פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ה, 2025, שאלון 35372:

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת הקובץ

יואל גבע
לא מתפשרים.

בגרות פה ינואר 25 מועד חורף שאלון 35372

במפעל לייצור רהיטים מכינים שני סוגים של רהיטים: ספות וכורסאות.
בתהליך הייצור יש שני שלבים, שלב החיתוך ושלב הריפוד.
במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את מכונת החיתוך המשך 32 שעות לכל היותר,
ואת מכונת הריפוד במשך 36 שעות לכל היותר.

א. נסמן ב- x את מספר הספות, וב- y את מספר הכיסאות שמייצרים במפעל במחזור ייצור אחד.

נוסיף לטבלה את האילוצים הנובעים ממגבלות השעות.

	זמן הפעלת מכונת החיתוך (בשעות)	זמן הפעלת מכונת הריפוד (בשעות)
x - ספה	4	2
y - כורסה	2	6
אילוץ	לכל היותר 32 שעות	לכל היותר 36 שעות

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה,
והן מהעובדה שכמויות הרהיטים אינם שליליים.

תשובה: מערכת האילוצים של הבעיה היא:

$$\begin{cases} 4x+2y\le 32 \\ 2x+6y\le 36 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}.$$

ב. נסרטט את התחום האפשרי המתאים לבעיה.

כדי לצייר את שני האילוצים הראשונים,

נבנה טבלת ערכים קטנה.

$4x+2y=32$

$$x=0 \quad \rightarrow 2y=32 \quad \rightarrow y=16$$
$$y=0 \quad \rightarrow 4x=32 \quad \rightarrow x=8$$

0	16
8	0

$2x+6y=36$

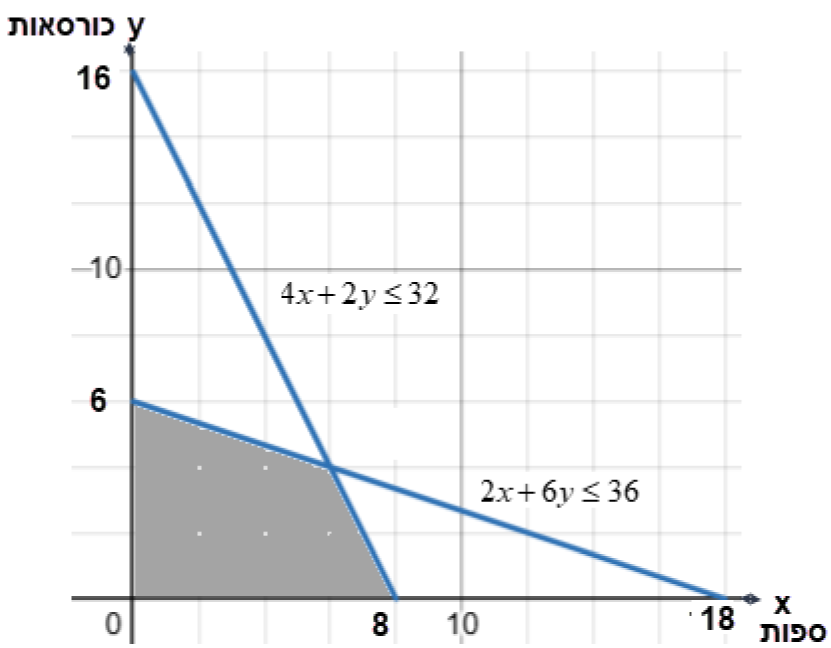
$$x=0 \quad \rightarrow 6y=36 \quad \rightarrow y=6$$
$$y=0 \quad \rightarrow 2x=36 \quad \rightarrow x=18$$

0	6
18	0

נציב $(0,0)$ **באילוץ** $4x+2y\le 32$ **ונקבל** $0\le 32$ **, ולכן** $(0,0)$ **אפשרית, ונצבע מתחת לישר.**

נציב $(0,0)$ **באילוץ** $2x+6y\le 36$ **ונקבל** $0\le 36$ **, ולכן** $(0,0)$ **אפשרית, ונצבע מתחת לישר.**

וכמובן, מדובר ברביע הראשון שבו $x\ge 0$ **, וגם** $y\ge 0$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

