נוכיח שהטענה $\frac{n(n+1)(5n+7)}{6} = 4+13+...+\frac{5n^2+3n}{2}$ **, נכונה לכל** n **טבעי.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$ **.**

אגף ימין: $4 = \frac{24}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 12}{6} = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(5\cdot 1+7)}{6}$ **אגף שמאל:** 4 **.**

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{k(k+1)(5k+7)}{6} = 4+13+...+\frac{5k^2+3k}{2}$ **,**

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **(הטבעי העוקב):**

$$4+13+...+\frac{5k^2+3k}{2}+\frac{5(k+1)^2+3(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+1+1)(5(k+1)+7)}{6}.$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{4+13+...+\frac{5k^2+3k}{2}}_{\downarrow}+\frac{5k^2+10k+5+3k+3}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)(5k+7)}{6}+\frac{5k^2+13k+8}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו, לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

(בעמוד הבא שני פירוקים של טרינום ריבועי, על ידי משוואה ריבועית.)

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)(5k+7)}{6}+\frac{15k^2+39k+24}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)(5k+7)}{6}+\frac{3(k+1)(5k+8)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(5k^2+7k+15k+24)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(5k^2+22k+24)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו שהטענה $\frac{n(n+1)(5n+7)}{6} = 4+13+...+\frac{5n^2+3n}{2}$ **נכונה לכל** n **טבעי.**

- **פירוק טרינום ריבועי עפ"י משוואה ריבועית**

$$15k^2+39k+24=0$$
$$k=-1,\ k=-\frac{8}{5}$$
$$15k^2+39k+24=15(k+1)(k+\frac{8}{5})$$
$$15k^2+39k+24=3(k+1)(5k+8)$$

$$5k^2+22k+24$$
$$k=-2,\ k=-\frac{12}{5}$$
$$5k^2+22k+24=5(k+2)(k+\frac{12}{5})$$
$$5k^2+22k+24=(k+2)(5k+12)$$

הוכחה בדרך אחרת

ניעזר בנוסחת סכום ריבועים $1^2+2^2+3^2\ ...+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

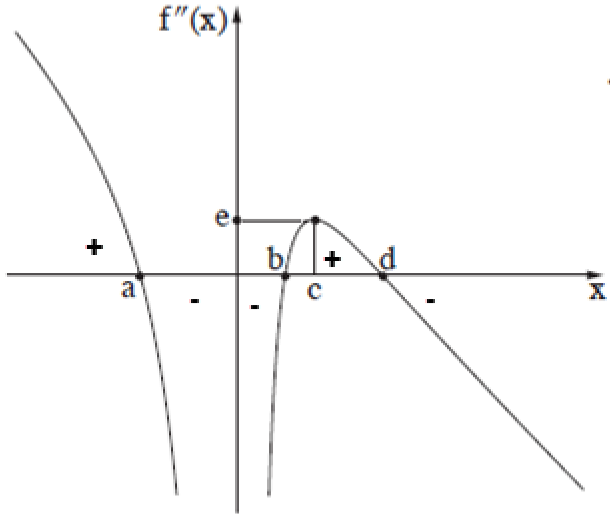
ובנוסחת סכום של סדרה חשבונית: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

$$\boxed{4+13+...+\frac{5n^2+3n}{2}}=$$
$$=\frac{5\cdot 1^2+3\cdot 1}{2}+\frac{5\cdot 2^2+3\cdot 2}{2}+...+\frac{5n^2+3n}{2}=$$
$$=\frac{5\cdot\left(1^2+2^2+...+n^2\right)}{2}+\frac{3\cdot 1+3\cdot 2+...+3n}{2}=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{3}{2}\cdot\frac{n(1+n)}{2}=$$
$$=\frac{n(n+1)\cdot(5(2n+1)+9)}{12}=\frac{n(n+1)\cdot(10n+14)}{12}=$$
$$\boxed{=\frac{n(n+1)\cdot(5n+7)}{6}}$$

(1) תחומי החיוביות והשליליות של $f''(x)$, המסומנות בסרטוט,

תואמות לתחומי העלייה והירידה של הפונקציה הקדומה שלה , כלומר של $f'(x)$.

$f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ מוגדרות לכל $x \neq 0$.



תשובה: עבור $f'(x)$ - עלייה $b<x<d$ או $x<a$. ירידה - $x>d$ או $0<x<b$ או $a<x<0$.

(2) נתונה הפונקציה $h(x)$, המוגדרת לכל $x \neq 0$ ומקיימת: $h'(x)=f''(x)-e$.

זו טרנספורמציה של הזזה אנכית e יחידות כלפי מטה,

כי $e>0$ על פי נקודת החיתוך של $f''(x)$ עם הקרן החיובית של ציר ה- y .

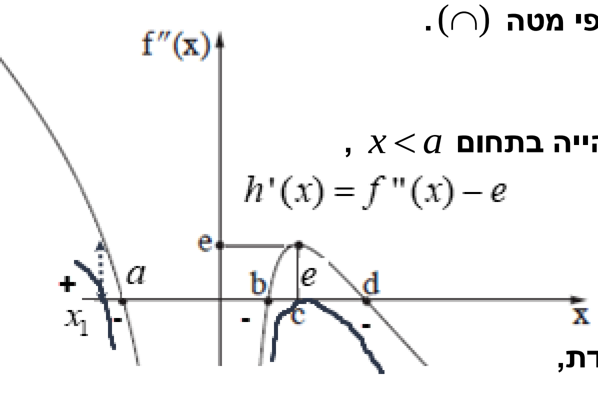
לכן, הנקודה $(c,0)$ תהייה נקודת מקסימום של $h'(x)$ על ציר ה- x,

כאשר $h'(x) \leq 0$ בתחום $x>0$ ו- $h(x)$ יורדת בתחום $x>0$,

ו- $x=c$ הוא שיעור ה- x של נקודת הפיתול היחידה של $h(x)$.

נשים לב, **שעבור $0<x<c$ מתקיים $h'(x)$ עולה ולכן $h(x)$ קעורה כלפי מעלה $(\cup)$,**

ועבור $x>c$ מתקיים $h'(x)$ יורדת ולכן $h(x)$ קעורה כלפי מטה $(\cap)$.



מתקבל שהנקודה היחידה שבה גרף $h'(x)$ חותך את ציר ה- x תהייה בתחום $x<a$,

ולכן יש רק נקודת קיצון אחת עבור $h(x)$.

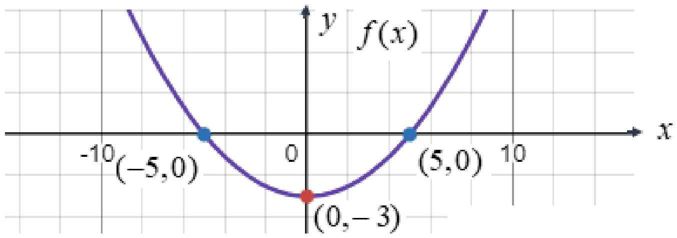
נשים לב, **שעבור $x<x_1$ מתקיים $h'(x)$ חיובית ולכן $h(x)$ עולה ,**

ועבור $x_1<x<0$ מתקיים $h'(x)$ שלילית ולכן $h(x)$ יורדת,

ומכאן ש- x_1 הוא שיעור ה- x של נקודת המקסימום של $h(x)$.

תשובה: לפונקציה $h(x)$ יש נקודת קיצון אחת ונקודת פיתול אחת.

