הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1(1+1)}{2}=1$ **אגף שמאל:** 1 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $1+2+3+4+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{1+2+3+4+...+k}_{\downarrow}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכחה בדרך אחרת

על-פי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית,

עבור $a_1=1$, $d=1$ **, כאשר n הוא מספר האיברים,**

$$1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$12+17+22+27+...+(5n+7)=\frac{n(5n+19)}{2}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $12=\frac{1(5\cdot 1+19)}{2}$ **אגף שמאל:** 12 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $12+17+22+27+...+(5k+7)=\frac{k(5k+19)}{2}$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{12+17+22+27+...+(5k+7)}_{\downarrow}+(5(k+1)+7)=\frac{(k+1)(5(k+1)+19)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k(5k+19)}{2}+5k+12=\frac{(k+1)(5k+24)}{2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k(5k+19)+2(5k+12)}{2}=\frac{(k+1)(5k+24)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5k^2+19k+10k+24}{2}=\frac{(k+1)(5k+24)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5k^2+29k+24}{2}=\frac{(k+1)(5k+24)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(5k+24)}{2}=\frac{(k+1)(5k+24)}{2} \quad \leftarrow *$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $12+17+22+27+...+(5n+7)=\frac{n(5n+19)}{2}$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הסבר לשורת ה-* על פי פירוק לגורמים של טרינום ריבועי, באמצעות משוואה ריבועית.

$$5k^2+29k+24=0 \quad \rightarrow k=-1,-\frac{24}{5}$$

$$5k^2+29k+24=5(k+1)(k+\frac{24}{5})$$

$$5k^2+29k+24=(k+1)(5k+24)$$

הוכחה בדרך אחרת

עבור $a_1=2\,,\,d=5$ **,**

נביע את מספר האיברים באגף שמאל באמצעות n **:**

$$a_t=5n+7$$
$$12+5(t-1)=5n+7$$
$$12+5t-5=5n+7$$
$$5t=5n$$
$$t=n$$

ולכן באגף שמאל יש n **איברים.**

על-פי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

$$12+17+22+27+...+(5n+7)=\frac{n(12+5n+7)}{2}$$
$$12+17+22+27+...+(5n+7)=\frac{n(5n+19)}{2}$$

תשובה: הוכחנו ש- $12+17+22+27+...+(5n+7)=\frac{n(5n+19)}{2}$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1^2}{4}(1+1)^2=1$ אגף שמאל: $1^3=1$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{k^2}{4}(k+1)^2$ = $1^3+2^3+3^3+...+k^3$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{1^3+2^3+3^3+...+k^3}_{\downarrow}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+1+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{4}(k+1)^2 \quad +(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{4}(k+1^2) \quad +(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$ נכון לכל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{3\cdot 1^2+1}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 2^2+2}{5\cdot 8}+\frac{3\cdot 3^2+3}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{3n^2+n}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n(n+1)}{3n+2}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1(1+1)}{3\cdot1+2}=\frac{2}{5}$ **אגף שמאל:** $\frac{3\cdot1^2+1}{2\cdot5}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{3\cdot1^2+1}{2\cdot5}+\frac{3\cdot2^2+2}{5\cdot8}+\frac{3\cdot3^2+3}{8\cdot11}+...+\frac{3k^2+k}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k(k+1)}{3k+2}$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.**

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{3\cdot1^2+1}{2\cdot5}+\frac{3\cdot2^2+2}{5\cdot8}+\frac{3\cdot3^2+3}{8\cdot11}+...+\frac{3k^2+k}{(3k-1)(3k+2)}}_{\downarrow}+\frac{3(k+1)^2+k+1}{(3(k+1)-1)(3(k+1)+2)}=\frac{(k+1)(k+2)}{3(k+1)+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)}{3k+2}+\frac{3(k+1)^2+k+1}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{3k+5}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)}{3k+2}+\frac{3(k+1)^2+k+1}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{3k+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3k+5)k(k+1)+3(k+1)^2+1(k+1)}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{3k+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)\left[k(3k+5)+3(k+1)+1\right]}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{3k+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k^2+5k+3k+3+1)}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{3k+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k^2+8k+4)}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{3k+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k+2)(k+2)}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{3k+5} \quad \leftarrow *$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)}{3k+5}=\frac{(k+1)(k+2)}{3k+5}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{3\cdot1^2+1}{2\cdot5}+\frac{3\cdot2^2+2}{5\cdot8}+\frac{3\cdot3^2+3}{8\cdot11}+...+\frac{3n^2+n}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n(n+1)}{3n+2}$ **נכון לכל n טבעי.**

הסבר לשורת ה-* על פי פירוק לגורמים של טרינום ריבועי, באמצעות משוואה ריבועית.

$$3k^2+8k+4=0 \quad \to k=-\frac{2}{3},-2 \quad \to 3k^2+8k+4=3(k+\frac{2}{3})(k+2)=(3k+2)(k+2)$$

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$10+18+24+\ldots+(n+1)(n+4)=\frac{n(n+4)(n+5)}{3}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1(1+4)(1+5)}{3}=10$ **אגף שמאל:** 10 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $10+18+24+...+(k+1)(k+4)=\frac{k(k+4)(k+5)}{3}$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{10+18+24+...+(k+1)(k+4)}_{\downarrow}+(k+1+1)(k+1+4)=\frac{(k+1)(k+1+4)(k+1+5)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+4)(k+5)}{3}+(k+2)(k+5)=\frac{(k+1)(k+5)(k+6)}{3}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+4)(k+5)}{3}+(k+2)(k+5)=\frac{(k+1)(k+5)(k+6)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+4)(k+5)+3(k+2)(k+5)}{3}=\frac{(k+1)(k+5)(k+6)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+5)\left[k(k+4)+3(k+2)\right]}{3}=\frac{(k+1)(k+5)(k+6)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+5)(k^2+4k+3k+6)}{3}=\frac{(k+1)(k+5)(k+6)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+5)(k^2+7k+6)}{3}=\frac{(k+1)(k+5)(k+6)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+5)(k+1)(k+6)}{3}=\frac{(k+1)(k+5)(k+6)}{3}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $10+18+24+...+(n+1)(n+4)=\frac{n(n+4)(n+5)}{3}$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{1+1}-\frac{1}{1+2})=\frac{1}{3}$ **אגף שמאל:** $\frac{1}{3}$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.**

