פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ה, 2025, שאלון 35571:

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת הקובץ

יואל גבע
לא מתפשרים.
בגרות פה ינואר 25 מועד חורף שאלון 35571

(1) נתון כי השוויון $8+24+48+...+n(n+2)=\frac{n(n+a)(n+4)}{6}$ **מתקיים בעבור** $n=2$.

ניתן לראות כי בעבור $n=2$, **נקבל שהאיבר הראשון בסדרה הוא** $2(2+2)=8$.

נציב $n=2$ **באגף ימין ונשווה ל-** 8 .

$$8=\frac{2(2+a)\cancel{(2+4)}}{\cancel{6}} \quad /:2$$

$$4=2+a$$

$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$.

(2) נוכיח שהטענה $8+24+48+...+n(n+2)=\frac{n(n+2)(n+4)}{6}$ **נכונה לכל** n **טבעי <u>זוגי</u>.**

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$.

אגף ימין: $\frac{2(2+2)(2+4)}{6}=8$ **אגף שמאל:** 8 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=2$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $8+24+48+...+k(k+2)=\frac{k(k+2)(k+4)}{6}$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+2$.

$$\Leftrightarrow \underline{8+24+48+...+k(k+2)}+(k+2)(k+2+2)=\frac{(k+2)(k+2+2)(k+2+4)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+2)(k+4)}{6}+(k+2)(k+4)=\frac{(k+2)(k+4)(k+6)}{6}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+2)(k+4)+6(k+2)(k+4)}{6}=\frac{(k+2)(k+4)(k+6)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+2)(k+4)(k+6)}{6}=\frac{(k+2)(k+4)(k+6)}{6}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **זוגי טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $8+24+48+...+n(n+2)=\frac{n(n+2)(n+4)}{6}$ **נכון לכל** n **טבעי זוגי.**

יואל גבע
לא מתפשרים.

(1) נגדיר את המאורעות הבאים:

A - הצליחו במבחן הראשון $\bar{A}$ - לא הצליחו במבחן הראשון

B - הצליחו במבחן השני $\bar{B}$ - לא הצליחו במבחן השני

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

נסמן p - ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח <u>רק</u> במבחן הראשון, לכן $P(A \cap \bar{B}) = p$.

מספר המועמדים שהצליחו <u>רק</u> במבחן הראשון קטן פי 4 ממספר המועמדים שהצליחו בשני המבחנים,

לכן: $= P(A \cap B) = 4 \cdot P(A \cap \bar{B}) \rightarrow N(A \cap B) = 4 \cdot N(A \cap \bar{B})$.

$\frac{8}{9}$ מן המועמדים שהצליחו במבחן השני, הצליחו גם במבחן הראשון, כלומר $P(A/B) = \frac{8}{9}$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{4p}{P(B)}$$

$$P(B) = 4.5p$$

וניתן להשלים את הטבלה:

	A הצליח בראשון	$\bar{A}$ לא הצליח	
B - הצליח במבחן השני	$4p$	$0.5p$	$4.5p$
$\bar{B}$ - לא הצליח בשני	p	$1-5.5p$	$1-4.5p$
	$5p$	$1-5p$	1

$$P(A \cup B) = 4p + p + 0.5p = 5.5p$$

תשובה: ההסתברות, לבחור באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד, היא $5.5p$.

(2) נחשב את ההסתברות שהמועמד הצליח בשני המבחנים, אם ידוע שהצליח לפחות במבחן אחד.

$$P\left((A \cap B)/(A \cup B)\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{4p}{5.5p} = \frac{8}{11}$$

תשובה: ההסתברות, לבחור באקראי מועמד שהצליח בשני המבחנים

אם ידוע שהצליח לפחות במבחן אחד, היא $\frac{8}{11}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות.

נשים לב שבכל אחת משלוש הפונקציות מופיע הביטוי הריבועי x^2-1,

שהוא של פרבולה בעלת מינימום (ישרה, "צוחקת"), המתאפסת עבור $x=\pm1$,

חיובית בתחום $x>1$ **או** $x<-1$ **ושלילית בתחום** $-1<x<1$.

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ **- הביטוי שבתוך השורש שבמכנה צ"ל חיובי, ולכן** $x>1$ **או** $x<-1$.

$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ **- המכנה צ"ל שונה מאפס, והביטוי שבתוך השורש אי-שלילי, ולכן** $x\ge 0,\ x\ne 1$.

$h(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ **- כל הביטוי שבתוך השורש צ"ל אי-שלילי, והמכנה שונה מאפס.**

כאשר $x\ge 0$ **במונה, אז נדרש** $x>1$ **במכנה, על-מנת שהמנה תהייה אי-שלילית.**

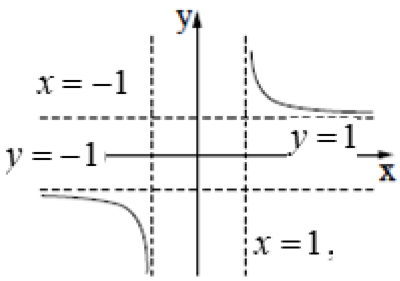
כאשר $x\le 0$ **במונה, אז נדרש** $-1<x<1$ **במכנה, על-מנת שהמנה תהייה אי-שלילית.**

מכאן שתחום ההגדרה הוא $x>1$ **או** $-1<x\le 0$.

תשובה: תחום ההגדרה של $f(x):\ x>1$ **או** $x<-1$, **של** $g(x):\ x\ge 0,\ x\ne 1$,

של $h(x):\ x>1$ **או** $-1<x\le 0$.