בשרטוט מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, עם נקודות החיתוך עם ציר ה- x ונקודת המינימום היחידה שלה.



(1) נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)+m|$, כאשר $0<m<2$ פרמטר.

זו טרנספורמציה בשני שלבים:

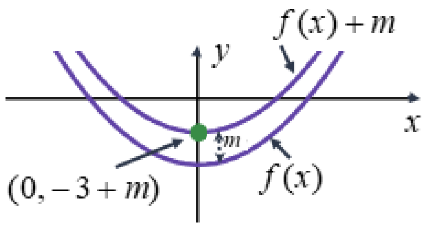
תזוזה m יחידות כלפי מעלה,

כאשר נקודת המינימום עדיין מתחת לציר ה- x ,

כי $0<m<2$, והיא תהייה $(0,-3+m)$.

נשים לב שלא ניתן לדעת את שיעורי נקודות

החיתוך עם ציר ה- x .



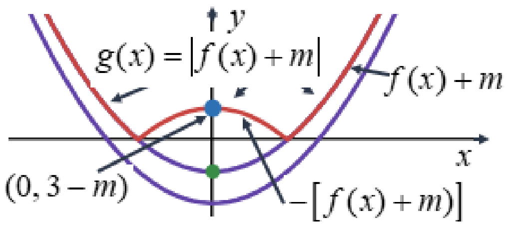
וטרנספורמציה של ערך מוחלט,

שבה חלק הגרף שמתחת לציר ה- x , עובר

סימטרית מעל לציר ה- x (ושיעורי y נגדיים) ,

ומתקבלות שתי נקודות אפס מינימום ("שפיץ"),

ונקודת מקסימום, ששיעוריה $(0,3-m)$.



תשובה: עבור $g(x)$ מקסימום $(0,-m+3)$.

(2) נתונה הפונקציה $h(x)=|f(x)|+m$, כאשר $0<m<2$ פרמטר.

זו טרנספורמציה בשני שלבים:

טרנספורמציה של ערך מוחלט,

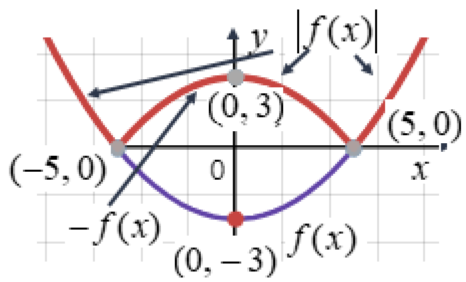
שבה חלק הגרף שמתחת לציר ה- x , עובר

סימטרית מעל לציר ה- x (ושיעורי y נגדיים) ,

ושתי נקודות האפס הקיימות,

הופכות לנקודות מינימום ("שפיץ"),

ונקודת מקסימום, ששיעוריה $(0,3)$.

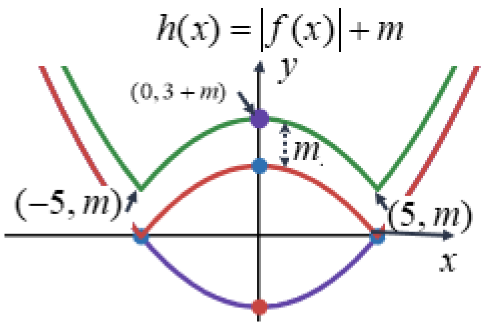


תזוזה m יחידות כלפי מעלה,

כאשר נקודת המקסימום תהייה $(0,3+m)$.

ושתי נקודות מינימום $(5,m)$ ו- $(-5,m)$

נשים לב שאין נקודות חיתוך עם ציר ה- x



תשובה: עבור $h(x)$ מקסימום $(0,3+m)$ ומינימום $(5,m)$ ו- $(-5,m)$.

(3) נבדוק עבור כל אחת מהטענות אם היא נכונה או אינה נכונה, וננמק את קביעותינו.

I. **הפונקציה** $h(x)$ **חיוביות לכל ערך של** x.

לפונקציה $g(x)$ **יש שתי נקודות אפס, כיוון שלאחר התזוזה האנכית עדיין נקודת המינימום הייתה מתחת לציר ה-** x **ולכן היא אינה חיובית לכל** x **, אלא אי-שלילית.**

$h(x)$ **אכן חיובית לכל** x **לאחר הערך המוחלט היו שתי נקודות אפס מינימום,**

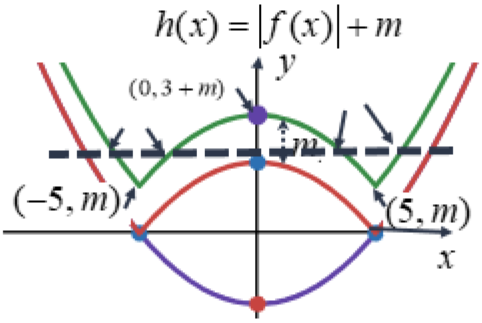
ולאחר התזוזה האנכית כלפי מעלה – היא חיובית לכל x.

תשובה: הטענה אינה נכונה.

II. **לכל ערך של** m **בתחום** $0<m<2$ **מתקיים שהישר** $y=m+\frac{1}{2}$.

חותך כל אחת מן הפונקציות $g(x)$ **ו-** $h(x)$ **בשלוש נקודות.**

הישר $y=m+\frac{1}{2}$ **חותך את הפונקציה** $h(x)$ **בארבע נקודות לכל** m **בתחום** $0<m<2$.



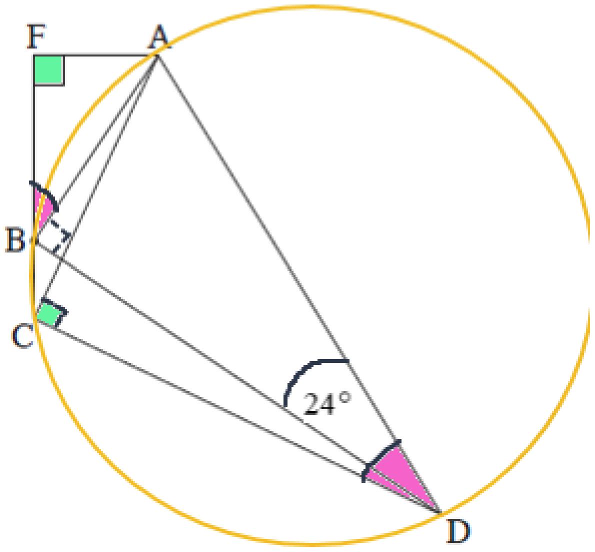
תשובה: הטענה אינה נכונה.

נתונים

.1 $ABCD$ **חסום במעגל . .2** AD **קוטר במעגל. .3** $FD \perp FA$ $(\sphericalangle F = 90°)$

עבור (2) .4 $\sphericalangle BDA = 24°$

צ"ל: (1) $\Delta ACD \sim \Delta AFB$ **(2)** $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta AFB}}$



הסבר	מס'	טענה	נימוק
2	5	$\sphericalangle ACD = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
5 ,3	6	$\sphericalangle ACD = \sphericalangle F$ (ז)	
1	7	$\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 180°$	זוויות נגדיות משלימות ל- $180°$ במרובע חסום במעגל
	8	$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ABF = 180°$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
8 ,7	9	$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABF$ (ז)	
9 ,6	10	$\Delta ACD \sim \Delta AFB$	משפט דמיון זווית זווית
מ.ש.ל. (1)			
2	11	$\sphericalangle ABD = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
11	12	$\Delta ABD: \quad \sin 24° = \frac{AB}{AD}$	
10	13	$\frac{AC}{AF} = \frac{CD}{FB} = \frac{AD}{AB}$	יחס צלעות מתאימות במשולשים דומים
10	14	$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta AFB}} = (\frac{AD}{AB})^2$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
14 ,12	15	$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta AFB}} = \frac{1}{\sin^2 24°} \approx 6.045$	

א. נתונה סדרה הנדסית A , שהאיבר הכללי שלה הוא a_n , ומנתה $-1<q<0$.

