פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, מועד ב, שאלון: 35471

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

1

א. האורכים של גבעולי הפרחים במשתלה מסוימת מתפלגים נורמלית.

האורך הממוצע הוא 20 **ס"מ=** $\bar{x}$ **.**

בקבוצה א' ישנם פרחים שאורך הגבעול שלהם קצר מ- 22 **ס"מ,**

והם מהווים 65.5% **מכלל הפרחים במשתלה.**

$$p=65.5\% \quad \rightarrow p=0.655 \quad \rightarrow z=0.4$$

$$0.4=\frac{22-20}{s} \quad / \cdot s$$

$$0.4s=2 \quad /:0.4$$

$$\boxed{s=5\,cm}$$

תשובה: סטיית התקן של אורך גבעולי הפרחים במשתלה היא 5 **ס"מ.**

ב. בקבוצה ג' יש פרחים שאורך הגבעול שלהם הוא 26 **ס"מ ומעלה.**

נחשב את ציון התקן עבור 26 **ס"מ=** x **, ובהתאם את האחוז המבוקש .**

$$z=\frac{26-20}{5}=\frac{6}{5}=1.2$$

$$z=1.2 \quad \rightarrow p(z<1.2)=0.885$$

$$\rightarrow p(z>1.2)=1-0.885=0.115 \quad \rightarrow \boxed{11.5\%}$$

ומכאן שאחוז הפרחים שבקבוצה ב', שאורכם בין 22 **ל-** 26 **ס"מ הוא** $100\%-11.5\%-65.5\%=23\%$ **.**

תשובה: 11.5% **מכל הפרחים במשתלה הם בקבוצה ג'.ג. יום אחד היו במשתלה** 2,000 **פרחים סך הכול.**

במשתלה החליטו להכין זרים מכך הפרחים שבקבוצה ב', כך שבכל זר יהיו 10 **פרחים.**

מספר הפרחים שבקבוצה ב' הוא : $23\%\cdot 2000=0.23\cdot 2000=460$ **,**

ובהתאם מספר הזרים הוא $460:10=46$ **.**

תשובה: על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, במשתלה הכינו 46 **זרים ביום זה.**

ד. במשתלה אחרת, שגם בה האורכים של גבעולי הפרחים מתפלגים נורמלית,

אחוז הפרחים שאורך הגבעול שלהם ארוך מ- 24 **ס"מ שווה לאחוז הפרחים שבקבוצה ב', כלומר** 23% **.**

$$p(x>24)=23\% \quad \rightarrow p(x<24)=77\% \quad \rightarrow p=0.77 \quad \rightarrow z=0.74$$

נתון כי סטיית התקן של אורכי גבעולי הפרחים בשתי המשתלות זהה, כלומר 5 **ס"מ=** s **.**

$$0.74=\frac{24-\bar{x}}{5} \quad / \cdot 5$$

$$3.7=24-\bar{x}$$

$$\boxed{\bar{x}=20.3\,cm}$$

תשובה: הממוצע של אורך גבעולי הפרחים במשתלה האחרת הוא 20.3 **ס"מ.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. לפנינו 3 טבלאות שבהן מוצגים ערכים של שני משתנים, שנמדדו בתצפיות שונות: משתנה x ומשתנה y .

טבלה 1

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

טבלה 2

x	y
4	9
5	11
6	19
7	22
8	17

טבלה 3

x	y
16	35
17	34
18	33
19	32
20	31

נסמן את מקדם המתאם בין x ל- y ב- r .

נתאים כל אחד מן ההיגדים I - III שלפנינו לטבלאות $3-1$.

