פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, מועד ב, שאלון: 35472

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונה סדרה חשבונית A **שאיבריה הם, שבה** $a_1, a_2, a_3, ...$ **, ובה** 23 **איברים.**

נתון $a_{12} = 7$ **והפרש הסדרה הוא** 5 **.**

$$a_{12} = a_1 + (12-1)d$$
$$7 = a_1 + 11 \cdot 5$$
$$\boxed{a_1 = -48}$$

תשובה: $a_1 = -48$ **.**

ב. נמצא את סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

	הסדרה המקורית	סדרת האיברים במקומות האי-זוגיים
A_1	$a_1 = -48$	$a_1 = -48$
D	5	$a_{n+2} - a_n = a_n + 2d - a_n = 2d = 2 \cdot 5 = 10$
N	23	12

$$S_{12\,odd} = \frac{12\left[2 \cdot (-48) + 10 \cdot (12-1)\right]}{2}$$
$$S_{12\,odd} = 6 \cdot (-96 + 110)$$
$$\boxed{S_{12\,odd} = 84}$$

תשובה: סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה הוא 84.

נכתב ע"י עפר ילין

ג. נתונה סדרה חשבונית B שאיבריה הם, שבה $b_1, b_2, b_3, \ldots$ **, וגם בה** 23 **איברים.**

האיבר הראשון בסדרה הוא $b_1 = 3$ **והפרש הוא** d **.**

מכל איברי הסדרות A ו- B בונים סדרה חשבונית חדשה שאיבריה הם $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots$**.**

(1) נמצא את האיבר הראשון של הסדרה החדשה

$$a_1+b_1=-48+3=-45$$

תשובה: האיבר הראשון של הסדרה החדשה הוא -45 **.**

(2) נביע באמצעות d **את הפרש הסדרה החדשה.**

כיוון שנתון שסדרה זו חשבונית אין צורך להוכיח זאת.

$$a_2+b_2=-48+5+3+d=-40+d$$
$$a_2+b_2-(a_1+b_1)=-40+d-(-45)=5+d$$

תשובה: הפרש הסדרה החדשה הוא $5+d$**.**

(3) נתון כי סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא $3,013$ **.**

נארגן את הנתונים בטבלה מתאימה.

	a_n+b_n
a_1+b_1	-45
ההפרש	$5+d$
n	23

$$3,013=\frac{23\left[2\cdot(-45)+(5+d)\cdot(23-1)\right]}{2} \quad /\cdot 2$$
$$6,026=23\cdot(-90+22(5+d)) \quad /:23$$
$$262=-90+110+22d$$
$$242=22d \quad /:212$$
$$\boxed{d=11}$$

תשובה: $d=11$**.**

נכתב ע"י עפר ילין

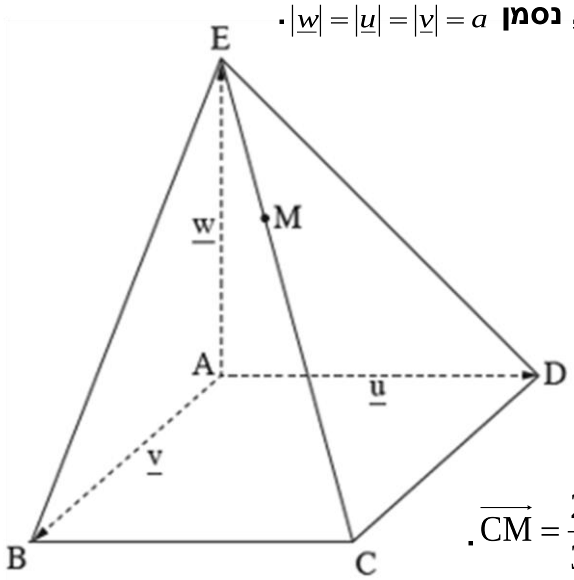
2

א. (1) נתונה פירמידה $ABCDE$, שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע.

צלעות הריבוע מאונכות זו לזו, ולכן $AD \perp AB$.

AE **מאונך לבסיס הפירמידה, ולכן** $AD \perp AE$ **וגם** $AB \perp AE$.

נתון: $|\underline{w}| = |\underline{u}|$ **, ומכיוון וצלעות הריבוע שוות באורכן זו לזו, נסמן** $|\underline{w}| = |\underline{u}| = |\underline{v}| = a$.