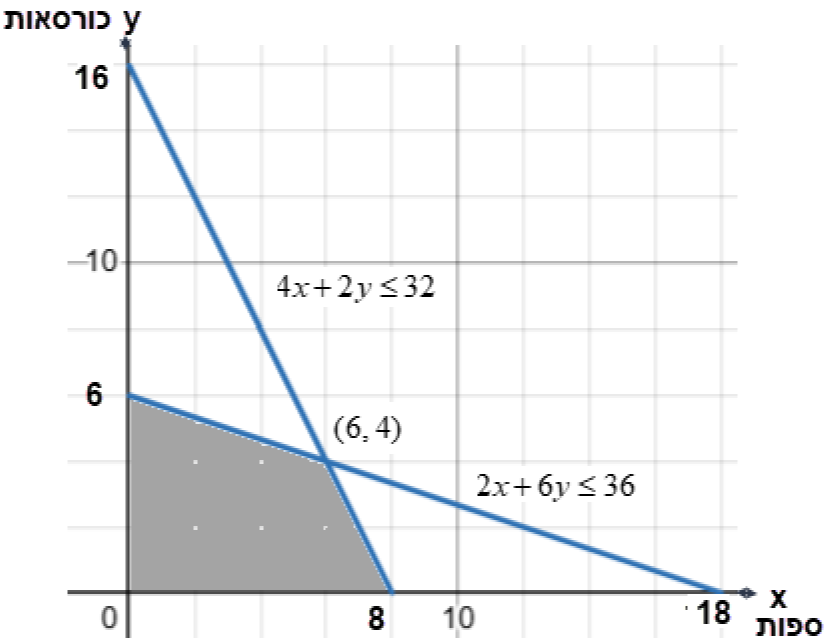
תשובה: הסרטוט מעל.

ג. (1) הרווח של המפעל מכל ספה הוא 400 שקלים ומכל כורסה 700 שקלים.

תשובה: פונקציית המטרה היא $f(x,y)=400x+700y$.

(2) נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה – כמה ספות וכמה כורסאות יש לייצר כדי להשיג רווח מקסימלי.

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין שני הישרים.



$$\begin{cases}4x+2y=32\\ 2x+6y=36 \quad /\cdot(-2)\end{cases}$$

$$+\begin{cases}4x+2y=32\\ -4x-12y=-72\end{cases}$$

$$-10y=-40 \quad /:(-10)$$
$$y=4$$
$$4x+2\cdot 4=32$$
$$4x+8=32$$
$$4x=24 \quad /:4$$
$$x=6 \quad \rightarrow \boxed{(6,4)}$$

	$f(x,y)=400x+700y$
$(0,0)$	$f(0,0)=400\cdot 0+700\cdot 0=0$
$(0,6)$	$f(0,6)=400\cdot 0+700\cdot 6=4,200$
$(6,4)$	$f(6,4)=400\cdot 6+700\cdot 4=5,200$
$(8,0)$	$f(8,0)=400\cdot 8+700\cdot 0=3,200$

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא $5,200$ שקלים.

תשובה: למפעל כדאי לייצר 6 ספות ו- 4 כורסאות במחזור ייצור אחד, כדי להשיג רווח מקסימלי.

ד. באחד ממחזורי הייצור ייצרו במפעל כורסאות בלבד, מספר הכורסאות המקסימלי האפשרי.

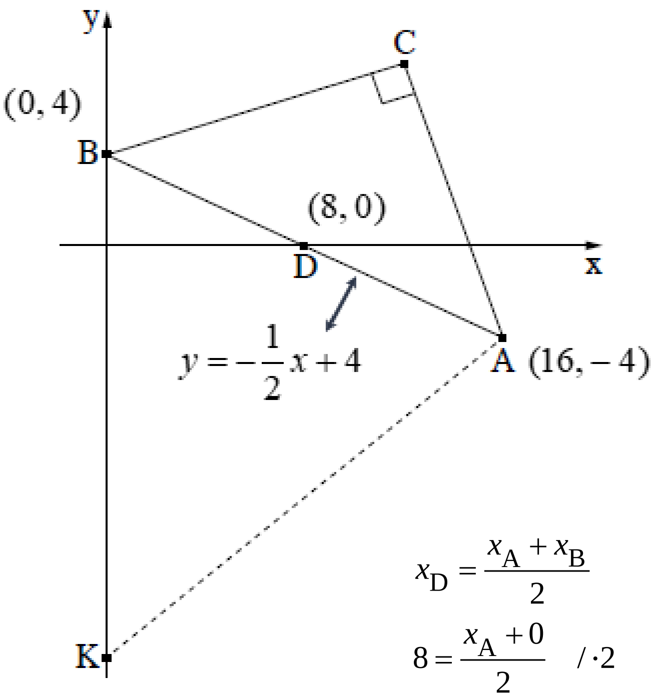
על פי התחום האפשרי, שהתקבל ממערכת האילוצים של הבעיה, ניתן לייצר עד 6 כורסאות במחזור ייצור אחד.