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{k(n+2)}}_{\downarrow}+\frac{1}{(k+1)(k+1+2)}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+1+1}-\frac{1}{k+1+2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}) + \frac{1}{(k+1)(k+3)})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3})$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(k+1)(k+3)})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{2}{(k+1)(k+3)})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{k+3-2}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{\cancel{k+1}}{\cancel{(k+1)}(k+3)}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3})$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+...+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{n-1}=2^n-1$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $2^1-1=1$ **אגף שמאל:** $2^0=1$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{k-1}=2^k-1$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{k-1}}_{\downarrow}+2^{k+1-1}=2^k-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^k-1 \quad +2^k=2^{k+1}-1$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow 2\cdot 2^k-1=2^{k+1}-1$$

$$\Leftrightarrow 2^{k+1}-1=2^{k+1}-1$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{n-1}=2^n-1$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הוכחה בדרך אחרת

על-פי נוסחת הסכום של סדרה הנדסית,

עבור $a_1=1, q=2$ **, כאשר** n **הוא מספר האיברים,**

$$2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{n-1}=\frac{1(2^n-1)}{2-1}$$

$$2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{n-1}=2^n-1$$

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+7\cdot 2^4+\ldots+(2n-1)2^n=6+(2n-3)2^{n+1}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $6+(2\cdot1-3)2^{1+1}=2$ **אגף שמאל:** $1\cdot2^1=2$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $1\cdot2^1+3\cdot2^2+5\cdot2^3+7\cdot2^4+...+(2k-1)2^k=6+(2k-3)2^{k+1}$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{1\cdot2^1+3\cdot2^2+5\cdot2^3+7\cdot2^4+...+(2k-1)2^k}_{\downarrow}+(2(k+1)-1)2^{k+1}=6+(2(k+1)-3)2^{k+1+1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 6+(2k-3)2^{k+1} \qquad +(2k+1)2^{k+1}=6+(2k-1)2^{k+2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow 6+(2k-3)2^{k+1}+(2k+1)2^{k+1}=6+(2k-1)2^{k+2}$$
$$\Leftrightarrow 6+2^{k+1}(2k-3+2k+1)=6+(2k-1)2^{k+2}$$
$$\Leftrightarrow 6+2^{k+1}(2k-3+2k+1)=6+(2k-1)2^{k+2}$$
$$\Leftrightarrow 6+2^{k+1}(4k-2)=6+(2k-1)2^{k+2}$$
$$\Leftrightarrow 6+2^{k+1}\cdot2(2k-1)=6+(2k-1)2^{k+2}$$
$$\Leftrightarrow 6+(2k-1)2^{k+2}=6+(2k-1)2^{k+2}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $1\cdot2^1+3\cdot2^2+5\cdot2^3+7\cdot2^4+...+(2n-1)2^n=6+(2n-3)2^{n+1}$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$1+\frac{5}{5}+\frac{9}{25}+...+\frac{4n-3}{5^{n-1}}=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4n+2}{5^{n-1}}\right]$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{4}\left[10-\frac{4\cdot1+2}{5^{1-1}}\right]=1$ **אגף שמאל:** 1 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1+\frac{5}{5}+\frac{9}{25}+...+\frac{4k-3}{5^{k-1}}=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+2}{5^{k-1}}\right]$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underline{1+\frac{5}{5}+\frac{9}{25}+...+\frac{4k-3}{5^{k-1}}}+\frac{4(k+1)-3}{5^{k+1-1}}=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4(k+1)+2}{5^{k+1-1}}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+2}{5^{k-1}}\right]+\frac{4k+1}{5^{k+1-1}}=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+6}{5^{k}}\right]$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+2}{5^{k-1}}\right]+\frac{1}{4}\cdot\frac{4(4k+1)}{5^{k+1-1}}=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+6}{5^{k}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+2}{5^{k-1}}+\frac{4(4k+1)}{5^{k}}\right]=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+6}{5^{k}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[10-\frac{5(4k+2)-4(4k+1)}{5^{k}}\right]=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+6}{5^{k}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[10-\frac{20k+10-16k-4}{5^{k}}\right]=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+6}{5^{k}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+6}{5^{k}}\right]=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4k+6}{5^{k}}\right]$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $1+\frac{5}{5}+\frac{9}{25}+...+\frac{4n-3}{5^{n-1}}=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4n+2}{5^{n-1}}\right]$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

$$1+7+13+19+...+(3n-2)=\frac{(n+1)(3n-1)}{4}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $1=\frac{2\cdot 2}{4}=\frac{(1+1)(3\cdot 1-1)}{4}$ **אגף שמאל:** 1 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי אי-זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1+7+13+19+...+(3k-2)=\frac{(k+1)(3k-1)}{4}$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+2$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{1+7+13+19+...+(3k-2)}_{\downarrow}+(3(k+2)-2)=\frac{(k+2+1)(3(k+2)-1)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k-1)}{4}+3k+4=\frac{(k+3)(3k+5)}{4}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k-1)}{4}+3k+4=\frac{(k+3)(3k+5)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k-1)+4(3k+4)}{4}=\frac{(k+3)(3k+5)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2-k+3k-1+12k+16}{4}=\frac{(k+3)(3k+5)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2+14k+15}{4}=\frac{(k+3)(3k+5)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+3)(3k+5)}{4}=\frac{(k+3)(3k+5)}{4} \quad \leftarrow *$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **אי-זוגי טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $1+7+13+19+...+(3n-2)=\frac{(n+1)(3n-1)}{4}$ **נכון לכל** n **טבעי אי-זוגי.**

הסבר לשורת ה-* על פי פירוק לגורמים של טרינום ריבועי, באמצעות משוואה ריבועית.

$$3k^2+14k+15=0 \quad \rightarrow k=-\frac{5}{3},-3$$

$$3k^2+14k+15=3(k+\frac{5}{3})(k+3)$$

$$3k^2+14k+15=(3k+5)(k+3)$$

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי זוגי מתקיים:

$$1+5+9+13+...+(2n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$.

אגף ימין: $\frac{(2+1)(2+2)}{2}=6$ **אגף שמאל:** $1+5=6$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=2$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $1+5+9+13+...+(2k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+2$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{1+5+9+13+...+(2k+1)}_{\downarrow}+(2(k+2)+1)=\frac{(k+2+1)(k+2+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)}{2}+2k+5=\frac{(k+3)(k+4)}{2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)}{2}+2k+5=\frac{(k+3)(k+4)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)+2(2k+5)}{4}=\frac{(k+3)(k+4)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2+2k+k+2+4k+10}{4}=\frac{(k+3)(k+4)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2+7k+12}{4}=\frac{(k+3)(k+4)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+3)(k+4)}{2}=\frac{(k+3)(k+4)}{2}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n זוגי טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{(n+1)(n+2)}{2}=1+5+9+13+...+(2n+1)$ **נכון לכל n טבעי זוגי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$-3+15-75+375-\ldots-3(-5)^{n-1}=\frac{1}{2}\left[(-5)^{n}-1\right]$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{2}\left[(-5)^1-1\right]=-3$ אגף שמאל: -3 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $-3+15-75+375-...-3(-5)^{k-1}=\frac{1}{2}\left[(-5)^k-1\right]$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{-3+15-75+375-...-3(-5)^{k-1}}_{\downarrow}-3(-5)^{k+1-1}=\frac{1}{2}\left[(-5)^{k+1}-1\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[(-5)^k-1\right] \quad -3(-5)^k=\frac{1}{2}\left[(-5)^{k+1}-1\right]$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(-5)^k-1\right]-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3(-5)^k=\frac{1}{2}\left[(-5)^{k+1}-1\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[1\cdot(-5)^k-1-6\cdot(-5)^k\right]=\frac{1}{2}\left[(-5)^{k+1}-1\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[-5\cdot(-5)^k-1\right]=\frac{1}{2}\left[(-5)^{k+1}-1\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(-5)^{k+1}-1\right]=\frac{1}{2}\left[(-5)^{k+1}-1\right]$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $-3+15-75+375-...-3(-5)^{n-1}=\frac{1}{2}\left[(-5)^n-1\right]$ נכון לכל n טבעי.