נרכז את כל הנתונים והמשמעויות עד כאן:

$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{u}}$ $\quad |\underline{u}| = a \quad \underline{u}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{v}}$ $\quad |\underline{v}| = a \quad \underline{v}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{AE} = \underline{w}}$ $\quad |\underline{w}| = a \quad \underline{w}^2 = a^2$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \leftarrow AD \perp AB$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow AD \perp AE$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow AB \perp AE$

הנקודה M **נמצאת על המקצוע** EC **כך שמתקיים** $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$.

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE})$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}(-\underline{u} - \underline{v} + \underline{w})$$

$$\boxed{\overrightarrow{CM} = -\frac{2}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}}$$

(הערה – זה מעבר שלרוב שווה לעשות אותו "אוטומטי")

נביע את הווקטורים $\overrightarrow{CE}$ **ו-** $\overrightarrow{AM}$ **באמצעות** $\underline{u}$, $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CE} = -\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{AM} = \underline{v} + \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{CE} = -\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}$.

נכתב ע"י עפר ילין

(2) נוכיח כי $\overrightarrow{AM}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{CE}$.

נזכור כי הוכחנו ש- $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$, $\underline{u}\cdot\underline{w}=0$, $\underline{v}\cdot\underline{w}=0$, **וסימנו** $|\underline{w}|=|\underline{u}|=|\underline{v}|=a$.

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CE}=(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w})\cdot(-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w})=-\frac{1}{3}\underline{u}^2-\frac{1}{3}\underline{v}^2+\frac{2}{3}\underline{w}^2=-\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a^2=0 \quad\rightarrow \boxed{\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CE}}$$

תשובה: הוכחנו כי $\overrightarrow{AM}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{CE}$.

ב. (1) נתון האורך של צלע הריבוע $ABCD$ **הוא** 6 **, ולכן** $|\underline{w}|=|\underline{u}|=|\underline{v}|=6$.

נתון $A(0,0,0)$ **ראשית הצירים.**

AB **מונח על החלק החיובי של ציר ה-** x **ולכן** $B(6,0,0)$.

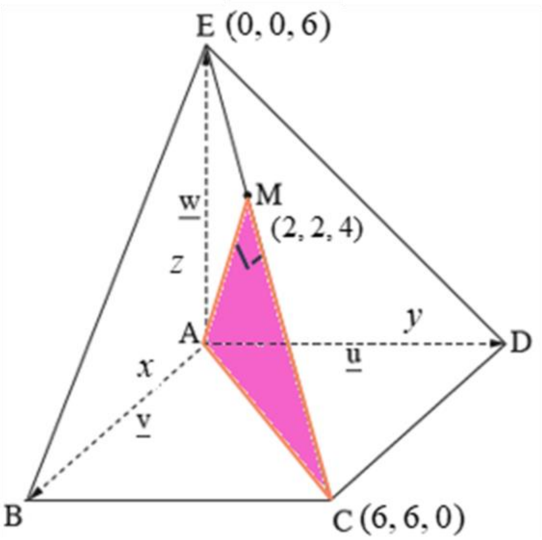
AD **מונח על החלק החיובי של ציר ה-** y **ולכן** $D(0,6,0)$.

AE **מונח על החלק החיובי של ציר ה-** z **ולכן** $E(0,0,6)$.

$ABCD$ **הוא ריבוע, ששלושה מקודקודיו מצאנו וצלעותיו הנגדיות שוות ומקבילות, ולכן** $C(6,6,0)$.

תשובה: $E(0,0,6)$ **,** $C(6,6,0)$.

(2) נמצא את שיעורי הנקודה M .



$$\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$$

$$\underline{M}-\underline{C}=\frac{2}{3}(\underline{E}-\underline{C})$$

$$\underline{M}-\underline{C}=\frac{2}{3}(-6,-6,6)$$

$$\underline{M}=(6,6,0)+(-4,-4,4)$$

$$\boxed{M(2,2,4)}$$

תשובה: $M(2,2,4)$.

ג. נחשב את שטח המשולש AMC .

