פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ה, 2025, שאלון 35471:

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת הקובץ

א. אורך החיים של טלפונים שמייצרים במפעל מסוים מתפלג נורמלית.

<u>נחשב תחילה את הממוצע:</u>

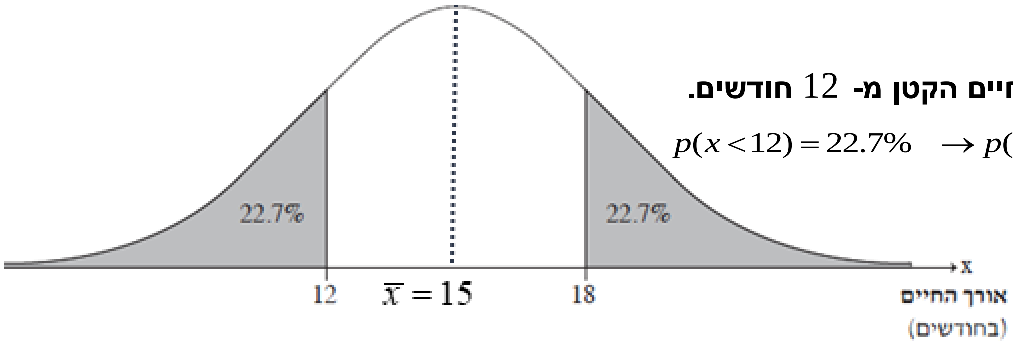
גרף ההתפלגות הנורמלית הוא סימטרי, ומכיוון ועל-פי הגרף הנתון

יש 22.7% **מהטלפונים עם אורך חיים הגדול מ-** 18 **חודשים,**

ובדיוק 22.7% **(אחוז זהה) מהטלפונים עם אורך חיים הקטן מ-** 12 **חודשים,**

הרי שהממוצע של ההתפלגות הוא 15 **חודשים** $= \bar{x} = \frac{12+18}{2}$.

<u>נחשב עתה את סטיית התקן:</u>



22.7% **מהטלפונים עם אורך חיים הקטן מ-** 12 **חודשים.**

$p(x<12)=22.7\% \rightarrow p(x<12)=0.227 \rightarrow z=-0.75$

$$-0.75=\frac{12-15}{s} \quad / \cdot s$$

$$-0.75s=-3 \quad / : (-0.75)$$

$$\boxed{s=4\ months}$$

תשובה: ממוצע אורך החיים של הטלפונים הוא 15 **חודשים וסטיית התקן היא** 4 **חודשים.**

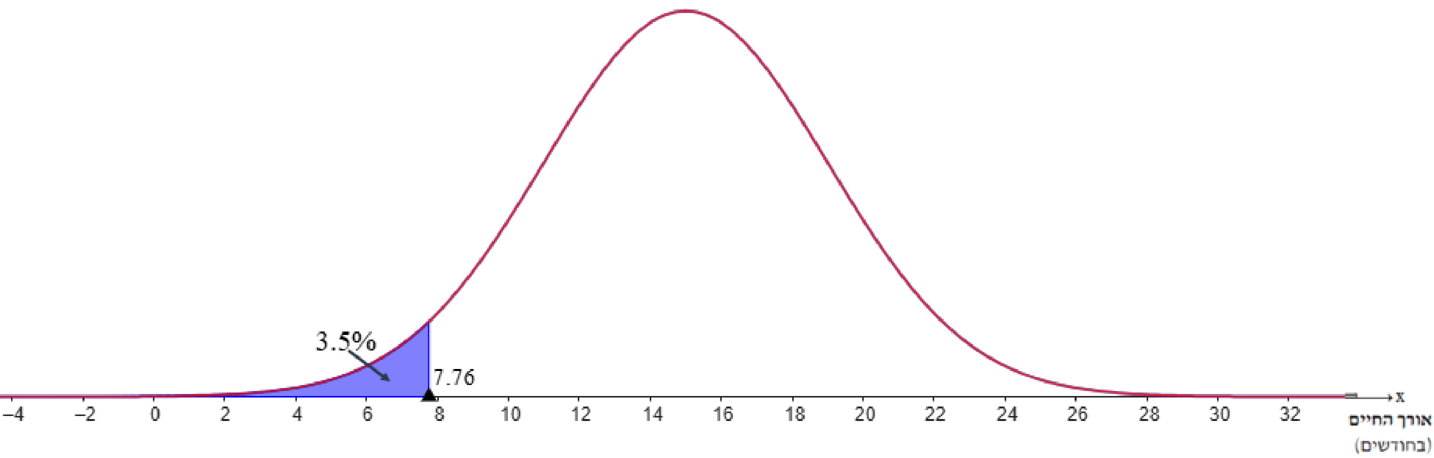
ב. 3.5% **מן הטלפונים, אלו שאורך החיים שלהם הוא הקטן ביותר, נחשבים פגומים.**

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p=3.5\% \rightarrow p=0.035 \rightarrow z=-1.81$

$$-1.81=\frac{x-15}{4} \quad / \cdot 4$$

$$-7.24=x-15$$

$$\boxed{x=7.76\ months}$$



תשובה: אורך החיים הגדול ביותר של טלפון שנחשב פגום הוא 7.76 **חודשים.**

ג. בחודש מסוים ייצרו במפעל $2,000$ טלפונים.

