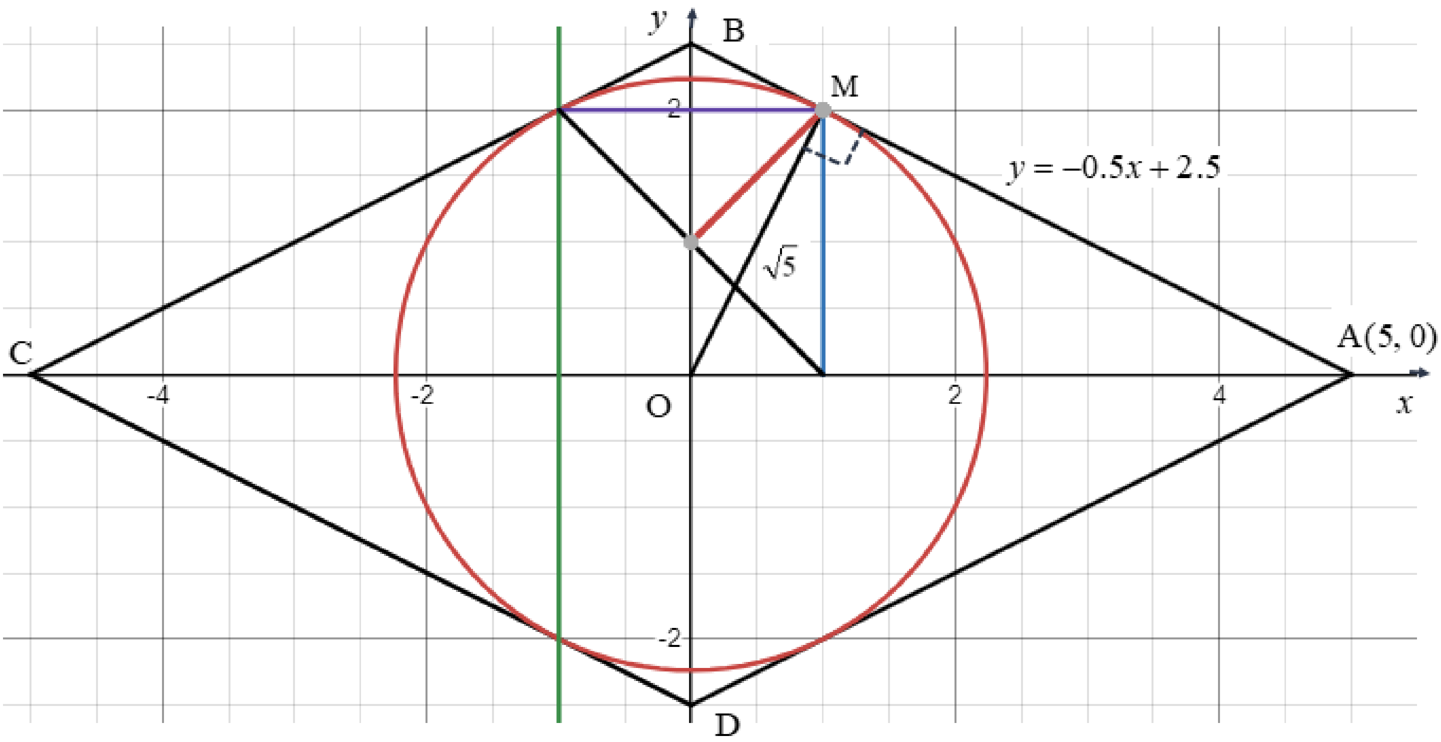
פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, מועד ב, שאלון: 35572

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

1



א. אורך האלכסון AC **של המעוין הוא** 10**, ולכן** $A(5,0)$ **כי אלכסוני המעוין חוצים זה את זה.**

אורך האנך OM **לצלע** AB **הוא** $\sqrt{5}$**. נסמן את נקודת המפגש של האנך והצלע ב-** M **, כהכנה לסעיף ג.**

ΔMOA **הוא ישר זווית.**

$$\cos\sphericalangle MOA=\frac{OM}{OA}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sphericalangle MOA=63.43°$$

$$m_{OM}=\tan 63.43°=2 \quad \rightarrow m_{AB}=-0.5$$

פתרון חלופי

$AM=2\sqrt{5}$ **(משפט פיתגורס** ΔMOA **)**

$$\tan\sphericalangle MAO=\frac{OM}{AM}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$$

$$m_{AB}=-0.5$$

כי הקשר בין השיפוע לטנגנס הזווית

הוא עם הכיוון החיובי של ציר ה- x **.**

נמצא את משוואת הצלע AB **:** $y-0=-0.5(x-5)$

$$\boxed{y=-0.5x+2.5}$$

דרך נוספת, **למציאת השיפוע, היא על פי נוסחת מרחק נקודה מישר.**

משוואת AB **היא** $y-0=m(x-5) \quad \rightarrow -mx+y+5m=0$ **(על פי** $A(5,0)$ **ושיפוע** m**).**