הראינו כי $\overrightarrow{AM}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{CE}$ **, ולכן** $\sphericalangle AMC=90°$.

$$AM=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{6}$$

$$CM=\sqrt{(2-6)^2+(2-6)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta AMC}=\frac{AM\cdot CM}{2}=\frac{2\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta AMC}=12\sqrt{2}\approx 16.97}$$

תשובה: שטח המשולש AMC **הוא** $12\sqrt{2}\approx 16.97$.

נכתב ע"י עפר ילין

נוסחת הגדילה והדעיכה: $A_t = A_0 \cdot q^t$ **, כאשר** A_0 **- הכמות ההתחלתית,**

q **הוא גורם הגדילה/דעיכה,** A_t **הכמות לאחר זמן** t.

א. בתחילת שנת 2018**, כמות הדבש בכוורת דבורים מסוימת קטנה בכל חודש באחוז קבוע .**

לאחר 8 **חודשים כמות הדבש בכוורת הייתה** 45% **מכמות הדבש בתחילת שנת** 2018.

נמצא בכמה אחוזים קטנה כמות הדבש בכל חודש.

אם A_0 **היא הכמות ההתחלתית אז** $A_8 = 45\%A_0 = 0.45A_0$ **היא הכמות לאחר** 8 **חודשים.**

$$A_8 = A_0 \cdot q^8$$
$$0.45A_0 = A_0 \cdot q^8 \quad / : A_0 > 0$$
$$0.45 = q^8$$
$$\sqrt[8]{0.45} = q$$
$$\boxed{q = 0.9050}$$

נמצא את אחוז הדעיכה החודשי.

$$0.9050 = \frac{100 - P}{100} \quad / \cdot 100$$
$$90.5 = 100 - P$$
$$\boxed{P = 9.5}$$

תשובה: כמות הדבש בכל חודש קטנה ב- 9.5% .

ב. נמצא בכמה אחוזים קטנה כמות הדבש כעבור 10 **חודשים.**

$$A_{10} = A_0 \cdot 0.905^{10}$$
$$A_{10} = 0.3686A_0$$
$$\boxed{A_{10} = 36.86\%A_0}$$

ולכן כמות הדבש קטנה ב- $100\% - 36.86\% = 63.14\%$

תשובה: כמות הדבש בכוורת קטנה ב- 63.14% **כעבור** 10 **חודשים מתחילת שנת** 2018.

נכתב ע"י עפר ילין

ג. נמצא כעבור כמה חודשים מתחילת השנה קטנה כמות הדבש ב - 33% **.**

כלומר, מתי כמות הדבש הגיעה ל- $(100\%-33\%)A_0=67\%A_0=0.67A_0$ **.**

$$0.67A_0=A_0\cdot 0.905^t \quad /:A_0>0$$
$$0.67=0.905^t$$
$$\ell n\,0.67=\ell n\,0.905^t$$
$$\ell n\,0.67=t\cdot\ell n\,0.905$$
$$t=\frac{\ell n\,0.67}{\ell n\,0.905}$$
$$\boxed{t\approx 4.0}$$

תשובה: כעבור כ- 4 **חודשים מתחילת שנת** 2018 **קטנה כמות הדבש ב -** 33% **בהשוואה לתחילת השנה.**

ד. מתחילת שנת 2019 **והלאה כמות הדבש בכוורת גדלה בכל חודש באחוז קבוע.**

בתחילת שנת 2019 **הייתה בכוורת כמות של** k **ק"ג דבש.**

הפונקציה $f(t)=k\cdot(1.05)^t$ **מתארת את כמות הדבש בכוורת (בק"ג) כפונקציה של הזמן (בחודשים).**

בתחילת שנת 2018 **הייתה בכוורת כמות של** 600 **ק"ג דבש.**

נמצא תחילה את k**, כמות הדבש בכוורת לאחר** 12 **חודשים מתחילת שנת** 2018.

$$A_{12}=600\cdot 0.905^{12}$$
$$A_{12}\approx 181.1\,kg$$
$$\boxed{k\approx 181.1\,kg}$$

כלומר, בתחילת שנת 2019 **הייתה בכוורת כמות של** 181.1 **ק"ג דבש.**

נמצא את כמות הדבש בכוורת בתחילת שנת 2021 **,** 24 **חודשים מתחילת שנת** 2019.

$$f(24)=181.1\cdot(1.05)^{24}$$
$$\boxed{f(24)\approx 584.1\,kg}$$

תשובה: כמות הדבש שהייתה בכוורת בתחילת שנת 2021 **היא כ-** 584.1 **ק"ג.**

נכתב ע"י עפר ילין

4

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{(ax-1)}}{x^2}$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$x^2\neq 0 \quad \rightarrow x\neq 0$$

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq 0$.

