פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, מועד ב, שאלון: 35571

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

א1

(1) נוכיח שהטענה $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ **נכונה לכל** n **טבעי.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ **אגף שמאל:** $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}$,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **(הטבעי העוקב):**

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{k\cdot(k+1)}}_{\downarrow}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו, לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}==\frac{k+1}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{k+2}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו שהטענה $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ **נכונה לכל** n **טבעי.**

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

(2) נבדוק האם הביטוי $1\cdot2+2\cdot3+...+n(n+1)$ **שווה ל-** $\frac{n+1}{n}$ **בעבור כל** n **טבעי.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

אגף ימין: $1\cdot2=2$ **אגף שמאל:** $\frac{1+1}{1}=2$.

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$.

אגף ימין: $1\cdot2+2\cdot3=8$ **אגף שמאל:** $\frac{2+1}{2}=1.5$.

קבלנו שאגף שמאל <u>אינו</u> שווה לאגף ימין.

תשובה: הביטוי $1\cdot2+2\cdot3+...+n(n+1)$ **<u>אינו שווה</u> ל-** $\frac{n+1}{n}$ **בעבור כל** n **טבעי.**

פתרון תרגיל בדרך אחרת על ידי יגאל מורה למתמטיקה (צהלה)

ובהשראתו ועצותיו הנבונות של עפר ילין חבר יקר

לזכרו של רס"ל סדריק גרין מתל אביב

לוחם בחטיבה 261 שנפל חלל במלחמת חרבות ברזל

נפרק את האיבר הכללי לשני שברים : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$

לאחר מכנה משותף נקבל : $1=a(n+1)+bn$

ומכאן ש- $1=a+(a+b)n$.

לכן מתקיים : $a=1$ **וגם** $a+b=0$ **ומכאן ש-** $b=-1$

לכן האיבר הכללי המתקבל: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

נרשום את הסדרה ע"פ האיבר הכללי החדש :

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

אם נחבר את כל איברי הסדרה, אז כל האיברים מתבטלים חוץ מהראשון והאחרון לכן נקבל שסכום הסדרה:

$$\boxed{\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}\boxed{=\frac{n}{n+1}}$$

ומכאן שהטענה $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ **נכונה לכל** n **טבעי.**

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

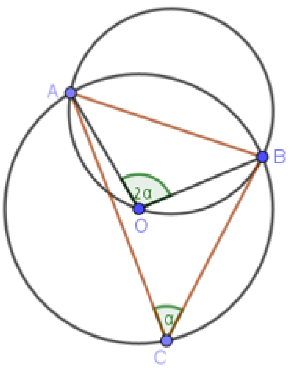
(1) ΔABC חסום במעגל שמרכזו O, $\sphericalangle ACB=\alpha$, $0°<\alpha<90°$.

נביע באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את ΔABC

ובין רדיוס המעגל החוסם את ΔAOB.

תודה לחברי המורה דוד צחור על האיורים היפים.

$\sphericalangle AOB=2\alpha$ (זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת במעגל O)



ΔABC על פי משפט הסינוסים

$$\frac{AB}{\sin\alpha}=2R_{\Delta ABC}$$
$$\frac{AB}{2\sin\alpha}=R_{\Delta ABC}$$

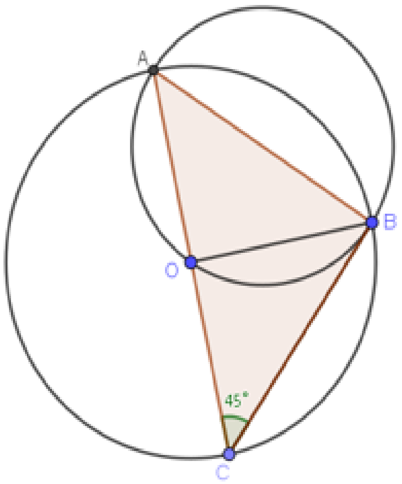
ΔAOB על פי משפט הסינוסים

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha}=2R_{\Delta AOB}$$
$$\frac{AB}{2\sin 2\alpha}=R_{\Delta AOB}$$

נמצא את היחס המבוקש על ידי חילוק המשוואות, וכפל בהופכי:

$$\frac{R_{\Delta ABC}}{R_{\Delta AOB}}=\frac{AB}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{AB}=\frac{AB\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{AB\cdot\sin\alpha}=2\cos\alpha$$

תשובה: $\frac{R_{\Delta ABC}}{R_{\Delta AOB}}=2\cos\alpha$.



(2) נתון כי $\frac{R_{\Delta ABC}}{R_{\Delta AOB}}=\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}=2\cos\alpha$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\alpha$$
$$\boxed{\alpha=45°}\quad\leftarrow 0°<\alpha<90°$$

מכאן ש- $\sphericalangle AOB=90°$, ולכן AB הוא הקוטר של המעגל החוסם את ΔAOB

(הקוטר נשען על זווית היקפית ישרה).

נתון כי הצלע CB משיקה למעגל החוסם את ΔAOB,

ולכן $\sphericalangle CBA=90°$ (המשיק מאונך לקוטר בנקודת ההשקה B).

מכאן ש- ΔABC הוא ישר זווית, ולכן מרכז המעגל החוסם אותו נמצא באמצע היתר AC,

כלומר O נמצאת על AC שהוא קוטר המעגל החוסם את ΔABC.

תשובה: הוכחנו כי מרכז המעגל O נמצא על הצלע AC .

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

1ג

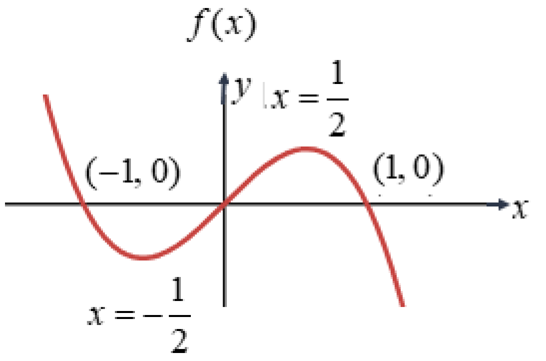
(1) $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית רציפה המוגדרת לכל x ,

ולכן $f(-x)=-f(x)$ והגרף סימטרי לראשית הצירים, עם נקודת פיתול בראשית.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום אחת בלבד ובה $x=-\frac{1}{2}$,

ובהתאם יש לה רק נקודת מקסימום אחת שבה $x=\frac{1}{2}$.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x היא $(1,0)$ ולכן יש עוד אחת ב- $(-1,0)$.



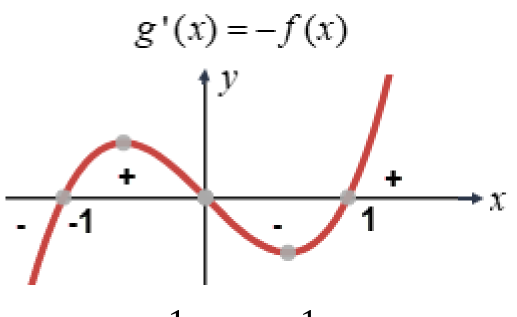
תשובה: הסרטוט מעל.