הוכחה בדרך אחרת

על-פי נוסחת הסכום של סדרה הנדסית,

עבור $q=-5$, $a_1=-3$, כאשר n הוא מספר האיברים,

$$-3+15-75+375-...-3(-5)^{k-1}=\frac{-3\left[(-5)^k-1\right]}{-5-1}$$

$$-3+15-75+375-...-3(-5)^{k-1}=\frac{1}{2}\left[(-5)^k-1\right]$$

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot n=\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(2n+1)+1\right]$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{4}\left[(-1)^{1+1}(2\cdot 1+1)+1\right]=1$ **אגף שמאל:** 1 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1-2+3-4+...+(-1)^{k+1}\cdot k=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1}(2k+1)+1\right]$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{1-2+3-4+...+(-1)^{k+1}\cdot k}_{\downarrow}+(-1)^{k+1+1}\cdot(k+1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1+1}(2(k+1)+1)+1\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1}(2k+1)+1\right]+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+2}(2k+3)+1\right]$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1}(2k+1)+1\right]+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+2}(2k+3)+1\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1}(2k+1)+1+\frac{1}{4}\cdot 4(-1)^{k+2}\cdot(k+1)\right]=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+2}(2k+3)+1\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(-1)^{k+2}\left[-(2k+1)+4(k+1)+1\right]=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+2}(2k+3)+1\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[(-1)^{k+2}(2k+3)+1\right]=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+2}(2k+3)+1\right]$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $1-2+3-4+...+(-1)^{n+1}\cdot n=\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(2n+1)+1\right]$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$3!+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+...+\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=\frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{(1+3)!}{4(1-1)!}=\frac{4!}{4\cdot 0!}=\frac{4!}{4\cdot 1}=\frac{4!}{4}=3!$ **אגף שמאל:** $3!$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $3!+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+...++\frac{(k+2)!}{(k-1)!}=\frac{(k+3)!}{4(k-1)!}$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$**.**

$$\Leftrightarrow \underbrace{3!+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+...+\frac{(k+2)!}{(k-1)!}}_{\downarrow}+\frac{(k+1+2)!}{(k+1-1)!}=\frac{(k+1+3)!}{4(k+1-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+3)!}{4(k-1)!}+\frac{(k+3)!}{k!}=\frac{(k+4)!}{4k!}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{(k+3)!}{4(k-1)!}+\frac{(k+3)!}{k!}=\frac{(k+4)!}{4k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+3)!\cdot k}{4(k-1)!\cdot k}+\frac{4(k+3)!}{4k!}=\frac{(k+4)!}{4k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+3)!(k+4)}{4k!}=\frac{(k+4)!}{4k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+4)!}{4k!}=\frac{(k+4)!}{4k!}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $3!+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+...+\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=\frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$3\cdot 2^0\cdot 1!+5\cdot 2^1\cdot 2!+7\cdot 2^2\cdot 3!+\ldots+(2n+1)2^{n-1}\cdot n!=2^n(n+1)!-1$$

1. **שלב הבדיקה:** נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $2^1(1+1)!-1=2\cdot 2!-1=2\cdot 1\cdot 2-1=3$ **אגף שמאל:** $3\cdot 2^0\cdot 1!=3\cdot 1\cdot 1=3$

.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. **שלב הצעד:** **נניח את נכונות הטענה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $3\cdot 2^0\cdot 1!+5\cdot 2^1\cdot 2!+7\cdot 2^2\cdot 3!+\ldots+(2k+1)2^{k-1}\cdot k!=2^k(k+1)!-1$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{3\cdot 2^0\cdot 1!+5\cdot 2^0\cdot 2!+7\cdot 2^2\cdot 3!+\ldots+(2k+1)2^{k-1}\cdot k!}_{\downarrow}+(2(k+1)+1)2^{k+1-1}\cdot(k+1)!=2^{k+1}(k+1+1)!-1$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2^k(k+1)!-1 \qquad +(2k+3)2^k\cdot(k+1)!=2^{k+1}(k+2)!-1$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow 1\cdot 2^k(k+1)!-1+(2k+3)2^k\cdot(k+1)!=2^{k+1}(k+2)!-1$$
$$\Leftrightarrow 2^k(k+1)!\cdot(1+2k+3)-1=2^{k+1}(k+2)!-1$$
$$\Leftrightarrow 2^k(k+1)!\cdot(2k+4)-1=2^{k+1}(k+2)!-1$$
$$\Leftrightarrow 2^k\cdot 2\cdot(k+1)!\cdot(k+2)-1=2^{k+1}(k+2)!-1$$
$$\Leftrightarrow 2^{k+1}(k+2)!-1=2^{k+1}(k+2)!-1$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. **לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

$$3\cdot 2^0\cdot 1!+5\cdot 2^0\cdot 2!+7\cdot 2^2\cdot 3!+\ldots+(2n+1)2^{n-1}\cdot n!=2^n(n+1)!-1$$

תשובה: הוכחנו ש- $3\cdot 2^0\cdot 1!+5\cdot 2^0\cdot 2!+7\cdot 2^2\cdot 3!+\ldots+(2n+1)2^{n-1}\cdot n!=2^n(n+1)!-1$ **נכון לכל** n **טבעי.**

סדרה מוגדרת לכל n **טבעי על ידי הנוסחה** $a_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 1$