תשובה: במפעל ייצרו 6 כורסאות במחזור ייצור זה.

א. משוואת הצלע AB **היא** $y=-\frac{1}{2}x+4$

הנקודה B **נמצאת על ציר ה-** y **ולכן** $x_B=0$ **, ו-** $\boxed{B(0,4)}$.

הנקודה D **נמצאת על ציר ה-** x **, ולכן** $y_D=0$.



$$0=-\frac{1}{2}x+4$$
$$\frac{1}{2}x=4 \quad /:(\frac{1}{2})$$
$$x=8 \quad \rightarrow \boxed{D(8,0)}$$

תשובה: $B(0,4)$, $D(8,0)$.

ב. הנקודה $D(8,0)$ **היא אמצע הצלע** AB .

$$y_D=\frac{y_A+y_B}{2}$$
$$0=\frac{y_A+4}{2} \quad /\cdot 2$$
$$0=y_A+4$$
$$-4=y_A$$

ולכן $A(16,-4)$

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}$$
$$8=\frac{x_A+0}{2} \quad /\cdot 2$$
$$16=x_A$$

ניתן גם למצוא את שיעורי הנקודה A **בשיטת הדילוגים, עם הפרשים שווים:** $x=0,8,16$, $y=4,0,-4$.

רק לנמק, שההפרשים שווים בין שיעורי הנקודות כי הנקודה $D(8,0)$ **היא אמצע הצלע** AB .

תשובה: $A(16,-4)$.

ג. נתון כי משוואת הצלע BC **היא** $y=\frac{1}{3}x+4$.

(1) BC **מאונך לצלע** AC **כי** $\sphericalangle ACB=90^\circ$ **, כאשר** $m_{BC}=\frac{1}{3}$.

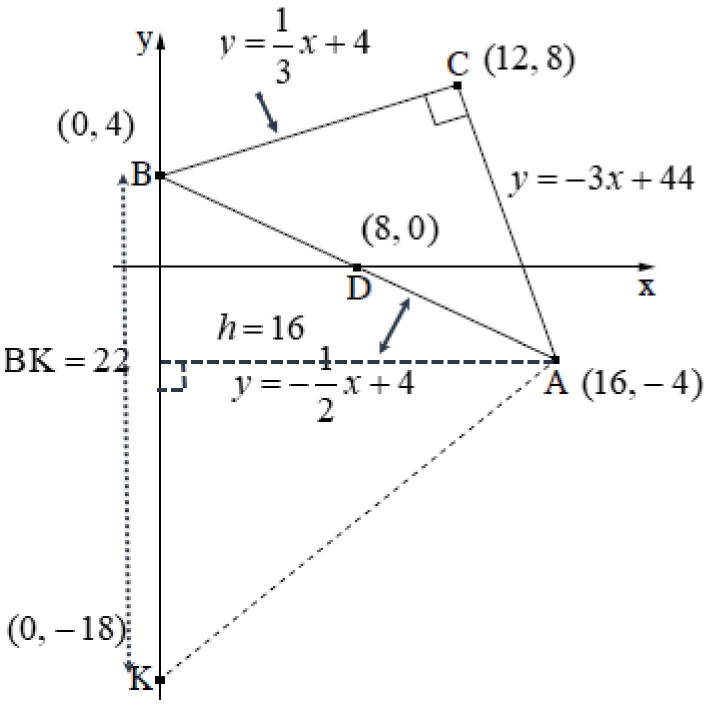
$m_{BC}\cdot m_{AC}=-1 \rightarrow m_{AC}=-3$ **, (שיפוע הופכי לנגדי).**

נמצא את משוואת הצלע AC **, על-פי** $m_{AC}=-3$ **, ו-** $A(16,-4)$.

$$y-(-4)=-3(x-16)$$
$$y+4=-3x+48$$
$$\boxed{y=-3x+44}$$

תשובה: משוואת הצלע AC **היא** $y=-3x+44$.

יואל גבע
לא מתפשרים.



(2) הקודקוד C **הוא נקודת חיתוך של הצלעות** AC **ו-** BC.

$$C\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+4 \\ y=-3x+44 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}x+4=-3x+44$$

$$3\frac{1}{3}x=40 \quad /:(3\frac{1}{3})$$

$$\left.\begin{array}{l} x=12 \\ y=-3\cdot 12+44=8 \end{array}\right\} \boxed{C(12,8)}$$

תשובה: C(12, 8).