מכאן שהסדרה, אם יש בה אין-סוף איברים מתכנסת,

לא עולה ולא יורדת, ואיבריה העוקבים מחליפים סימן.

נשים לב: **נתון ש- $a_1=1$ ו- $-1<q<0$, ולכן כל האיברים במקומות האי-זוגיים חיוביים,**

וכל האיברים במקומות הזוגיים שליליים.

בונים סדרה חדשה B , שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n=a_n\cdot a_{n+2}$.

נשים לב: **אם יש בסדרה A מספר סופי של איברים, אז בסדרה B יש שני איברים פחות.**

כמו כן, כל איברי סדרה B חיוביים, שכן הם מכפלה של שני מספרים שווי סימן בסדרה A .

נוכיח כי הסדרה B היא גם הנדסית, ונביע את מנתה באמצעות q .

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+3}}{a_n\cdot a_{n+2}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=q\cdot q$$

$$\boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n}=q^2}$$

קבלנו שהמנה בין כל שני איברים עוקבים בסדרה B קבועה, ולכן הסדרה הנדסית.

נשים לב שגם סדרה זו מתכנסת אם יש בה אין-סוף איברים, ואיבריה חיוביים.

תשובה: הוכחנו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית, ומנתה q^2.

ב. נבדוק את כל אחת מהטענות.

I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

כיוון שמנת הסדרה $-1<q<0$ שלילית, הרי שאיבריה העוקבים מחליפים סימן,

והיא לא עולה ולא יורדת.

תשובה: הטענה נכונה.

II. הסדרה B היא סדרה עולה .

מנת הסדרה היא q^2 כאשר $0<q^2<1$ ולכן הסדרה דווקא יורדת, כי כאמור כל איבריה חיוביים.

תשובה: הטענה לא נכונה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_n\cdot q^2}{a_n}=q^2$$

מנת הסדרה היא q^2 כאשר $0<q^2<1$ ולכן הסדרה דווקא עולה, כי כאמור כל איבריה שליליים.

תשובה: הטענה נכונה.

ג. נתון הסדרה B **היא סדרה אין-סופית שסכומה הוא** $\frac{1}{8}$ **.**

$$S^{\mathrm{B}} = \frac{b_1}{1-q^2}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{a_1 \cdot a_3}{1-q^2}$$

$$1-q^2 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot q^2$$

$$1 = 9q^2$$

$$\frac{1}{9} = q^2$$

$$\boxed{q = -\frac{1}{3}} \quad \leftarrow -1 < q < 0$$

תשובה: הערך של q **הוא** $-\frac{1}{3}$**.**

ד. נתונה סדרה הנדסית נוספת C**, המוגדרת לכל** n **טבעי באופן הזה:** $c_n = \frac{a_n}{b_n}$**,**

נתון כי הסדרה C **היא סדרה הנדסית, נמצא את מנתה בדרך הרגילה למען התרגול,**

למרות שבמקרה זה אפשרי גם על ידי $\frac{c_2}{c_1}$ **.**

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} : \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1} \cdot b_n}{b_{n+1} \cdot a_n}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q} = -3$$

ולכן מנת הסדרה ההנדסית C **היא** -3**.**

איברה הראשון הוא 9 $c_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{a_1 \cdot a_3} = \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot q^2} = \frac{1}{1/9} = 9$ **.**

$$c_3 = 9 \cdot (-3)^2 = 81$$

נשים לב שבסכום הנתון יש $m-2$ **איברים, כי אינו כולל את** c_1 **ואת** c_2**.**

$$c_3 + c_4 + ...c_m + = 44,307$$

$$\frac{81 \cdot ((-3)^{m-2} - 1)}{-3-1} = 44,307$$

$$(-3)^{m-2} - 1 = -2,188$$

$$(-3)^{m-2} = -2,187$$

$$(-3)^{m-2} = (-3)^7$$

$$m - 2 = 7$$

$$\boxed{m = 9}$$

תשובה: $m = 9$**.**

א. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P .

ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר,

היא המאורע המשלים למאורע "יענה נכון על כל 5 השאלות".

$$1-P^5=0.83193$$

$$0.16807=P^5 \quad \sqrt[5]{\ }$$

$$\boxed{P=0.7}$$

תשובה: $P=0.7$.

ב. ההסתברות לענות נכון על שאלה היא 0.7, ולכן ניעזר בנוסחת ברנולי.

כאשר $n=5\,,\,k=3\,,\,p=0.7$.

$$P_5(3)=\binom{5}{3}\cdot 0.7^3\cdot(1-0.7)^{5-3}=$$

$$P_5(3)=\frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot 0.7^3\cdot 0.3^2$$

$$P_5(3)=10\cdot 0.7^3\cdot 0.3^2=0.3087$$

תשובה: **ההסתברות, שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק, היא** 0.3087.

ג. עבור כל תשובה נכונה מקבלים נקודות בדיוק כמספר השאלה.

האפשרויות לקבל 14 נקודות לפחות הן : $1+2+3+4+5=15$ **, או** $14=5+4+3+2$

נחשב את ההסתברויות, לפי סדר התשובות הנכונות הרצוי.

ההסתברות היא : $0.7^5+0.3\cdot 0.7^4=0.2401$

תשובה: **ההסתברות, שמתמודד בחידון יצבור 14 נקודות לפחות, היא** 0.2401.

ד. האפשרויות לקבל 6 נקודות בדיוק הן: $6=3+2+1$ **, או** $6=5+1$ **, או** $6=4+2$.

נחשב את ההסתברויות, לפי סדר התשובות הנכונות הרצוי.

ההסתברות היא : $0.7^3\cdot 0.3^2+0.7\cdot 0.3^3\cdot 0.7+0.3\cdot 0.7\cdot 0.3\cdot 0.7\cdot 0.3=0.05733$

תשובה: **ההסתברות, שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק, היא** 0.05733.

ה. האפשרות היחידה של אחינועם לקבל 6 נקודות בדיוק , אם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק,

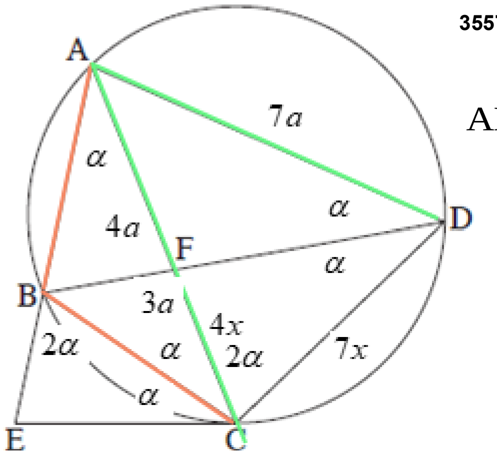
היא רק אם ענתה נכון על שלוש השאלות הראשונות וקיבלה $6=3+2+1$ **נקודות בדיוק.**

כפי שראינו בסעיף ב יש $\binom{5}{3}=10$ **אפשרויות שוות הסתברות לענות נכון על 3 שאלות בדיוק,**

וההסתברות רק לאחת מ- 10 האפשרויות היא עשירית.