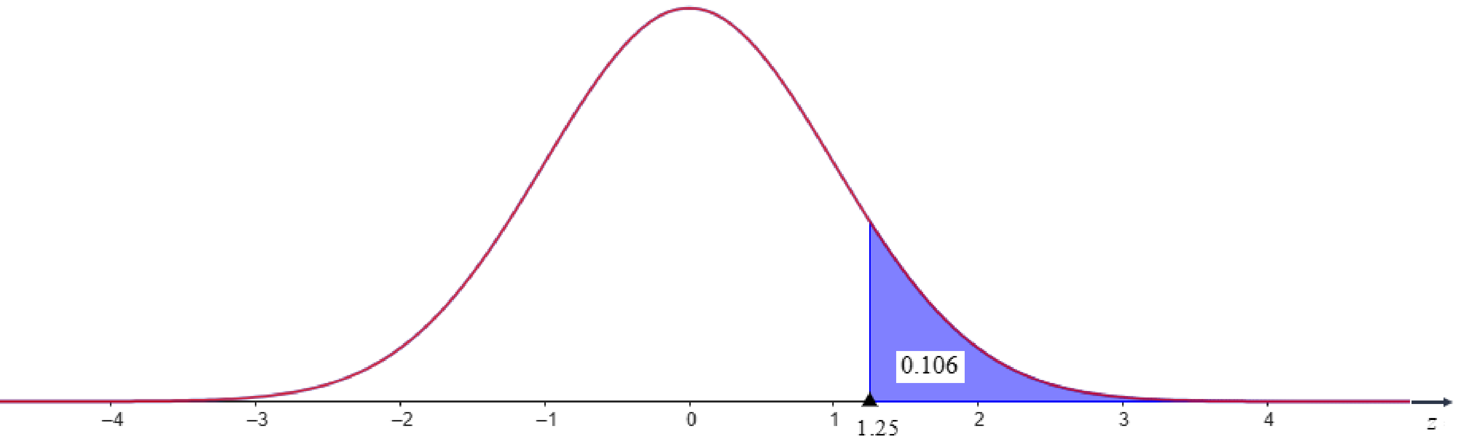
נמצא את ציון התקן המתאים לאורך חיים של 20 חודשים:

$$z=\frac{20-15}{4}=1.25$$

ונחשב מהי ההסתברות המתאימה לאורך חיים גדול יותר.

$$z=1.25 \quad \rightarrow p(z<1.25)=0.894 \quad \rightarrow p(z>1.25)=1-0.894=0.106$$

מספר הטלפונים המתאים הוא: $0.106\cdot 2000=212$,



תשובה: על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ל- 212 טלפונים יש אורך חיים גדול מ- 20 חודשים.

ד. מהנדסים הצליחו להגדיל פי 1.5 את אורך החיים של כל הטלפונים שהמפעל מייצר.

זוהי טרנספורמציה ליניארית, כאשר כל ערכי המשתנים גדלים פי 1.5,

מה שגם מגדיל את הממוצע פי אותו מספר, כאשר הפיזור גדל וסטיית התקן גדלה אף היא פי אותו מספר.

(1) ממוצע אורך החיים של הטלפונים, לפני ההגדלה, היה 15 חודשים.

כיוון שכל המשתנים גדלו פי 1.5, אז גם הממוצע גדל פי 1.5 והוא 22.5 חודשים $=15\cdot 1.5$.

גם סטיית התקן גדלה פי 1.5 והיא 6 חודשים $=4\cdot 1.5$.

תשובה: ממוצע אורך החיים החדש הוא 22.5 חודשים וסטיית התקן החדשה היא 6 חודשים.

(2) נמצא את אחוז הטלפונים שאורך החיים שלהם קטן מ- 12 חודשים.

נמצא את ציון התקן המתאים לאורך חיים של 12 חודשים:

$$z=\frac{12-22.5}{6}=-1.75$$

ונחשב מהי ההסתברות המתאימה לאורך חיים קטן יותר.

$$z=-1.75 \quad \rightarrow p(z<-1.75)=0.0401=0.0401\cdot 100\%=4.01\%$$

תשובה: 4.01% מהטלפונים, לאחר ההגדלה, הם בעלי אורך החיים קטן מ- 12 חודשים.

א. בבית מרקחת א' בעיר מסוימת בדקה המנהלת במשך 5 חודשים את הקשר בין מספר ימי הגשם בחודש (המשתנה x) ובין ההכנסה החודשית של בית המרקחת (המשתנה y).

החודש	**ימי הגשם (המשתנה x)**	**ההכנסה (באלפי שקלים) (המשתנה y)**
נובמבר	6	60
דצמבר	10	72
ינואר	20	85
פברואר	14	73
מרץ	10	65

נמצא את ממוצע ימי הגשם בחודש ואת סטיית התקן:

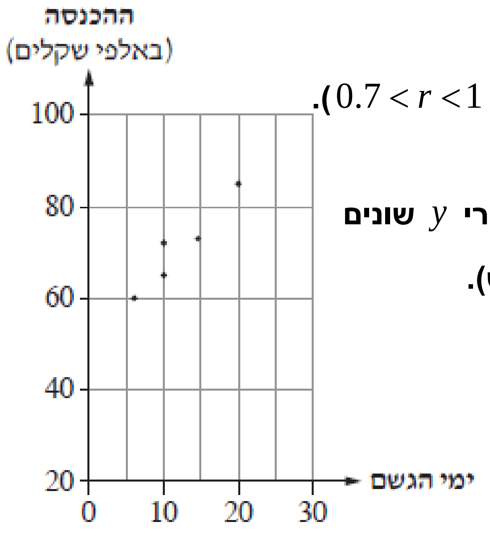
$$\overline{x} = \frac{6+10+20+14+10}{5} = \frac{60}{5} = 12 \text{ ימי גשם}$$

סטיית התקן היא:

$$S_x = \sqrt{\frac{(6-12)^2\cdot 1+(10-12)^2\cdot 1+(20-12)^2\cdot 1+(14-12)^2\cdot 1+(10-12)^2\cdot 1}{5}} = \sqrt{\frac{112}{5}} = 4.733$$

תשובה: ממוצע ימי הגשם בחודש הוא $\overline{x} = 12$ ימי גשם, וסטיית התקן היא $S_x = 4.733$ ימי גשם,

ב. לפנינו דיאגרמת פיזור המתארת את y כתלות ב- x .



אחד מן המספרים 0.959 , 1 , -0.959 הוא מקדם המתאם r .

- **ניתן לראות בדיאגרמה שהקשר הוא קשר <u>חיובי</u>, די חזק ($0.7 < r < 1$).**
- **ניתן לראות שהקשר אינו מושלם, דטרמיניסטי,**
  לדוגמה יש שתי תצפיות עם אותם ערכי $x = 10$, אך שיעורי y שונים
  (הכנסות שונות, למרות שאותו מספר של ימי גשם בחודש).

תשובה: מקדם המתאם הוא $r = 0.959$.

ג. ממוצע ההכנסות החודשי (באלפי שקלים) של בית המרקחת הוא $\bar{y}=71$,

וסטיית התקן היא 8.46 **ימי גשם** $S_y=$.