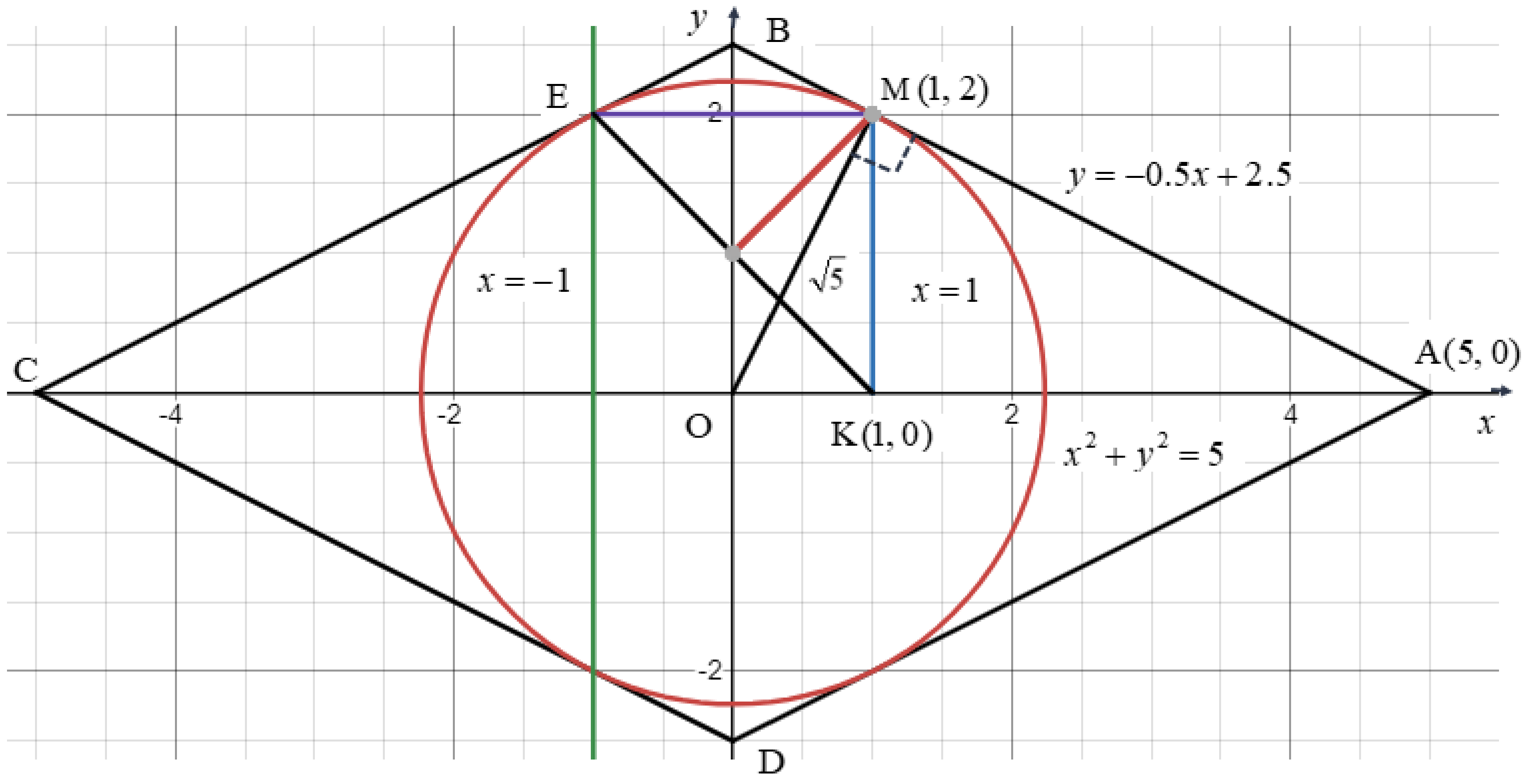
$$\sqrt{5}=-\frac{-m\cdot 0+0+5m}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$5m^2+5=25m^2$$

$$m=-0.5 \quad \leftarrow m_{AB}<0$$

תשובה: משוואת הצלע AB **היא** $y=-0.5x+2.5$ **.**

נכתב ע"י עפר ילין



ב. במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות, ולכן מרכז המעגל החסום הוא בראשית הצירים.

כל צלע משיקה למעגל ולכן הרדיוס הוא אורך האנך OM לצלע AB, כלומר $\sqrt{5}$.

תשובה: משוואת המעגל היא $x^2+y^2=5$.

ג. הנקודה $\mathrm{M}(m,-0.5m+2.5)$ היא נקודת ההשקה של המעגל והמעוין ברביע הראשון.

$$m_{\mathrm{OM}}=2 \quad \rightarrow 2=\frac{-0.5m+2.5-0}{m-0}$$

$$2m=-0.5m+2.5 \quad \rightarrow m=1 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{M}(1,2)}$$

תשובה: $\mathrm{M}(1,2)$.

ד. מן הנקודה $\mathrm{M}(1,2)$ מורידים אנך, הישר $x=1$, לנקודה $\mathrm{K}(1,0)$.

על הישר $x=-1$, מסמנים נקודה E ומעבירים דרכה ישר המקביל לציר ה- x.

הישר המקביל חותך את האנך האמצעי לקטע EK בנקודה G.