תשובה: **ההסתברות שאחינועם צברה 6 נקודות בדיוק היא** $\frac{1}{10}$.

4



נתונים

1. $ABCD$ **חסום במעגל** **2.** EC **משיק ב-** C **3.** $AB = CB$

עבור ב: **4.** $\sphericalangle ECA = \sphericalangle DCA$ **5.** $\frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}$

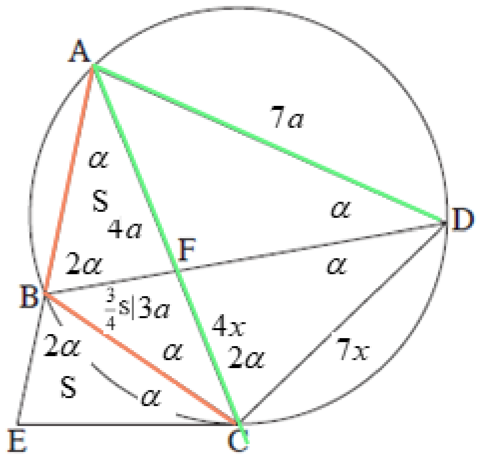
עבור ג: **6.** $S_{\Delta ABF} = S$.

צ"ל: **א.** $\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$

ב. **(1)** $AC = AD$ **(2)** $\frac{AD}{CD}$ **(3)** $\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta CBF}}$

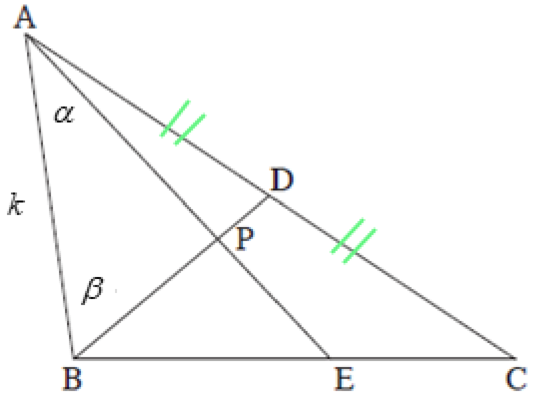
ג. $S_{\Delta AEC}$.

הסבר	מס'	טענה	נימוק
3	7	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle BCA = \sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \alpha$	על מיתרים שווים נשענות זוויות היקפיות שוות
7	8	$\sphericalangle EBC = 2\alpha$	זווית חיצונית ל- ΔABC שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה
8 ,7	9	$\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$	
		מ.ש.ל. א	
7	10	$\sphericalangle ADC = 2\alpha$	סכום זוויות
10 ,2	11	$\sphericalangle ECA = 2\alpha$	זווית בין משיק למיתר
11 ,4	12	$\sphericalangle DCA = 2\alpha$	
12 ,10	13	$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DCA$	
13	14	$AC = AD$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔACD
		מ.ש.ל. ב (1)	
7	15	$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CD}$	משפט חוצה זווית ΔACD
15 ,5	16	$\frac{AD}{AF} = \frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}$	
14	17	$AC = AD = 7a$	סימון
17 ,16 ,5	18	$AF = 4a \quad \to CF = 3a$	חישוב והפרש קטעים
18 ,7	19	$\frac{AD}{CD} = \frac{4}{3}$	משפט חוצה זווית ΔACD
		מ.ש.ל. ב (2)	
19 ,18	20	$\frac{AF}{CF} = \frac{4}{3}$	
20	21	$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta CBF}} = \frac{4}{3}$	יחס שטחים כיחס צלעות עם גובה משותף מ- B
		מ.ש.ל. ב (3)	



הסבר	מס'	טענה	נימוק
12	22	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DCA = 2\alpha$	על קשת משותפת נשענות זוויות היקפיות שוות
8, 22	23	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBC = 2\alpha$ (ז)	
3	24	$AB = CB$ (צ)	נתון
7, 11	25	$\sphericalangle ECB = \sphericalangle BAC = \alpha$ (ז)	
23, 24, 25	26	$\Delta ABF \cong \Delta CBE$	משפט חפיפה ז. צ. ז.
6, 26	27	$S_{\Delta CBE} = S$	למשולשים חופפים שטחים שווים
6, 21	28	$S_{\Delta CBF} = \frac{3}{4}S$	
6, 27, 28	29	$S_{\Delta AEC} = 2\frac{3}{4}S$	סכום שטחים
מ.ש.ל. ד			

א. **נביע את אורכי הקטעים** AP **ו-** BP **באמצעות** k**,** α **ו-** β .



$\underline{\Delta ADP}$ **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{AP}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(180° - (\alpha+\beta))}$$

$$\boxed{AP = \frac{k\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$\frac{BP}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(180° - (\alpha+\beta))}$$

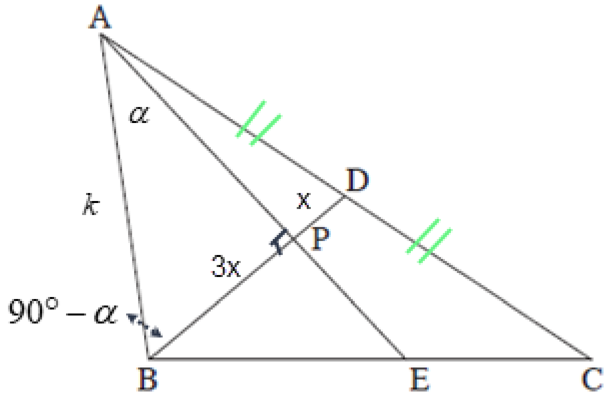
$$\boxed{BP = \frac{k\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

תשובה: $AP = \dfrac{k\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $BP = \dfrac{k\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

ב. **נתון** $AE \perp BD$ **, ולכן** $\alpha+\beta = 90°$ **ומכאן ש-** $\sin(\alpha+\beta) = \sin 90° = 1$ **, וגם** $\sin\beta = \cos\alpha$.

לכן: $AP = k\cdot\cos\alpha$, **ו-** $BP = k\cdot\sin\alpha$.

נתון: $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{4}k^2$.



$BP = 3\cdot PD$ **ומכאן ש-** $BD = \frac{4}{3}\cdot BP = \frac{4}{3}k\cdot\sin\alpha$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{AB\cdot BD\cdot\sin(90°-\alpha)}{2}$$

$$\frac{1}{4}k^2 = \frac{k\cdot\frac{4}{3}k\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2} \qquad /:k^2>0$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\sin 2\alpha}{3}$$

$$\frac{3}{4} = \sin 2\alpha$$

$$2\alpha = 48.59° \quad , \quad 2\alpha = 131.41°$$

$$\boxed{\alpha = 24.3°} \quad \rightarrow \boxed{\beta = 65.7°} \quad o.k. \ \leftarrow \alpha<\beta$$

$$\cancel{\alpha = 65.7°} \quad \rightarrow \cancel{\beta = 24.3°} \quad fault \ \leftarrow \alpha<\beta$$

תשובה: $\alpha = 24.3°$.