(1) נמצא את שיפוע ישר הרגרסיה לניבוי y **על פ** x .

$$m=r\cdot\frac{S_y}{S_x}=0.959\cdot\frac{8.46}{4.733}=1.714$$

תשובה: שיפוע ישר הרגרסיה לניבוי y **על פ** x **הוא** 1.714

(2) נמצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y **על פ** x .

ישר הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים $(\bar{x},\bar{y})=(12,71)$.

$$y-71=1.714(x-12)$$
$$y-71=1.714x-20.568$$
$$\boxed{y=1.714x+50.432}$$

תשובה: משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y **על פ** x **היא** $y=1.714x+50.432$.

ד. כדי למצוא את ההכנסה המנובאת בחודש (y **), שבו מספר ימי הגשם יהיה** $x=15$,

נציב $x=15$ **(שנמצא בתוך טווח הנתונים) במשוואת ישר הרגרסיה** $y=1.714x+50.432$.

$$y=1.714\cdot15+50.432$$
$$\boxed{y=76.142}$$

תשובה: על פי ישר הרגרסיה, ניבוי ההכנסה בחודש שבו מספר ימי הגשם יהיה 15,

הוא 76.142 **אלפי שקלים (** $76{,}142$ **שקלים).**

ה. גם בבית מרקחת ב' באותה העיר בדקה המנהלת באותם 5 חודשים את הקשר בין מספר ימי הגשם בחודש (המשתנה x) ובין ההכנסה החודשית של בית המרקחת (המשתנה y).

המנהלת מצאה שבכל חודש הייתה ההכנסה של בית מרקחת ב' קטנה ב- $10,000$ שקלים (10 אלפי שקלים), כלומר מדובר בהחסרת קבוע (10) מכל המדידות של משתנה y ולכן הממוצע שלו יקטן ב- 10 כאשר סטיית התקן שלו לא משתנה.

כיוון שמדובר באותה עיר ובאותם חודשים, אז מספר ימי הגשם זהה,

ו- 4.733 ימי גשם $= S_x$ ללא שינוי.

מקדם המתאם אינו משתנה, וגם לא שיפוע קו הרגרסיה.

נקודת הממוצעים החדשה היא $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 61)$,

ולמעשה יש הזזה אנכית של 10 יחידות כלפי מטה של ישר הרגרסיה,

ונקבל שהמשוואה חדשה היא $y = 1.714x + 40.432$.

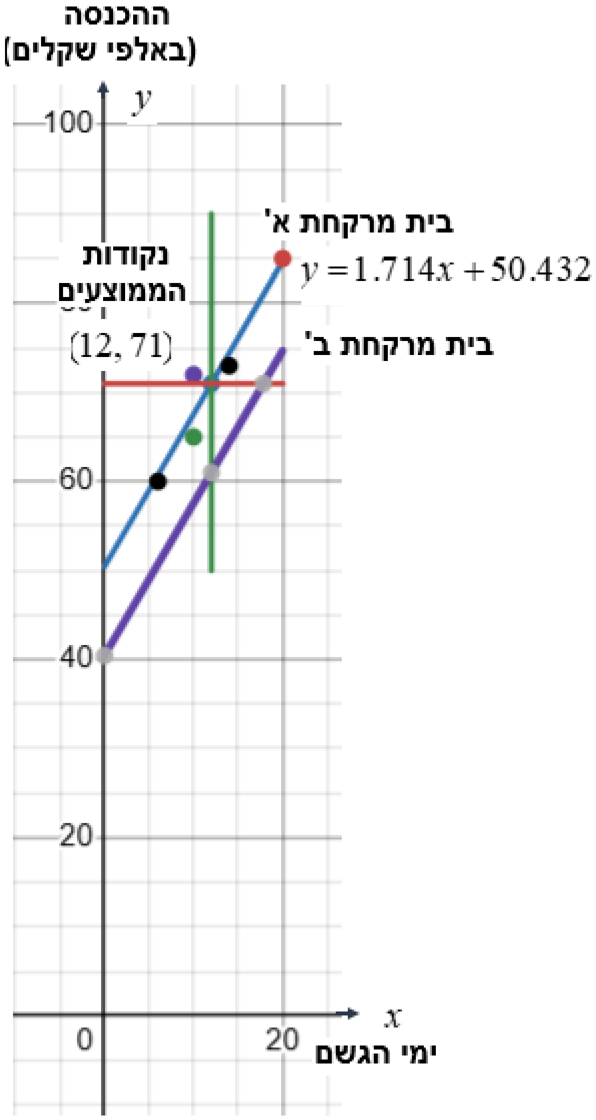
תשובה: משוואת ישר הרגרסיה לניבוי ההכנסה החודשית (באלפי שקלים) של בית מרקחת ב' על פי מספר ימי הגשם בחודש היא $y = 1.714x + 40.432$.

הערשה

- **סטיית התקן של ההכנסה לא משתנה, כי זו טרנספורמציה לינארית, שלא משפיעה על הפיזור כיוון שמדובר באותה עיר ובאותם חודשים, אז מספר ימי הגשם זהה,**
  ו- 4.733 ימי גשם $= S_x$ ללא שינוי.
- **מקדם המתאם אינו משתנה, כי מקדם המתאם אינו משתנה בהפעלת טרנספורמציה לינארית, אא"כ מקדמי הכפל של המשתנים שונים בסימנם),**
- **וגם שיפוע קו הרגרסיה ($m = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$) אינו משתנה כי אין שינוי באף גורם.**
- **ניתן גם לחשב מחדש את משוואת קו הרגרסיה**
  ישר הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים בחדשה $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 61)$.

$$y - 61 = 1.714(x - 12)$$
$$y - 61 = 1.714x - 20.568$$
$$\boxed{y = 1.714x + 40.432}$$

העשרה



את הקשר החיובי בין המשתנים ניתן לראות במיקומן של הנקודות בדיאגרמת הפיזור,

כאשר אם נקודת הממוצעים היא ראשית הצירים, אז הנקודות ברובן המוחלט ברביע הראשון והשלישי.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - **בנות** $\bar{A}$ - **בנים**

B - **בעלי רישיון נהיגה** $\bar{B}$ - **חסרי רישיון נהיגה**

<u>נתונים ומשמעויות מיידיות</u>

נדרשות שלוש משוואות, על-מנת למלא טבלת 2×2 **מלאה.**

(1) $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.25$ **(2)** $P(B/\bar{A})=\frac{1}{3}\rightarrow P(\bar{B}/\bar{A})=\frac{2}{3}$

<u>פיתוח משוואות ונוסחת הסתברות מותנית</u>

$$P(\bar{B}/\bar{A})=\frac{P(\bar{B}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{0.25}{P(\bar{A})}$$

$$\boxed{P(\bar{A})=0.375}$$

ואחוז הבנים הוא $0.375\cdot100\%=37.5\%$

תשובה: 37.5% **מתלמידי שכבת י"א הם בנים.**

ב. נתון: $P(\bar{A}\cap B)=P(A\cap B)$.