(2) $g(x)$ היא פונקציה זוגית רציפה המוגדרת לכל x ,

ולכן $g(-x)=g(x)$ והגרף סימטרי לציר ה- y , עם נקודת קיצון על ציר זה.

$g'(x)=-f(x)$ ולכן תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ זהים לתחומי החיוביות והשליליות של $-f(x)$.

הגרף של $-f(x)$ הוא שיקוף סביב ציר ה- של $f(x)$.



בנקודות שבהן $x=1$ או $x=-1$ עוברת הנגזרת משליליות לחיוביות ומתקבל מינימום,

ובנקודה שבה $x=0$ עוברת הנגזרת מחיוביות לשליליות ומתקבל מקסימום.

נתון: $g(1)=2$, ולפי ההסבר הנ"ל והזוגיות של $g(x)$ מתקבל ש- $(1,2)$ ו- $(-1,2)$ הן נקודות המינימום.

תשובה: שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה $g(x)$ הן $(1,2)$ ו- $(-1,2)$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

(3) נבחן את שני ההיגדים.

I. **שיעור ה-** y **של נקודת המקסימום של הפונקציה** $g(x)$ **הוא בין** 0 **ל-** 2 .

המינימום המוחלט של $g(x)$ **מתקבל בשתי נקודות המינימום היחידות,**

ולכן שיעור ה- y **של נקודת המקסימום היחידה חייב להיות גדול מ-** 2 .

תשובה: ההיגד אינו נכון.

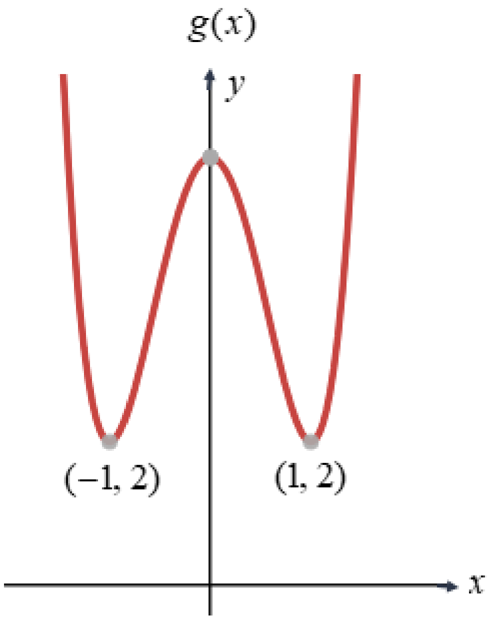
II. **הפונקציה** $g(x)$ **חיובית לכל** x .

כפי שהסברנו הערך המינימלי של הפונקציה הוא 2 $(g(x) \geq 2)$,

ולכן הפונקציה, שמוגדרת לכל x **חיובית לכל** x .

תשובה: ההיגד נכון.

סקיצה אפשרית של $g(x)$ **, להבנה נוספת.**



הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

בסרטוט שלפנינו מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

(1) נקבע איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$.

על פי מיקום נקודות החיתוך עם ציר ה- x ניתן לקבוע שהביטוי המתאים הוא III.

נקודות האפס של $f(x)=(x-4)(x-1)(x+3)(x+6)$

מתקבלות עבור $x=4$, $x=1$, $x=-3$ ו- $x=-6$.

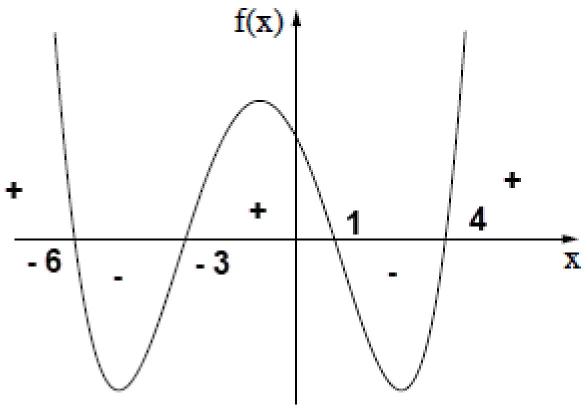
הערה: ניתן לראות שהגרף אינו של פונקציה זוגית או אי-זוגית,

אם כי ניתן לזהות סימטריה אפשרית כאשר ציר הסימטריה עובר בנקודת המקסימום.

עבור $x\to\pm\infty$ רואים ש- $f(x)\to+\infty$, ולכן מדובר בפולינום ממעלה זוגית.

כיוון שיש ארבע נקודות אפס, ושלוש נקודות קיצון, הרי שמדובר במעלה רביעית.

תשובה: ביטוי III. מייצג את הפונקציה $f(x)$.



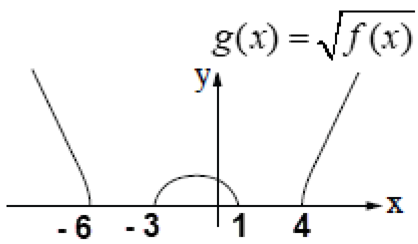
(2) נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$, המוגדרת כמובן בתחום שבו $f(x)\geq 0$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ הוא $x\geq 4$ או $-3\leq x\leq 1$ או $x\leq -6$.

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

מכיוון שהנגזרת אינה מוגדרת בנקודות האפס של $g(x)$,

אז מתקבל שהגרף יוצא מנקודות האפס "אנכית".

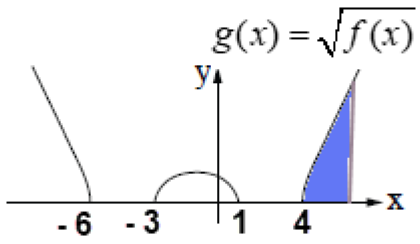


תשובה: הסרטוט מעל.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע

(4) נתון: $\int_4^7 g(x)\,dx = k$ **, כלומר השטח הצבוע בכחול הוא** k .



יש להביע באמצעות k **את הערך של** $\int_5^8 \left[2\cdot g(x-1)+1\right]dx$

$h(x)=2\cdot g(x-1)+1$ **היא טרנספורמציה בשלושה שלבים של** $g(x)$.

- **הזזה אופקית** 1 **יחידות ימינה שאינה משנה את גודל השטח.**
- **מתיחה אנכית פי** 2 **שמגדילה את ערכי ה-** y **(שהם חיוביים כולם בשטח) פי** 2 ,
  ולכן השטח המתקבל שווה ל $2k$.
- **הזזה אנכית** 1 **יחידות כלפי מעלה, שמוסיפה** 1 **לכל ערכי ה-** y ,
  ולמעשה לשטח שמעל ציר ה- x **נוסף מלבן שאורכו** $8-5=3$ **ורוחבו** 1,
  ומכאן ששטחו של המלבן שנוסף הוא $3\cdot 1=3$ **, וגודל השטח כולו הוא** $2k+3$.