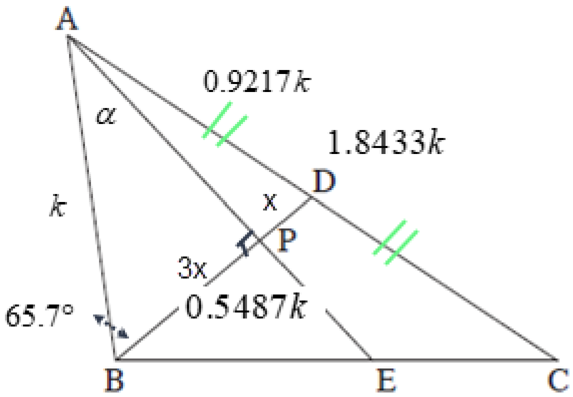
ג. נמצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את ΔAEC ובין רדיוס המעגל החוסם את ΔAEB .

$\underline{\Delta AEC}$ לפי משפט הסינוסים : $\dfrac{AC}{\sin\sphericalangle AEC} = 2R_{\Delta AEC}$

$\underline{\Delta AEB}$ לפי משפט הסינוסים : $\dfrac{AB}{\sin\sphericalangle AEB} = 2R_{\Delta AEB}$

ומכיוון ושני סינוסים של זוויות צמודות, המשלימות ל- $180°$ שווים, נקבל: $\dfrac{R_{\Delta AEC}}{R_{\Delta AEB}} = \dfrac{AC}{AB}$

$$BD = \frac{4}{3}k \cdot \sin 24.3° = 0.5487k$$



$\underline{\Delta ABD}$ לפי משפט הקוסינוסים

$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos\sphericalangle ABD$$
$$(AD)^2 = k^2 + (0.5487k)^2 - 2 \cdot k \cdot 0.5487k \cdot \cos 65.7°$$
$$(AD)^2 = 0.8495k^2$$
$$\boxed{AD = 0.9217k} \quad \leftarrow AD > 0$$

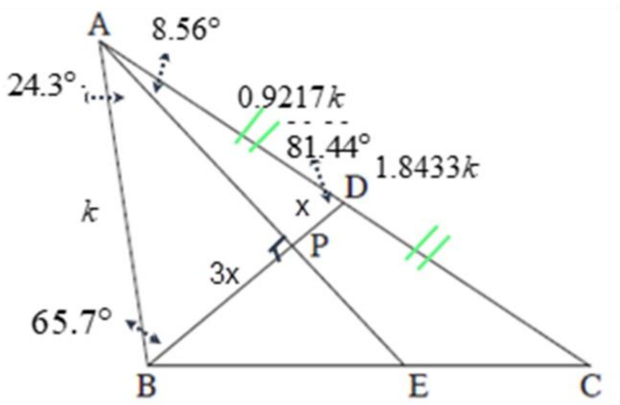
BD תיכון לצלע AC ולכן $\boxed{AC = 1.8433k}$

$$\frac{R_{\Delta AEC}}{R_{\Delta AEB}} = \frac{1.8433k}{k} \quad \rightarrow \boxed{\frac{R_{\Delta AEC}}{R_{\Delta AEB}} = 1.8433}$$

תשובה: $\dfrac{R_{\Delta AEC}}{R_{\Delta AEB}} = 1.8433$.

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\Delta APB} \\ \tan 24.3^\circ = \dfrac{BP}{AP} \\ \underline{\Delta APD} \\ \tan \sphericalangle PAD = \dfrac{PD}{AP}\end{array}\right\} \dfrac{\tan 24.3^\circ}{\tan \sphericalangle PAD} = 3 \quad \to \dfrac{\tan 24.3^\circ}{3} = \tan \sphericalangle PAD \quad \to \sphericalangle PAD = 8.56^\circ$$

$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - (8.56^\circ + 24.3^\circ + 65.7^\circ) = 81.44^\circ$$



$\underline{\Delta ABD}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AD}{\sin 65.7^\circ} = \frac{AB}{\sin 81.44^\circ}$$

$$AD = \frac{k \cdot \sin 65.7^\circ}{\sin 81.44^\circ}$$

$$\boxed{AD = 0.9217k}$$

BD **תיכון לצלע** AC **ולכן** $\boxed{AC = 1.8433k}$

$$\frac{R_{\Delta AEC}}{R_{\Delta AEB}} = \frac{1.8433k}{k} \quad \to \boxed{\frac{R_{\Delta AEC}}{R_{\Delta AEB}} = 1.8433}$$

תשובה: $\frac{R_{\Delta AEC}}{R_{\Delta AEB}} = 1.8433$.

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x}{(x^2-a)^2}$ **,** $a>0$ **פרמטר.**

המכנה מתאפס עבור $x=\pm\sqrt{a}$ **ולכן תחום ההגדרה הוא** $x\neq\pm\sqrt{a}$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq\pm\sqrt{a}$ **.**

קדם אנליזה: **נשים לב שהפונקציה** $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית,**

ולכן הגרף שלה סימטרי לציר ה- y **עם נקודת פיתול בראשית (כי היא מוגדרת שם).**

כמו כן הפונקציה חיובית עבור $x>0, x\neq\sqrt{a}$ **, ושלילית עבור** $x<0, x\neq-\sqrt{a}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(x^2-a)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}=0$ **, לכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

$\lim_{x\to\pm\sqrt{a}}\frac{4x}{(x^2-a)^2}=\frac{4\cdot(\pm\sqrt{a})}{0^+}=\pm\infty$ **, לכן** $x=\sqrt{a}$ **ו-** $x=-\sqrt{a}$ **אסימפטוטות אנכיות.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** y **,** $x=\sqrt{a}$ **ו-** $x=-\sqrt{a}$ **אסימפטוטות אנכיות לציר ה-** x **.**

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ **.**

$$\boxed{f(x)=\frac{4x}{(x^2-a)^2}}$$

$$f'(x)=4\cdot\frac{(x^2-a)^2-2(x^2-a)\cdot 2x\cdot x}{(x^2-a)^4}$$

$$f'(x)=4\cdot\frac{(x^2-a)(x^2-a-4x^2)}{(x^2-a)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=4\cdot\frac{(x^2-a)(-3x^2-a)}{(x^2-a)^4}}$$

המכנה חיובי בתחום ההגדרה.

הביטוי האלגברי $(-3x^2-a)$ **במונה הוא של פרבולה הפוכה (בעלת מקסימום) שלילית בתחום ההגדרה.**

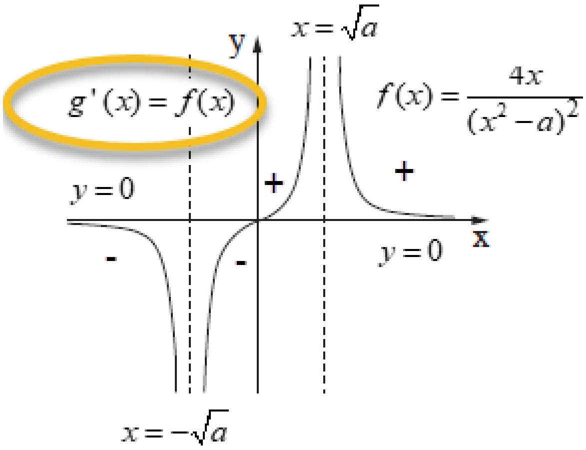
הביטוי האלגברי (x^2-a) **במונה הוא של הוא של פרבולה ישרה (בעלת מינימום), שבתחום ההגדרה עוברת מחיוביות לשליליות ומשליליות לחיוביות.**

מכאן שסימני הנגזרת הפוכים מסימני (x^2-a) **ובהתאם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.**

תשובה: עבור הפונקציה $f(x)$ **עלייה** $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$ **, ירידה** $x>\sqrt{a}$ **או** $x<-\sqrt{a}$ **.**

ב. סרטוט הסקיצה המתאימה, תוך תשומת לב לסימטריה לראשית הצירים.