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$



3

על פי תחום ההגדרה,

אסימפטוטות אנכיות:

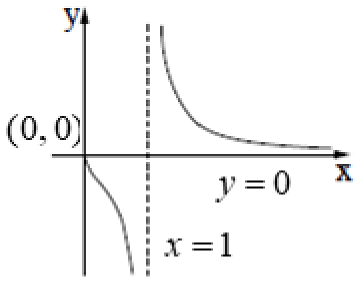
$x=1,\ x=-1$

ואסימפטוטות אופקיות

$y=1\ (x\to\infty)$

$y=-1\ (x\to-\infty)$

$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$



1

על פי תחום ההגדרה,

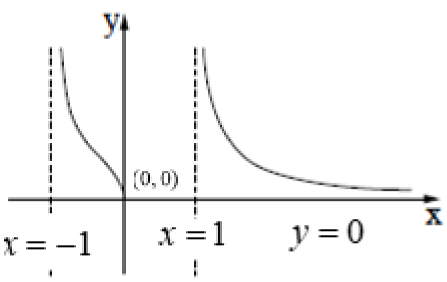
נקודת קצה $(0,\,0)$,

אסימפטוטות אנכיות: $x=1$

ואסימפטוטה אופקית

$y=0\ (x\to+\infty)$

$h(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$



5

על פי תחום ההגדרה,

פונקציה אי-שלילית,

נקודת קצה $(0,\,0)$,

אסימפטוטות אנכיות:

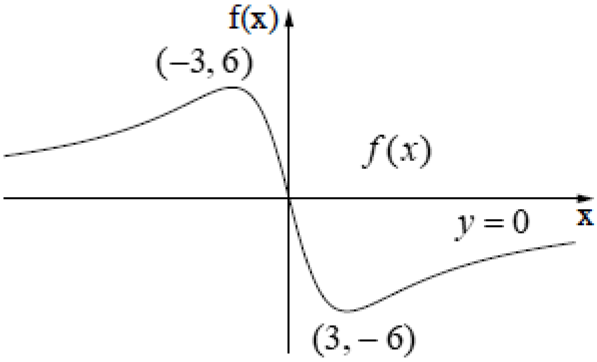
$x=1,\ x=-1$

ואסימפטוטה אופקית

$y=0\ (x\to+\infty)$

תשובה: $f(x)$ **- גרף 3,** $g(x)$ **- גרף 1,** $h(x)$ **גרף 5.**

בסרטוט שלפנינו מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.



(1) הפונקציה היא אי-זוגית, ומכיוון ויש לה נקודת מינימום אחת בלבד ששיעוריה הם $(3,-6)$.

אז עקב הסימטריה לראשית הצירים של פונקציה אי-זוגית יש לה נקודת מקסימום אחת בלבד $(-3,6)$.

גם פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x.

מכאן שתחום העלייה של $f(x)$, ותחום החיוביות של פונקציית הנגזרת, הוא $x>3$ או $x<-3$,

ותחום הירידה שלה, ותחום השליליות של פונקציית הנגזרת, הוא $-3<x<3$

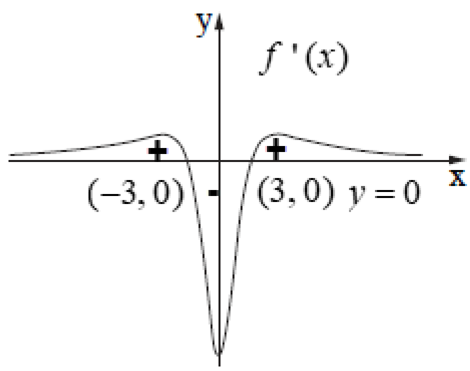
נקודות האפס של פונקציית הנגזרת הן $(3,0)$ ו- $(-3,0)$.

ונתון שלשתי הפונקציות אסימפטוטה אופקית $y=0$.

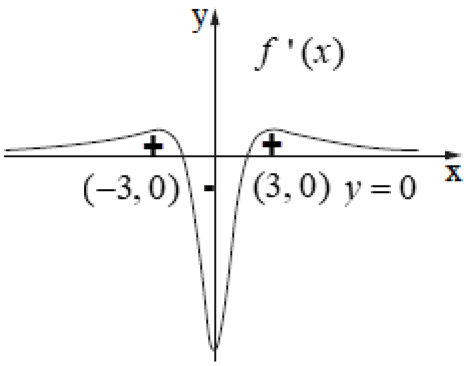
נראה גם שפונקציית הנגזרת היא פונקציה זוגית (אין חובת הוכחה, כי לא התבקשנו. ניתן רק לומר זאת).

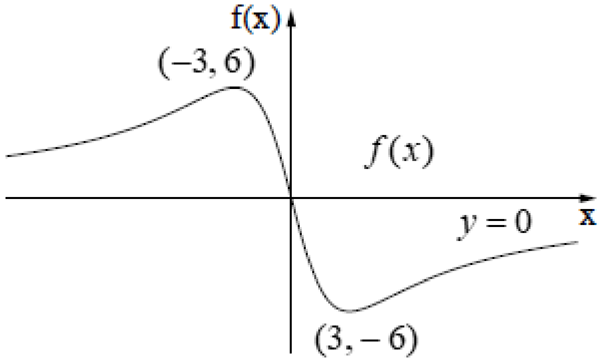
$$f(x)=-f(-x)$$
$$[f(x)]'=[-f(-x)]'$$
$$f'(x)=-f'(-x)\cdot(-1)$$
$$f'(x)=f'(-x)$$

בהתאם סרטוט אפשרי של גרף הנגזרת $f'(x)$



תשובה: הסרטוט מעל.





(2) נתונה הפונקציה $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$.

בנקודות החיתוך של $g(x)$ **עם ציר ה-** x **מתקיים** $g(x)=0$,

כלומר, כאשר $f(x)=0$ **עבור** $x=0$, **או** $f'(x)=0$ **עבור** $x=\pm 3$.