ד. נתון: K(0, −18) .

(1) נחשב את שטח המשולש ABC .

$$BC=\sqrt{(12-0)^2+(8-4)^2}=\sqrt{160}$$

$$AC=\sqrt{(12-16)^2+(8-(-4))^2}=\sqrt{160}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{\sqrt{160}\cdot\sqrt{160}}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=80}$$

תשובה: שטח המשולש ABC **הוא** 80 .

(2) נחשב את שטח המרובע BCAK **, כסכום של שטח המשולש** ABC **והמשולש** BKA.

לצלע BK **ב-** ΔBKA**, המונחת על ציר ה-** y **יש גובה המאונך לציר ה-** y .

$$BK=y_B-y_K=4-(-18)=22$$

$$h=16-0=16$$

$$S_{\Delta BKA}=\frac{BK\cdot h}{2}=\frac{22\cdot 16}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta BKA}=176}$$

$$S_{BCAK}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BKA}=80+176$$

$$\boxed{S_{BCAK}=256}$$

תשובה: שטח המרובע BCAK **הוא** 256 .

צריכת המים החודשית של משפחות בעיר מסוימת מתפלגת נורמלית.

א. סטיית התקן היא 2.4 **מ"ק** $= S$ **(מ"ק – מטר מעוקב).**

16% **מן המשפחות בעיר זו צורכות <u>פחות</u> מ-** 7 **מ"ק מים בחודש.**

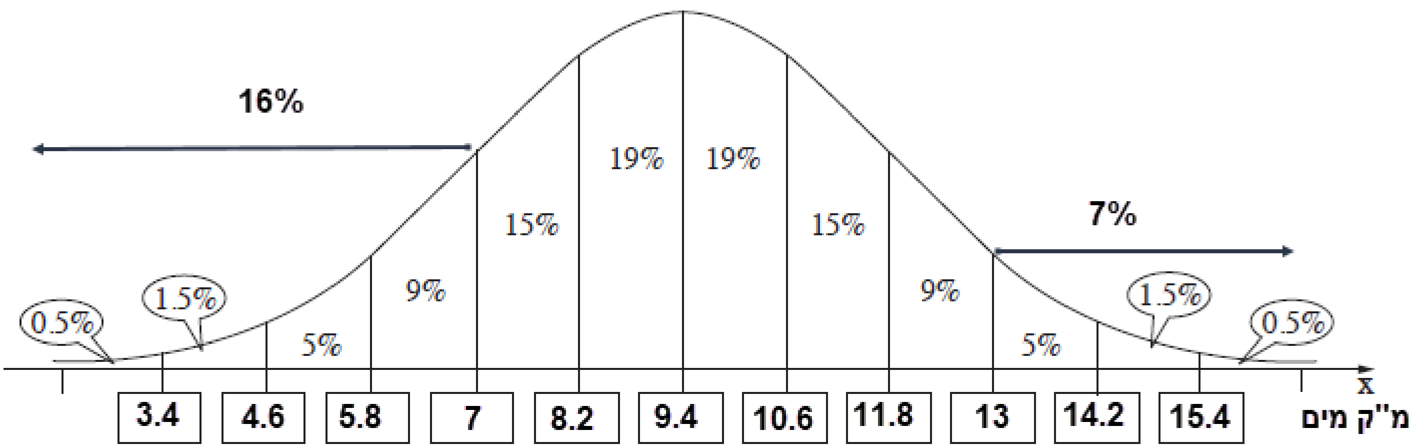
(1) נחשב משמאל לימין את האחוז המצטבר, עד שנקבל $0.5\%+1.5\%+5\%+9\%=16\%$ **.**

לכן, צריכה של 7 **מ"ק מים בחודש נמצאת במרחק של סטיית תקן אחת מתחת לממוצע.**

ולכן הממוצע הוא 9.4 **מ"ק** $7+2.4=$ **.**

תשובה: הממוצע הוא 9.4 **מ"ק** $\bar{x}=$ **מים.**

(2) נשלים את גרף ההתפלגות הנורמלית, כאשר חצי סטיית תקן הוא 1.2 **מ"ק מים** $2.4:2=$ **.**



תשובה: הגרף מעל.