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n **טבעי מתקיים:**

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 6(2^n - 1) - n$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $6(2^1-1)-1=5$ **אגף שמאל:** $a_1=6\cdot 2^{1-1}-1=5$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $a_1+a_2+a_3+...+a_k=6(2^k-1)-k$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{a_1+a_2+a_3+...+a_k}_{\downarrow}+a_{k+1}=6(2^{k+1}-1)-(k+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(2^k-1)-k-1 \quad +6\cdot 2^{k+1-1}=6(2^{k+1}-1)-k-1$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow 6(2^k-1)-k-1+6\cdot 2^{k+1-1}=6(2^{k+1}-1)-k-1$$
$$\Leftrightarrow 6(2^k-1+2^k)-k-1=6(2^{k+1}-1)-k-1$$
$$\Leftrightarrow 6(2\cdot 2^k-1)-k-1=6(2^{k+1}-1)-k-1$$
$$\Leftrightarrow 6(2^{k+1}-1)-k-1=6(2^{k+1}-1)-k-1$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $a_1+a_2+a_3+...+a_n=6(2^n-1)-n$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\frac{2}{8\cdot 11}+...+\frac{2}{(3n+2)\cdot(3n+5)}=\frac{n+1}{3n+5}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1+1}{3\cdot 1+5}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ **אגף שמאל:** $\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}=\frac{1}{4}$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\frac{2}{8\cdot 11}+...+\frac{2}{(3k+2)\cdot(3k+5)}=\frac{k+1}{3k+5}$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\frac{2}{8\cdot 11}+...+\frac{2}{(3k+2)\cdot(3k+5)}}_{\downarrow}+\frac{2}{(3(k+1)+2)\cdot(3(k+1)+5)}=\frac{k+1+1}{3(k+1)+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{3k+5}+\frac{2}{(3k+5)\cdot(3k+8)}=\frac{k+2}{3k+8}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(3k+8)+2}{(3k+5)\cdot(3k+8)}=\frac{k+2}{3k+8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2+8k+3k+8+2}{(3k+5)\cdot(3k+8)}=\frac{k+2}{3k+8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2+11k+10}{(3k+5)\cdot(3k+8)}=\frac{k+2}{3k+8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3k+8)(k+2)}{(3k+5)\cdot(3k+8)}=\frac{k+2}{3k+8} \quad \leftarrow *$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+2}{3k+8}=\frac{k+2}{3k+8}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\frac{2}{8\cdot 11}+...+\frac{2}{(3n+2)\cdot(3n+5)}=\frac{n+1}{3n+5}$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הסבר לשורת ה-* על פי פירוק לגורמים של טרינום ריבועי, באמצעות משוואה ריבועית.

$$3k^2+11k+10=0 \quad \rightarrow k=-\frac{5}{3},-2$$

$$3k^2+11k+10=3(k+\frac{5}{3})(k+2)$$

$$3k^2+11k+10=(3k+5)(k+2)$$

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי שגדול מ- 2 מתקיים:

$$7+9+11+...+(2n+1)=(n+4)(n-2)$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=3$.

אגף ימין: $(3+4)(3-2)=7$ **אגף שמאל:** 7 .

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=3$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $7+9+11+...+(2k+1)=(k+4)(k-2)$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{7+9+11+...+(2k+1)}_{\downarrow}+(2(k+1)+1)=(k+1+4)(k+1-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k+4)(k-2) \quad +2k+3=(k+5)(k-1)$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \quad (k+4)(k-2)+2k+3=(k+5)(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2-2k+4k-8+2k+3=(k+5)(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2+4k-5=(k+5)(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k+5)(k-1)=(k+5)(k-1)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי שגדול מ- 2.

תשובה: הוכחנו ש- $7+9+11+...+(2n+1)=(n+4)(n-2)$ **נכון לכל** n **טבעי שגדול מ-** 2.

סדרה מוגדרת לכל טבעי על ידי הנוסחה $a_n = n(n+3)$

הוכיחו כי עבור $n \geq 3$ **מתקיים:**

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} = \frac{(n-2)(n-1)(n+3)}{3}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=3$.

אגף ימין: $\frac{(3-2)(3-1)(3+3)}{3}=4$ **אגף שמאל:** $a_1=1(1+3)=4$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=3$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $a_1+a_2+a_3+...+a_{k-2}=\frac{(k-2)(k-1)(k+3)}{3}$, **ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underline{a_1+a_2+a_3+...+a_{k-2}}+a_{k+1-2}=\frac{(k+1-2)(k+1-1)(k+1+3)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-2)(k-1)(k+3)}{3}+a_{k-1}=\frac{(k-1)(k)(k+4)}{3}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{(k-2)(k-1)(k+3)}{3}+a_{k-1}=\frac{k(k-1)(k+4)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-2)(k-1)(k+3)}{3}+(k-1)(k-1+3)=\frac{k(k-1)(k+4)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-2)(k-1)(k+3)+3(k-1)(k+2)}{3}+=\frac{k(k-1)(k+4)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-1)\left[(k-2)(k+3)+3(k+2)\right]}{3}=\frac{k(k-1)(k+4)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-1)(k^2+3k-2k-6+3k+6)}{3}=\frac{k(k-1)(k+4)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-1)(k^2+4k)}{3}=\frac{k(k-1)(k+4)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k-1)(k+4)}{3}=\frac{k(k-1)(k+4)}{3}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל $n\geq 3$ **טבעי.**

תשובה: הוכחנו ש- $a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-1)(n+3)}{3}$ **נכון לכל** $n\geq 3$ **טבעי.**

נתונה הטענה: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{4n+1}{2(2n+1)}$

א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$**.**

ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור

כל n **טבעי.**

א. נתונה הטענה: $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{4n+1}{2(2n+1)}$

נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו,**

כלומר: $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{4k+1}{2(2k+1)}$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$**.**

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}}_{\downarrow}+\frac{1}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)}=\frac{4(k+1)+1}{2(2(k+1)+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4k+1}{2(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו, לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{4k+1}{2(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2k+3)(4k+1)+2}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8k^2+2k+12k+3+2}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8k^2+14k+5}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2k+1)(4k+5)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)} \quad * \leftarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4k+5}{2(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

הסבר לשורת ה-* על פי פירוק לגורמים של טרינום ריבועי, באמצעות משוואה ריבועית.

$$8k^2+14k+5=0 \quad \rightarrow k=-\frac{1}{2},-\frac{5}{4} \quad \rightarrow 8k^2+14k+5=2\cdot4(k+\frac{1}{2})(k+\frac{5}{4})=(2k+1)(4k+5)$$

ב. לא ניתן להסיק, נסביר. הוכחה באינדוקציה מתבססת על שני שלבים:

שלב הבדיקה (הבסיס) – בו בודקים האם הטענה מתקיימת עבור n **טבעי מסוים (בהתאם לשאלה)**

שלב הצעד – בו על פי הנחת האינדוקציה (נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו),**

בודקים האם הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$ **(או** $n=k+2$ **למשל עבור זוגי או אי-זוגי)**

כיוון שלא עשינו את שלב הבדיקה, הרי שלא ניתן להסיק שהטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: לא ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n **טבעי.**

נתונה הטענה: $\frac{1\cdot 2^2}{3!}+\frac{2\cdot 2^3}{4!}+\frac{3\cdot 2^4}{5!}+...+\frac{n\cdot 2^{n+1}}{(n+2)!}=2-\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$

א. הראו שהטענה נכונה עבור $n=1$ **, ונכונה עבור** $n=2$**.**

ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n **טבעי.**

א. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{2}{3}=\frac{8}{1\cdot2\cdot3}-2=\frac{8}{3!}-2=\frac{2^{1+2}}{(1+2)!}-2$ **אגף שמאל:** $\frac{2}{3}=\frac{4}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1\cdot2^2}{3!}$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$.