סימני החיוביות והשליליות בהתאם לקדם אנליזה וכהכנה לסעיף הבא.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתונה הפונקציה $g'(x)=f(x)$ **, המוגדרת כמו הפונקציה** $f(x)$ **בתחום** $x\neq\pm\sqrt{a}$.

גרף הפונקציה מופיע בסעיף ב.

- **תחומי העלייה והירידה של** $g(x)$ **תואמים לתחומי החיוביות והשליליות של** $f(x)$.
- **תחומי הקעירות של** $g(x)$ **תואמים לתחומי העלייה והירידה של** $f(x)$.
- **כיוון שאין ל-** $g'(x)=f(x)$ **נקודות קיצון, אין ל-** $g(x)$ **נקודות פיתול.**

תשובה: עבור הפונקציה $g(x)$ **-**

קעירות כלפי מעלה $(\cup)$ $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$ **, קעירות כלפי מטה** $(\cap)$ $x>\sqrt{a}$ **או** $x<-\sqrt{a}$.

ד. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ **עובר בראשית הצירים** $(0,0)$.

(1) נמצאת את $g(x)$ **הפונקציה הקדומה של** $f(x)$ **, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$g(x)=\int\frac{4x}{(x^2-a)^2}\,dx$$

$$g(x)=\int 2\cdot(x^2-a)^{-2}\cdot 2x\,dx$$

$$g(x)=2\cdot\frac{(x^2-a)^{-1}}{-1}+c$$

$$g(x)=\frac{-2}{x^2-a}+c$$

$$0=\frac{-2}{0^2-a}+c \quad \leftarrow g(0)=0$$

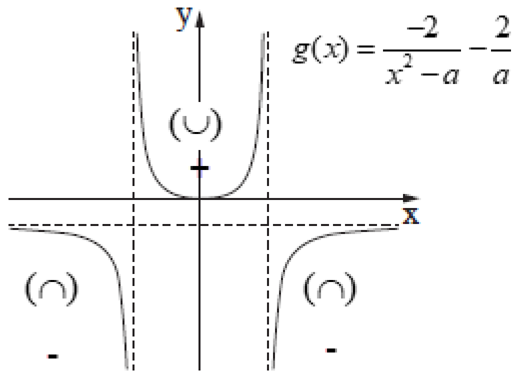
$$c=-\frac{2}{a}$$

$$\boxed{g(x)=\frac{-2}{x^2-a}-\frac{2}{a}}$$

תשובה: $g(x)=\dfrac{-2}{x^2-a}-\dfrac{2}{a}$

(2) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=\frac{-2}{x^2-a}-\frac{2}{a}$

- **נשים לב שהפונקציה** $g(x)$ **זוגית, תואם לכך שהנגזרת שלה היא פונקציה אי-זוגית.**
- **הגרף סימטרי לציר ה-** y **עם נקודת מינימום** $(0,0)$ **שתואמת את תחומי העלייה והירידה.**
- **נשים לב גם שלפונקציה** $g(x)$ **יש אסימפטוטה אופקית** $y=-\frac{2}{a}$.
- **הקעירויות בהתאם לסעיף ג**



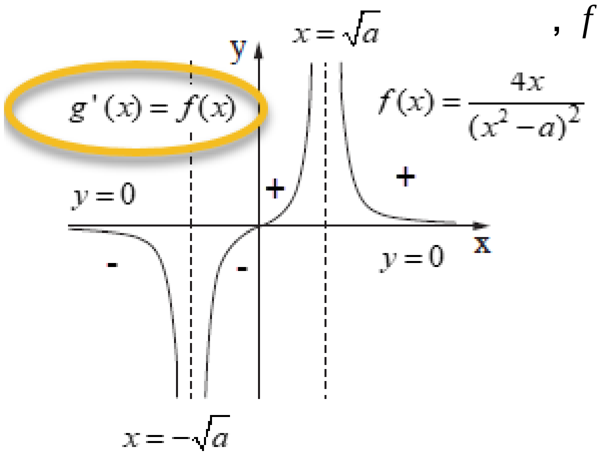
סימני חיוביות שליליות עבור תת סעיף ה(2).

תשובה: הסרטוט מעל.

ה. $h(x)$ **היא פונקציה המוגדרת כך:** $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ **, ומוגדרת גם בתחום** $x\neq\pm\sqrt{a}$.

משמאל הגרף של $f(x)$ **, כדי שנוכל לראות את שני הגרפים באותו עמוד.**

(1) נמצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של $h(x)$.



עבור $x\to\pm\infty$ **מתקיים** $f(x)\to 0$, $g(x)\to constant$,

ולכן פונקציית המכפלה $h(x)\to 0$

ו- $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

עבור $x\to\pm\sqrt{a}$ **מתקיים** $f(x), g(x)\to\pm\infty$,

ולכן גם פונקציית המכפלה $h(x)\to\pm\infty$

ו- $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$ **אסימפטוטות אנכיות.**

תשובה: עבור $h(x)$ **-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית,** $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$ **אסימפטוטות אנכיות.**

(2) תחומי חיוביות ושליליות של $h(x)$ **, בהתאם לסימני המכפלות** $f(x)\cdot g(x)$.

תחומי חיוביות ושליליות של כל אחת מהפונקציות סומנו בגרפים, כסיוע.

תשובה: עבור $h(x)$ **- חיוביות** $0<x<\sqrt{a}$ **או** $x<-\sqrt{a}$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$ **בתחום** $-\pi \le x \le \pi$.

(1) בתחום ההגדרה ביטוי בתוך השורש צ"ל אי-שלילי, לכן $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

ניתן להבין תחום זה לפי הסרטוט הבסיסי של פונקציית ה $\cos$ **בתחום** $-\pi \le x \le \pi$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

קדם אנליזה

- **הפונקציה היא זוגית, ובהתאם גרף הפונקציה סימטרי לציר ה-** y ,

  עם נקודת קיצון $(0,0)$ **, שבהצבה פשוטה ניתן לראות שהיא נקודת מקסימום.**

- **שתי נקודות קצה, כמובן סימטריות,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **ו-** $(-\frac{\pi}{2},0)$.

- **כיוון ש-** $0 \le \cos x \le 1$ **בתחום, אז** $\cos x \le \sqrt{\cos x}$ **והפונקציה אי-חיובית,**

  ותהיינה עוד שתי נקודות מינימום.

(2) נראה כי הפונקציה זוגית.

$$f(-x)=\cos(-x)-\sqrt{\cos(-x)}=\cos x-\sqrt{\cos x} \quad \leftarrow \cos\alpha=\cos(-\alpha)$$

לכן $f(-x)=f(x)$ **והפונקציה זוגית.**

תשובה: הראינו כי הפונקציה $f(x)$ **היא פונקציה זוגית.**

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$\cos x-\sqrt{\cos x}=0$$
$$\cos x=\sqrt{\cos x}$$

מספר שווה לשורש של עצמו, רק כאשר הוא 0 **או** 1 .

כפי שהסברנו, הפונקציה אי-חיובית, ולכן השוויון מתקיים רק כאשר $\cos x=0$,

ובתחום ההגדרה רק בנקודות הקצה ובראשית.

תשובה: $(\frac{\pi}{2},0)$, $(-\frac{\pi}{2},0)$, $(0,0)$.