- ניתן לראות שבטבלה 1 כאשר x גדל ב- 1 אז y גדל ב- 2 ,
  ולפנינו קשר ליניארי דטרמיניסטי (מושלם) חיובי (ישר עולה),
  שאפשר לראות שמיוצג על ידי הישר $y=2x$.
  מכאן שהביטוי II. $r=1$ מתאים לטבלה 1.
- ניתן לראות שבטבלה 2 כאשר x גדל ב- 1 אז y גדל בהפרשים משתנים, ופעם אחת יורד.
  מכאן שניתן להבין שקיים קשר ליניארי חיובי (ישר עולה), אבל לא מושלם.
  מכאן שהביטוי I. $0<r<1$ מתאים לטבלה 2.
- ניתן לראות שבטבלה 3 כאשר x גדל ב- 1 אז y יורד ב- 1 ,
  ולפנינו קשר ליניארי דטרמיניסטי (מושלם) שלילי (ישר יורד),
  שאפשר לראות שמיוצג על ידי הישר $y=-x+51$.
  מכאן שהביטוי III. $r=-1$ מתאים לטבלה 1.

תשובה: הביטוי I. מתאים לטבלה 2. הביטוי II. מתאים לטבלה 1. הביטוי III. מתאים לטבלה 3.

טבלה 2

x	y
4	9
5	11
6	19
7	22
8	17

ב. הנתונים שבטבלה 2 מתייחסים לקבוצה של 5 ספורטאים.

בטבלה מתואר הקשר בין מספר הפעמים בשבוע שכל אחד מן הספורטאים מתאמן (המשתנה x)
ובין מספר השעות בשבוע שהוא מתאמן (המשתנה y).

נתון כי משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x היא $y=2.7x+b$ (b הוא פרמטר).

ישר הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים, לכן אם נמצא את ממוצעי המשתנים, נוכל למצוא את ערכו של b.
נמצא את הממוצעים של שני המשתנים.

$$\bar{x}=\frac{4+5+6+7+8}{5}=\frac{30}{5}=6$$
$$\bar{y}=\frac{9+11+19+22+17}{5}=\frac{78}{5}=15.6$$
.

תשובה: ספורטאי בקבוצה זו מתאמן בממוצע 6 פעמים בשבוע, ובממוצע מתאמן 15.6 שעות בשבוע.

ג. כאמור ישר הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים,
ולכן נציב את שיעורי נקודת הממוצעים $(6,15.6)$ במשוואת ישר הרגרסיה.

$$15.6=2.7\cdot 6+b$$
$$15.6=16.2+b \ .$$
$$\boxed{b=-0.6}$$

ומשוואת קו הרגרסיה היא $y=2.7x-0.6$.

תשובה: $b=-0.6$.

ד. נתון כי היחס בין סטיית התקן של הנתונים בטבלה 2 הוא $\frac{S_y}{S_x}=3.45$,

שיפוע קו הרגרסיה $(m=2.7)$ נתון על ידי הנוסחה $m=r\cdot\frac{s_y}{s_x}$.

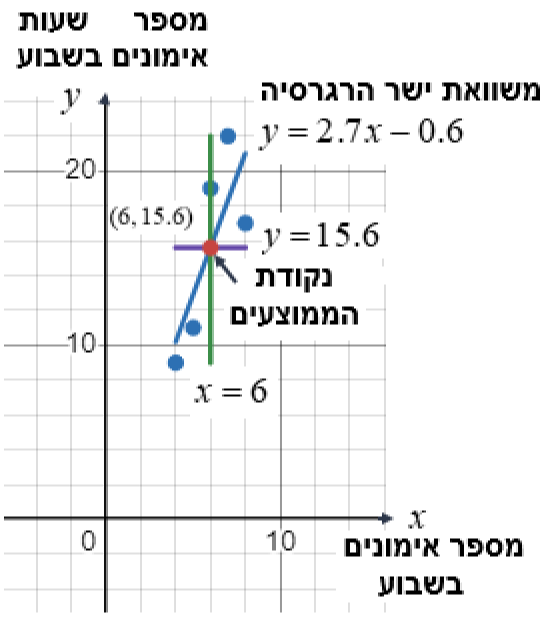
נציב את הנתונים בנוסחה: $2.7=r\cdot 3.45 \quad \rightarrow \boxed{r=0.7826}$.

וזה קשר ליניארי חזק, $0.7<r<1$, התואם את טבלה 2 ואת התשובה שלנו לסעיף א.