ב. מעל צריכה של 13 **מ"ק מים נמצאות** $5\%+1.5\%+0.5=7\%$ **מהמשפחות.**

תשובה: 7% **מהמשפחות בעיר זו צורכות יותר מ-** 13 **מ"ק מים בחודש.**

ג. 560 **משפחות בעיר זו צורכות מעל צריכה של** 13 **מ"ק מים.**

נסמן ב- n **את מספר המשפחות בעיר.**

$$7\%\cdot n=560$$

$$\frac{7}{100}\cdot n=560$$

$$0.07\cdot n=560 \quad /:0.07$$

$$\boxed{n=8{,}000}$$

<u>דרך פתרון חלופית</u>

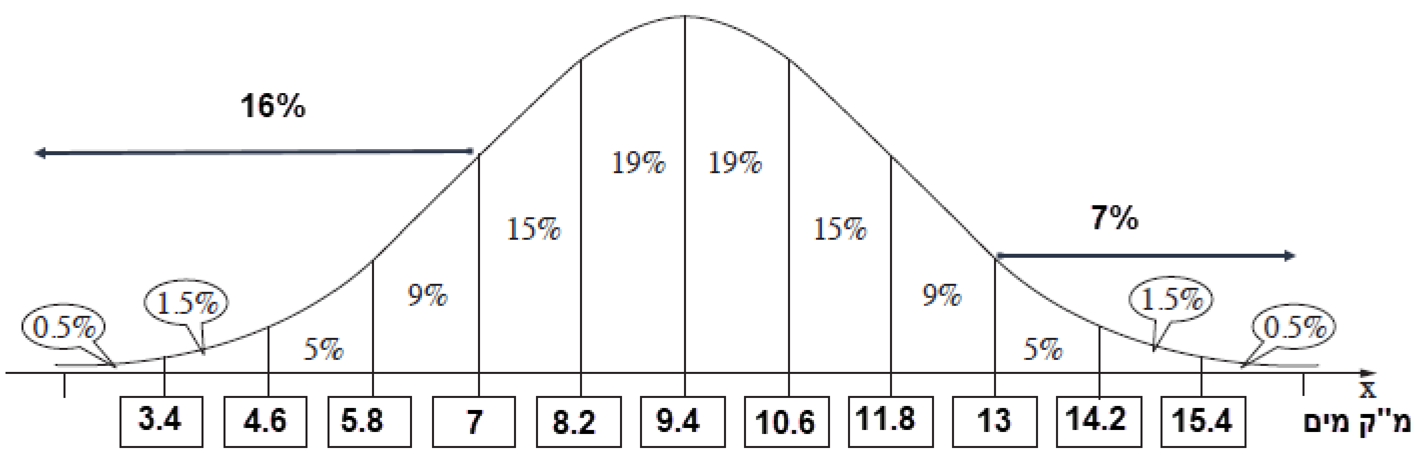
אם 7% **מהמשפחות הן** 560 **משפחות,**

אז 1% **מהמשפחות הן** 80 **משפחות** $560:7=$

ו- 100% **מהמשפחות הן** $8{,}000$ **משפחות** $80\cdot100=$

תשובה: על פי גרף ההתפלגות הנורמלית יש בעיר הזאת $8{,}000$ **משפחות סך הכול.**

נכתב ע"י עפר ילין



ד. בגרף ההתפלגות הנורמלית, שבו השלמנו את הצריכות במלבנים, ההבדלים הם של חצי סטיית תקן.

לכן, צריכה של 13 מ"ק מים היא במרחק של $\frac{3}{2}=1.5$ מהממוצע, ולכן ציון התקן הוא 1.5,

ו- $5\%+1.5\%+0.5=7\%$ מהמשפחות צרכו יותר מצריכה זו.

כמו כן, צריכה של 3.4 מ"ק מים היא $\frac{5}{2}=2.5$ מתחת לממוצע, ולכן ציון התקן הוא -2.5.

ו- 0.5% מהמשפחות צרכו פחות מצריכה זו.

מכאן של- $7\%+0.5\%=7.5\%$ מהמשפחות יש ציון תקן שגדול מ- 1.5 או קטן מ- (-2.5).

תשובה: ל- 7.5% משמשפחות בעיר זו נבדק שעון המים.

ה. משפחת כהן גרה בעיר זו, וצריכת המים החודשית שלה היא 12 מ"ק.

צריכת מים חודשית של 12 מ"ק היא לא בתחום (על פי סעיף ד) שבו בודקים את שעון המים.

תשובה: למשפחת כהן לא נבדק שעון המים.