תשובה: שיעורי בנקודות החיתוך של $g(x)$ **עם ציר ה-** x **הם** $(3,0)$, $(0,0)$ **ו-** $(-3,0)$.

(3) נחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ **ועל ידי ציר ה-** x **על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$f^2(x)\ge 0$ **לכל** x, **כאשר** $f'(x)\ge 0$ **עבור** $x\ge 3$ **או** $x=\le -3$, **ו-** $f'(x)\le 0$ **בתחום** $-3\le x\le 3$.

מתקבל ששטח מוגבל, באופן שתואר, קיים רק בתחום $-3\le x\le 3$,

כאשר הגרף של $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$ **מתחת לציר ה-** x **או נוגע בו שלוש פעמים.**

$$S=\int_{-3}^{3}(0-g(x))\,dx$$

$$S==\int_{-3}^{3}-f^2(x)\cdot f'(x)\,dx$$

$$S=-\frac{(f(x))^3}{3}\Big]_{-3}^{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3:\quad -\dfrac{(f(3))^3}{3})=-\dfrac{(-6)^3}{3}=72 \\ x=-3:\quad -\dfrac{(f(-3))^3}{3})=-\dfrac{6^3}{3}=-(72) \end{array}\right\}\boxed{S=144}$$

תשובה: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ **ועל ידי ציר ה-** x, **הוא** 144.

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה סדרה הנדסית A שבה m איברים ($m>4$ הוא מספר טבעי).

(1) כל איברי הסדרה: $a_1\,, a_2\,, a_3\,, ..., a_m$ הם שליליים,

ולכן מנת הסדרה חיובית (אחרת נקבל איבר חיובי ושלילי לסירוגין).

סכום $m-4$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום $m-4$ האיברים הראשונים בסדרה.

המשוואה המתאימה היא: $S_{last\,m-4}=16\cdot S_{m-4}$

	ראשונים	$m-4$ אחרונים
A_1	a_1	$a_5=a_1\cdot q^4$
Q	q	q
N	$m-4$	$m-4$

$$S_{last\,m-4}=16\cdot S_{m-4}$$

$$\frac{a_1q^4(q^{m-4}-1)}{q-1}=16\cdot\frac{a_1(q^{m-4}-1)}{q-1} \quad /:\frac{a_1(q^{m-4}-1)}{q-1}\neq 0$$

$$q^4=16$$

$$\boxed{q=2} \quad \leftarrow q>0$$

תשובה: $q=2$.

(2) כל איברי הסדרה: $a_1\,, a_2\,, a_3\,, ..., a_m$ הם שליליים, ומנתה $q=2$ חיובית וגדולה מ- 1,

ולכן הסדרה יורדת.

אם המנה הייתה $0<q<1$, אז הסדרה הייתה עולה ומתכנסת.

תשובה: הסדרה A יורדת.

ב. המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית (שאינה מתכנסת !!!).

נתונה סדרה אין-סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^n}{a_n}$, $k>0$ הוא פרמטר.

נוכיח כי הסדרה B היא גם הנדסית, ונביע את מנתה באמצעות k.

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{k^{n+1}}{a_{n+1}}}{\frac{k^n}{a_n}}$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k^{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{k^n}$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k^{n+1}}{k^n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k}{q}$$

$$\boxed{\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k}{2}}$$

קבלנו שהמנה בין כל שני איברים עוקבים בסדרה B קבועה, ולכן הסדרה הנדסית.

תשובה: הוכחנו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומנתה היא $\frac{k}{2}$.

ג. נתון כי סכום הסדרה B מתכנס, מכאן שמנתה $-1 < \frac{k}{2} < 1$, כאשר $\frac{k}{2} \neq 0$.

ובהתאם, נקבל ש- $-2 < k < 2$, $k \neq 0$.

תשובה: תחום הערכים האפשרי של k הוא $-2 < k < 2$, $k \neq 0$.

ד. נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{4}$, ולכן $\frac{k}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$,

וגם $\boxed{b_n = \frac{1}{2^n a_n}} \rightarrow b_n = \frac{(\frac{1}{2})^n}{a_n}$, ו- $b_1 = \frac{1}{2a_1}$.

נתון: סכום הסדרה B הוא -3.

$$-3 = \frac{b_1}{1-\frac{1}{4}} \rightarrow \boxed{b_1 = -2.25}$$

תשובה: $k = \frac{1}{2}$, $b_1 = -2.25$.

ה. בסדרה B מחקו כל איבר שלישי, $b_3, b_6, b_9....$.

נחשב את סכומה, כסכום של שני תתי-סדרות:

	כל הסדרה	מקומות ראשון, רביעי...	מקומות שני, חמישי...
B_1	$b_1 = -2.25$	$b_1 = -2.25$	$b_2 = b_1 \cdot (\frac{1}{4}) = -2.25 \cdot (\frac{1}{4}) = -\frac{9}{16}$
Q	$\frac{1}{4}$	$\frac{b_{n+3}}{b_n} = \frac{b_n \cdot (\frac{1}{4})^3}{b_n} = \frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
N	∞	∞	∞

$$S = S_{1,4,7...} + S_{2,5,8...}$$

$$S = \frac{-2.25}{1-\frac{1}{64}} + \frac{-\frac{9}{16}}{1-\frac{1}{64}}$$

$$\boxed{S = -2\frac{6}{7}}$$

תשובה: סכום כל האיברים הנותרים הוא $-2\frac{6}{7}$.