תשובה: $\int_5^8 \left[2\cdot g(x-1)+1\right]dx = 2k+3$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע

2

א. נתונה סדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).

כל איברי הסדרה: $a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_{2n+1}$ הם חיוביים, ולכן מנת הסדרה חיובית.

- **סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים בסדרה גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.**

  המשוואה המתאימה היא: $S_{2n-1 starting\ from\ a_3} = 4 \cdot S_{2n-1 starting\ from\ a_1}$

- **סכום איברי הסדרה שנמצאים אחרי האיבר האמצעי בסדרה גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.**

  המשוואה המתאימה היא: $S_{n\ starting\ from\ a_{n+2}} = 256 \cdot S_{n\ starting\ from\ a_1}$.

	החל מ- a_3	החל מ- a_1
A₁	$a_3 = a_1 \cdot q^2$	a_1
Q	q	q
N	$2n-1$	$2n-1$

$$S_{2n-1 starting\ from\ a_3} = 4 \cdot S_{2n-1 starting\ from\ a_1}$$

$$\frac{a_1 q^2 (q^{2n-1}-1)}{q-1} = \frac{4a_1 (q^{2n-1}-1)}{q-1} \quad / : a_1(q^{2n-1}-1) \neq 0$$

$$q^2 = 4$$

$$\boxed{q=2} \quad \leftarrow q>0$$

	החל מ- a_1	החל מ- a_{2n+2}
A₁	a_1	$a_{n+2} = a_1 \cdot q^{n+1}$
Q	q	q
N	n	n

$$S_{n\ starting\ from\ a_{n+2}} = 256 \cdot S_{n\ starting\ from\ a_1}$$

$$\frac{a_1 q^{n+1} (q^n - 1)}{q-1} = \frac{256 a_1 (q^n-1)}{q-1} \quad / : a_1(q^n - 1) \neq 0$$

$$q^{n+1} = 256$$

$$2^{n+1} = 2^8 \quad \leftarrow q=2$$

$$n+1 = 8$$

$$\boxed{n=7}$$

תשובה: $n=7$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ב. נתונה סדרה B אין-סופית , המקיימת $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$.

נשים לב שהמשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית (שמנתה כמובן 2),
ולכן הסדרה B מוגדרת כהלכה והיא גם אין-סופית.
נוכיח כי הסדרה B היא גם הנדסית, ונמצא את מנתה.

$$b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2} = \frac{1}{(a_k + a_k \cdot 2)^2} = \frac{1}{(3a_k)^2} = \frac{1}{9(a_k)^2}$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{9(a_{k+1})^2} : \frac{1}{9(a_k)^2}$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1 \cdot 9(a_k)^2}{9(a_{k+1})^2 \cdot 1} = (\frac{a_k}{a_{k+1}})^2$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{q^2}$$

$$\boxed{\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{4}}$$

קבלנו שהמנה בין כל שני איברים עוקבים בסדרה B קבועה, ולכן הסדרה הנדסית.

נשים לב שהסדרה B מתכנסת כי היא אין סופית ומנתה $0 < \frac{1}{4} < 1$ **, וגם כל איבריה חיוביים.**

תשובה: הוכחנו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומנתה היא $\frac{1}{4}$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ג. בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב- 2 .

נתון כי לאחר המכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים,

גדול ב- $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

המשוואה המתאימה היא: $S_{even\,B}+\frac{1}{30}=S_{odd\,B}$.

	כל הסדרה	מקומות אי-זוגיים	מקומות זוגיים
A_1	$\frac{1}{9(a_1)^2}$	$\frac{1}{9(a_1)^2}$	$\frac{1}{9(a_1)^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{18(a_1)^2}$
Q	$\frac{1}{4}$	$\frac{b_{k+2}}{b_k}=\frac{b_k\cdot(\frac{1}{4})^2}{b_k}=\frac{1}{16}$	$\frac{b_{k+2}\cdot 2}{b_k\cdot 2}=\frac{b_{k+2}}{b_k}=\frac{1}{16}$
N	∞	∞	∞

$$S_{even\,B}+\frac{1}{30}=S_{odd\,B}$$

$$\frac{\frac{1}{18(a_1)^2}}{1-(\frac{1}{16})}+\frac{1}{30}=\frac{\frac{1}{9(a_1)^2}}{1-(\frac{1}{16})}$$

$$\frac{8}{135\cdot(a_1)^2}+\frac{1}{30}=\frac{16}{135(a_1)^2}$$

$$\frac{1}{30}=\frac{8}{135\cdot(a_1)^2}$$

$$(a_1)^2=\frac{16}{9}$$

$$\boxed{a_1=\frac{4}{3}}\quad\leftarrow a_1>0$$

תשובה: $a_1=\frac{4}{3}$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

3

א. 80% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.

לכן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מתנדב בקהילה היא 0.8 , ושאינו מתנדב בקהילה היא 0.2 .

בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועות נוער (<u>הוצאה עם החזרה</u>).

נחשב את ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב,

באמצעות המאורע המשלים שהוא "5 מתנדבים או 5 שאינם מתנדבים".

ההסתברות המבוקשת היא: $p = 1 - 0.8^5 - 0.2^5 = \frac{84}{125} = 0.672$.

תשובה: ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב

ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב היא $\frac{84}{125} = 0.672$.

ב. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - חברים בתנועות נוער $\quad$ $\bar{A}$ - לא חברים בתנועות נוער

B - מתנדבים בקהילה $\quad$ $\bar{B}$ - לא מתנדבים בקהילה

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

(1) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.55$.

(2) $P(B/A) = 0.8 \quad \to P(\bar{B}/A) = 0.2$

(3) $P(B/\bar{A}) = \frac{1}{12} \quad \to P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{11}{12}$

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$\frac{11}{12} = \frac{0.55}{P(\bar{A})}$$

$$P(\bar{A}) = 0.6 \quad \to P(A) = 0.4$$

$$P(A) = 0.4 \cdot 100\% \quad \to \boxed{P(A) = 40\%}$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$0.8 = \frac{P(B \cap A)}{0.4}$$

$$P(B \cap A) = 0.32$$

נציב בטבלה ונשלים אותה.

	A חברים	$\bar{A}$ לא חברים	
B - מתנדבים	0.32	0.05	0.27
$\bar{B}$ - לא מתנדבים	0.08	0.55	0.63
	0.4	0.6	1

תשובה: 40% מן התלמידים חברים בתנועת נוער.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ג. בתחרות השתתפו 100 תלמידים סך הכול.

במטרה להקל בפתרון סעיפים ג-ד נעבור לטבלת מספרים,

כאשר כל תא בטבלה הוא מספר התלמידים המתאים, על ידי כפל של 100 בהסתברות המתאימה.