(2) תשובה: האסימפטוטה המאונכת לציר ה- X **היא** $x=0$.

(3) המונה $e^{(ax-1)}$ **חיובי לכל** x **, וגם המכנה** x^2 **חיובי לכל** $x\neq 0$ **, ולכן גם המנה חיובית בתחום ההגדרה.**

$$x^2\neq 0 \quad \rightarrow x\neq 0$$

תשובה: הסברנו מדוע הפונקציה $f(x)$ **חיובית, בעבור כל** x **בתחום ההגדרה שלה.**

ב. נתון כי הנקודה $(-1,\frac{1}{e^3})$ **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)$.

$$\frac{1}{e^3}=\frac{e^{(a(-1)-1)}}{(-1)^2}$$

$$\frac{1}{e^3}=e^{-a-1}$$

$$e^{-3}=e^{-a-1}$$

$$-3=-a-1$$

$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$.

נכתב ע"י עפר ילין

ג. נציב $a=2$ בפונקציה $f(x)$ ונקבל $f(x)=\frac{e^{2x-1}}{x^2}$.

(1) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגה.

$$f'(x)=\frac{2e^{2x-1}\cdot x^2-2x\cdot e^{2x-1}}{(x^2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2e^{2x-1}(x^2-x)}{x^4}}$$

$$x^2-x=0 \quad \to x(x-1)=0 \quad \to x=1,\ \cancel{x=0}$$

$$x=1 \quad \to y=\frac{e^{2\cdot1-1}}{1^2}=e$$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(0.5)<0 & \searrow \\ f'(2)>0 & \nearrow \end{array}\right\} \boxed{(1,e),\min}$$

תשובה: $(1,e)$, מינימום.

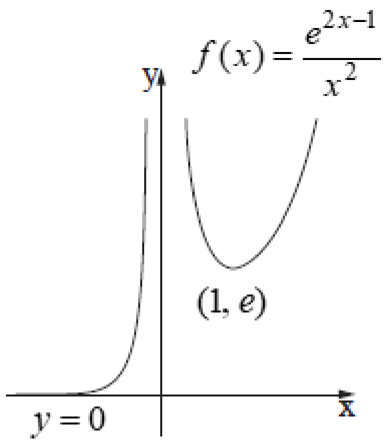
(2) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$\nearrow \quad f'(-1)>0$ ולכן בתחום $x<0$ הפונקציה עולה.

שתי הצבות מומלצות לפני הסרטוט.

$f(10)=1,784,823\to+\infty$ ואין אסימפטוטה אופקית לימין

$f(-10)=7.58\cdot10^{-12}\to0$ ו- $y=0$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.



תשובה הסרטוט מעל .

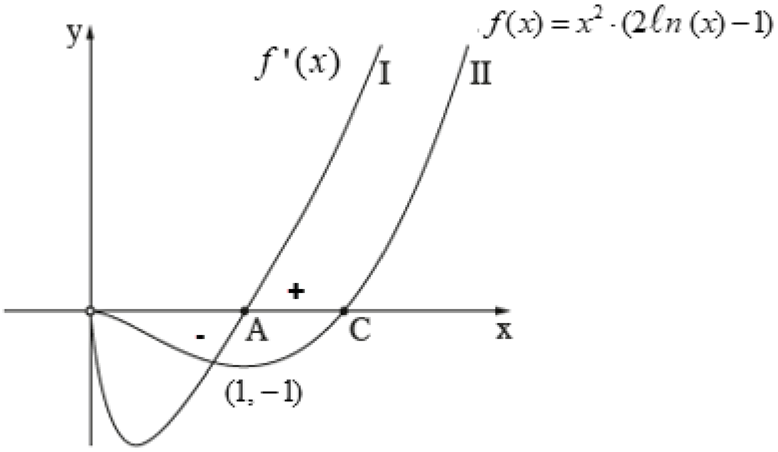
ד. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+k$, k הוא פרמטר, שהיא תזוזה אנכית $(+k)$ יחידות של $f(x)$.

לישר $y=-2e$, שהוא ישר המקביל לציר ה- x , ולגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק שתי נקודות משותפות.