אגף ימין: $\frac{4}{3}=\frac{16}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-2=\frac{16}{4!}-2=\frac{2^{2+2}}{(2+2)!}-2$ **אגף שמאל:** $\frac{4}{3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2\cdot2^3}{4!}++\frac{1\cdot2^2}{3!}$.

תשובה: הראינו שהטענה נכונה עבור $n=1$ ועבור $n=2$.

ב. לא ניתן להסיק, נסביר. הוכחה באינדוקציה מתבססת על שני שלבים:

שלב הבדיקה (הבסיס) – בו בודקים האם הטענה מתקיימת עבור n טבעי מסוים (בהתאם לשאלה)

שלב הצעד – בו על פי הנחת האינדוקציה (נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו),

בודקים האם הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$ (או $n=k+2$ למשל עבור זוגי או אי-זוגי)

כיוון שלא עשינו את שלב הצעד, הרי שלא ניתן להסיק שהטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: לא ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

100

הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיימת הזהות הטריגונומטרית הבאה:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

1. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\sin\alpha = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{1+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ **אגף שמאל:** $\sin\alpha$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

2. שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+...+\sin k\alpha = \dfrac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ **, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underline{\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+...+\sin k\alpha}+\sin(k+1)\alpha = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+1+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad +\sin(k+1)\alpha = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+2}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

נסמן: $A = \dfrac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\sin(k+1)\alpha$ **, ו-** $B = \dfrac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+2}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

ונראה ש- $A = B$.

$$A=\frac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\sin(k+1)\alpha=\frac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+1}{2}\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(k+1)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$A=\frac{\sin\frac{k}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+1}{2}\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\quad\leftarrow\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$A=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\left[\sin\frac{k}{2}\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{k+1}{2}\alpha\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$A=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\left[\sin\frac{k}{2}\alpha+\cancel{2}\cdot\frac{\sin\frac{k+2}{2}\alpha+\sin\frac{-k}{2}\alpha}{\cancel{2}}\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}}\quad\leftarrow\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$A\,\frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\left[\sin\frac{k}{2}\alpha+\sin\frac{k+2}{2}\alpha-\sin\frac{k}{2}\alpha\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}}\quad\leftarrow\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$A=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+2}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\rightarrow\boxed{A=B}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ **נכון לכל n טבעי.**

עמוד 35 תרגיל 3

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+...+n\cdot(n+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$$

ב. חשבו את הסכום: $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+...+20\cdot 23$

ג. חשבו את הסכום: $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+...+60\cdot 63$

ד. היעזרו בסעיפים קודמים וחשבו את הסכום: $21\cdot 24+22\cdot 25+...+60\cdot 63$

:

א. נוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots+n\cdot(n+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

שלב הבדיקה: **נבדוק את נכונות הטענה עבור** $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{3}\cdot 1(1+1)(1+5)=4$ **אגף שמאל:** $1\cdot 4=4$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב הצעד: **נניח את נכונות הטענה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots+k\cdot(k+3)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+5)$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots+k\cdot(k+3)+(k+1)(k+1+3)=\frac{1}{3}(k+1)(k+1+1)(k+1+5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}k(k+1)(k+5)\quad+(k+1)(k+4)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}k(k+1)(k+5)+(k+1)(k+4)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow (k+1)\left[\frac{1}{3}k(k+5)+\frac{1}{3}\cdot 3(k+4)\right]=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(k+1)(k^2+5k+3(k+4)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(k+1)(k^2+5k+3k+12)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(k+1)(k^2+8k+12)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots+n\cdot(n+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הוכחנו ש- $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+...+n\cdot(n+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$ **נכון לכל** n **טבעי**

ב. נחשב את הסכום: $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+...+20\cdot23$

עבור $n=20$ **:** $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+...+20\cdot23=\frac{1}{3}\cdot20(20+1)(20+5)=3,500$**.**

תשובה: הסכום הוא $3,500$ **.**

ג. נחשב את הסכום: $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+...+60\cdot63$

עבור $n=60$ **:** $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+...+60\cdot63=\frac{1}{3}\cdot60(60+1)(60+5)=79,300$**.**

תשובה: הסכום הוא $79,300$ **.**

ד. נחשב את הסכום: $21\cdot24+22\cdot25+...+60\cdot63$

על-פי סעיפים ב-ד: $21\cdot24+22\cdot25+...+60\cdot63=79,300-3,500=75,800$**.**

תשובה: הסכום הוא $75,800$ **.**

עמוד 36 תרגיל 8

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n **טבעי מתקיים:**

$$9+17+27+39+...+(n^2+5n+3)=\frac{n(n^2+9n+17)}{3}$$

ב. חשבו את הסכום: $39+53+69+...+1053$

:

א. נוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $9+17+27+39+...+(n^2+5n+3)=\frac{n(n^2+9n+17)}{3}$

שלב הבדיקה: **נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.**

אגף ימין: $9=\frac{1(1^2+9\cdot1+17)}{3}$ **אגף שמאל:** 9.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב הצעד: **נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $9+17+27+39+...+(k^2+5k+3)=\frac{k(k^2+9k+17)}{3}$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.**

$$\Leftrightarrow 9+17+27+39+...+(k^2+5k+3)+((k+1)^2+5(k+1)+3)=\frac{(k+1)((k+1)^2+9(k+1)+17)}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k(k^2+9k+17)}{3} \quad +k^2+2k+1+5k+5+3=\frac{(k+1)(k^2+2k+1+9k+9+27)}{3}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k(k^2+9k+17)}{3}+k^2+7k+9=\frac{(k+1)(k^2+11k+27)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k^2+9k+17)+3k^2+21k+27}{3}=\frac{(k+1)(k^2+11k+27)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3+9k^2+17k+3k^2+21k+27}{3}=\frac{k^3+11k^2+27k+k^2+11k+27}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3+12k^2+38k+27}{3}=\frac{k^3+12k^2+38k+27}{3}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{n(n^2+9n+17)}{3}=9+17+27+39+...+(n^2+5n+3)$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכחנו ש- $9+17+27+39+...+(n^2+5n+3)=\frac{n(n^2+9n+17)}{3}$ **נכון לכל** n **טבעי**

ב. נחשב את הסכום: $39+53+69+...+1053$

עבור $n=4$ **:** $9+17+27=\frac{3(3^2+9\cdot 3+17)}{3}=53$**.**

נמצא עבור איזה ערך של n **טבעי מתקיים** $n^2+5n+3=1053$

$n^2+5n+3=1053 \rightarrow n^2+5n-1050=0 \rightarrow n=30\ ,\ \cancel{n=-35}$

עבור $n=30$ **:** $9+17+27+39+...+1053=\frac{30(30^2+9\cdot 30+17)}{3}=11,870$**.**

נקבל: $21\cdot 39+53+69+...+1053=11,870-53=11,817$**.**

תשובה: הסכום הוא $11,817$.