לדוגמה מספר התלמידים החברים בתנועות נוער ואינם מתנדבים הוא $100 \cdot 0.08 = 8$.

	A חברים	$\overline{A}$ לא חברים	
B - מתנדבים	32	5	27
$\overline{B}$ - לא מתנדבים	8	55	63
	40	60	100

תשובה: 8 תלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים.

ד. בוחרים באקראי 3 תלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

לפי הטבלה יש 63 תלמידים שכאלה, מתוכם 8 חברים בתנועת נוער ו- 55 לא חברים בתנועת נוער.

ההוצאות הן ללא החזרה ולכן לאחר בחירה ההסתברויות משתנות.

(1) נחשב את ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער (כזכור יש 8 כאלו),

והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער (כזכור יש 55 כאלו).

$$p = \frac{8}{63} \cdot \frac{55}{62} \cdot \frac{54}{61} = \frac{1,320}{13,237}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{1,320}{13,237}$.

(2) נחשב את ההסתברות <u>שאחד</u> מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים לא,

אם ידוע התלמיד הראשון שנבחר <u>אינו חבר</u> בתנועת נוער (כזכור יש 55 כאלו).

כיוון שידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער,

אז נשארו 62 בני נוער שאינם מתנדבים, מתוכם 8 חברים בתנועת נוער ו- 54 לא חברים בתנועת נוער.

נחשב את ההסתברות שמבין שני האחרים שנבחרו, אחד יהייה חבר בתנועת נוער והאחר לא חבר.

$$p = \frac{8}{62} \cdot \frac{54}{61} + \frac{54}{62} \cdot \frac{8}{61} = \frac{432}{1,891}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{432}{1,891}$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

4

בגרות פד יולי 24 מועד קיץ ב שאלון 35581

נתונים

1. ΔABC חסום במעגל שמרכזו O 2. AB קוטר במעגל O

3. המרובע $CEFO$ הוא בר חסימה במעגל

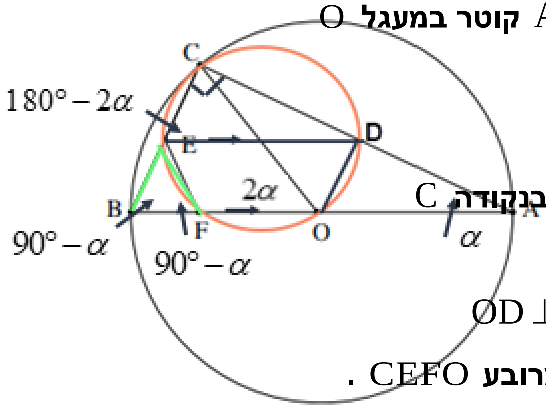
ב: 4. $ED \parallel AB$

ג: 5. הישר ℓ משיק למעגל החוסם ΔABC בנקודה C

צ"ל: א. $EF = EB$

ב. (1) $EDOB$ הוא מקבילית (2) $OD \perp AC$

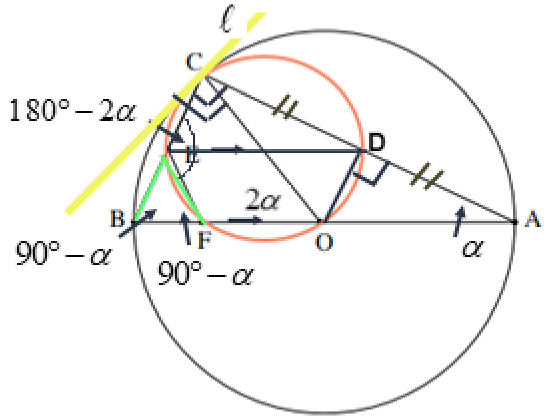
ג. הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע $CEFO$.



הסבר	מס'	טענה	נימוק
	6	$\angle BOC = 2\alpha$	סימון
6 ,3	7	$\angle CEF = 180° - 2\alpha$	סכום זוויות נגדיות במרובע $CEFO$ החסום במעגל הוא $180°$
2	8	$\angle BCA = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
6 ,1	9	$\angle A = \alpha$	זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת
9 ,8	10	$\angle B = 90° - \alpha$	סכום זוויות $180°$ ב- ΔABC
10 ,7	11	$\angle EFB = 90° - \alpha$	זווית חיצונית ל- ΔEFB שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה
11 ,10	12	$\angle EFB = \angle B$	
12	13	$EF = EB$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔEFB
		מ.ש.ל. א	
11	13	$\angle OFE = 90° + \alpha$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
13 ,3	14	$\angle EDO = 90° - \alpha$	סכום זוויות נגדיות במרובע $EDOF$ החסום במעגל הוא $180°$
14 ,4	15	$\angle DOB = 90° + \alpha$	זוויות חד צדדיות בין מקבילים משלימות ל- $180°$
15 ,10	16	$\angle DOB + \angle B = 180°$	
16	17	$OD \parallel BE$	אם זוויות חד צדדיות משלימות ל- $180°$ אז הישרים מקבילים
17 ,4	18	$EDOB$ הוא מקבילית	שני זוגות שונים של צלעות מקבילות
		מ.ש.ל. ב (1)	

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←



הסבר	מס'	טענה	נימוק
18 ,8	17	$OD \perp AC$	אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך לישר שלישי אז גם הישר השני מאונך לו
מ.ש.ל ב (2)			
5 ,1	18	$\ell \perp OC$	משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה
17	19	OC קוטר במעגל החוסם את המרובע $CEFO$	נשען על זווית היקפית ישרה
21 ,10	20	ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע $CEFO$.	אם ישר מאונך לקוטר בנקודה שעל המעגל אז הוא משיק למעגל
מ.ש.ל. ג			

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

א. $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle BAC = \alpha$

$\sphericalangle BOC = 2\alpha$ **(זווית מרכזית שווה לכפליים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת)**

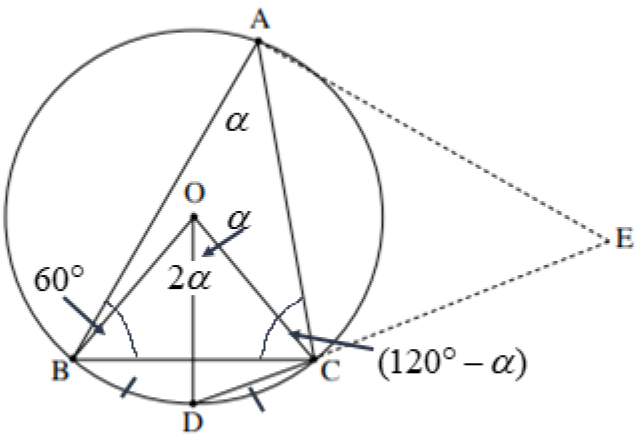
$\sphericalangle ACB = 120° - \alpha$ **(סכום זוויות במשולש** ABC **הוא** $180°$**)**

$\sphericalangle DOC = \alpha$ **(על קשתות שוות זוויות מרכזיות שוות)**

ΔABC **חסום במעגל שרדיוסו** R:

$$S_{\Delta ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin 60° \sin(120° - \alpha)$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}R^2 \sin\alpha \sin(120° - \alpha)}$$



ΔODC **שווה שוקיים, כאשר השוקיים הן** R:

$$\boxed{S_{\Delta ODC} = 0.5R^2 \sin\alpha}$$

תשובה: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}R^2 \sin\alpha \sin(120° - \alpha)$

$S_{\Delta ODC} = 0.5R^2 \sin\alpha$.