(4) נמצא את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

כזכור, יש כבר שלוש נקודות מקסימום, ומצפים לקבל שתי נקודות מינימום, סימטריות כמובן.

$$\boxed{f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}}$$

$$f'(x)=-\sin x-\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sin x(-2\sqrt{\cos x}+1)}{2\sqrt{\cos x}}}$$

$$\sin x=0 \quad \rightarrow x=\pi k \quad \rightarrow (0,0)$$

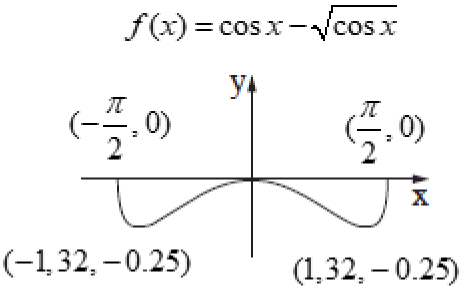
$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\cos x}=0.5 \quad \rightarrow \cos x=0.25 \quad x=\pm 1.32+2\pi k \\ f(\pm 1.32)=0.25-\sqrt{0.25}=-0.25\end{array}\right\}(-1,32,-0.25)\ ,\ (1,32,-0.25)$$

סוג הקיצון על פי הקדם אנליזה, ו/או ערכי הפונקציה.

תשובה: $(\frac{\pi}{2},0)$ **מקסימום,** $(1,32,-0.25)$ **מינימום,** $(0,0)$ **מקסימום,**

$(-1,32,-0.25)$ **מינימום,** $(-\frac{\pi}{2},0)$ **מקסימום.**

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

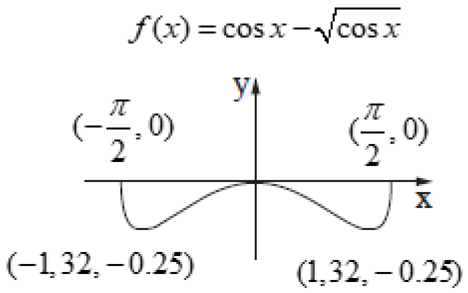


תשובה: הסרטוט מעל.

ג. כאמור, הפונקציה $f(x)$ אי שלילית.

תשובה: חיוביות – אף x , שליליות . $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ x\neq 0$ **.**

ד. נקבע איזה גרף מתאים לפונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{\sin x(-2\sqrt{\cos x}+1)}{2\sqrt{\cos x}}$.



שיקולים לבחירת גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$

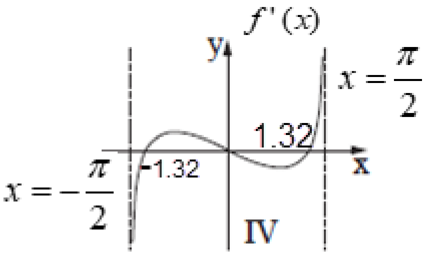
- $f(x)$ **עוברת מירידה לעלייה, לירידה, לעלייה**

והנגזרת שלילית חיובית שלילית חיובית

- $f(x)$ **זוגית ו-** $f'(x)$ **אי-זוגית**

סימטרית לראשית, עם פיתול בראשית.

<u>**נימוק זה מבדיל**</u> **בין גרף** III **לגרף** IV.

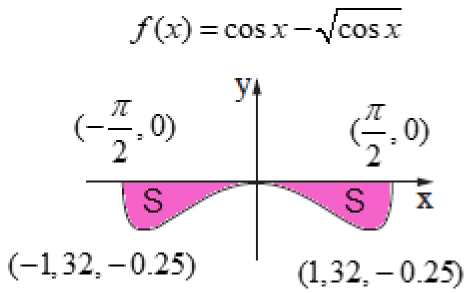


- **אסימפטוטות אנכיות** $x=\frac{\pi}{2}$ **ו-** $x=-\frac{\pi}{2}$
- **נקודות אפס עבור** $x=-1.32, 0, 1.32$
- **שתי נקודות קיצון של** $f'(x)$,

בהתאמה לשתי נקודות פיתול שניתן לזהות של $f(x)$

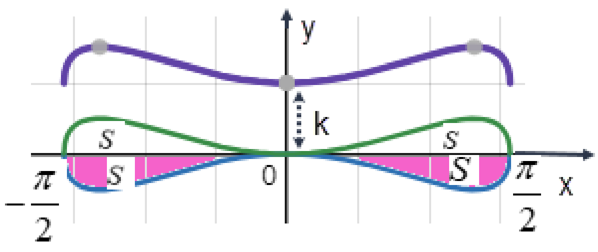
תשובה: גרף IV **מתאר את פונקציית הנגזרת** $f'(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=k-f(x)$ ($k>0$ **פרמטר).**



השטח שבין $f(x)$ **לציר ה-** x **בתחום** $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ **הוא** S,

ועקב הזוגיות גודל השטח בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ **הוא** $2S$.



$g(x)=k-f(x)$ **היא טרנספורמציה של סיבוב סביב ציר ה-** x

ואז תזוזה אנכית k **יחידות כלפי מעלה.**

לאחר הסיבוב סביב ציר ה- x **הגרף אי-שלילי,**

וגודל השטח שבין הגרף של $-f(x)$ **לציר ה--** x

עדיין שווה ל- $2S$.

לאחר התזוזה k **יחידות כלפי מעלה נוסף מלבן ששטחו** πk .

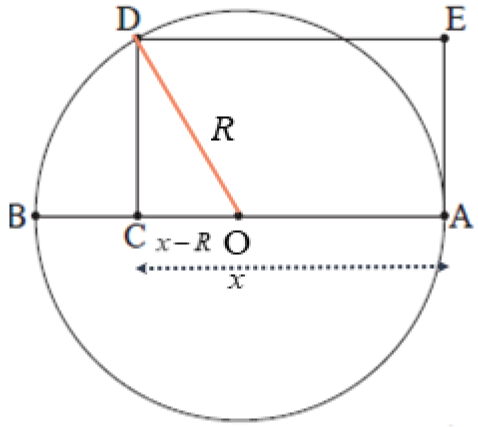
מכאן, שבתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ **, גודל השטח שבין** $f(x)$ **ל-** $g(x)$ **הוא** $2S+2S+k\pi=4S+k\pi$

על פי הנתון השטח הזה שווה ל- $10\cdot S$ **, ולכן** $\boxed{k=\frac{6S}{\pi}} \leftarrow k\pi=6S \leftarrow 4S+k\pi=10S$.

תשובה: $k=\frac{6S}{\pi}$.

א. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח המלבן* ACDE .

נסמן O מרכז המעגל אמצע הקוטר.



$\mathrm{AC}=x$ (נתון וסימון), ולכן $\mathrm{OC}=x-R$.