א. נחשב את ההסתברות שדנה תוציא שני כדורים צהובים (אפשרי רק מכד א'),
אם ידוע שהוציאה שני כדורים מאותו צבע (שני צהובים או שני אדומים מכד א', או שני אדומים מכד ב').
אומנם לא ידוע כמה כדורים יש בכד ב', אבל כיוון שיש החזרה במקרה זה,
אין כל בעיה והמאורע "הוצאת כדור אדום מכד ב" הוא מאורע ודאי.

$$P(2\ yellow\ balls\ /\ same\ colours)=\frac{P(2\ yellow\ balls\cap same\ colours)}{P(same\ colours)}$$

$$P(2\ yellow\ balls\ /\ same\ colours)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}}{\frac{1}{2}\cdot(\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}+\frac{10}{25}\cdot\frac{10}{25})+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1}=\frac{0.175}{0.755}=\frac{35}{151}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{35}{151}$.

ב. דנה מחזירה לכד את הכדורים שהוציאה, ויעל מתחילה להוציא כדורים.
יעל בוחרת באקראי כד, אולם לאחר מכן היא מוציאה <u>עם החזרה</u> עד שהיא מוציאה באקראי כדור אדום.
האפשרות שיעל ביצעה תהליך זה 6 פעמים בדיוק קיימת,
רק אם בוחרת באקראי כל פעם בכד א', ומוציאה ממנו כדור צהוב –
וכך 5 פעמים ברצף (בחירת כד א' והוצאת כדור צהוב),
ובפעם השישית מוציאה כדור אדום מכד א, או מכד ב'.

$$P(red\ ball\ at\ 6th\ pick)=(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{25})^5\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{25}+\frac{1}{2}\cdot1)=0.001701$$

תשובה: ההסתברות היא 0.001701.

ג. העבירו מספר כדורים מכד ב' לכד א'.

לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד.

נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא $\frac{13}{16}$ **.**

נבדוק האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 14 **כדורים.**

נסמן p **- ההסתברות להוצאת כדור אדום מכד א' לאחר ההעברה.**

כיוון שבכד ב' יש רק כדורים אדומים, אז אם בוחרים מכד זה יש וודאות שנוציא כדור אדום.

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot p=\frac{13}{16}$$

$$\frac{1}{2}\cdot p=\frac{5}{16}$$

$$p=\frac{5}{8}$$

מכאן שמספר הכדורים הכולל בכד א' צריך להתחלק ב- 8 **לאחר ההעברה,**

אולם אם נעביר 14 **כדורים אז מספר הכדורים הכולל יהייה** $25+14=39$ **כדורים, שלא מתחלק ב-** 8**.**

<u>פתרון חלופי</u>

נסמן - n **מספר הכדורים שהועברו מכד ב' לכד א' .**

$$\frac{13}{16}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{10+n}{25+n}$$

$$\frac{5}{16}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10+n}{25+n} \quad /:(\frac{1}{2})$$

$$\frac{5}{8}=\frac{10+n}{25+n}$$

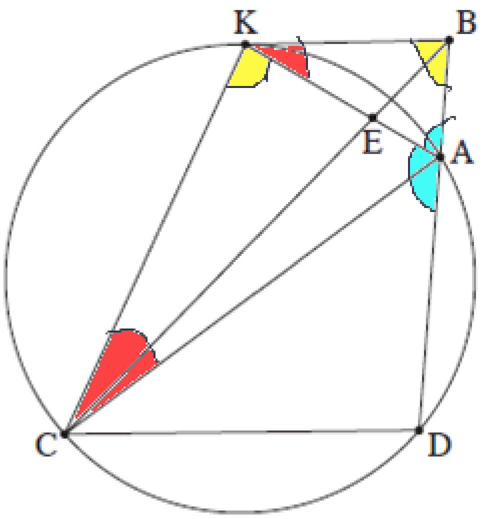
$$125+5n=80+8n$$

$$45=3n \quad /:3$$

$$\boxed{n=15}$$

תשובה: לא ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 14 **כדורים.**

בגרות פה ינואר 25 מועד חורף שאלון 35571



<u>נתונים</u>

1. $KB \parallel CD$ .2 KB משיק למעגל בנקודה K

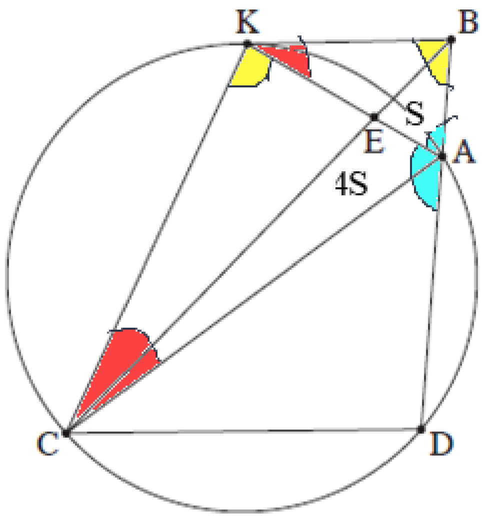
עבור ג: 3. $BE=\frac{1}{4}CE$ .4 $S_{ABKC}=30$ .5 $S_{\Delta AEB}=S$

צ"ל: א. $\Delta ABK \sim \Delta AKC$ ב. $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CE}$

ג. $\frac{AK}{AB}$ ד. $S_{\Delta AKEC}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	6	$\sphericalangle BKA=\sphericalangle KCA$ (ז)	זווית בין משיק למיתר
1	7	$\sphericalangle KBA+\sphericalangle BDC=180°$	זוויות חד צדדיות בין מקבילים משלימות ל- $180°$
	8	$\sphericalangle AKC+\sphericalangle BDC=180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא $180°$
8 ,7	9	$\sphericalangle KBA=\sphericalangle AKC$ (ז)	
9 ,6	10	$\Delta ABK \sim \Delta AKC$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
9 ,6	11	$\sphericalangle KAB=\sphericalangle KAC$	שני זוגות של זוויות שוות בין המשולשים וסכום זוויות $180°$ בכל משולש
11	12	$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CE}$	משפט חוצה זווית ב- ΔABC
		מ.ש.ל. ב	
12 ,3	13	$\frac{AB}{AC}=\frac{1}{4}$	
10	14	$\frac{AB}{AK}=\frac{AK}{AC}=\frac{BK}{KC}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
14 ,13	15	$4(AB)^2=(AK)^2$	
15	16	$\frac{AK}{AB}=2$	
		מ.ש.ל. ג	

יואל גבע
לא מתפשרים.



