו כי $g'(x)=f(x)-e^x$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד. בנקודת הקיצון $(\ell n\, 2, 3)$ של הפונקציה $f(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .

נביע באמצעות b את השטח המוגבל על ידי $f(x)$, ציר ה- x , האנך והישר $x=\ell n\, b$ ($b>2$, פרמטר).

נשים לב, שעל פי תת-סעיף ג(2) מתקיים $g'(x)+e^x = f(x)$



$$S=\int_{\ell n 2}^{\ell n b}\left(f(x)-0\right)dx$$

$$S=\int_{\ell n 2}^{\ell n b}\left(g'(x)+e^x\right)dx$$

$$S=g(x)+e^x=\Big]_{\ell n 2}^{\ell n b}$$

$$S=-x+\ell n\,(e^x-1)+e^x=\Big]_{\ell n 2}^{\ell n b}$$

$$x=\ell n\, b:\quad -\ell n\, b+\ell n\,(e^{\ell n b}-1)+e^{\ell n b}=-\ell n\, b+\ell n\,(b-1)+b \quad \leftarrow e^{\ell n a}=a \quad \leftarrow a^{\log_a b}=b$$

$$x=\ell n\, 2:\quad -\ell n\, 2+\ell n\,(e^{\ell n 2}-1)+e^{\ell n 2}=-\ell n\, 2+2$$

$$S=-\ell n\, b+\ell n\,(b-1)+b+\ell n\, 2-2$$

$$\boxed{S=\ell n\,\frac{2(b-1)}{b}+b-2} \quad \leftarrow \ell og\, a+\ell og\, a-\ell og\, a=\ell og\,\frac{a\cdot b}{c}$$

תשובה: השטח הוא $\ell n\,\frac{2(b-1)}{b}+b-2$.

ד. נתון כי השטח שמצאנו בסעיף ד שווה ל- $b-2+\ell n\,(1.8)$.

$$\ell n\,\frac{2(b-1)}{b}+b-2=b-2+\ell n\,(1.8)$$

$$\ell n\,\frac{2(b-1)}{b}=\ell n\,(1.8)$$

$$\frac{2(b-1)}{b}=1.8$$

$$2b-2=1.8b$$

$$0.2b=2$$

$$\boxed{b=10}$$

תשובה: $b=10$.

[הקלד כאן]

יואל גבע
לא מתפשרים.

בגרות פה ינואר 25 מועד חורף שאלון 35572

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a+\ln x}{x}$ **, המוגדרת בתחום** $x>0$ **,** a **הוא פרמטר.**

(1) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ **.**

כאשר $x\to+\infty$ **אז המכנה שואף לאינסוף מהר יותר מהמונה ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x\to0$ **אז רק המכנה שואף לאפס ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=0$ $(x\to+\infty)$ **אסימפטוטה אנכית לציר** y **.**

$x=0$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** x **.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$\frac{a+\ln x}{x}=0\ \to a+\ln x=0\ \to \ln x=-a\ \to x=e^{-a}\ \to \boxed{(\frac{1}{e^{a}},0)}$$

תשובה: $(\frac{1}{e^{a}},0)$ **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$\boxed{f(x)=\frac{a+\ln x}{x}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(a+\ln x)}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-a-\ln x}{x^2}}$$

$$1-a-\ln x=0$$

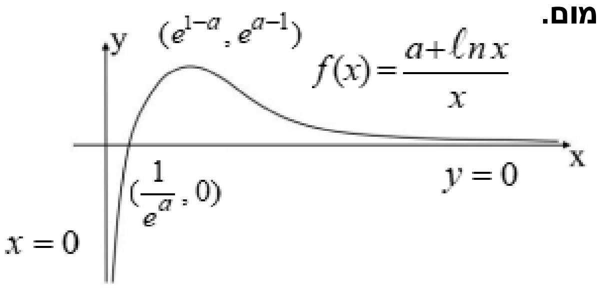
$$\ln x=1-a$$

$$\left.\begin{array}{l} x=e^{1-a} \\ y=\dfrac{a+1-a}{e^{1-a}}=e^{a-1} \end{array}\right\}\boxed{(e^{1-a},e^{a-1})}$$

הפונקציה שבמונה $1-a-\ln x$ **יורדת בתחום** $x>0$ **, המכנה חיובי,**

ולכן הנגזרת עוברת מחיוביות לשלילית ומתקבל מקסימום.

תשובה: (e^{1-a},e^{a-1}) **, מקסימום.**



ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה: הסרטוט משמאל.