כיוון שכל הנקודות על האנך האמצעי נמצאות במרחק שווה מקצות הקטע,

ובגלל ש- $\mathrm{MK}=\mathrm{ME}=2$, כאשר $\mathrm{E}(-1,2)$ כמו בציור,

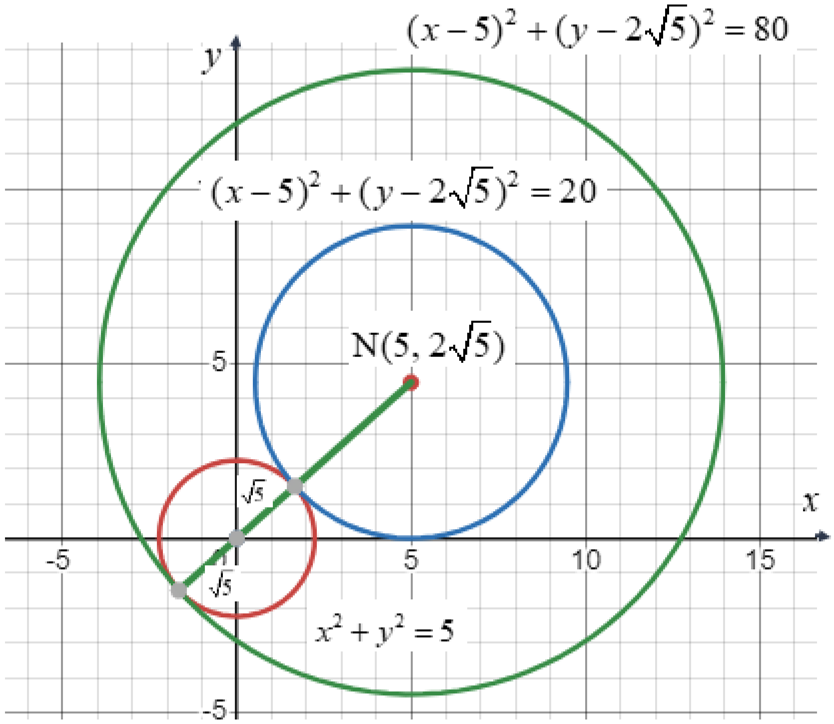
אז גם הנקודה $\mathrm{M}(1,2)$ נמצאת על המקום הגיאומטרי, ולכן לא סימנו את G בציור.

בכל מקרה, כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה (הנקודה $\mathrm{K}(1,0)$)

ומישר (הישר $x=-1$) נמצאות על פרבולה., כאשר $\mathrm{K}(1,0)$ המוקד, $p=2$ ו- $x=-1$ הוא המדריך.

תשובה: המקום הגיאומטרי של הנקודות G הוא פרבולה, ומשוואתה היא $y^2=4x$.

ה. הנקודה N נמצאת על הפרבולה $y^2=4x$ ברביע הראשון, כאשר $x_{\mathrm{N}}=5$, ולכן $\mathrm{N}(5,2\sqrt{5})$.



אורך קטע המרכזים, מהנקודה $\mathrm{N}(5,2\sqrt{5})$ לראשית הוא $\sqrt{5^2+(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{45}$.

- כאשר מעגלים משיקים מבחוץ אז אורך קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.

$r+\sqrt{5}=\sqrt{45}\quad\to r=2\sqrt{5}$ ומשוואת המעגל היא $(x-5)^2+(y-2\sqrt{5})^2=20$.

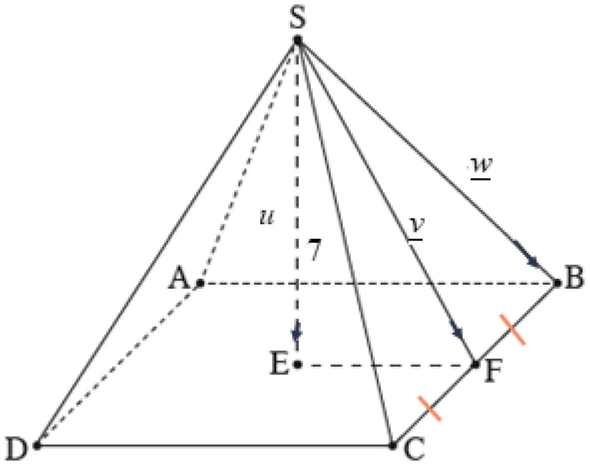
- כאשר מעגלים משיקים מבחוץ אז אורך קטע המרכזים שווה להפרש הרדיוסים.

$R-\sqrt{5}=\sqrt{45}\quad\to R=4\sqrt{5}$ ומשוואת המעגל היא $(x-5)^2+(y-2\sqrt{5})^2=80$.

תשובה: משוואות המעגלים הן $(x-5)^2+(y-2\sqrt{5})^2=20$ ו- $(x-5)^2+(y-2\sqrt{5})^2=80$.

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה פירמידה SABCD **שבסיסה** ABCD **הוא ריבוע.**



$\boxed{\overrightarrow{SB}=\underline{w}}$ $\boxed{\overrightarrow{SF}=\underline{v}}$ $\boxed{\overrightarrow{SE}=\underline{u}}$

$$\overrightarrow{BC}=2\cdot\overrightarrow{BF}$$
$$\overrightarrow{BC}=2\cdot(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SF})$$
$$\boxed{\overrightarrow{BC}=2\underline{v}-2\underline{w}}$$
$$\overrightarrow{DC}=2\cdot\overrightarrow{EF}$$
$$\overrightarrow{DC}=2\cdot(\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{SF})$$
$$\boxed{\overrightarrow{DC}=-2\underline{u}+2\underline{v}}$$

תשובה: $\overrightarrow{BC}=2\underline{v}-2\underline{w}$, $\overrightarrow{DC}=-2\underline{u}+2\underline{v}$.