עמוד 37 תרגיל 10

א. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+...+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$$

ב. נתון שסכום n המחוברים הראשונים של הטור שבסעיף א הוא $\frac{1}{5}$.

חשבו את המחובר ה- n בטור.

:

א. נוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $9+17+27+39+...+(n^2+5n+3)=\frac{n(n^2+9n+17)}{3}$

שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{20}=\frac{1}{4(1+4)}$ **אגף שמאל:** $\frac{1}{20}=\frac{1}{4\cdot 5}$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{(k+3)(k+4)}=\frac{k}{4(k+4)}$ **ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{(k+3)(k+4)}}_{\downarrow}+\frac{1}{(k+1+3)(k+1+4)}=\frac{k+1}{4(k+1+4)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{4(k+4)}+\frac{1}{(k+4)(k+5)}=\frac{k+1}{4(k+5)}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+5)+4}{4(k+4)(k+5)}=\frac{k+1}{4(k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2+5k+4}{4(k+5)(k+4)}=\frac{k+1}{4(k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+5)(k+4)}=\frac{k+1}{4(k+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{4(k+5)}=\frac{k+1}{4(k+5)}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכחנו ש- $\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+...+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$ נכון לכל n טבעי

ב. נתון שסכום n המחוברים הראשונים של הטור שבסעיף א הוא $\frac{1}{5}$.

נחשב תחילה את ה- n המתאים.

$$\frac{n}{4(n+4)}=\frac{1}{5}$$

$$5n=4n+16$$

$$\boxed{n=16}$$

עבור $n=16$ נחשב את המחובר ה- n בטור: $\frac{1}{(16+3)(16+4)}=\frac{1}{380}$

תשובה: המחובר ה- n בטור הוא $\frac{1}{380}$.

עמוד 38 תרגיל 16

א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$12-17+22-27+...+(-1)^{n+1}(5n+7)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(10n+19)+19\right]$$

ב. חשבו את הסכום: $12-17+22-27+...-67$ **.**

ג. חשבו את הסכום: $-127+132-137+...+192$ **.**

:

א. נוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $12-17+22-27+...+(-1)^{n+1}(5n+7)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(10n+19)+19\right]$

שלב הבדיקה: **נבדוק את נכונות הטענה עבור** $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{4}\left[(-1)^{1+1}(10\cdot 1+19)+19\right]=12$ **אגף שמאל:** 12.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב הצעד: **נניח את נכונות הטענה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $12-17+22-27+...+(-1)^{k+1}(5k+7)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1}(10k+19)+19\right]$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**.**

$$\Leftrightarrow \underbrace{12-17+22-27+...+(-1)^{k+1}(5k+7)}+(-1)^{k+1+1}(5(k+1)+7)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1+1}(10(k+1)+19)+19\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1}(10k+19)+19\right]+(-1)^{k+2}(5k+12)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+2}(10k+29)+19\right]$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

נשים לב: $(-1)^{k+1}=-(-1)^{k}$, $(-1)^{k+2}=(-1)^{k}$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[(-1)^{k+1}(10k+19)+19\right]+(-1)^{k+2}(5k+12)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k+2}(10k+29)+19\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[-(-1)^{k}(10k+19)+19\right]+\frac{1}{4}\cdot 4(-1)^{k}(5k+12)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k}(10k+29)+19\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[-(-1)^{k}(10k+19)+19+4(-1)^{k}(5k+12)\right]=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k}(10k+29)+19\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[(-1)^{k}(-10k-19+20k+48)+19)\right)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k}(10k+29)+19\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[(-1)^{k}(10k+29)+19\right]=\frac{1}{4}\left[(-1)^{k}(10k+29)+19\right]$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $12-17+22-27+...+(-1)^{n+1}(5n+7)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(10n+19)+19\right]$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הוכחנו ש- $12-17+22-27+...+(-1)^{n+1}(5n+7)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(10n+19)+19\right]$ **נכון לכל** n **טבעי**

ב. נחשב את הסכום $12-17+22-27+...-67$ **.**

נחשב תחילה את ה- n **המתאים.**

$$5n+7=67$$
$$5n=60$$
$$\boxed{n=12}$$

נוודא שהסימן מתאים: $(-1)^{12+1}=(-1)^{13}=-1$ **, ולכן** $n=12$ **.**

עבור $n=12$ **נחשב את הסכום:** $\frac{1}{4}\left[(-1)^{12+1}(10\cdot 12+19)+19\right]=\frac{1}{4}\left[-139+19\right]=-30$

תשובה: הסכום הוא (-30) **.**

ג. נחשב את הסכום: $-127+132-137+...+192$ **.**

נחשב תחילה את ה- n **המתאים עבור המחובר שערכו** $(+192)$ **.**

$$(-1)^{n+1}(5n+7)=192$$
$$5n+7=+192 \quad \rightarrow n=37 \quad (-1)^{37+1}=+1\ 0.k. \rightarrow \boxed{n=37}$$

עבור $n=37$ **נחשב את המחובר ה-** n **בטור:** $12-17+22-27+...+192=\frac{1}{4}\left[(-1)^{37+1}(10\cdot 37+19)+19\right]=102$

נחשב עתה את ה- n **המתאים עבור המחובר שערכו** $(+122)$ **, שקודם ל-** (-127) **.**

$$(-1)^{n+1}(5n+7)=122$$
$$5n+7=+122 \quad \rightarrow n=23 \quad (-1)^{23+1}=+1\ 0.k. \rightarrow \boxed{n=23}$$

עבור $n=23$ **נחשב את המחובר ה-** n **בטור:** $12-17+22-27+...+120=\frac{1}{4}\left[(-1)^{23+1}(10\cdot 23+19)+19\right]=67$

והסכום המבוקש הוא: $-127+132-137+...+192=102-67=35$

תשובה: הסכום הוא 35 **.**

עמוד 38 תרגיל 18

א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n **טבעי <u>זוגי</u> מתקיים:**

$$2+8+14+...+(3n-4)=\frac{n(3n-2)}{4}$$

ב. חשבו את הסכום: $2+8+14+...+44$.