תשובה: $r=0.7826$.

נכתב ע"י עפר ילין

הערה


מספר שעות
אימונים בשבוע
משוואת ישר הרגרסיה
$y = 2.7x - 0.6$
(6, 15.6)
$y = 15.6$
נקודת
הממוצעים
$x = 6$
20
10
0
10
מספר אימונים
בשבוע

3

א. נסמן את ההסתברות שרועי ינצח בסיבוב כלשהו ב- x .

בהתאם ההסתברות שגלית תנצח היא $3x$ כי היא גדולה פי 3 מזו שרועי ינצח.

ההסתברות שסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.28 .

סכום ההסתברויות הוא כמובן 1 .

$$x+3x+0.28=1$$

$$4x=0.72 \quad /:4$$

$$\boxed{x=0.18}$$

$$\boxed{3x=0.54}$$

כלומר, ההסתברות שגלית תנצח היא 0.54, שרועי ינצח היא 0.18 וההסתברות לתיקו היא 0.28 .

תשובה: ההסתברות שגלית תנצח בסיבוב כלשהו במשחק היא 0.54 .

ב. במשחק שגלית ורועי משחקים יש שני סיבובים.

התוצאות של הסיבובים אינן תלויות זו בזו, כלומר ההסתברויות זהות בשני הסיבובים.

נחשב את ההסתברות, ששום סיבוב לא יסתיים בתיקו.

ההסתברות שסיבוב אחד לא יסתיים בתיק היא $1-0.28=0.72$.

$$P(no\ draw)=0.72\cdot 0.72=0.5184$$

תשובה: ההסתברות ששום סיבוב לא יסתיים בתיקו היא 0.5184 .

ג. נחשב את ההסתברות שגלית תנצח לפחות באחד מן הסיבובים.

המאורע המשלים הוא שגלית תפסיד בשני המשחקים,

כאשר ההסתברות שתפסיד בסיבוב אחד היא $1-0.54=0.46$.

$$P(at\ least\ 1\ win)=1-0.46\cdot 0.46=0.7884$$

תשובה: ההסתברות שגלית תנצח לפחות באחד מן הסיבובים היא 0.7884 .

נכתב ע"י עפר ילין

ד. נחשב את ההסתברות שאחד מן הסיבובים (הראשון או השני) הסתיים בתיקו,
אם ידוע שגלית ניצחה לפחות באחד מן הסיבובים.

$$P(1\,draw\,/\,at\ least\ 1\ win)=$$

$$=\frac{P(1\,draw\cap at\ least\ 1\ win)}{P(at\ least\ 1\ win)}=$$

$$=\frac{0.28\cdot 0.54+0.54\cdot 0.28}{0.7884}=\frac{0.3024}{0.7884}=\frac{28}{73}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{28}{73}$.

נכתב ע"י עפר ילין

4

א. (1) אורך הצלע AD **הוא** $\sqrt{10}$ **, כאשר הקודקוד** D **נמצא על ציר ה-** y **ונסמן** $D(0,y)$.

$$\sqrt{(1-0)^2+(9-y)^2}=\sqrt{10} \quad (\ )^2$$

$$1+(9-y)^2=10$$

$$(9-y)^2=9$$

$$9-y=3 \rightarrow y=6 \rightarrow \boxed{D(0,6)}$$

$$9-y=-3 \rightarrow \cancel{y=12} \leftarrow y_D<9$$

תשובה: $D(0,6)$.

(2) האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה, לכן השיפועים הופכיים לנגדיים.

$$m_{AC}=\frac{9-4}{1-6}=\frac{5}{-5}=-1 \rightarrow m_{BD}=+\frac{1}{1}=1 \ .$$

נמצא את משוואת האלכסון BD .