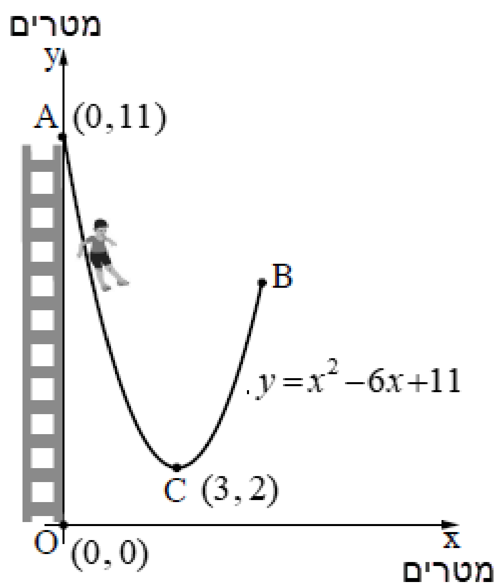
הפונקציה הריבועית $y=x^2-6x+11$

מתארת את המסלול בצורת פרבולה של מגלשת מים.

למגלשה צולים מסולם אנכי המתחיל בקרקע בנקודה $O(0,0)$ ומסתיים בנקודה A.

ציר ה- y מתאר את גובה המגלשה (במטרים) מעל הקרקע

ציר ה- x מונח על הקרקע ומתאר את המרחק (במטרים) מן הסולם (AO) .



א. נתונה הפרבולה $y=x^2-6x+11$.

גובה הסולם (AO) , מסומן בנקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y .

בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x מתקיים $x=0$, נקבל $y=11$.

תשובה: גובה הסולם (AO) הוא 11 מטרים.

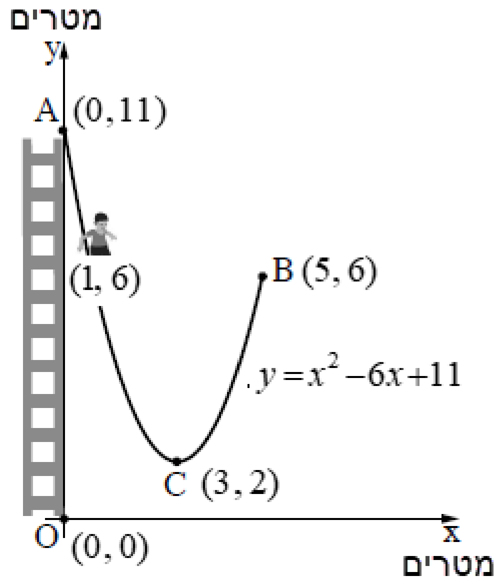
ב. שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה בעלת המינימום $y=x^2-6x+11$, מתקבל על ידי הנוסחה $x=-\frac{b}{2a}$.

$x=\frac{-(-6)}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$.

נציב $x=3$: $y=3^2-6\cdot3+11=2$

תשובה: הנקודה C נמצאת בגובה של 2 מטרים מעל הקרקע.

נכתב ע"י עפר ילין



ג. הנקודה B נמצאת בגובה של 6 מטרים מעל הקרקע.

נציב $y = 6$ במשוואת הפרבולה.

$$6 = x^2 - 6x + = 11$$

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

$$x_{1,2} \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow \boxed{x_B = 5}$$

$$x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$x_B = 5$ כי הנקודה B כבר מעבר לנקודה הנמוכה ביותר במגלשה.

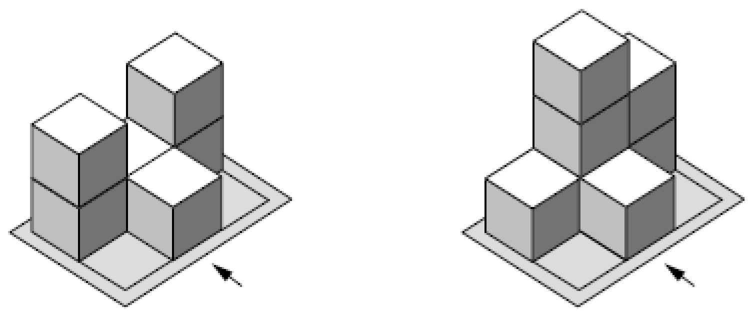
תשובה: $x_B = 5$.

ד. נועם היה במגמת עלייה מהנקודה C , <u>ועד</u> לנקודה B .

תשובה: עבור ערכים של $3 < x < 5$ היה נועם במגמת עלייה.

בסרטוט שלפנינו מתוארים שני מבנים I ו- II הבנויים מקוביות זהות.

החץ בסרטוט מסמן את המבט מלפנים.



מבנה II   מבנה I

נשים לב שבשני המבנים, במבט מלפנים, יש שתי שורות ושלושה טורים.