ב. הקטע SE **הוא גובה הפירמידה.**

כיוון שהגובה יורד למפגש אלכסוני הריבוע, כלומר למרכז המעגל החוסם את הבסיס, הרי שהפירמידה ישרה.

אם הפירמידה ישרה, אז גם כל המקצועות הצדדיים שווים זה לזה $(SA=SB=SC=SD)$.

נתון $|\underline{u}|=7$ **ולכן** $\underline{u}^2=49$.

SE **מאונך לבסיס, ולכן מאונך לכל וקטור בבסיס.**

$$\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{DC}=0 \quad \leftarrow \overrightarrow{SE}\perp\overrightarrow{DC}$$
$$\underline{u}\cdot(-2\underline{u}+2\underline{v})=0$$
$$-2\underline{u}^2+2\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \quad /:2$$
$$\boxed{\underline{u}\cdot\underline{v}=49} \quad \leftarrow \underline{u}^2=49$$
$$\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \quad \leftarrow \overrightarrow{SE}\perp\overrightarrow{BC}$$
$$\underline{u}\cdot(2\underline{v}-2\underline{w})=0$$
$$2\underline{u}\cdot\underline{v}-2\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \quad /:2$$
$$\boxed{\underline{u}\cdot\underline{w}=49} \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{v}=49$$

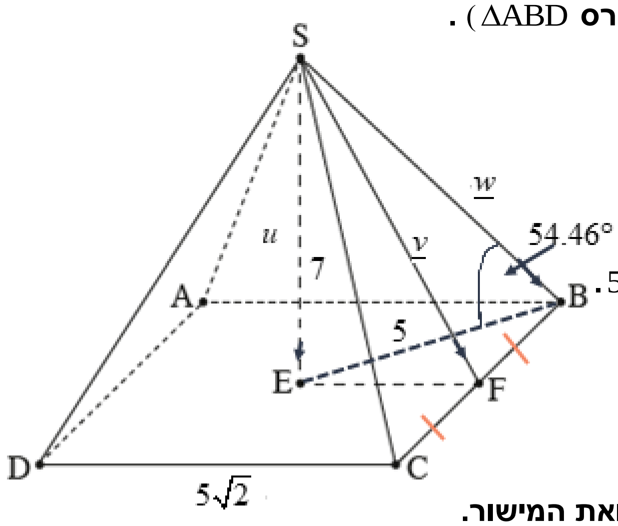
תשובה: $\underline{u}\cdot\underline{w}=49$.

נכתב ע"י עפר ילין

ג. נתון $\overrightarrow{BA}=(-3,4,5)$ **, ולכן אורך צלע הריבוע הוא** $\sqrt{(-3)^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

הזווית בין SB **לבין בסיס הפירמידה היא** $\sphericalangle SBE$ **, הזווית שבין המשופע להיטל שלו למישור הבסיס.**

$\boxed{BE=5} \rightarrow \quad BD=\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2}=10$ **(משפט פיתגורס** ΔABD) .



$\Delta SBE \quad (\sphericalangle SEB=90°)$

$\tan\sphericalangle SBE=\frac{SE}{BE}=\frac{7}{5}$

$\boxed{\sphericalangle SBE=54.46°}$

תשובה: הזווית שבין SB **לבסיס הפירמידה היא בת** $54.46°$.

ד. נתון $E(0,4,5)$.

מישור הבסיס ABCD **מקביל לציר ה-** z **, ולכן** $c=0$ **במשוואת המישור.**

ההצגה הפרמטרית של המישור היא: $\underline{x}=(0,4,5)+m(-3,4,5)+t(0,0,1)$.

$(a,b,c)\cdot(-3,4,5)=0 \quad \rightarrow -3a+4b=0 \quad \rightarrow 3a=4b \quad \rightarrow b=3\,,\,a=4 \quad \rightarrow 4x+3y+d=0$.

נציב את שיעורי הנקודה $E(0,4,5)$ **:** $\boxed{4x+3y-12=0} \rightarrow \quad d=-12 \rightarrow \quad 4\cdot 0+3\cdot 4+d=0$

תשובה: משוואת המישור שעליו מונח הבסיס של הפירמידה היא $4x+3y-12=0$.

ה. נתון $x_B=3$.

נציב במשוואת המישור: $4\cdot 3+3y-12=0$ **, ולכן** $y_B=0$.

נסמן $B(3,0,b)$.

מצאנו כי $BE=5$ **, כאשר** $E(0,4,5)$.

$$\sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2+(b-5)^2}=5$$
$$25+(b-5)^2=25$$
$$(b-5)^2=0$$
$$b=5 \quad \rightarrow \boxed{B(3,0,5)}$$

תשובה: $B(3,0,5)$.