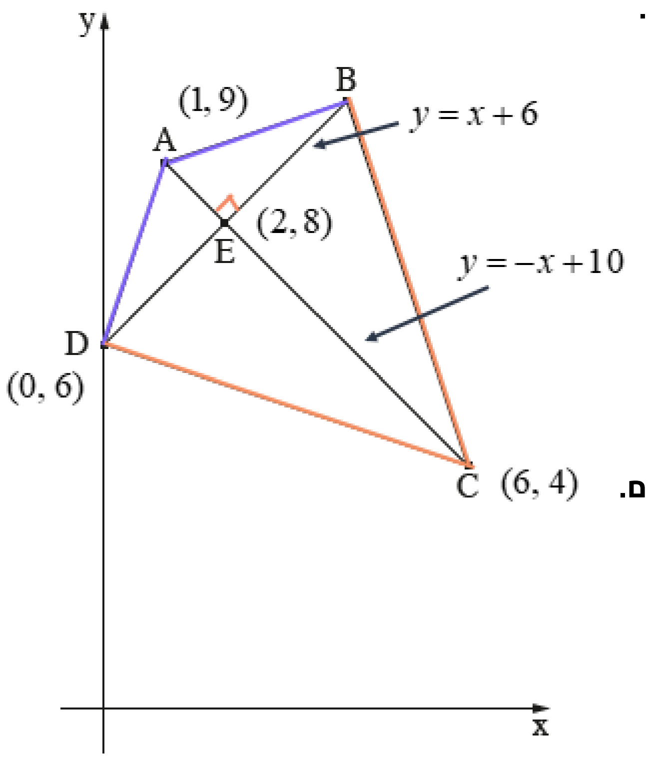
בעזרת $m_{BD}=-1$ **ו-** $D(0,6)$.

$$y-6=1(x-0)$$

$$y-6=x$$

$$\boxed{y=x+6}$$

תשובה: משוואת הישר BD **היא** $y=x+6$.



ב. נמצא את שיעורי הנקודה E **, נקודת מפגש האלכסונים.**

נמצא את משוואת האלכסון AC .

בעזרת $m_{AC}=-1$ **ו-** $C(6,4)$.

$$y-4=-1(x-6)$$

$$y-4=-x+6$$

$$\boxed{y=-x+10}$$

$$E\begin{cases} y=x+6 \\ y=-x+10 \end{cases}$$

$$x+6=-x+10$$

$$2x=4$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=2+6=8 \end{array}\right\} E(2,8)$$

תשובה: $E(2,8)$.

נכתב ע"י עפר ילין

ג. הנקודה F נמצאות על הקטע EC .

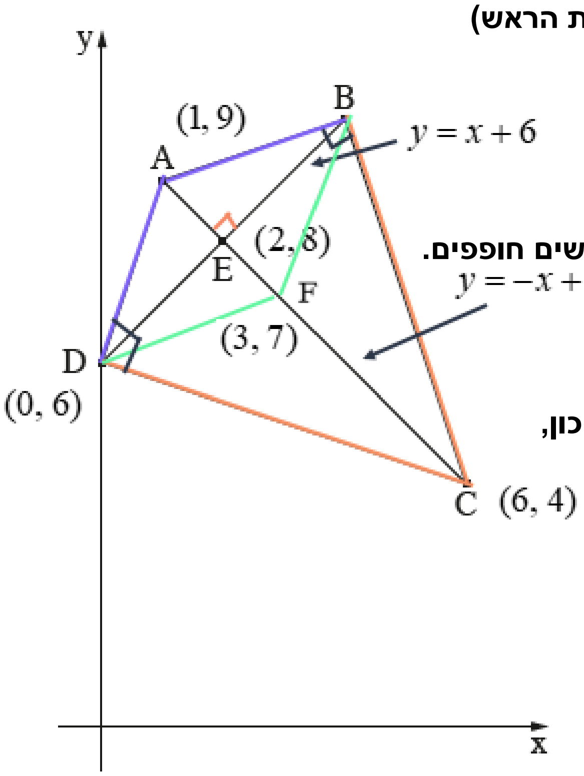
$AD = AB$ (נתון)

$\sphericalangle BAF = \sphericalangle DAF$ (האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש)

$AF = AF$ (צלע משותפת)

$\Delta ABF = \Delta ADF$ (משפט חפיפה צלע זווית צלע)

תשובה: הוכחנו כי $\Delta ABF = \Delta ADF$.