ג. חשבו את הסכום: $38+44+50+...+80$.

:

א. נוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי זוגי מתקיים: $2+8+14+...+(3n-4)=\frac{n(3n-2)}{4}$

שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$.

אגף ימין: $2=\frac{2(3\cdot 2-2)}{4}$ **אגף שמאל:** 2.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=2$.

שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $2+8+14+...+(3k-4)=\frac{k(3k-2)}{4}$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.

$$\Leftrightarrow 2+8+14+...+(3k-4)+(5(k+2)-4)=\frac{(k+2)(3(k+2)-2)}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(3k-2)}{4}+(5k+6)=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k(3k-2)}{4}+(5k+6)=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(3k-2)+4(3k-2)}{4}=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2-2k+12k-8}{4}=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k^2+10k-8}{4}=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+2)(3k+4)}{4}=\frac{(k+2)(3k+4)}{4} \quad * \leftarrow$$

הסבר לשורת ה-* על פי פירוק לגורמים של טרינום ריבועי, באמצעות משוואה ריבועית.

$$3k^2+10k-8=0 \quad \to k=\frac{2}{3},-4 \quad \to 3k^2+10k-8=3(k-\frac{2}{3})(k+4)=(3k-2)(k+4)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי זוגי.

תשובה: הוכחנו ש- $2+8+14+...+(3n-4)=\frac{n(3n-2)}{4}$ **נכון לכל n טבעי זוגי.**

הוכחנו ש- $2+8+14+...+(3n-4)=\frac{n(3n-2)}{4}$ **נכון לכל** n **טבעי זוגי**

ב. חשבו את הסכום: $2+8+14+...+44$.

נחשב תחילה את ה- n **המתאים עבור המחובר שערכו** 44.

$3n-4=44$

$3n=48$

$\boxed{n=16}$

עבור $n=16$ **נחשב את הסכום:** $\frac{16(3\cdot16-2)}{4}=184$.

תשובה: הסכום הוא 184 .

ג. נחשב את הסכום: $38+44+50+...+80$.

נחשב תחילה את ה- n **המתאים עבור המחובר שערכו** 80.

$3n-4=80$

$3n=84$

$\boxed{n=28}$

עבור $n=28$ **נחשב את הסכום:** $2+8+14+...+44=\frac{28(3\cdot28-2)}{4}=574$

נשים לב, שהסכום $38+44=82$ **הוא חלק מהסכום שחישבנו בסעיף ב.**

והסכום המבוקש הוא: $38+44+50+...+80=574-184+82=472$

תשובה: הסכום הוא 472.

עמוד 38 תרגיל 21

א. נתון הטור: $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

הנוסחה $\frac{an}{bn+1}$ **מייצגת את סכום** n **האיברים הראשונים של הטור.**

מצאו את a **ואת** b**.**

ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n **טבעי נוסחת הסכום אכן נכונה.**

.21 נתון הטור : $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

הנוסחה $\frac{an}{bn+1}$ מייצגת את סכום n האיברים הראשונים של הטור.

א. מצא את a ואת b .

ב. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי נוסחת הסכום אכן נכונה.

:

א. נתון הטור: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

הנוסחה $\frac{an}{bn+1}$ **מייצגת את סכום** n **האיברים הראשונים של הטור.**

עבור $n=1$ **:** $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1+1}$ **ומכאן ש-** $b+1=3a$..

עבור $n=2$ **:** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{a\cdot 2}{b\cdot 2+1}$ **ומכאן ש-** $\frac{2a}{2b+1}=\frac{2}{5}$,. **ומתקבל ש-** $4b+2=10a$.

ולכן

$$\begin{cases} b+1=3a & /\cdot(-4) \\ 4b+2=10a \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -4b-4=-12a & /\cdot(-4) \\ 4b+2=10a \end{cases}$$

$$-2=-2a \quad /:(-2)$$

$$\boxed{a=1}$$

$$b+1=3\cdot 1$$

$$\boxed{b=2}$$

תשובה: $a=1$, $b=2$.

ב. נוכח באינדוקציה כי לכל n **טבעי מתקיים:** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$ **אגף שמאל:** $\frac{1}{3}=\frac{1}{1\cdot 3}$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{k}{2k+1}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ **ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\downarrow}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{(2k+1)}(k+1)}{\cancel{(2k+1)}(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3} \quad * \leftarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2k+3}$$

הסבר לשורת ה-* על פי פירוק לגורמים של טרינום ריבועי, באמצעות משוואה ריבועית.

$$2k^2+3k+1=0 \quad \rightarrow k=-\frac{1}{2},-1 \quad \rightarrow 2k^2+3k+1=2(k+\frac{1}{2})(k+4)=(2k+1)(k+1)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ **נכון לכל n טבעי.**

עמוד 39 תרגיל 25

א. הוכיחו באינדוקציה: שלכל n טבעי מתקיים:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

ב. מצאו נוסחה לסכום: $(2\cdot1)^3+(2\cdot2)^3+(2\cdot3)^3...+(2\cdot n)^3$ **.**

ג. חשבו את הסכום: $(\frac{8}{7})^3+(\frac{9}{7})^3++(\frac{10}{7})^3...+(\frac{22}{7})^3$ **.**

:

א. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1^2}{4}(1+1)^2=1$ **אגף שמאל:** $1^3=1$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{k^2}{4}(k+1)^2=1^3+2^3+3^3+...+k^3$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.**

$$\Leftrightarrow \underline{1^3+2^3+3^3+...+k^3}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+1+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{4}(k+1)^2 \quad +(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{4}(k+1^2) \quad +(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{n^2}{4}(n+1)^2=1^3+2^3+3^3+...+n^3$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכחנו ש- $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$ נכון לכל n טבעי

ב. נמצא נוסחה לסכום: $(2\cdot1)^3+(2\cdot2)^3+(2\cdot3)^3...+(2\cdot n)^3$.

$$(2\cdot1)^3+(2\cdot2)^3+(2\cdot3)^3...+(2\cdot n)^3=$$
$$=2^3\cdot1^3+^3+2^3\cdot1^3+2^3\cdot1^3..+2^3\cdot1^3=$$
$$=8(1^3+2^3+3^3+...+n^3)$$
$$=8\cdot\frac{n^2}{4}(n+1)^2=2n^2(n+1)^2$$

תשובה: הסכום הוא $2n^2(n+1)^2$.

ג. נחשב את הסכום: $(\frac{8}{7})^3+(\frac{9}{7})^3+(\frac{10}{7})^3...+(\frac{22}{7})^3$.