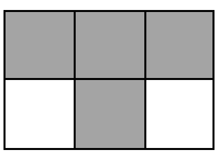
א. נביט מלמעלה על המבנה הימני, מבנה I.

בשורה הראשונה יש קוביה בטור האמצעי, ובשורה השנייה קוביות בכל משבצת.

נביט מלמעלה על המבנה השמאלי, מבנה II.

נראה שבשורה הראשונה יש קוביה בטור האמצעי, ובשורה השנייה קוביות בכל משבצת.

לכן המבט מלמעלה הנתון מתאים למבנה I וגם למבנה II.



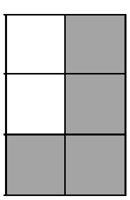
מבט מלמעלה

נביט מצד ימין על מבנה I , במטרה לראות מה מספר הקוביות הגדול ביותר בכל טור .

נראה שבטור הימני יש שתי קוביות בשורה הראשונה, שלוש בשנייה ואחת בשלישית,

ובטור השמאלי יש בדיוק קוביה אחת.

לכן, המבט מימין הנתון מתאים למבנה I.



מבט מימין

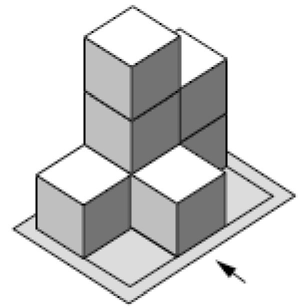
נביט מצד ימין על מבנה II.

נראה שבטור הימני יש שתי קוביות בשורה הראשונה, אחת בשנייה ושתיים בשלישית,

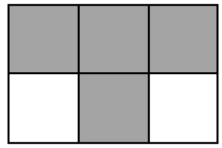
ובטור השמאלי יש בדיוק קוביה אחת.

לכן המבט מימין הנתון אינו מתאים למבנה II (אין במבנה II שלוש קוביות בטור הימני).

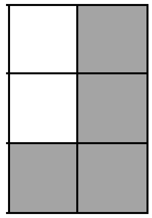
תשובה: מבנה I מתאים לשני המבטים הנתונים בשאלה.



מבנה I



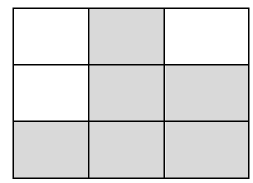
מבט מלמעלה



מבט מימין

ב. נביט על מבנה I מלפנים, במטרה לראות מה מספר הקוביות הגדול ביותר בכל טור.

נראה שבטור הימני יש משבצת עם שתי קוביות, באמצעי משבצת עם שלוש קוביות, ובשמאלי משבצת עם קוביה.



תשובה: סרטטנו את המבט מלפנים של מבנה I , שבחרנו בסעיף א.

ג. (1) נבדוק כמה קוביות ניתן להסיר מן מבנה I , מבלי לשנות את המבט מלמעלה והמבט מימין.

כדי לא לשנות את המבט מלמעלה, אין להשאיר משבצות ריקות שקודם היו בהן קוביות.,

לכן למשל לא ניתן להסיר את הקוביות שבודדות במשבצות שלהן.

כדי לא לשנות את המבט מימין, לא ניתן להסיר קוביות בכל טור, מהמשבצת שיש בה הכי הרבה קוביות.

מתקבל שיש רק אפשרות אחת, הורדת קוביה אחת מהמשבצת שיש בה שתי קוביות.

תשובה: קוביה אחת.

(2) נרשום בתבנית כמה קוביות יש בכל משבצת, לאחר ההורדה של הקוביה השנייה בטור הימני במבט מלפנים.

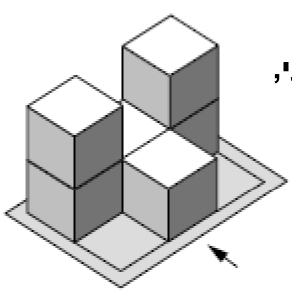
1	3	1
0	1	0

תשובה: השלמנו את תרשים המספרים של המבנה לאחר ההסרה.

ד. 1. גם במבט מלפנים וגם במבט מאחור נראה במבנה I , שלוש קוביות בטור האמצעי,

אבל מספר הקוביות בטור הימני ובטור השמאלי יתחלפו.

תשובה: היגד 1 לא נכון.