על פי א: $P(\bar{A}\cap B)=0.375-0.25=0.125$ **, ולכן** $P(A\cap B)=0.125$

(ראו בטבלה, אין צורך לרשום פעולות חיבור/חיסור שכאלו בבגרות)

נציב בטבלה ונשלים אותה.

	A **בנות**	$\bar{A}$ **בנים**	
B **בעלי רישיון**	0.125	0.125	0.25
$\bar{B}$ **חסרי רישיון**	0.5	0.25	0.75
	0.625	0.375	1

$$P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.25}{0.75}=\frac{1}{3}$$

תשובה: ההסתברות, שנבחר בן מתוך חסרי רישיון הנהיגה, היא $\frac{1}{3}$.

ג. בשכבה זו יש 69 **בנים.**

הבנים מהווים 0.375 **מכלל תלמידי השכבה, ולכן בשכבה יש** 184 **תלמידים** $=\frac{69}{0.375}$ **.**

תשובה: בשכבה יש 184 **תלמידים סך הכול.**

ד. לשכבה הצטרפו 26 **תלמידים חדשים (בנים ובנות).**

נסמן ב- x **את מספר הבנים שהצטרפו, ולכן מספר הבנים עכשיו הוא** $69+x$ **.**

בוחרים באקראי שני תלמידים (הוצאה ללא החזרה) מתוך השכבה שבה 210 **תלמידים** $=184+26$ **.**

ההסתברות ששני התלמידים שנבחרו הם בנים היא $\frac{2}{15}$ **.**

$$\frac{69+x}{210}\cdot\frac{68+x}{209}=\frac{2}{15}$$

$$\frac{(69+x)(68+x)}{210\cdot 209}=\frac{2}{15}$$

$$15\cdot(69+x)(68+x)=2\cdot 210\cdot 209 \quad /:15$$

$$(69+x)(68+x)=5852$$

$$4692+69x+68x+x^2=5852$$

$$x^2+137x-1160=0$$

$$\boxed{x=8} \qquad \cancel{x=-145}$$

האפשרות השנייה נפסלה, כי מספר הבנים הוא חיובי ושלם.

תשובה: לשכבה הצטרפו 8 **בנים.**

א. CP מקביל לציר ה- x ו- AE מקביל לציר ה- y, כך ש- $\sphericalangle AEP = 90°$.

ומכאן ש- $\sphericalangle CBP = \sphericalangle AEP = 90°$.

$\sphericalangle EPA = \sphericalangle BPC$ (זוויות קודקודיות שוות זו לזו)

$\Delta AEP \sim \Delta CBP$ (משפט דמיון זווית זווית)

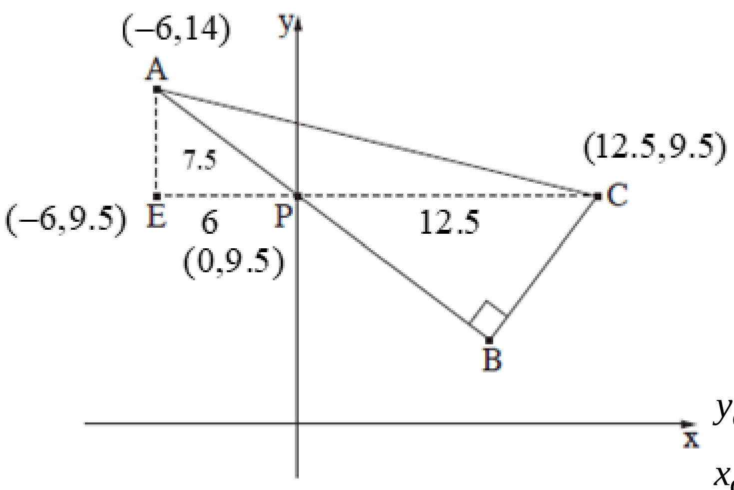
תשובה: הוכחנו כי $\Delta AEP \sim \Delta CBP$.

ב. $\frac{3}{5} = \frac{AP}{CP} = \frac{EP}{BP} = \frac{AE}{CB}$ (יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים והנתון על יחס הדמיון)

נתון כי $CP = 12.5$, ובהתאם $\boxed{AP = 7.5} \leftarrow AP = \frac{3 \cdot 12.5}{5} \leftarrow \frac{AP}{12.5} = \frac{3}{5}$

תשובה: אורך הקטע AP הוא 7.5 .

ג. הנקודה P נמצאת על ציר ה- y, ולכן נסמן $P(0, y)$, כאשר $AP = 7.5$ ו- $A(-6, 14)$.



$$\sqrt{(-6-0)^2 + (14-y)^2} = 7.5 \quad ()^2$$
$$36 + (14-y)^2 = 56.25$$
$$(14-y)^2 = 20.25$$
$$14 - y = 4.5 \quad \rightarrow y = 9.5 \quad \rightarrow \boxed{P(0, 9.5)}$$
$$14 - y = -4.5 \quad \rightarrow \cancel{y = 18.5} \quad \leftarrow y_P < 14$$

CP מקביל לציר ה- x, כאשר $CP = 12.5$ ולכן:

$$y_C = y_E = y_P = 9.5$$
$$x_C = x_P + 12.5 = 0 + 12.5 = 12.5 \quad \rightarrow \boxed{C(12.5, 9.5)}$$

וגם מתקבל ש- $E(-6, 9.5)$ ו- $EP = 6 \leftarrow EP = x_P - x_E = 0 - (-6) = 6$.

תשובה: $P(0, 9.5)$, $C(12.5, 9.5)$.

ד. הצלע AB חותכת את ציר ה- y בנקודה P.