[הקלד כאן]

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x}$ **המוגדרת בתחום** $x>0$.

נתון כי פונקציה זו והפונקציה $f(x)$ **נחתכות בנקודה שבה** $x=e^2$.

$g(\frac{1}{e^2})=e^2$ **ולכן** $f(\frac{1}{e^2})=e^2$.

$$\frac{1}{e^2}=\frac{a+\ell n\, e^2}{e^2}$$

$$1=a+2$$

$$\boxed{a=-1}$$

תשובה: $a=-1$.

ד. עבור $a=-1$ **נקבל** $f(x)=\frac{-1+\ell n\, x}{x}$ **ו-** $g(x)=\frac{1}{x}$.

נתונה הפונקציה $h(x)$ **המוגדרת בתחום** $x>0$ **ועוברת בנקודה** $(e^3,-1.5)$.

נתון גם שמתקיים: $h'(x)=f(x)-g(x)$

נמצא את הפונקציה $h(x)$ **, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$h(x)=\int\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$h(x)=\int(\frac{-1+\ell n\, x}{x}-\frac{1}{x})\cdot dx=\int(\frac{-1}{x}+\frac{\ell n\, x}{x}-\frac{1}{x})\cdot dx$$

$$h(x)=\int(\frac{\ell n\, x}{x}-\frac{2}{x})\cdot dx$$

$$h(x)=\frac{(\ell n\, x)^2}{2}-2\ell n\, x+c \quad \leftarrow x>0$$

$$-1.5=\frac{(\ell n\, e^3)^2}{2}-2\ell n\, e^3+c \quad \leftarrow h(e^3)=-1.5$$

$$-1.5=4.5-6+c \quad \rightarrow c=0$$

$$\boxed{h(x)=\frac{(\ell n\, x)^2}{2}-2\ell n\, x}$$

תשובה: $h(x)=\frac{(\ell n\, x)^2}{2}-2\ell n\, x$.

ה. נקבע איזה גרף מבין הגרפים I - IV מייצג את הפונקציה $|h(x)|$.

$|h(x)| \geq 0$ לכל $x>0$ עובדה שמתאימה לכל הגרפים הנתונים

כמו כן, לכל הגרפים יש אסימפטוטה אנכית $x=0$ כמו של $h(x)$ ולכן גם כמו של $|h(x)|$.

בנקודת החיתוך של $h(x)=\frac{(\ell n\, x)^2}{2}-2\ell n\, x$ עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

$$h(x)=\frac{(\ell n\, x)^2}{2}-2\ell n\, x=0 \quad \rightarrow \ell n\,(x)\cdot(\frac{\ell n\, x}{2}-2)=0$$

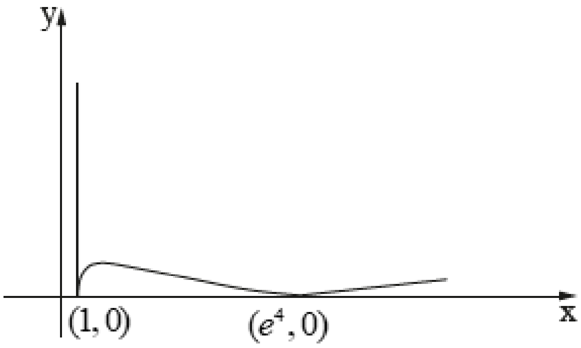
$$\ell n\,(x)=0 \quad \rightarrow x=1 \quad \rightarrow \boxed{(1,0)}$$

$$\frac{\ell n\, x}{2}-2=0 \quad \rightarrow \ell n\,(x)=4 \quad \rightarrow x=e^4 \quad \rightarrow \boxed{(e^4,0)}$$

קבלנו שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ,

ולכן גם לפונקציה $|h(x)|$ תהיינה אותן שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x שתהיינה גם נקודות מינימום,

וביניהן חייבת להיות נקודת מקסימום.



I

בנוסף, על ידי הצבה, נקבל $h(1{,}000{,}000)=67$.

או ההבנה שהביטוי $\frac{(\ell n\, x)^2}{2}$ שואף ל $+\infty$ מהר יותר מאשר הביטוי $2\ell n\, x$,

נדע שלפונקציה $h(x)$ אין אסימפטוטה אופקית,

ולכן גם לפונקציה $|h(x)|$ אין אסימפטוטה אופקית.

ולכן הגרף המתאים הוא גרף I .

תשובה: גרף I מייצג את הפונקציה $|h(x)|$.