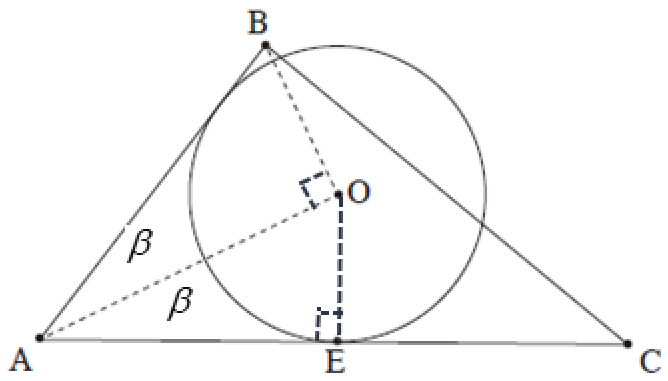
הסבר	מס'	טענה	נימוק
5, 13	17	$S_{\Delta AEC}=4S$	יחס שטחים שווה ליחס צלעות, עם גובה משותף לקודקוד A
10, 16	18	$\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta ABK}}=\frac{4}{1}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
4, 18	19	$S_{\Delta AKC}=\frac{4}{5}\cdot S_{ABKC}=24$	
17, 19	20	$S_{\Delta KEC}=24-4S$	הפרש שטחים
מ.ש.ל. ג			

א. $\sphericalangle BAC = 2\beta$, $\sphericalangle BOA = 90°$, O **מרכז המעגל שרדיוסו** R . AB , AC **משיקים למעגל.**

$\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO = \beta$ **(אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל,**

אז הקטע למרכז המעגל חוצה את הזווית שבין המשיקים)

$\sphericalangle OEA = 90°$ **(רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)**



$\underline{\Delta OAE}$

$$\sin\beta = \frac{OE}{AO}$$

$$\boxed{AO = \frac{R}{\sin\beta}}$$

$\underline{\Delta BOA}$

$$\cos\beta = \frac{AO}{AB}$$

$$AB = \frac{R}{\sin\beta\cos\beta}$$

$$\boxed{AB = \frac{2R}{\sin 2\beta}} \leftarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

תשובה: $AB = \dfrac{2R}{\sin 2\beta}$.

ב. נתון כי $AB = 2.5R$ **, ו-** $0° < \sphericalangle BAC < 90°$.

$$AB = \frac{2R}{\sin 2\beta}$$

$$2.5R = \frac{2R}{\sin 2\beta}$$

$$\sin 2\beta = 0.8$$

$$2\beta = 53.13° \quad \leftarrow 0° < 2\beta < 90°$$

$$\boxed{\beta = 26.565°}$$

תשובה: $\beta = 26.565°$.

ג. נחשב את היחס בין שטח ΔABC ובין שטח ΔAOB.

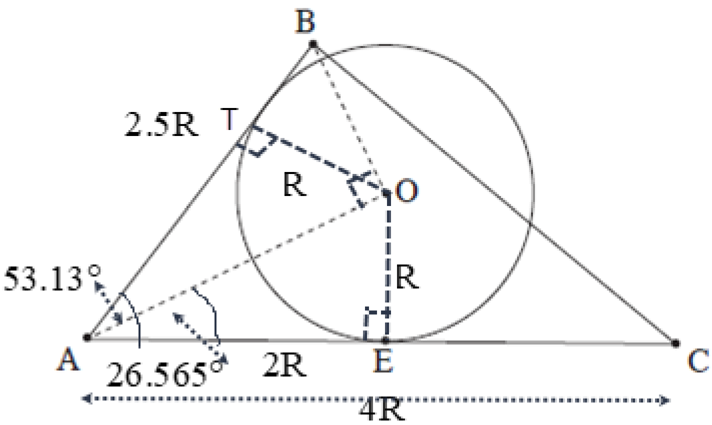
$\underline{\Delta OAE}$

$$\tan 26.565° = \frac{OE}{AE}$$

$$AE = \frac{R}{\tan 26.565°}$$

$$\boxed{AE = 2R}$$

$$\boxed{AC = 4R} \leftarrow AE = EC$$



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{\cancel{AB} \cdot AC \cdot \sin\sphericalangle BAC \cdot \cancel{0.5}}{\cancel{AB} \cdot OT \cdot \cancel{0.5}}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{4\cancel{R} \cdot \sin 53.13°}{\cancel{R}}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{16}{5} = 3.2}$$

תשובה: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{16}{5} = 3.2$.

ד. נתון כי האורך של רדיוס המעגל החוסם את ΔABC הוא 14.

ΔABC לפי משפט הקוסינוסים.

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\sphericalangle BAC$$

$$(BC)^2 = (2.5R)^2 + (4R)^2 - 2 \cdot 2.5R \cdot 4R \cdot \cos 53.13°$$

$$(BC)^2 = 10.25R^2$$

$$\boxed{BC = \frac{R\sqrt{41}}{2}} \leftarrow BC > 0$$

ΔABC לפי משפט הסינוסים.

$$\frac{BC}{\sin 53.13°} = 2R_{\Delta ABC}$$

$$\frac{R\sqrt{41}}{2 \cdot \sin 53.13°} = 2 \cdot 14$$

$$\boxed{R \approx 7}$$

תשובה: $R \approx 7$.