(1) נמצא את משוואת הצלע AB .

$m_{AP} = -\frac{3}{4} \leftarrow m_{AP} = \frac{14-9.5}{-6-0} = \frac{4.5}{6} = -\frac{3}{4}$.

נמצא את משוואת הצלע AB בעזרת $m_{AB} = m_{AP} = -\frac{3}{4}$ ו- $P(0, 9.5)$.

$$y - 9.5 = -\frac{3}{4}(x-0) \quad \rightarrow y - 9.5 = -\frac{3}{4}x \quad \rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 9.5}$$

תשובה: משוואת הצלע AB היא $y = -\frac{3}{4}x + 9.5$.

(2) נמצא את שיעורי הקודקוד B .

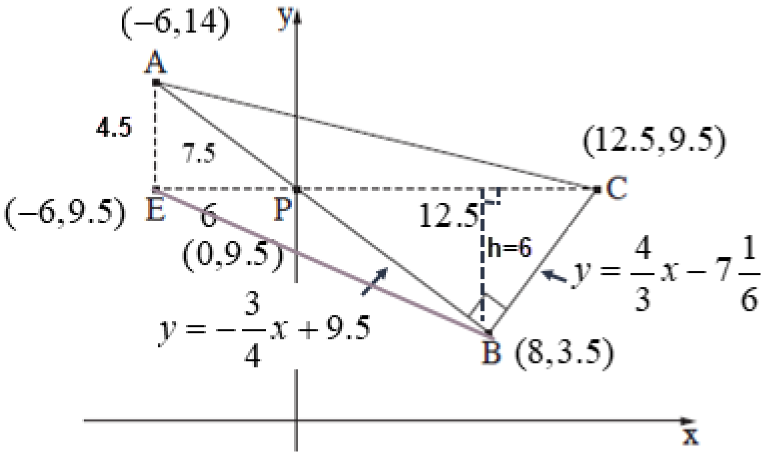
$\sphericalangle CBP=90^\circ$ **, ולכן** $m_{BC}=+\frac{4}{3}$ **(שיפוע הופכי לנגדי).**

נמצא את משוואת הצלע BC **בעזרת** $m_{BC}=\frac{4}{3}$ **ו-** $C(12.5,9.5)$.

$$y-9.5=\frac{4}{3}(x-12.5)\quad\rightarrow y-9.5=\frac{4}{3}x-\frac{50}{3}$$

$$\boxed{y=\frac{4}{3}x-7\frac{1}{6}}$$

הקודקוד B **הוא נקודת המפגש של הצלע** AB **והצלע** BC.



$$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+9.5 \\ y=\frac{4}{3}x-7\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}x-7\frac{1}{6}=-\frac{3}{4}x+9.5$$

$$\frac{25}{12}x=\frac{50}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=-\frac{3}{4}\cdot 8+9.5=3.5 \end{array}\right\}\boxed{B(8,3.5)}$$

הערה: ניתן היה למצוא כי $BP=10$ **(על פי יחס הדמיון),**

לסמן $B(x,-\frac{3}{4}x+9.5)$ **ולהשתמש בנוסחת המרחק כמו שעשינו בסעיף ג.**

תשובה: $B(8,3.5)$.

(3) נחשב את שטח המרובע $AEBC$ **כסכום של שני שטחים.**

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta AEC}=\frac{EC\cdot AE}{2}=\frac{18.5\cdot 4.5}{2}=41.625 \\ S_{\Delta BEC}=\frac{EC\cdot h}{2}=\frac{18.5\cdot 6}{2}=55.5 \end{array}\right\} S_{AEBC}=S_{\Delta AEC}+S_{\Delta BEC}=41.625+55.5$$

$$\boxed{S_{AEBC}=97.125}$$

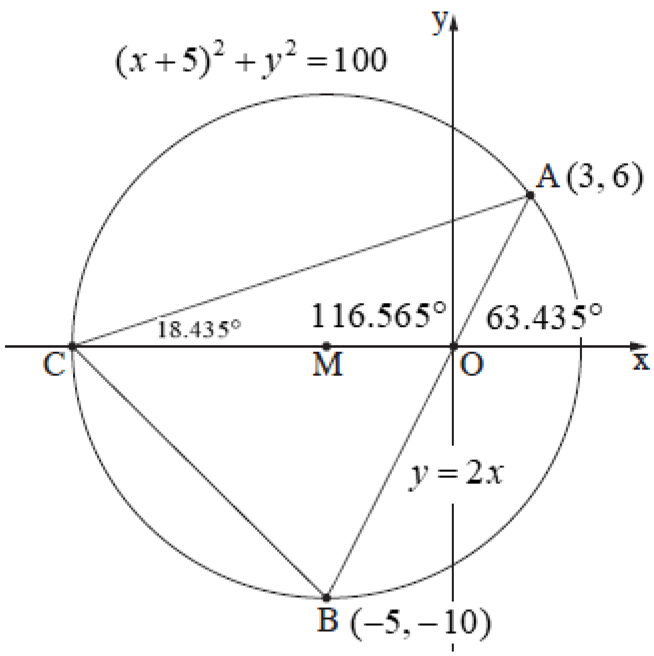
תשובה: שטח המרובע $AEBC$ **הוא** 97.125 .

א. $M(-5,0)$ **מרכז המעגל,** $C(-15,0)$ **, כאשר הקוטר ורדיוס המעגל** MC **מונחים על ציר ה-** x **.**

$$R = MC = x_M - x_C = -5-(-15) = 10$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x+5)^2 + y^2 = 100$ **.**

ב. משוואת הצלע (המיתר) AB **היא** $y = 2x$ **.**



$$(x+5)^2 + (2x)^2 = 100$$
$$x^2 + 10x + 25 + 4x^2 = 100$$
$$5x^2 + 10x - 75 = 0$$
$$x = 3 \quad \rightarrow y = 6 \quad \rightarrow \boxed{A(3,6)}$$
$$x = -5 \quad \rightarrow y = -10 \quad \rightarrow \boxed{B(-5,-10)}$$

תשובה: $A(3,6)$ **,** $B(-5,-10)$ **.**

ג. הקוטר ורדיוס המעגל MC **מונחים על ציר ה-** x **,**

ולכן נמצא את $\sphericalangle ACO$ **בעזרת הקשר** $|m| = \tan\alpha$

כאשר α **היא הזווית בכיוון <u>החיובי</u> של ציר ה-** x **.**

$$m_{AC} = \frac{6-0}{3-(-15)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$
$$m_{AC} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle ACO = 18.435°}$$
$$m_{AB} = 2 \quad \rightarrow \alpha = 63.435° \quad \rightarrow \boxed{\sphericalangle AOC = 116.565°}$$

את זווית $\sphericalangle AOC$ **מצאנו על ידי זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$.