ב. **נתון כי** $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ODC}} = 2\sqrt{3}\sin 80°$,

$$\frac{\sqrt{3}R^2 \sin\alpha \sin(120° - \alpha)}{0.5R^2 \sin\alpha} = 2\sqrt{3}\sin 80°$$

$$2\sqrt{3}\sin(120° - \alpha) = 2\sqrt{3}\sin 80° \quad / : 2\sqrt{3}$$

$$\sin(120° - \alpha) = \sin 80°$$

$$120° - \alpha = 80° \qquad 120° - \alpha = 100°$$

$$\boxed{\alpha = 40°} \qquad \boxed{\cancel{\alpha = 20}}$$

$$\sphericalangle ACB = 80° \qquad \cancel{\sphericalangle ACB = 100°}$$

האפשרות השנייה נפסלת כי נתון שמשולש ABC **חד זוויות.**

תשובה: $\alpha = 40°$.

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע

ג. $\sphericalangle CAE = 50°$,

נחשב כמה זוויות כאשר $\alpha = 40°$, כאשר המטרה למצוא את $\sphericalangle ACE$,

ב- ΔACE חסום מעגל, שמרכזו נסמן ב- P שאת רדיוסו יש לחשב,

כאשר נזכור שמרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות.

$$\sphericalangle PAE = \frac{50°}{2} = 25°$$

$$\sphericalangle OCD = \frac{180° - 40°}{2} = 70° \ ,$$

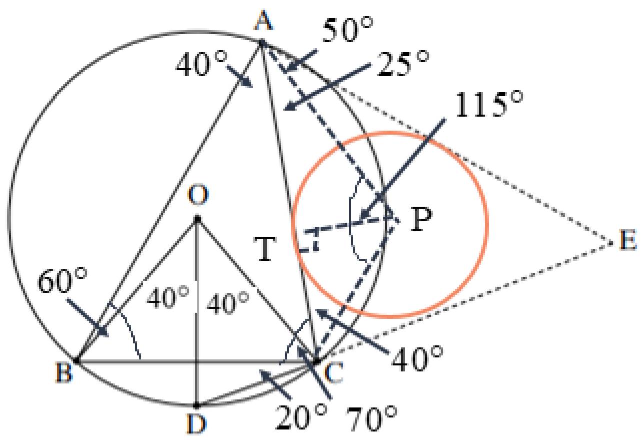
(שווה למחצית הזווית המרכזית) $\sphericalangle BCD = \frac{40°}{2} = 20°$

$$\sphericalangle ACE = 180° - 80° - 20° = 80°$$

$$\sphericalangle PCA = \frac{80°}{2} = 40°$$

$$\sphericalangle APC = 180° - 25° - 40° = 115°$$

$PT \perp AC$, כאשר PT הוא רדיוס המעגל החסום כי מאונך לצלע המשולש המשיקה למעגל.



ΔABC לפי משפט הסינוסים.

$$\frac{AC}{\sin 60°} = 2R$$

$$\boxed{AC = R\sqrt{3}}$$

ΔAPC לפי משפט הסינוסים.

$$\frac{AP}{\sin 40°} = \frac{AC}{\sin 115°}$$

$$AP = \frac{R\sqrt{3} \cdot \sin 40°}{\sin 115°}$$

$$\boxed{AP = 1.2284R}$$

ΔAPT ישר זווית.

$$\sin 25° = \frac{PT}{AP}$$

$$1.2284R \cdot \sin 25° = PT$$

$$\boxed{PT = 0.519R}$$

תשובה: רדיוס המעגל <u>החסום</u> ב- ΔACE הוא $0.519R$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{(x-a)^3}$ **המוגדרת בתחום** $x\neq a$**,** $a\neq 0$ **פרמטר.**

$y=0$ **אסימפטוטה אופקית (חזקת המונה (1) קטנה מחזקת המכנה (2)).**

$x=a$ **אסימפטוטה אנכית, כי גם אם** $a=1$ **אז יישאר** $(x-1)^2$ **במכנה לאחר הצמצום.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** y **,** $x=a$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** X **.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=\frac{0-1}{(0-a)^3}=-\frac{1}{a^3}$ **.**

תשובה: $(0,-\frac{1}{a^3})$ **.**

ב. נמצא עבור אילו ערכים של a **יש לפונקציה** $f(x)$ **נקודת קיצון משמאל לאסימפטוטה** $x=a$ **.**

$$\boxed{f(x)=\frac{x-1}{(x-a)^3}}$$

$$f'(x)=\frac{(x-a)^3-(x-1)\cdot 3\cdot (x-a)^2\cdot 1}{(x-a)^6}$$

$$f'(x)=\frac{(x-a)^2(x-a-3x+3)}{(x-a)^6}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(-2x+3-a)}{(x-a)^4}}$$

$$0=-2x+3-a$$

$$2x=3-a$$

$$x=\frac{3-a}{2}$$

מונה הנגזרת הוא של ישר יורד העובר מחיוביות לשליליות, ולכן $x=\frac{3-a}{2}$ **מקסימום.**

נדרש שנקודת הקיצון תהייה משמאל לישר $x=a$**.**

$$\frac{3-a}{2}<a\ \rightarrow 3-a<2a\ \rightarrow 3<3a\ \rightarrow \boxed{a>1}$$

תשובה: עבור $a>1$**.**

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ג. נתאים לכל אחד מן הערכים $I - VI$ **של** a **את הגרף המתאים, וננמק את תשובותינו.**