נכתב ע"י עפר ילין

3

א. (1) נפתור את המשוואה $z^6+64i=0$ **, כאשר** z **הוא מספר מרוכב.**

$$z_k=\sqrt[n]{r}\,cis(\frac{\theta}{n}+\frac{360°k}{n})$$

$$z^6=-64i=64cis\,270°$$

$$z_k=\sqrt[6]{64}cis\,(\frac{270°}{6}+\frac{360°k}{6})$$

$$\boxed{z_k=2\,cis\,(45°+60°k)}$$

תשובה: $z_0=2\,cis\,45°$ **,** $z_1=2\,cis\,105°$ **,** $z_2=2\,cis\,165°$ **,**

$z_3=2\,cis\,225°$ **,** $z_4=2\,cis\,285°$ **,** $z_5=2\,cis\,345°$ **.**

(2) נפתור את המשוואה $\frac{z^6+64i}{z^2-4i}=0$ **, כאשר** z **הוא מספר מרוכב.**

המונה מתאפס עבור ששת הפתרונות של תת-סעיף (1),

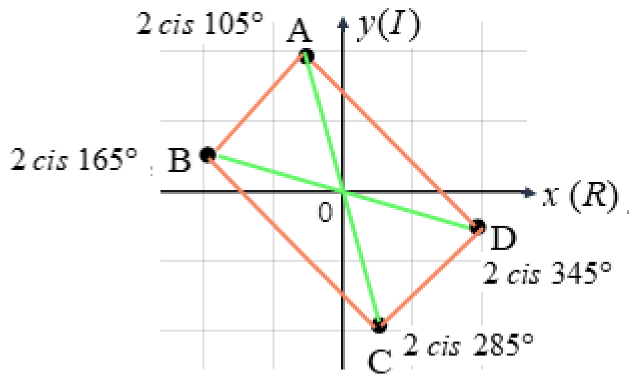
אבל יש תחום הצבה כי המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$z^2\neq 4i=4cis\,90°$$

$$z_k\neq\sqrt[2]{4}cis\,(\frac{90°}{2}+\frac{360°k}{2})$$

$$\boxed{z_k=2\,cis\,(45°+180°k)}$$

$$z\neq 2\,cis\,(45°),2\,cis\,(225°)$$



תשובה: $z_A=2\,cis\,105°$ **,** $z_B=2\,cis\,165°$ **,**

$z_C=2\,cis\,285°$ **,** $z_D=2\,cis\,345°$ **.**

ב. $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=2$ **, כאשר יש שני זוגות של מספרים נגדיים.**

מכאן שאלכסוני המרובע ABCD **נפגשים בראשית הצירים, חוצים זה את זה ושווים זה לזה,**

ולכן המרובע ABCD **הוא מלבן.**

הזווית החדה שבין האלכסונים $\measuredangle BOA=165°-105°=60°$.

ושטח המלבן הוא $4\sqrt{3}=\frac{4\cdot4\cdot\sin60°}{2}$.

תשובה: שטח המרובע הוא $4\sqrt{3}$.

נכתב ע"י עפר ילין

ג. מסובבים את המרובע (סביב הראשית) בזווית α **נגד כיוון השעון,** $0° < \alpha < 90°$.

הסיבוב נגד כיוון השעון מגדיל את הארגומנט.

מכאן שהמספרים המייצגים את קודקודי המרובע הם:

$2\,cis\,(105°+\alpha)$ **,** $2\,cis\,(165°+\alpha)$ **,** $2\,cis\,(285°+\alpha)$ **ו-** $2\,cis\,(345°+\alpha)$.

עבור $\alpha = 45°$ **המספרים הם:** $2\,cis\,(150°)$ **,** $2\,cis\,(210°)$ **,** $2\,cis\,(330°)$ **ו-** $2\,cis\,(30°)$.

מכפלת המספרים היא: $2^4\ cis\,(150°+210°+330°+30°) = 16\,cis\,(360°) = 16$.

תשובה: ערך המכפלה הוא 16 .

ד. המספרים הם $2\,cis\,(105°+\alpha)$ **,** $2\,cis\,(165°+\alpha)$ **,** $2\,cis\,(285°+\alpha)$ **ו-** $2\,cis\,(345°+\alpha)$.

(1) מכפלת המספרים היא

$2^4\ cis\,(105°+\alpha+165°+\alpha+285°+\alpha+345°+\alpha) = 16\,cis\,(900°+4\alpha) = 16\,cis\,(180°+4\alpha)$.

על מנת לקבל מספר מדומה טהור נדרש שהארגומנט (הזווית) יהייה $90°$ **או** $270°$.

בהינתן ש- $0° < \alpha < 90°$**, אז יש שתי אפשרויות:**

- **כאשר** $4\alpha = 90°$ **נקבל ארגומנט** $270°$,
  כלומר עבור $\alpha = 22.5°$ **המכפלת תהייה מספר מדומה טהור.**
- **כאשר** $4\alpha = 270°$ **נקבל ארגומנט** $90°$,
  כלומר עבור $\alpha = 67.5°$ **המכפלה תהייה מספר מדומה טהור.**

תשובה: עבור $\alpha = 22.5°$ **, או** $\alpha = 67.5°$ **המכפלה תהייה מספר מדומה טהור.**

.

(2) נבדוק את ערך המכפלה, עבור כל אחד מערכי α **שמצאנו.**

- **כאשר** $\alpha = 22.5°$ **ערך המכפלה הוא** $16\,cis\,(180°+4\cdot 22.5°) = 16\,cis\,270° = -16\,i$.
- **כאשר** $\alpha = 67.5°$ **ערך המכפלה הוא** $16\,cis\,(180°+4\cdot 67.5°) = 16\,cis\,450° = 16\,cis\,90° = 16\,i$.

תשובה: עבור $\alpha = 22.5°$ **ערך המכפלה הוא** $-16\,i$ **,** $\alpha = 67.5°$ **ערך המכפלה הוא** $16\,i$.