תשובה: $\sphericalangle ACO = 18.435°$ **,** $\sphericalangle AOC = 116.565°$ **.**

ד. נמצא את שטח המשולש ABC .

$$AB=\sqrt{(3-(-5))^2+(6-(-10))^2}$$

$$\boxed{AB=8\sqrt{5}}$$

$$AC=\sqrt{(3-(-15))^2+(6-0)^2}$$

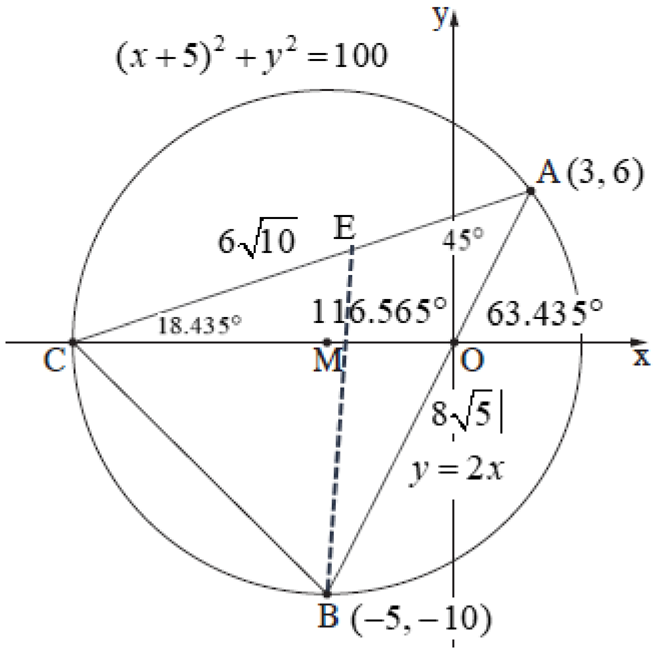
$$\boxed{AC=6\sqrt{10}}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{8\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{10}\cdot\sin 45^\circ}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=120}$$

$\sphericalangle CAO=180^\circ-18.435^\circ-116.565^\circ=45^\circ$ **(סכום זוויות** 180° **במשולש** CAO**).**

תשובה: שטח המשולש ABC **הוא** 120 .



ה. נמצא את אורך הקטע AE **, כאשר נתון כי** $S_{\Delta EAB}=56$ **, והנקודה** E **נמצאת על הצלע** AC .

$$56=\frac{AE\cdot 8\sqrt{5}\cdot\sin 45^\circ}{2}$$

$$112=AE\cdot 8\sqrt{5}\cdot\sin 45^\circ$$

$$\boxed{AE=2.8\sqrt{10}\approx 8.85}$$

$\sphericalangle CAO=180^\circ-18.435^\circ-116.565^\circ=45^\circ$ **(סכום זוויות** 180° **במשולש** CAO**).**

תשובה: אורך הקטע AE **הוא** $2.8\sqrt{10}\approx 8.85$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x}$ $(a\neq 0$ **הוא פרמטר).**

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq 0$.

(2) נמצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

$x=0$ **מאפס את המכנה ולא את המונה, ולכן הישר** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

חזקת המונה (2) גדולה מחזקת המכנה (1) ולכן אין אסימפטוטה אופקית.

(הערה – אין צורך לנמק בבגרות)

תשובה: $x=0$ **אסימפטוטה של הפונקציה** $f(x)$ **המאונכת לציר ה-** x.

ב. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ **עובר בנקודה** $(5,9.2)$**, ולכן נציב את שיעוריה בתבנית הפונקציה.**

$$9.2=\frac{5^2+5+a}{5}$$
$$46=30+a$$
$$\boxed{a=16}$$

תשובה: $a=16$.

ג. נציב $a=16$ **ונקבל ש-** $f(x)=\frac{x^2+x+16}{x}$.

נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{x(2x+1)-(x^2+x+16)}{x^2}$$
$$f'(x)=\frac{2x^2+x-x^2-x-16}{x^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-16}{x^2}}$$
$$x^2-16=0$$
$$x^2=16$$
$$x=4 \quad \rightarrow f(4)=9 \quad \rightarrow (4,9)$$
$$x=-4 \quad \rightarrow f(-4)=-7 \quad \rightarrow (-4,-7)$$

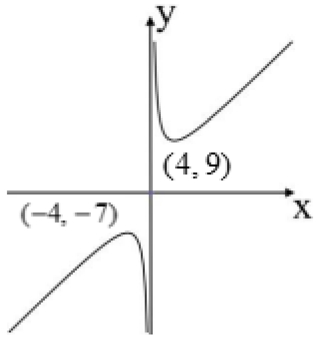
נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה :

x		4		0		-4	
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
מסקנה	↗	Min	↘		↘	Max	↗

תשובה: שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **הם** $(4,9)$ **מינימום,** $(-4,-7)$ **מקסימום.**

ד. הסקיצה המתאימה.

$$f(x)=\frac{x^2+x+16}{x}$$



תשובה: השרטוט מעל.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת גם בתחום $x\neq 0$,

שפונקציית הנגזרת שלה מקיימת $g'(x)=f(x)-11$.

(1) זוהי הזזה אנכית יחידה 11 יחידות כלפי מטה של $f(x)$,

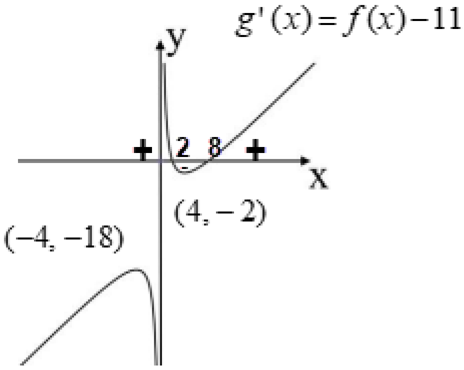
כך שנקודות הקיצון הן $(4,-2)$ מינימום, $(-4,-18)$ מקסימום.