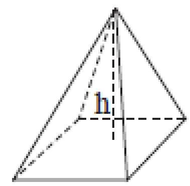
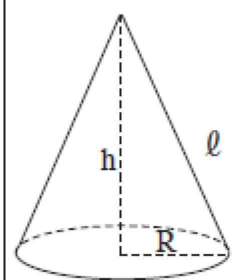
מבנה II

2. גם במבט מלפנים וגם במבט מאחור נראה במבנה II , קוביה אחת בטור האמצעי,

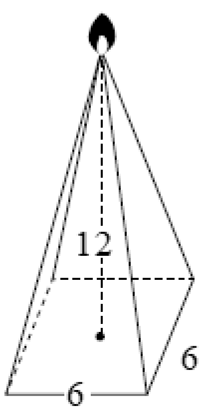
ומספר קוביות זהה בטור הימני ובטור השמאלי (2).

תשובה: היגד 2 נכון.

במפעל מייצרים שני סוגים של נרות שעווה

הגוף	סרטוט	שטח מעטפת (M)	שטח פנים (F)	נפח (V)
<u>פירמידה ישרה שבסיסה מלבן</u> S הוא שטח הבסיס h הוא גובה הפירמידה		M – סכום שטחי הפאות הצדדיות	$F = M + S$	$V = \frac{S \cdot h}{3}$
<u>חרוט ישר</u> R הוא רדיוס הבסיס ℓ הוא הקו היוצר h הוא גובה החרוט		$M = \pi \cdot R \cdot \ell$	$F = M + \pi \cdot R^2$	$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$

א. נחשב את נפח השעווה של נר מסוג א', שצורתו פירמידה שבסיסה ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ וגובהה 12 ס"מ.



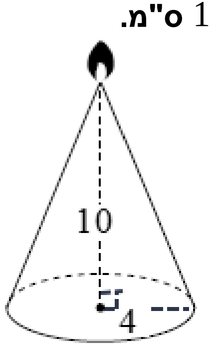
נר מסוג א'

נפח פירמידה, ששטח הבסיס שלה הוא S וגובהה הוא h, הוא $V = \frac{S \cdot h}{3}$.

נפח הפירמידה הוא 144 **סמ"ק** $= \frac{6 \cdot 6 \cdot 12}{3} = V$.

תשובה: נפח השעווה של נר מסוג א' הוא 144 סמ"ק.

ב. נחשב את נפח השעווה של נר מסוג ב', שצורתו חרוט ישר שרדיוס בסיסה 4 ס"מ וגובהה 10 ס"מ.



נר מסוג ב'

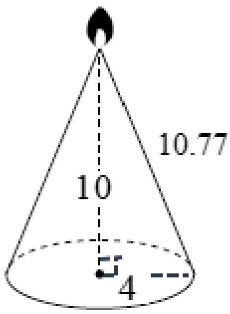
נפח חרוט, שרדיוסו R וגובהו הוא h, הוא $V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$.

נפח החרוט הוא $167.55 \approx 53\frac{1}{3}\pi$ **סמ"ק** $= \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 10}{3} = V$.

כיוון שנפח זה גדול מנפח של הנר בצורת פירמידה, אז נר זה ידלק יותר זמן.

תשובה: נר מסוג ב' ידלק זמן ארוך יותר.

ג. **(1) נמצא את האורך של הקו היוצר (ℓ), באמצעות משפט פיתגורס.**



נר מסוג ב'

$$10^2+4^2=\ell^2$$
$$116=\ell^2$$
$$\ell=\sqrt{116}$$
$$\ell=\sqrt{116}\approx 10.77 \text{ ס"מ}$$

תשובה: האורך של הקו היוצר של נר מסוג ב' הוא $\sqrt{116}\approx 10.77$ **ס"מ.**

(2) שטח המעטפת נתון על ידי הנוסחה $M=\pi\cdot R\cdot\ell$.

$$M=\pi\cdot 4\cdot 10.77$$
$$M=135.34 \text{ סמ"ר}$$

תשובה: שטח המעטפת של נר מסוג ב' הוא 135.34 **סמ"ר.**

ד. ביום מסוים התקבלה במפעל הזמנה לייצור 300 **נרות מסוג א' ו-** 200 **נרות מסוג ב' .**

נחשב את הנפח הכולל הנדרש, ונראה האם נפח של $60,000$ **שעווה יספיק.**

נפח השעווה של נר מסוג א' הוא 144 **סמ"ק .**

נפח השעווה של נר מסוג ב' הוא כ- 167.55 **סמ"ק.**

סך הכול הנפח הנדרש בעבור ההזמנה הוא $76,710$ **סמ"ק** $=300\cdot 144+200\cdot 167.55$.

תשובה: נפח של $60,000$ **סמ"ק שעווה לא יספיק למפעל לייצור הזמנה זו (**$76,710>60,000$**).**