נכתב ע"י עפר ילין

4

א. נתונה הפונקציה $k(x)=xe^{x}$ **, ונתונה הפונקציה** $m(x)=2e^{x}-1$ **, המוגדרות לכל** x.

(1) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

כאשר $x\to+\infty$ **אז** $e^{x}\to+\infty$ **ובהתאם לשתי הפונקציות אין אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\to-\infty$ **אז** $e^{x}\to0^{+}$ **, מהר יותר מאשר** $x\to-\infty$ **, ונקבל אסימפטוטה אופקית.**

$y=0$ **לפונקציה** $k(x)=xe^{x}$ **ו-** $y=-1$ **לפונקציה** $m(x)=2e^{x}-1$.

לשתי הפונקציות גרף רציף ללא אסימפטוטות אנכיות לציר ה- x.

תשובה: עבור $k(x)$ **-** $y=0$ $(x\to-\infty)$ **אסימפטוטה אנכית לציר** y **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

עבור $m(x)$ **-** $y=-1$ $(x\to-\infty)$ **אסימפטוטה אנכית לציר** y **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות.

$\boxed{k(x)=xe^{x}}$

$k'(x)=1\cdot e^{x}+xe^{x}$

$\boxed{k'(x)=e^{x}(x+1)}$

$x+1$ **הוא ביטוי ליניארי המתאפס עבור** $x=-1$,

ועובר משליליות לחיוביות

ירידה: $x<-1$ **, עלייה:** $x>-1$

ונקודת מינימום $(-1,\frac{-1}{e})$

$\boxed{m(x)=2e^{x}-1}$

$\boxed{m'(x)=2e^{x}}$

הנגזרת חיובית לכל x

והפונקציה עולה לכל x

תשובה: עבור $k(x)$ **- עלייה:** $x>-1$ **, ירידה:** $x<-1$ **עבור** $m(x)$ **- עלייה: כל** x **, ירידה – אף** x .

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$.

עבור $k(x)$ **:** $\to(0,0)$ $k(0)=0\cdot e^{0}=0$.

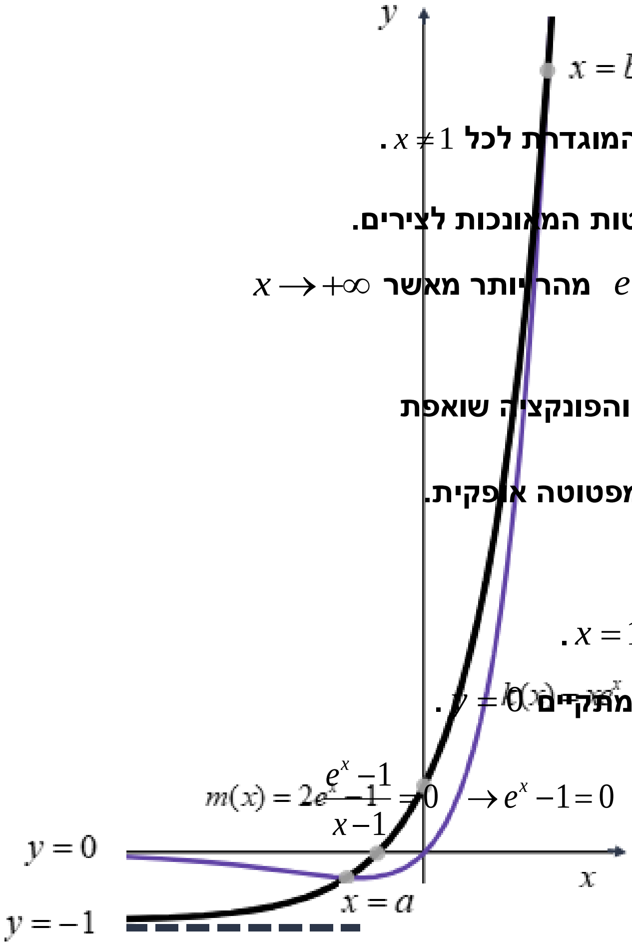
עבור $m(x)$ **:** $\to(0,1)$ $m(0)=2\cdot e^{0}-1=1$.

תשובה: עבור $k(x)$ **-** $(0,0)$ **, עבור** $m(x)$ **-** $(0,1)$.

נכתב ע"י עפר ילין

ב. הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בשתי נקודות,

$x=a$, $x=b$, כאשר $b>a$.



תשובה: הסרטוט משמאל.

ג. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}$, המוגדרת לכל $x\neq 1$.

(1) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים.

כאשר $x\to+\infty$ אז $e^x\to+\infty$ מהיר יותר מאשר $x\to+\infty$

ואין אסימפטוטה אופקית.

כאשר $x\to-\infty$ אז $e^x\to 0$ והפונקציה שואפת

ל- $\frac{-1}{-\infty}\to 0^+$ ו- $y=0$ אסימפטוטה אופקית.

$x=1$ אסימפטוטה אנכית.

תשובה: $y=0$ $(x\to-\infty)$, $x=1$.

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

$\frac{e^x-1}{x-1}=0 \to e^x-1=0 \to e^x=1 \to x=0 \to (0,0)$

תשובה: $(0,0)$.