I. **עבור** $a = -1$ **:** $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$

האסימפטוטה האנכית היא $x = -1$ **,**

חיתוך ציר y $(0, -1)$ **,**

והקיצון הוא $(2, \frac{1}{27})$ **מקסימום.**

הגרף המתאים הוא גרף 4

II. **עבור** $a = 0.5$: $f(x) = \frac{x-1}{(x-0.5)^3}$

האסימפטוטה האנכית היא $x = 0.5$ **,**

חיתוך ציר y $(0, 8)$ **,**

והקיצון הוא $(1.5, \frac{6}{27})$ **מקסימום.**

הגרף המתאים הוא גרף 3

III. **עבור** $a = 1$: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

האסימפטוטה האנכית היא $x = 1$ **,**

חיתוך ציר y $(0, 1)$ **,**

עלייה $x > 1$ **, ירידה** $x < 1$ **, ללא קיצון.**

הגרף המתאים הוא גרף 2

IV. **עבור** $a = 2$ **:** $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^3}$

האסימפטוטה האנכית היא $x = 2$ **,**

חיתוך ציר y $(0, \frac{1}{8})$ **,**

והקיצון הוא $(\frac{1}{2}, \frac{4}{27})$ **מקסימום.**

הגרף המתאים הוא גרף 1

תשובה: I. **עבור** $a = -1$ **גרף** 4, II. **עבור** $a = 0.5$ **גרף** 3,
III. **עבור** $a = 1$ **גרף** 2, IV. **עבור** $a = 2$ **גרף** 1.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

ד. עבור $a=1$, גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ הוא גרף 1.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=f(x)-b$ ($b>0$ פרמטר),

שהיא תזוזה אנכית b יחידות כלפי מטה של $f(x)$.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x היא $(t,0)$, $1<t<5$.

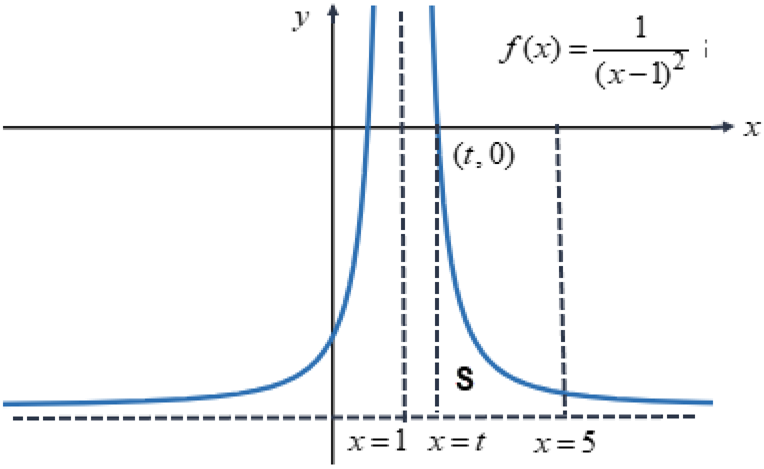
$$\frac{1}{(t-1)^2}-b=0 \rightarrow \boxed{b=\frac{1}{(t-1)^2}}$$

נסרטט את גרף הפונקציה $g(x)=f(x)-b$, שהאסימפטוטה האנכית שלה היא $x=1$,

אין לה נקודות קיצון, והאסימפטוטה האופקית שלה היא $y=-b$, ונסמן את השטח המבוקש.

הערה - תזוזה אנכית אינה משנה את גודלו של השטח,

ויכולנו לחשב את השטח שבין $f(x)$ לבין ציר ה- x (דבר שבא לידי ביטוי גם מייד לאחר הפרש הפונקציות).



נתון כי השטח המבוקש הוא 1.75

$$1.75=\int_t^5\left[\frac{1}{(x-1)^2}-b-(-b)\right]dx$$

$$1.75=\int_t^5\left[(x-1)^{-2}\right]dx$$

$$1.75=\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\Big]_t^5$$

$$1.75=-\frac{1}{x-1}\Big]_t^5$$

$$1.75=-\frac{1}{5-1}-(-\frac{1}{t-1})$$

$$2=\frac{1}{t-1} \quad \rightarrow \boxed{t=1.5}$$

$$b=\frac{1}{(1.5-1)^2} \quad \leftarrow b=\frac{1}{(t-1)^2}$$

$$\boxed{b=4}$$

תשובה: $b=4$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=(b+\cos x)\sin x$ **בתחום** $-\pi\le x\le\pi$, b **הוא פרמטר.**

$f(x)$ **היא מכפלה של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית, ולכן היא אי-זוגית.**

הוכחה נוספת: $f(-x)=\left(b+\cos(-x)\right)\cdot\sin(-x)=(b+\cos x)\cdot(-\sin x)=-(b+\cos x)\cdot\sin x=-f(x)$

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **היא אי-זוגית.**

קדם אנליזה

- **הפונקציה היא אי-זוגית, ובהתאם גרף הפונקציה סימטרי לראשית הצירים.**
- **נקודת פיתול** $(0,0)$.
- **שתי נקודות קצה, כמובן סימטריות, שתהיינה נקודות קיצון קצה.**

ב. נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)=(b+\cos x)\cdot\sin x$ **יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה-** x.

למשוואה $\sin x=0$ **יש שלושה פתרונות:** $x=0,\pm\pi$ **שכבר נותנים שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה-** x.

- **אם** $b=0$ **אז** $f(x)=\cos x\cdot\cos x$ **וקיימות חמש נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **בתחום המבוקש:**

  $(\pi,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(0,0)$, $(-\frac{\pi}{2},0)$ **ו-** $(-\pi,0)$.

- **אם** $0<b<1$ **אז למשוואה** $b+\cos x=0$ **יש שני פתרונות, מעבר לשלושה שבהם** $\sin x=0$,

  כי $-1\le\cos x<0$ **בתחום** $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$ **או** $-\pi\le x<\frac{\pi}{2}$ **ונקבל חמש נקודות חיתוך עם ציר ה-** x .

- **אם** $1\le b$ **אז למשוואה** $b+\cos x=0$ **יהיו שני פתרונות עבור** $b=1$ **והם,** $x=\pm\pi$

  שהם שניים משלושת פתרונות גם של $\sin x=0$.

ג. נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ **, כאשר:** $\cos x=\frac{1}{4}$ **הוא** $(-\frac{5}{8})$.

$\sin x>0$ **בתחום המבוקש, כאשר** $\cos x=\frac{1}{4}$ **, ולכן** $\sin x=+\sqrt{1-(\frac{1}{4})^2}=\sqrt{\frac{15}{16}}$

$$f'(x)=-\sin^2 x+(b+\cos x)\cos x$$

$$(-\frac{5}{8})=-\frac{15}{16}+(b+\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4}=b+\frac{1}{4}$$

$$\boxed{b=1}$$

תשובה: $b=1$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי ביואל גבע ←

נציב $b=1$ בפונקציה $f(x)$ ונקבל $f(x)=(1+\cos x)\sin x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

ד. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

שתי נקודות קיצון קצה הן: $(\pi,0)$, $(-\pi,0)$.