א. נתון כי $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x^2-a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. $a>0$ פרמטר.

נשים לב כי הפונקציה הרציונאלית $f'(x)$ אי-זוגית, ובהתאם נצפה לכך שהפונקציה $f(x)$ תהיה זוגית.

$f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות באותו תחום, שהוא $x\neq\pm a$ כדי שהמכנה לא יתאפס.

תשובה: תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא $x\neq\pm a$.

ב. נמצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$, שזהים לתחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$.

מונה הנגזרת הוא של ישר יורד העובר מחיוביות לשליליות עבור $x=0$.

הביטוי שבמכנה הוא חזקה אי-זוגית של פרבולה מחייכת, ולכן שומר על תחומי החיוביות והשליליות של הפרבולה, שחיובית עבור $x>a$ או $x<-a$ ושלילית בתחום $-a<x<a$.

נסכם את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת בטבלה נוחה, שהיא גם טבלת עלייה וירידה של $f(x)$.

x		a		0		$-a$	
סימני מונה	-		-		+		+
סימני מכנה	+		-		-		+
$f'(x)$ (המנה)	-		+		-		+
$f(x)$	↘		↗	Min	↘		↗

תשובה: עבור $f(x)$, עלייה $0<x<a$ או $x<-a$, ירידה $x>a$ או $-a<x<0$.

ג. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$,

ולכן כאשר $x\to\infty$ מתקיים $f(x)\to 0$.

נמצא את הפונקציה הקדומה $f(x)$ על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$f(x)=\int\frac{-4x}{(x^2-a^2)^3}\,dx$$

$$f(x)=\int -2\cdot(x^2-a^2)^{-3}\cdot 2x\,dx$$

$$f(x)=-2\cdot\frac{(x^2-a^2)^{-2}}{-2}+c$$

$$f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}+c$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}}\leftarrow\quad c=0\leftarrow\quad (x\to\infty)\quad f(x)\to 0$$

תשובה: $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-a^2)^2}$.

ד. נתונות הפונקציות $g(x)=\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$, ו- $h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$, וכמובן $f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}$.

נתאים לכל אחד מן הגרפים $\mathrm{I}-\mathrm{VI}$ גרף אפשרי מהגרפים שבסוף השאלה, וננמק את תשובותינו.

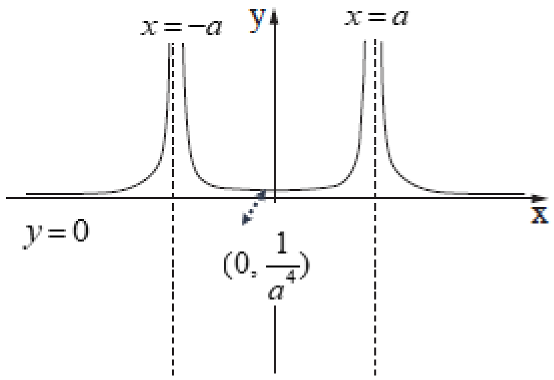
$f(x)=\frac{1}{(x^2-a^2)^2}$ היא פונקציה זוגית, חיובית,

עם נקודת מינימום $(0,\frac{1}{a^4})$,

אסימפטוטה אופקית $y=0$

ושתי אסימפטוטות אנכיות $x=a$ **ו-** $x=-a$.

הגרף המתאים הוא גרף II



II

$$g(x)=\frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}=\frac{x-a}{(x-a)^2(x+a)^2}$$

$$g(x)=\frac{1}{(x-a)(x+a)^2},\ x\neq\pm a$$

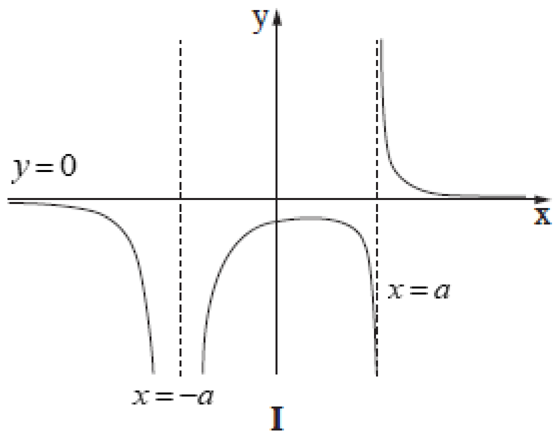
חיובית עבור של $x>a$

ושלילית עבור $x<a,\ x\neq -a$.

אסימפטוטה אופקית $y=0$

ושתי אסימפטוטות אנכיות $x=a$ **ו-** $x=-a$.

הגרף המתאים הוא גרף I



I

$$h(x)=\frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}=\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2(x+a)^2}$$

$$h(x)=\frac{1}{(x+a)^2},\ x\neq\pm a$$

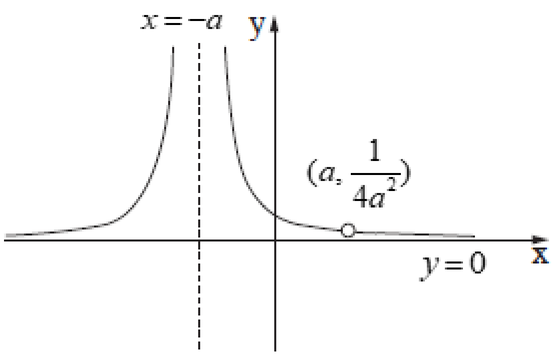
עם נקודת אי רציפות סליקה ("חור") $(a,\frac{1}{4a^2})$,

חיובית עבור של $x\neq\pm a$

אסימפטוטה אופקית $y=0$

ואסימפטוטה אנכית בודדת $x=-a$.