ד. נסביר מדוע למשוואה $f'(x)=0$ יש בדיוק שני פתרונות.

$$\boxed{f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)-(e^x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{xe^x-(2e^x-1)}{(x-1)^2}}$$

למשוואה $xe^x-(2e^x-1)=0$ יש שני פתרונות בדיוק ($x=a$,$x=b$, $b>a$) על פי הנתון בסעיף ב,

ולכן $f'(x)=0$ יש בדיוק שני פתרונות.

תשובה: הסברנו מדוע למשוואה $f'(x)=0$ יש בדיוק שני פתרונות.

ה. (1) נסביר מדוע $b>1$.

הפונקציות $k(x)=xe^x$ ו- $m(x)=2e^x-1$ נפגשות פעמיים,

כאשר נקודת החיתוך הימנית היא ברביע הראשון.

$m(0)=1>k(0)=0$, וגם $m(1)=2e-11>k(1)=e$, ולכן הן תהיינה שוות כאשר $x=b>1$

תשובה: הסברנו מדוע $b>1$.

(2) נביע באמצעות a ו- b את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

$$f'(x)=\frac{xe^x-(2e^x-1)}{(x-1)^2}$$

המכנה חיובי לכל $x\neq 1$, ולכן סימני הנגזרת נקבעים על ידי המונה.

נשים לב ש- $xe^x-(2e^x-1)=k(x)-m(x)$.

$k(2)=2e^2>m(2)=2e^2-1$ **ו-** $k(a-1)>m(a-1)$ **על פי הגרף בדרך לאסימפטוטות האופקיות.**

לכן בתחום $x>b$ **או** $x<a$ **מתקיים** $f'(x)>0$ **והפונקציה** $f(x)$ **עולה.**

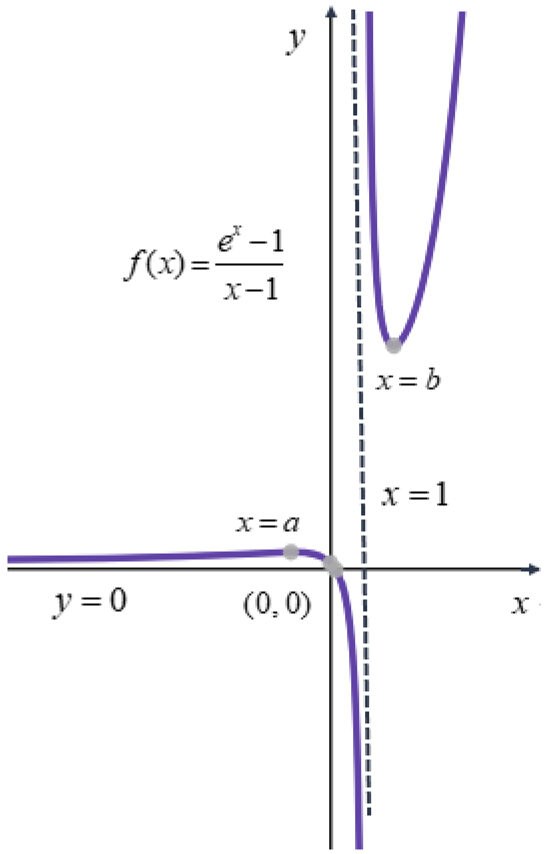
וגם בתחום $1<x<b$ **או** $a<x<1$ **מתקיים** $f'(x)<0$ **והפונקציה** $f(x)$ **יורדת.**

תשובה: $f(x)$ **עולה בתחום** $x>b$ **או** $x<a$ **ויורדת בתחום** $1<x<b$ **או** $a<x<1$ **.**

ה. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **.**

על פי תחומי העלייה והירידה, שמצאנו בתת-סעיף ד(2),

קיימות שתי נקודות קיצון: $x=b$ **מינימום ו-** $x=a$ **מקסימום.**



תשובה: הסרטוט מעל.

נכתב ע"י עפר ילין

5

בגרות פד יולי 24 מועד קיץ ב שאלון 35572

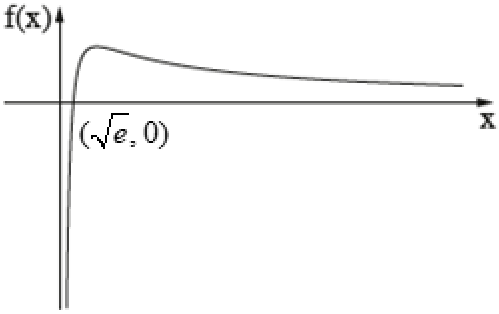
א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\ell n(x)-1}{x}$ **, המוגדרת בתחום** $x>0$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$\frac{2\ell n(x)-1}{x}=0 \quad \rightarrow 2\ell n(x)-1=0 \quad \rightarrow \ell n(x)=0.5 \quad \rightarrow x=e^{0.5} \quad \rightarrow \boxed{(\sqrt{e},0)}$$

תשובה: $(\sqrt{e},0)$.

שרטוט הפונקציה משממל.



ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ **המוגדרת בתחום** $x>0$ **ומקיימת** $g'(x)=f(x)$.

קדם אנליזה

- **תחומי החיוביות והשליליות של** $f(x)$ **זהים לתחומי העלייה הירידה של** $g(x)$,
  ולכן $g(x)$ **עולה בתחום** $x>\sqrt{e}$ **ויורדת בתחום** $0<x<\sqrt{e}$ **, כאשר** $x=\sqrt{e}$ **מינימום של** $g(x)$.
- **תחומי העלייה והירידה של** $f(x)$ **זהים לתחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של** $g(x)$.
  לכן אם $x=x_1$ **מקסימום של** $f(x)$ **אז הוא שיעור ה-** x **של נקודת הפיתול של** $g(x)$ **,**
  כאשר $g(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **בתחום** $x>x_1$ **וקעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **בתחום** $0<x<x_1$.