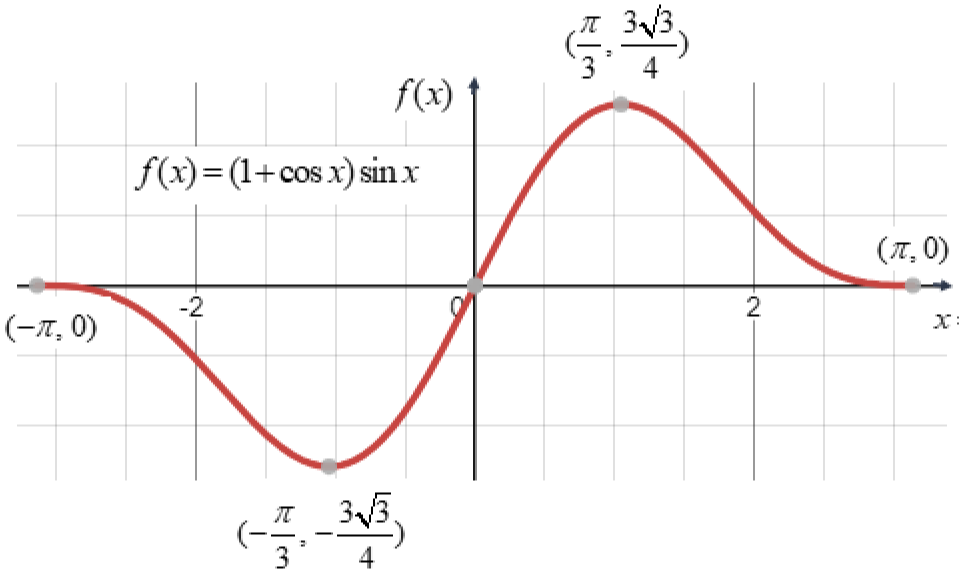
$$f'(x)=-\sin^2 x+(1+\cos x)\cos x$$
$$f'(x)=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x$$
$$\boxed{f'(x)=\cos 2x+\cos x}$$
$$\cos 2x+\cos x=0$$
$$\cos 2x=-\cos x$$
$$\cos 2x=\cos(\pi-x)$$
$$2x=\pi-x+2\pi k \qquad 2x=-\pi+x+2\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k \qquad x=-\pi+2\pi k$$
$$(-\frac{\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}),(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{4}),(-\pi,0),(\pi,0)$$

סוג הקיצון על פי ערכי הפונקציה שהיא רציפה בתחום הנתון.

תשובה: $(\pi,0)$ **מינימום,** $(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{4})$ **מקסימום,** $(-\frac{\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4})$ **מינימום,** $(-\pi,0)$ **מקסימום.**

ה. (1) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נביא לידי ביטוי שראשית הצירים היא נקודת פיתול של הפונקציה.



תשובה: הסרטוט מעל.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

(2) נסרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)=\cos 2x+\cos x$.

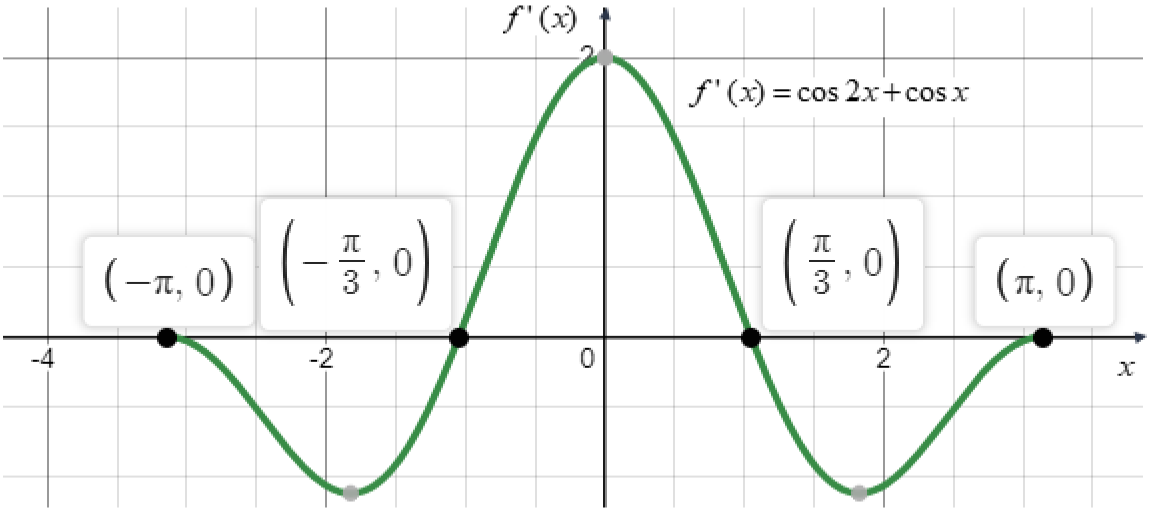
נתבסס על נקודות האפס של פונקציית הנגזרת שמצאנו בסעיף ד,

ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (שניתן לראותם בסקיצה בתת-סעיף ה(1),

התואמים את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת.

כמו כן, ניתן לזהות שיש עוד שתי נקודות פיתול ל- $f(x)$, ובסה"כ שלוש נקודות פיתול,

ולכן לפונקציית הנגזרת יש שלוש נקודות קיצון.



תשובה: הסרטוט מעל.

ו. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=\left(f(x)\right)^2\cdot f'(x)$, המוגדרת בתחום $0\le x\le\pi$.

כמובן, $\left(f(x)\right)^2\ge 0$ כאשר (על פי תחומי העלייה והירידה של $f(x)$)

$f'(x)\ge 0$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ ו- $f'(x)\le 0$ בתחום $\frac{\pi}{3}\le x\le\pi$.

ולכן השטח המבוקש ברביע הראשון הוא השטח בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{3}$, שמעל ציר ה- x .

נחשב את השטח על פי זיהוי הנגזרת הפנימית .

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(g(x)-0))\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\left(f(x)\right)^2\cdot f'(x)\right)dx$$

$$S=\frac{\left(f(x)\right)^3}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}:\quad \frac{\left(f(\frac{\pi}{3})\right)^3}{3})=\frac{27\sqrt{3}}{64} \\ x=0:\quad \frac{\left(f(0)\right)^3}{3})=0 \end{array}\right\}\boxed{S=\frac{27\sqrt{3}}{64}}$$

תשובה: השטח ברביע הרשון, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x , הוא $\frac{27\sqrt{3}}{64}$.

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}$ **המוגדרת בתחום** $x\ge 0$ **, ונתונה הפונקציה** $g(x)=\frac{16}{x^2+3}$ **המוגדרת לכל** x.

(1) *קודם אנליזה:*

- **הפונקציה** $f(x)=\sqrt{x}$ **המוגדרת בתחום** $x\ge 0$ **היא אי-שלילית עם מינימום קצה בראשית הצירים.**
- **הפונקציה קעורה כלפי מטה** $\cap$ **בתחום** $x>0$.
- **הפונקציה** $g(x)$ **זוגית, ומוגדרת לכל** x **, והגרף שלה סימטרי לציר ה-** y **עם נקודת קיצון על ציר זה.**
- **הפונקציה** $g(x)$ **הופכית לפרבולה** $y=\frac{x^2+3}{16}$ **שיש לה מינימום בנקודה** $(0,\frac{3}{16})$,

  ולכן יש ל- $g(x)$ **מקסימום בנקודה** $(0,5\frac{1}{3})\rightarrow$ $(0,\frac{16}{3})$.
- **לפונקציה ההופכית של פרבולה תמיד יש אסימפטוטה אופקית** $y=0$.
- **לפונקציה ההופכית של הפרבולה אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** x.
- $g(x)$ **חיובית לכל** x.