$\mathrm{CD}=\sqrt{R^2-(x-R)^2}$ (משפט פיתגורס $\Delta\mathrm{COD}$).

$$\mathrm{CD}=\sqrt{R^2-x^2+2Rx-R^2}$$

$$\boxed{\mathrm{CD}=\sqrt{-x^2+2Rx}}$$

$$\boxed{S_{\mathrm{ACDE}}=x\cdot\sqrt{-x^2+2Rx}}$$

נמצא את נקודת הקיצון, כאשר תחום ההגדרה הוא $R<x<2R$.

$$S'(\mathrm{x})=\sqrt{-x^2+2Rx}+\frac{x\cdot(-\cancel{2}x+\cancel{2}R)}{\cancel{2}\sqrt{-x^2+2Rx}}$$

$$S'(\mathrm{x})=\frac{-x^2+2Rx-x^2+Rx}{\sqrt{-x^2+2Rx}}$$

$$\boxed{S'(\mathrm{x})=\frac{-2x^2+3Rx}{\sqrt{-x^2+2Rx}}}$$

$$-2x^2+3Rx=0 \quad /:x>0$$

$$-2x+3R=0$$

$$\boxed{x=1.5R}$$

הגרף של $-2x^2+3Rx$ הוא של פרבולה הפוכה ("בוכה"), העוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=1.5R$,

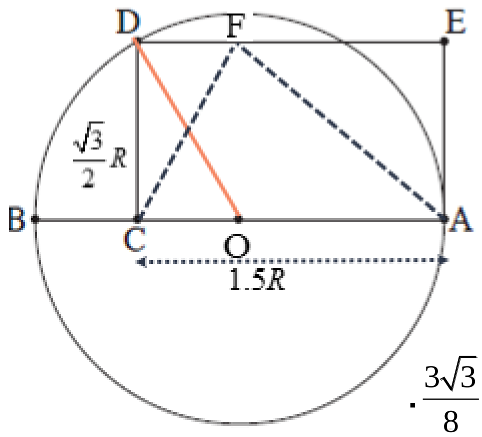
ולכן פונקציית השטח עוברת מעלייה לירידה, ומקבלים מקסימום.

תשובה: $x=1.5R$, עבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.

ב. שטח $\Delta\mathrm{CFA}$ שווה למחצית שטח המלבן.

לכן סכום שני המשולשים המדוברים שווה גם לחצי משטח המלבן.

מכאן שסכום זה מקסימלי כאשר שטח המלבן מקסימלי, משמע עבור $x=1.5R$.



$$\mathrm{CD}=\sqrt{-(1.5r)^2+2R\cdot1.5R}=\sqrt{-2.25\mathrm{R}^2+3\mathrm{R}^2}$$

$$\mathrm{CD}=\sqrt{0.75\mathrm{R}^2}\ \rightarrow \boxed{\mathrm{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}R}$$

ומחצית שטח המלבן היא: $\dfrac{1.5R\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}R}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}R$.

תשובה: סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו- AFE הוא $\frac{3\sqrt{3}}{8}R$.

פתרון התרגיל על ידי יגאל מורה למתמטיקה ובהשראתו ועצותיו הנבונות של עפר ילין חבר יקר

לזכרו של סמ"ר רועי ברקת ז"ל מצהלה לוחם גולני שנפל חלל במלחמת חרבות ברזל

נפתור את התרגיל ע"י הוכחת התכונה שמשושה החסום במעגל הוא בעל שטח מקסימלי כאשר הוא משוכלל

הקדמה

נסמן ב- A **את נקודת ההשקה של ישר** m **שמשיק למעגל, ומקביל למיתר נתון** BC.

האנך האמצעי למיתר BC **נפגש עם המעגל בנקודה** A .

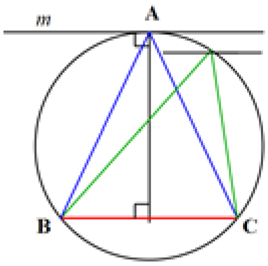
(m **מאונך לרדיוס בהשקה ומקביל ל-** BC**) ונקבל** ΔABC **שווה שוקיים.**

נשים לב שהמשולש מקבל שטח מקסימלי כאשר הנקודה A **נמצאת**

על האנך האמצעי והמשולש הוא שווה שוקיים, כי אז המרחק למיתר BC **מקסימלי .**

הסיבה לכך היא שבנקודה A **הישר שמקביל ל-** BC **משיק למעגל,**

ובכל נקודה אחרת מצד זה של המיתר, הישר המקביל יחתוך את המעגל.



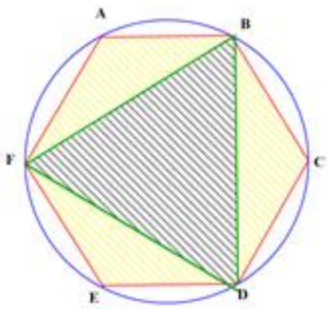
משושה משוכלל החסום במעגל

במשושה משוכלל כל הצלעות וכל הזוויות שוות.

לכן ΔAFB **ו-** ΔEFD **ו -** ΔCBD **הם משולשים חופפים ושווה שוקיים,**

ו- ΔDFB **שווה צלעות.**

מכאן שמשושה החסום במעגל הוא בעל שטח מקסימלי כאשר הוא משוכלל



נעבור לתרגיל שלנו.

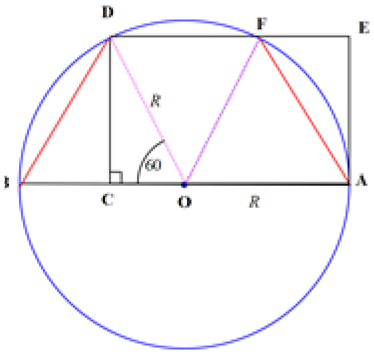
$\Delta\text{CBD} \cong \Delta\text{EFA}$ **, ולכן די להוכיח מתי שטח טרפז** ABDF **מקסימלי.**

הטרפז הוא חצי משושה ולכן יקבל ערך מקסימלי כאשר המשושה משוכלל,

ומכאן שהזווית המרכזית היא בת 60°.

נקבל ש- $\text{OC} = 0.5R$ **(נמצאת מול זווית בת** 30° **במשולש ישר זווית)**

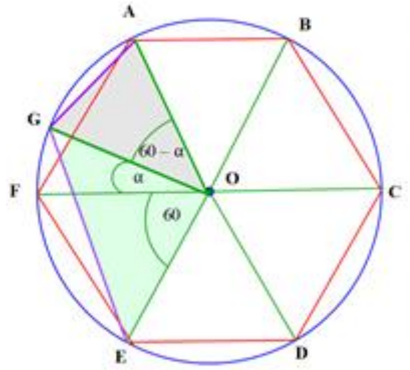
ולכן $\text{AC} = 1.5R$.



<u>ניתן גם להראות זאת דרך טריגונומטריה</u>

משושה משוכלל ניתן לחלוקה ל- 6 **משולשים שווה צלעות בעלי זווית מרכזית בת** 60°.

שטח כל משולש $0.5R^2\sin 60^\circ$.



אם נזיז את אחד מקודקודי המשושה לאורך קשת שגודלה α ,

אז הזווית המרכזית של אחד המשולשים תגדל ב- α**, ושל המשולש השני תקטן ב-** α.

נבדוק אם קיים ערך של α **שיגדיל את השטח המצרפי של שני המשולשים.**

$$0.5R^2\sin(60^\circ+\alpha)+0.5R^2\sin(60^\circ-\alpha)\geq 2\cdot 0.5R^2\sin 60^\circ \quad / 0.5R^2>0$$

$$\Leftrightarrow \sin 60^\circ\cos\alpha+\cancel{\cos 60^\circ\sin\alpha}+\sin 60^\circ\cos\alpha-\cancel{\cos 60^\circ\sin\alpha}\geq 2\sin 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 60^\circ\cos\alpha\geq 2\sin 60^\circ \quad / 2\sin 60^\circ>0$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha=0^\circ}$$

מכאן שהשטח המקסימלי הוא כאשר הזווית המרכזית היא בת 60° **והמשושה משוכלל.**