הגרף המתאים הוא גרף III



III

תשובה: עבור $f(x)$ **גרף** II **, עבור** $g(x)$ **גרף** I**, עבור** $h(x)$ **גרף** III .

נכתב ע"י עפר ילין

ה. נתון כי לפונקציה $h(x-9)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה ו- $x=0.8a$ (אסימפטוטה אנכית).

$h(x-9)$ היא הזזה 9 יחידות ימינה של הפונקציה $h(x)$,

שיש לה אסימפטוטה אנכית בודדת $x=-a$.

$-a+9=0.8a$

$-1.8a=-9$

$\boxed{a=5}$

תשובה: $a=5$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x+\frac{4}{(\cos x)^2}+a$ **בתחום** $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$, a **הוא פרמטר.**

בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$\cos x\neq 0\quad\to x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\,,\,x\neq\pm\frac{\pi}{2}$.

ב. $f(x)$ **היא סכום של פונקציות זוגיות ולכן זוגית, ותהייה לה נקודת קיצון על ציר ה-** y.

הוכחה נוספת: $f(-x)=\cos(-x)+\frac{4}{(\cos(-x))^2}+a=\cos x+\frac{4}{(\cos x)^2}+a=f(x)$

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **היא זוגית.**

ג. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ **משיק לישר** $y=4$ **בשתי נקודות.**

מכאן ששיפוע הפונקציה בנקודות ההשקה הוא אפס.

$$f(x)=\cos x+\frac{4}{(\cos x)^2}+a$$

$$f'(x)=-\sin x+\frac{0-4\cdot 2\cos x(-\sin x)}{(\cos x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin x\cdot(\cos x)^4+8\sin x\cos x}{(\cos x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin x\cos x\cdot\left[(\cos x)^3-8\right]}{(\cos x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{-0.5\sin 2x\cdot\left[(\cos x)^3-8\right]}{(\cos x)^4}$$

$$\sin 2x=0\quad\to 2x=\pi k\quad\to x=\frac{\pi}{2}k$$

$$(-\pi,4)\,,\,(0,a)\,,\,(\pi,4)$$

הביטוי $\left[(\cos x)^3-8\right]$ **שלילי, כי** $-1<\cos x<1$ **בתחום ההגדרה.**

כיוון שנתון שקיימות שתי נקודות השקה לישר $y=4$ **, הבנו שהן עבור שיעורי** $x=\pm\pi$.

$$4=\cos\pi+\frac{4}{(\cos\pi)^2}+a\quad\to 4=-1+4+a\quad\to\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$.

יואל גבע
לא מתפשרים.

ד. עבור $a=1$ **נקבל:** $f(x)=\cos x+\frac{4}{(\cos x)^2}+1$ **, בתחום** $x\neq\pm\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.

לא קיימות נקודות קצה, והנקודות $(\pi,4)$, $(0,6)$, $(-\pi,4)$ **חשודות כנקודות קיצון.**

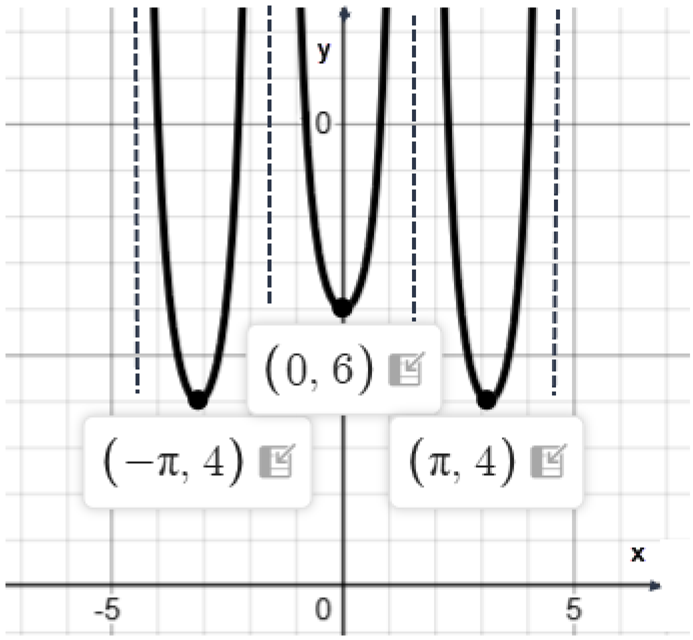
נציב בפונקציית הנגזרת ערכי x **מתאימים ונמצא את נקודות הקיצון סוגן ותחומי עלייה וירידה.**

x	$\frac{3\pi}{2}$		π		$\frac{\pi}{2}$		0		$-\frac{\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$ **(המנה)**		**+**		**-**		**+**		**-**		**+**		**-**	
$f(x)$		↗	**Min**	↘		↗	**Min**	↘		↗	**Min**	↘	

תשובה: $(\pi,4)$ **מינימום,** $(0,6)$ **מינימום,** $(-\pi,4)$ **מינימום.**

ה. נשים לב כי לפונקציה $f(x)$ **יש ארבע אסימפטוטות אנכיות:** $x=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2}$.

$$f(x)=\cos x+\frac{4}{(\cos x)^2}+1$$



תשובה: השרטוט מעל.

ו. נתונות הפונקציה: $g(x)=f(x)-k$ והפונקציה $h(x)=\frac{1}{g(x)}$ שתיהן בתחום

$-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$,

$k\neq 4,6$ הוא פרמטר.