(1) נמצא את הפונקציה $g(x)$ **, כאשר נתון כי** $g(\sqrt{e})=-\frac{1}{4}$ **בנקודת הקיצון, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$g(x)=\int f(x)\cdot dx=\int\frac{2\ell n(x)-1}{x}\cdot dx$$

$$g(x)=\int(2\cdot\ell n\, x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x})\cdot dx$$

$$g(x)=2\cdot\frac{(\ell n\, x)^2}{2}-\ell n|x|+c$$

$$-\frac{1}{4}=(\ell n\sqrt{e})^2-\ell n\sqrt{e} \quad \leftarrow g(\sqrt{e})=-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+c \quad \rightarrow c=0$$

$$\boxed{g(x)=(\ell n\, x)^2-\ell n\, x}$$

תשובה: $g(x)=(\ell n\, x)^2-\ell n\, x$.

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

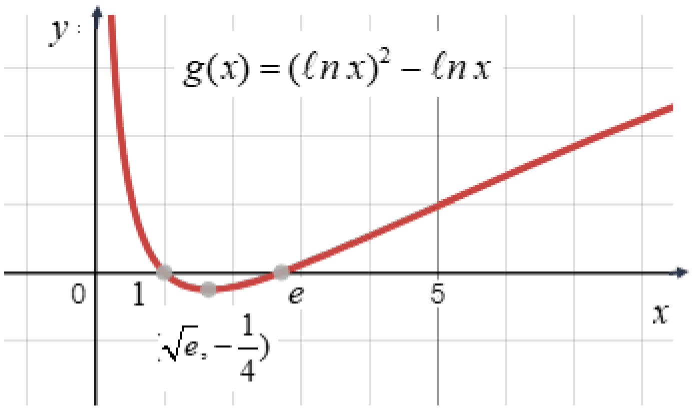
$$g(x)=(\ell n\,x)^2-\ell n\,x=0 \quad \to \ell n\,(x)\cdot(\ell n\,x-1)=0$$

$$\ell n\,(x)=0 \quad \to x=1 \quad \to \boxed{(1,0)}$$

$$\ell n\,(x)=1 \quad \to x=e \quad \to \boxed{(e,0)}$$

תשובה: $(1,0)$, $(e,0)$.

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

נכתב ע"י עפר ילין

ג. נתונה הפונקציה $h(x)$ המוגדרת כך: $h(x)=1+\frac{b}{g(x)}$, $b>\frac{1}{4}$ פרמטר.

קדם אנליזה – $h(x)$ היא טרנספורמציה של $g(x)$.

- בשלב ראשון $\frac{1}{g(x)}$
  - תחום הגדרה מושפע מנקודות האפס של $g(x)$ והוא $x>0, x\neq 1, e$.
  - $x=e$ ו- $x=1$ אסימפטוטות אנכיות.
  - תחומי חיוביות שליליות ללא שינוי
  - תחומי עלייה וירידה מתהפכים ו- $(\sqrt{e},-4)$ מקסימום.
  - $y=0$ $(x\to+\infty)$ אסימפטוטה אופקית לימין.
  - $(0,0)$ נקודת חור.
- בשלב שני כפל ב- $b>\frac{1}{4}$ (חיובי) שרק עושה כיווץ או מתיחה אנכיים ושיעורי ה- y משתנים כמובן.
- בשלב שלישי תזוזה אנכית אחת כלפי מעלה $1+\frac{b}{g(x)}$.
  - $(\sqrt{e},-4b+1)$ מקסימום.
  - $y=1$ $(x\to+\infty)$ אסימפטוטה אופקית לימין.
  - $(0,1)$ נקודת חור.

(1) תשובה: תחום ההגדרה של $h(x)$ הוא $x>0, x\neq 1, e$.

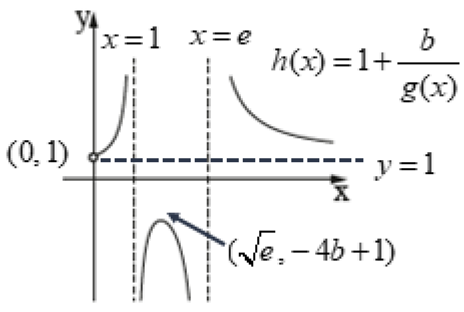
(2) בתחום $x>e$ או $0<x<1$ מתקיים ש- $h(x)$ חיובית כמו $g(x)$.

בתחום $1<x<e$ שיעור ה- y של נקודת המקסימום הוא $-4b+1$.

כיוון ש- $b>\frac{1}{4}$ אז בתחום זה $h(x)$ שלילית כי $-4b+1<0$ (קו ישר יורד, שמתאפס עבור $b=\frac{1}{4}$).

תשובה: גרף הפונקציה $h(x)$ אינו חותך את ציר ה- x .

(3) תשובה: $(\sqrt{e},-4b+1)$ מקסימום.



II

ה. גרף II הוא הגרף המתאים.

תשובה: גרף II מתאר את הפונקציה $h(x)$.