תשובה: הסקיצה משמאל למטה

(לרבות סימונים עבור תת-סעיף ה(2).

(2) תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת מסומנים בציור,

עקב ההזזה כלפי מטה התקבלו שתי נקודות אפס, שיש למצאן.



$$g'(x)=f(x)-11$$

$$g'(x)=\frac{x^2+x+16}{x}-11$$

$$0=\frac{x^2+x+16}{x}-11$$

$$11=\frac{x^2+x+16}{x}$$

$$11x=x^2+x+16$$

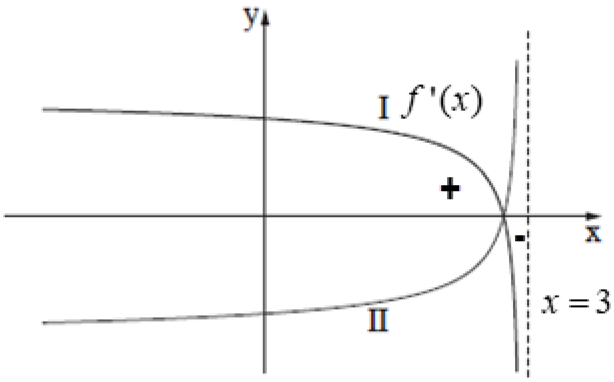
$$0=x^2-10x+16$$

$$x=2,8$$

	0		2		8		x
-		+	0	-	0	+	$g'(x)$
↘		↗	Max	↘	Min	↗	מסקנה

משמאל טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה :

תשובה: לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון הן $x=8$ מינימום, $x=2$ מקסימום.



א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \le 3$.

נזהה את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, בעזרת שיקולים המאפשרים גם לצייר את גרף הנגזרת.

- **$f'(x)$ מוגדרת בתחום $x<3$,**

  וניתן לראות שלשני הגרפים שבסרטוט יש אסימפטוטה אנכית $x=3$.

- **לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת,**

  ולשני הגרפים יש רק נקודת אפס אחת שבה $f'(x)=0$,

  ושבה הם מחליפים תחומי חיוביות ושליליות.

- **נקודת הקיצון הפנימית של $f(x)$ היא מסוג מקסימום,**

  ולכן $f(x)$ עוברת מעלייה לירידה ובהתאם $f'(x)$ עוברת מחיוביות לשליליות,

  ולכן גרף I הוא גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (ראו סימני חיוביות ושליליות שסימנו).

- **נשים לב ש- $f'(x)<0$ כאשר מתקרבים משמאל ל- $x=3$,**

  ומכאן שהגרף של $f(x)$ בירידה לקראת נקודת הקצה, והיא תהייה מסוג מינימום.

ההסבר בצהוב מספק בבחינת הבגרות, כל השאר העשרה.

תשובה: גרף I מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. נתון: $f(x)=5x+2\sqrt{15-5x}$ **, המוגדרת בתחום** $x\le 3$.

נמצא את שיעורי <u>כל</u> נקודות הקיצון ונקבע את סוגן.

$(3,15)$ **בהכרח נקודת קיצון קצה מינימום, כמוסבר בהרחבה בסעיף א.**

על פי הנתונים וגרף הנגזרת, יש רק נקודת קיצן פנימית אחת, מסוג מקסימום.

$$\boxed{f(x)=5x+2\sqrt{15-5x}}$$

$$f'(x)=5+\frac{\cancel{2}(-5)}{\cancel{2}\sqrt{15-5x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{5\sqrt{15-5x}-5}{\sqrt{15-5x}}}$$

$$0=5\sqrt{15-2x}-5 \quad \to 5=5\sqrt{15-2x} \quad /:5$$

$$1=\sqrt{15-5x} \quad (\ )^2 \quad \to test$$

$$1=15-5x$$

$$5x=14$$

$$x=2.8 \quad \to test:1\overset{?}{=}\sqrt{15-5\cdot 2.8} \quad \to 1=1 \quad o.k. \quad \to \boxed{(2.8,16),\max}$$

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת המקסימום $(2.8,16)$ **לנקודת הקצה** $(3,15)$ **,**

הרי שנקודת הקצה היא נקודת מינימום.

תשובה: $(3,15)$ **מינימום,** $(2.8,16)$ **מקסימום.**

ג. גרף הפונקציה $f(x)$ **חותך את ציר ה-** x **בנקודה אחת בלבד, בחלקו השלילי.**

ניתן לדעת שיש רק נקודת חיתוך אחת, מתוך כך שהפונקציה עולה למקסימום ב- $(2.8,16)$**,**

ונקודת המינימום בקצה היא $(3,15)$ **, מעל לציר ה-** x .

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$0=5x+2\sqrt{15-5x}$$

$$-5x=2\sqrt{15-5x} \quad (\ )^2 \quad \to test$$

$$(-5x)^2=(2\sqrt{15-5x})^2$$

$$25x^2=4(15-5x) \quad \to 25x^2=60-20x$$

$$25x^2+20x-60=0$$

$$x=1.2,-2$$

$$x=1.2 \quad \to test:-5\cdot 1.2\overset{?}{=}2\sqrt{15-5\cdot 1.2} \quad \to -6=6 \quad not\ o.k.$$

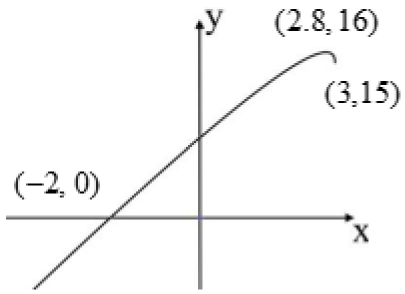
$$x=-2 \quad \to test:-5\cdot(-2)\overset{?}{=}2\sqrt{15-5\cdot(-2)} \quad \to 10=10 \quad o.k..$$

ניתן היה שלא לבדוק את הפתרון עבור $x=1.2$ **, כי נאמר שהחיתוך הוא בחלק השלילי של ציר ה-** x .

ונקודת החיתוך היחידה היא $(-2,0)$.

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם ציר ה-** x **הם** $(-2,0)$.

ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=5x+2\sqrt{15-5x}$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-4\cdot f'(x)$.

זוהי טרנספורמציה של מתיחה אנכית (הכפלה פי 4) של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

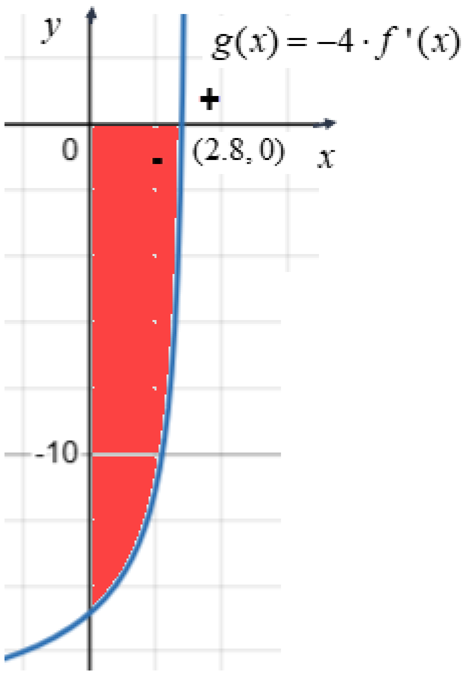
שהיה נתון בשאלה, וסיבוב סביב ציר ה- x.

מכאן שנקודת האפס של פונקציית הנגזרת $(2.8,0)$ אינה משתנה,

רק שהנגזרת עוברת משליליות לחיוביות (כי הפונקציה $-4f(x)$ עוברת מירידה לעלייה).

נחשב את השטח המבוקש (צבוע באדום),

המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y .



$$S=\int_0^{2.8}\left(0-(-4\cdot f'(x))\right)dx$$

$$S=\int_0^{2.8}4\cdot f'(x)\,dx$$

$$S=4\cdot f(x))]_0^{2.8}$$

$$\left.\begin{aligned}x=2.8:&\quad 4\cdot f(2.8)=4\cdot 16=64\\ x=0:&\quad 4\cdot f(0)=4\cdot 2\sqrt{15}=30.984\end{aligned}\right\}$$

$$S=64-30.984$$

$$\boxed{S=33.016}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא 33.016 .

.

יואל גבע
לא מתפשרים.

בגרות פה ינואר 25 מועד חורף שאלון 35471

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x+3}{x-6}$ **והסרטוט שלה.**

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq 6$.

(2) נמצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

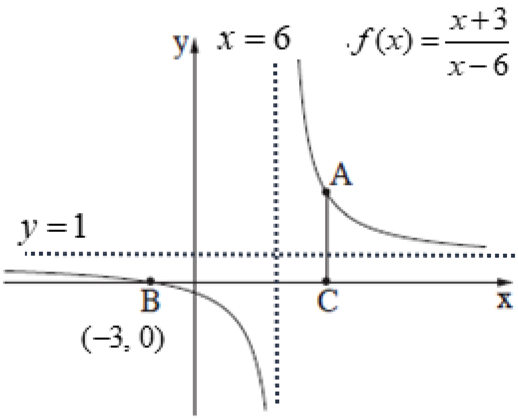
$x=6$ **מאפס את המכנה, ולא את המונה,**

לכן הישר $x=6$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** x.

חזקות המונה ובמכנה שוות (1), ולכן האסימפטוטה האופקית היא מנת המקדמים $y=\dfrac{1}{1}=1$.

ו- $y=1$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** y.

תשובה: $x=6$, $y=1$ **(אין צורך להסביר בבגרות).**



ב. נמצא את שיעורי הנקודה B **, שעל ציר ה-** x **, ולכן** $y_B=0$.

$$0=\frac{x+3}{x-6}$$
$$0=x+3$$
$$x=-3 \quad\rightarrow \boxed{B(-3,0)}$$

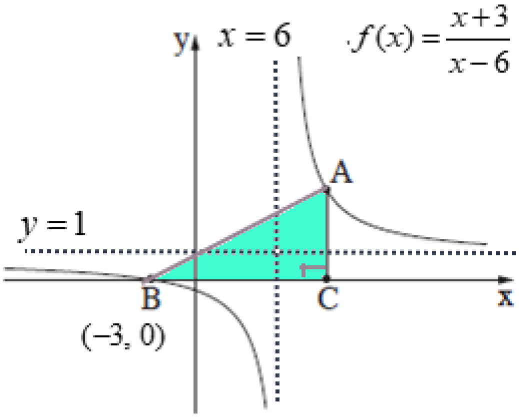
תשובה: $B(-3,0)$.

ג. הפונקציה שיש להביא למינימום היא שטח המשולש ABC.

(1) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x+3}{x-6}$, ולכן נסמן: $A(t,\frac{t+3}{t-6})$, $(t>6)$.

AC מאונך לציר ה- x ולכן $C(t,0)$, ו- $AC=y_A-y_C=\frac{t+3}{t-6}-0=\frac{t+3}{t-6}$.

CB מונח על ציר ה- x, ולכן $CB=x_C-x_B=t-(-3)=t+3$.



$$S_{\Delta ABC}=\frac{CB\cdot AC}{2}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{(t+3)\cdot\frac{t+3}{t-6}}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t+3)^2}{t-6}}$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(t+3)\cdot1\cdot(t-6)-(t+3)^2}{(t-6)^2}$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t+3)\left[2(t-6)-(t+3)\right]}{(t-6)^2}$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t+3)(2t-12-t-3)}{(t-6)^2}$$

$$\boxed{S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t+3)(t-15)}{(t-6)^2}}$$

$$(t+3)(t-15)$$

$$\cancel{t=-3},t=15 \quad \leftarrow t>6$$

$$\left.\begin{array}{l} s'(14)<0 \ \searrow \\ s'(16)>0 \ \nearrow \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{t=15,\min}$$

עבור $t=15$ שיעורי הנקודה A הם $(15,2)$

תשובה: עבור $A(15,2)$, שטח המשולש ABC מינימלי.

(2) השטח המינימלי הוא $S_{\Delta ABC}(15)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(15+3)^2}{15-6}=18$ או פשוט $S_{\Delta ABC}=\frac{CB\cdot AC}{2}=\frac{18\cdot2}{2}=18$.

תשובה: השטח המינימלי של המשולש ABC הוא 18.