בדומה לסעיף ב, נקבל ש- $(\frac{1}{7})^3+(\frac{2}{7})^3+(\frac{3}{7})^3...+(\frac{n}{7})^3=\frac{1}{7^3}\cdot\frac{n^2}{4}(n+1)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{1,372}$

עבור $n=22$ **נחשב את הסכום:** $(\frac{1}{7})^3+(\frac{2}{7})^3+(\frac{3}{7})^3...+(\frac{22}{7})^3=\frac{22^2(22+1)^2}{1,372}=\frac{256,036}{1,372}$

עבור $n=7$ **נחשב את הסכום:** $(\frac{1}{7})^3+(\frac{2}{7})^3+(\frac{3}{7})^3...+(\frac{7}{7})^3=\frac{7^2(7+1)^2}{1,372}=\frac{16}{7}$

והסכום המבוקש הוא: $(\frac{8}{7})^3+(\frac{9}{7})^3+(\frac{10}{7})^3...+(\frac{22}{7})^3=\frac{256,036}{1,372}-\frac{16}{7}=\frac{63,225}{343}$

תשובה: הסכום הוא $\frac{63,225}{343}=184\frac{113}{343}$.

עמוד 41 תרגיל 31

א. הוכיחו באינדוקציה: שעבור כל n **טבעי מתקיים:**

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{(n^2+3n)(n^2+3n+2)}{4}$$

ב. מצאו את n**, אם נתון:** $2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=1974$ **.**

:

א. שלב הבדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{(1^2+3\cdot1)(1^2+3\cdot1+2)}{4}=6$ **אגף שמאל:** $1\cdot2\cdot3=6$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב הצעד: נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{(k^2+3k)(k^2+3k+2)}{4}=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+...+k\cdot(k+1)\cdot(k+2)$,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+...+k\cdot(k+1)\cdot(k+2)+(k+1)\cdot(k+1+1)\cdot(k+1+2)=\frac{((k+1)^2+3(k+1))((k+1)^2+3(k+1)+2)}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k^2+3k)(k^2+3k+2)}{4}+(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)=\frac{\left[(k+1)(k+1+3)\cdot\left((k+1)(k+1+3)+2\right)\right]}{4}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow\frac{k(k+3)(k+1)(k+2)+4(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)}{4}=\frac{\left[(k+1)(k+4)\cdot\left((k+1)(k+4)+2\right)\right]}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}=\frac{\left[(k+1)(k+4)\cdot(k^2+5k+6)\right]}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}=\frac{(k+1)(k+4)(k+2)(k+3)}{4}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{(n^2+3n)(n^2+3n+2)}{4}=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ **נכון לכל n טבעי.**

הוכחנו ש- $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{(n^2+3n)(n^2+3n+2)}{4}$ **נכון לכל** n **טבעי**

ב. נמצא את n**, אם נתון:** $2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=1974$ **.**

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{(n^2+3n)(n^2+3n+2)}{4} \quad /-1\cdot 2\cdot 3$$

$$1974=\frac{(n^2+3n)(n^2+3n+2)}{4}-6$$

$$1980=\frac{(n^2+3n)(n^2+3n+2)}{4}$$

$$7920=t(t+2) \quad \leftarrow \boxed{n^2+3n=t}$$

$$0=t^2+2t-7920$$

$$\boxed{t=88}, \cancel{-90} \quad \leftarrow t>0 \leftarrow n^2+3n>0 \leftarrow n \textit{ is natural}$$

$$n^2+3n=88$$

$$n^2+3n-88=0$$

$$\boxed{n=8}, -11 \quad \leftarrow n \textit{ is natural}$$

תשובה: $n=8$.

עמוד 42 תרגיל 37

א. הוכיחו באינדוקציה: שלכל n **טבעי מתקיים:**

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

ב. היעזרו בסעיף א ומצאו נוסחה לסכום: $2^3+4^3+6^3...+(2n)^3$ **.**

ג. היעזרו בסעיף א ומצאו נוסחה לסכום: $1^3+2^3+3^3...+(2n)^3$ **.**

ד. היעזרו בסעיפים ב' ט-ג' ומצאו נוסחה לסכום: $1^3+3^3+5^3...+(2n-1)^3$ **.**

:

א. שלב הבדיקה: **נבדוק את נכונות הטענה עבור** $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1^2}{4}(1+1)^2=1$ **אגף שמאל:** $1^3=1$.

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב הצעד: **נניח את נכונות הטענה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{k^2}{4}(k+1)^2$**, ונוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$**.**

$$\Leftrightarrow \underline{1^3+2^3+3^3+...+k^3}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+1+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{4}(k+1)^2+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{4}(k+1^2)+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

לכן, על פי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחנו ש- $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$ **נכון לכל** n **טבעי.**

הוכחנו ש- $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$ **נכון לכל** n **טבעי**

ב. ניעזר בסעיף א ונמצא נוסחה לסכום: $2^3+4^3+6^3...+(2n)^3$ **.**

$$2^3+4^3+6^3...+(2n)^3=$$
$$=(2\cdot1)^3+(2\cdot2)^3+(2\cdot3)^3...+(2\cdot n)^3=$$
$$=2^3\cdot1^3+^3+2^3\cdot1^3+2^3\cdot1^3..+2^3\cdot1^3=$$
$$=8(1^3+2^3+3^3+...+n^3)$$
$$=8\cdot\frac{n^2}{4}(n+1)^2=2n^2(n+1)^2$$

תשובה: הסכום הוא $2n^2(n+1)^2$ **.**

ג. ניעזר בסעיף א ומצא נוסחה לסכום: $1^3+1^3+3^3...+(2n)^3$ **.**

הראינו בסעיף א כי $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$ **עבור כל** n **טבעי, ולכן בפרט עבור** $2n$.

$$1^3+2^3+3^3+...+(2n)^3=\frac{(2n)^2}{4}(2n+1)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+...+(2n)^3=\frac{4n^2}{4}(2n+1)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+...+(2n)^3=n^2(2n+1)^2$$

תשובה: הסכום הוא $n^2(2n+1)^2$**.**

ד. ניעזר בסעיפים ב' ו-ג' ונמצא נוסחה לסכום: $1^3+3^3+5^3...+(2n-1)^3$ **.**

סכום האיברים במקומות האי-זוגיים,

הוא ההפרש בין הסכום של $2n$ **איברים לסכום האיברים במקומות הזוגיים.**

והסכום המבוקש הוא:

$$1^3+1^3+3^3...+(2n)^3=n^2(2n+1)^2-2n^2(n+1)^2$$
$$1^3+1^3+3^3...+(2n)^3=n^2\left[(2n+1)^2-2(n+1)^2\right]$$
$$1^3+1^3+3^3...+(2n)^3=n^2(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2)$$
$$1^3+1^3+3^3...+(2n)^3=n^2(2n^2-1)$$

תשובה: הסכום הוא $n^2(2n^2-1)$**.**