לישר $y=e$, העובר בנקודת המינימום של $f(x)$, יש עוד נקודת חיתוך אחת עם גרף $f(x)$ בתחום $x<0$.

ולכן אם נוריד את הגרף $3e$ יחידות כלפי מטה, תהיינה שתי נקודות חיתוך בדיוק עם הגרף של $g(x)$.

תשובה: $k=-3e$.



א. ניתן לראות שכאשר גרף I עובר משליליות לחיוביות עבור $x=x_A$,

אז גרף II עובר מירידה לעלייה, ומתקבל מינימום עבור $x=x_A$.

לכן, גרף I מתאים לפונקציית הנגזרת של גרף II.

תשובה: גרף I מתאר את פונקציית הנגזרת $f\,'(x)$.

ב. נתון: $f(x)=x^2\cdot(2\ell n\,(x)-1)$.

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x>0$.

תשובה: $x>0$.

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון, שהיא מינימום על פי ההסבר בסעיף א, של הפונקציה $f(x)$.

$$f\,'(x)=2x\cdot(2\ell n\,(x)-1)+x^2\cdot\frac{2}{x}$$
$$f\,'(x)=2x\cdot(2\ell n\,(x)-1)+2x$$
$$f\,'(x)=2x\cdot(2\ell n\,(x)-1+1)$$
$$\boxed{f\,'(x)=4x\cdot\ell n\,(x)}$$
$$\ell n\,(x)=0 \quad \leftarrow x>0$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1^2\cdot(2\ell n\,(1)-1)=-1 \end{array}\right\} \boxed{(1,-1),\min}$$

תשובה: $(1,-1)$ **, מינימום.**

ג. שיעורי הנקודה A, על פי הסעיפים הקודמים, הם $(1,0)$.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$:

$$0=f(x)=x^2\cdot(2\ell n(x)-1)$$

$$\cancel{x=0} \leftarrow x>0$$

$$2\ell n(x)-1=0$$

$$2\ell n(x)=1$$

$$\ell n(x)=\frac{1}{2}$$

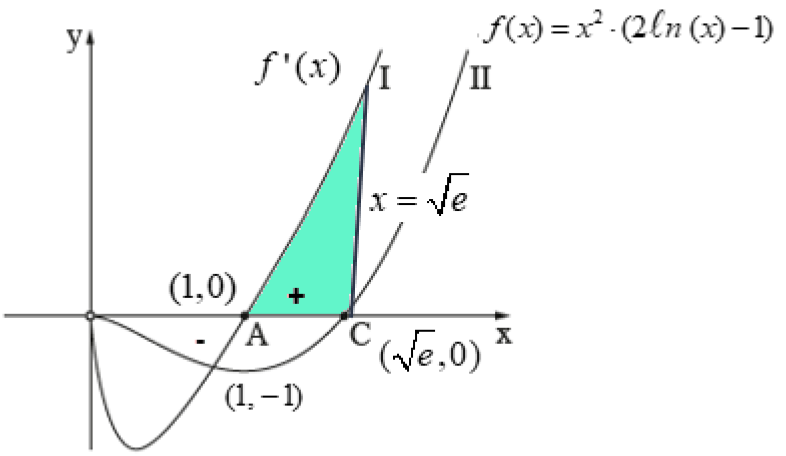
$$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ובהתאם שיעורי הנקודה C הם $(\sqrt{e},0)$.

מכאן שאורך הקטע AC הוא $x_C-x_A=\sqrt{e}-1\approx 0.6487$

תשובה: אורך הקטע AC $\sqrt{e}-1\approx 0.6487$.

ד. נחשב את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, הישר $x=\sqrt{e}$ וציר ה- x (צבוע בירוק).



$$S=\int_1^{\sqrt{e}}(f'(x)-0)\,dx=f(x)]_1^{\sqrt{e}}$$

$$\left.\begin{aligned} x=\sqrt{e} \quad & f(\sqrt{e})=0 \\ x=1 \quad & f(1)=-1 \end{aligned}\right\} S=0-(-1)\rightarrow \boxed{S=1}$$

תשובה: השטח, המוגבל על ידי גרף I, על ידי הישר המקביל לציר ה- y ועל ידי ציר ה- x , הוא 1.

נכתב ע"י עפר ילין