$g(x)=f(x)-k$ היא הזזה אנכית k יחידות של $f(x)$.

כיוון ש- $k\neq 4,6$ אז ל- $g(x)$ אין נקודות קיצון על ציר ה- x .

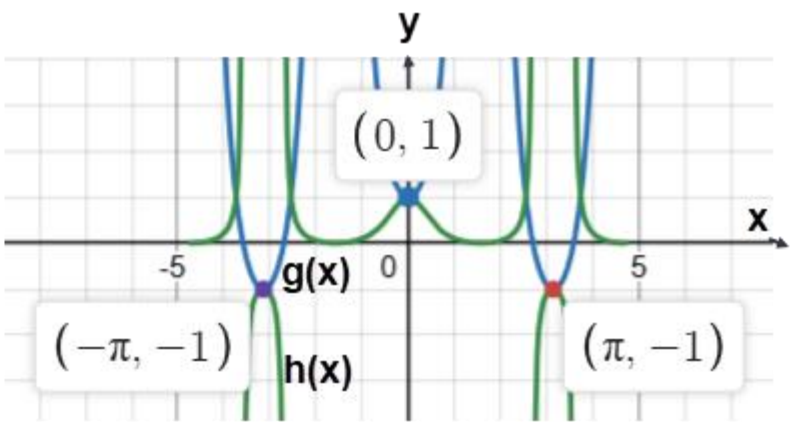
נשים לב שעבור $k>4, k\neq 6$ תהיינה לפונקציה $g(x)$ נקודות אפס והפונקציה $h(x)$ לא תהייה מוגדרת.

$h(x)=\frac{1}{g(x)}$ ולכן שתי הפונקציות נפגשות עקרונית רק עבור $h(x)=g(x)=\pm 1$.

עבור $k=5$ נקבל נקודות קיצון שיתאימו למבוקש: $(\pi,-1)$ מינימום, $(0,1)$ מינימום, $(-\pi,-1)$ מינימום.

תשובה: עבור $k=5$ גרף הפונקציה $g(x)$ וגרף הפונקציה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

הערה



א. נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{8-x}$.

(1) בתחום ההגדרה הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x\le 8$.

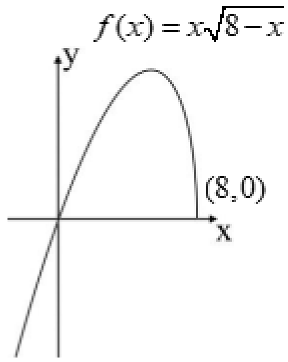
(2) נמצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

הגורם $\sqrt{8-x}$ אי-שלילי, ולכן הגורם x שבמכפלה קובע את תחומי החיוביות והשליליות.

תשובה: חיוביות - $0<x<8$, שליליות $x<0$.

ב. ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת (כמובן שיש לה נקודת מינימום בקצה $(8,0)$).

הפונקציה עוברת בראשית הצירים משליליות לחיוביות, ולכן נקבל נקודת מקסימום ברביע הראשון, שלא התבקשנו למצוא את שיעוריה.



תשובה: הסרטוט מעל.

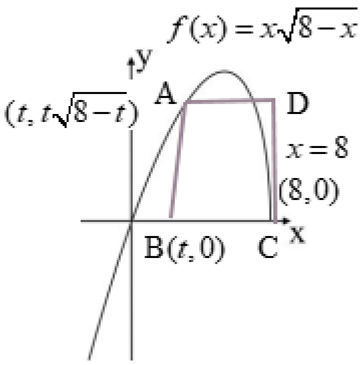
ג. נקודה A **נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה** $f(x)=x\sqrt{8-x}$ **, ובהתאם שיעורי** $A(t,t\sqrt{8-t})$ **.**

מן הנקודה A **העבירו שני אנכים, אנך אחד לציר ה-** x **החותך אותו בנקודה** $B(t,0)$**,**

ואנך שני לישר $x=8$ **החותך אותו בנקודה** D**.**

הנקודה $C(8,0)$ **היא נקודת הקצה של הפונקציה** $f(x)$ **.**

הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* היא היקף המלבן $ABCD$ **, כאשר** $0<t<8$ **.**



$$P(t)=2\cdot(AD+CD)$$

$$\boxed{P(t)=2\cdot(8-t+t\sqrt{8-t})}$$

$$P'(t)=2\cdot(-1+\sqrt{8-t}+\frac{t\cdot(-1)}{2\sqrt{8-t}})$$

$$P'(t)=2\cdot\frac{-2\sqrt{8-t}+2(8-t)-t}{2\sqrt{8-t}}$$

$$P'(t)=2\cdot\frac{-2\sqrt{8-t}+16-2t-t}{2\sqrt{8-t}}$$

$$\boxed{P'(t)=2\cdot\frac{-2\sqrt{8-t}+16-3t}{2\sqrt{8-t}}}$$

$$-2\sqrt{8-t}+16-3t=0$$

$$16-3t=2\sqrt{8-t}\quad(\ )^2\quad\rightarrow test$$

$$256-96t+9t^2=4(8-t)$$

$$9t^2-92t+224=0$$

$$t=6\frac{2}{9}\quad\rightarrow 16-3\cdot6\frac{2}{9}=2\sqrt{8-6\frac{2}{9}}\quad\rightarrow\cancel{-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}}$$

$$t=4\quad\rightarrow 16-3\cdot4=2\sqrt{8-4}\quad\rightarrow 4=4\quad\rightarrow\boxed{A(4,8)}$$

$$\left.\begin{matrix}P'(3)>0\\P'(5)<0\end{matrix}\right\}\boxed{t=4,\max}$$

תשובה: $A(4,8)$ **, עבורה היקף המלבן** $ABCD$ **הוא מקסימלי.**