תשובה: לפונקציה $g(x)$ **יש מקסימום בנקודה** $(0,5\frac{1}{3})$.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

קודם אנליזה:

- **במעבר מנקודת המקסימום שבה הפונקציה קעורה כלפי מטה** $\cap$.

  אל האסימפטוטה האופקית $y=0$ **שאליה מגיע הפונקציה כאשר היא קעורה כלפי מעלה** $\cup$

  חייבת להיות נקודת פיתול.
- **עקב הזוגיות של הפונקציה נצפה לקבל שתי נקודות פיתול סימטריות.**

$$\boxed{g(x)=\frac{16}{x^2+3}}$$

$$g'(x)=16\cdot\frac{0-2x}{(x^2+3)}$$

$$\boxed{g'(x)=-32\cdot\frac{x}{(x^2+3)^2}}$$

$$g''(x)=-32\cdot\frac{(x^2+3)^2-x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$g''(x)=-32\cdot\frac{(x^2+3)(x^2+3-4x^2)}{(x^2+3)^4}$$

$$\boxed{g''(x)=\frac{32\cdot(3x^2-3)}{(x^2+3)^3}}$$

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

$$3x^2-3=0$$
$$x=1 \quad \rightarrow (1,4)$$
$$x=-1 \quad \rightarrow (-1,4)$$

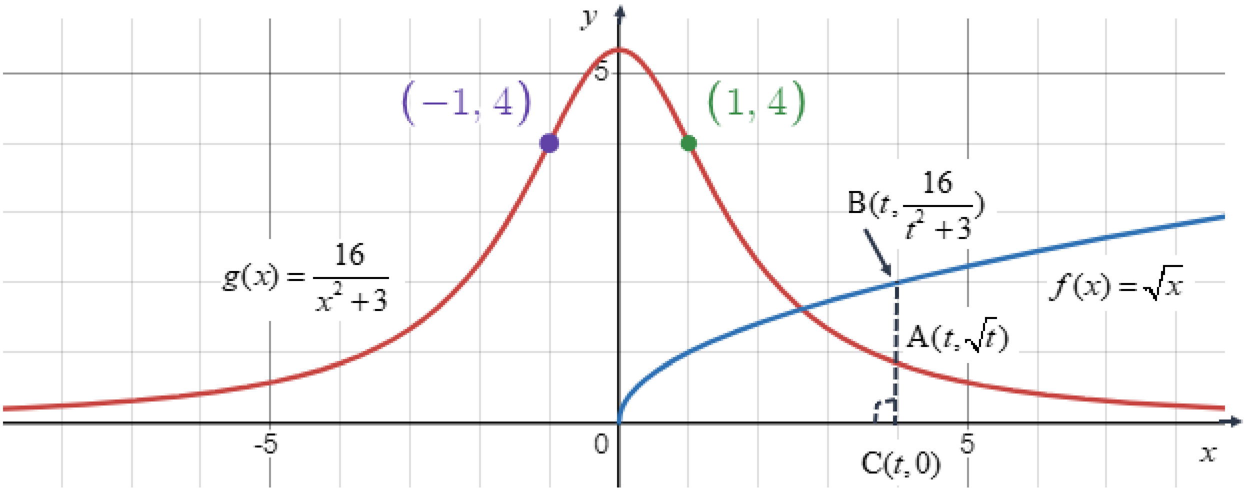
המכנה חיובי לכל x. הביטוי שבמונה הוא של פרבולה ישרה,

העוברת מחיוביות לשליליות ומשליליות לחיוביות, ולכן הנגזרת השנייה מחליפה סימנים,

והפונקציה $g(x)$ מחליפה קעירויות - ובהתאם לתחזית קבלנו שתי נקודות פיתול סימטריות.

תשובה: שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$ הם $(1,4)$ ו- $(-1,4)$.

(3) נסרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של שתי הפונקציות, כולל סימונים לסעיפים ב-ג.



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. בנקודה $C(t,0)$ העלו אנך לציר ה- x החותך את שתי הפונקציות בנקודות A ו- B.

נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$, ובהתאם שיעורי $A(t,\sqrt{t})$.

נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)=\frac{16}{x^2+3}$, ובהתאם שיעורי $B(t,\frac{16}{t^2+3})$.

שתי הנקודות, A ו- B, נמצאות ברביע הראשון ולכן אורכי הקטעים המבוקשים הוא שיעור ה- y שלהן.

מכפלת אורכי הקטעים היא: $AC\cdot BC=\sqrt{t}\cdot\frac{16}{t^2+3}=\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$.

תשובה: מכפלת אורכי הקטעים AC ו- BC היא $\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

ג. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא $r(t)=\frac{16\sqrt{t}}{t^2+3}$.

נראה שמכפלה זו מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)$ כלומר $B(1,4)$.

$$\boxed{r(t)=16\cdot\frac{\sqrt{t}}{t^2+3}}$$

$$r'(t)=16\cdot\frac{\frac{t^2+3}{2\sqrt{t}}-2t\cdot\sqrt{t}}{(t^2+3)^2}$$

$$r'(t)=16\cdot\frac{t^2+3-4t^2}{2\sqrt{t}\cdot(t^2+3)^2}$$

$$\boxed{r'(t)=16\cdot\frac{-3t^2+3}{2\sqrt{t}\cdot(t^2+3)^2}}$$

$$-3t^2+3=0$$

$$t=1 \rightarrow \boxed{B(1,4)}$$

$$\cancel{t=-1} \leftarrow t>0$$

המכנה חיובי לכל $t>0$. הביטוי שבמונה הוא של פרבולה הפוכה,

העוברת מחיוביות לשליליות כאשר $t=1$, ולכן המכפלה מקסימלית.

תשובה: הוכחנו שמכפלת אורכי הקטעים AC ו- BC מקסימלית

כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $k(x)=\frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$.

ניתן לראות ש- $k(x)=\frac{1}{2}\cdot r(x-4)$, שהיא הזזה אופקית 4 יחידות ימינה של $r(x)$ וכיווץ אנכי פי 2 .

ההזזה האופקית לא משנה את סוג הקיצון, אלא רק את שיעור ה- x והוא יהייה $x=5$ מקסימום.

הכיווץ האנכי רק מקטין פי 2 את שיעור ה- y והוא יהייה $y=2$.

תשובה: שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k(x)$ הם $(5,2)$, וסוג הקיצון הוא מקסימום.

נכתב ע"י עפר ילין

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.
למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←