ד. על פי סעיף ג $FD = FB$ כי צלעות מתאימות שוות במשולשים חופפים.

FBAD יהייה מעוין אם $AD = FD$,

ואז כל הצלעות תהיינה שוות, כי גם $AD = AB$.

מכאן נדרש ש- $AE = FE$, ואז הגובה DE יתלכד עם התיכון,

ו- ΔADF יהייה שווה שוקיים, שבו $AD = FD$.

$$x_E = \frac{x_F + x_A}{2} \qquad y_E = \frac{y_F + y_A}{2}$$

$$2 = \frac{x_F + 1}{2} \qquad 8 = \frac{y_F + 9}{2}$$

$$4 = x_F + 1 \qquad 16 = y_F + 9$$

$$3 = x_F \qquad 7 = y_F$$

תשובה: $F(3, 7)$.

ה. נבדוק את טענות $I - II$.

I.. המשולש ABC הוא ישר זווית.

$$\left.\begin{aligned} m_{DC} &= \frac{6-4}{0-6} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \\ m_{DA} &= \frac{6-9}{0-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \end{aligned}\right\} m_{DC} \cdot m_{DA} = -1 \quad \rightarrow \sphericalangle ADC = 90^\circ$$

(שיפועים הפוכים ונגדיים)

זוויות צד שוות בדלתון ABCD , ולכן גם $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ ומשולש ABC ישר זווית.

תשובה: הטענה נכונה.

II. הדלתון ABCD הוא בר חסימה במעגל.

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$ ולכן הדלתון ABCD הוא בר חסימה במעגל , כי סכום זוויות נגדיות 180° .

תשובה: הטענה נכונה.

נכתב ע"י עפר ילין

א. (1) המעגל, שמרכזו $M(4,8)$ **עובר דרך ראשית הצירים** $O(0,0)$.

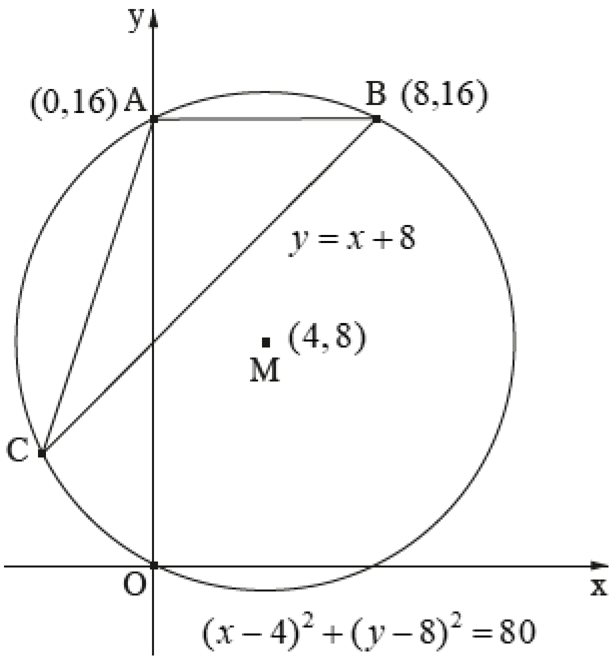
$$R=\sqrt{(4-0)^2+(8-0)^2} \quad \to R=\sqrt{80}$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-4)^2+(y-8)^2=80$.

(2) הנקודה A **היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-** y **, כלומר** $x_A=0$.

$$(0-4)^2+(y-8)^2=80$$
$$16+(y-8)^2=80$$
$$(y-8)^2=64$$
$$y-8=8 \quad \to y=16 \quad \to \boxed{A(0,16)}$$
$$y-8=-8 \quad \to y=0 \quad \to O(0,0)$$

תשובה: $A(0,16)$.



ב. (1) הצלע AB **מקבילה לציר ה-** x **, ולכן** $y_B=y_A=16$.

$$(x-4)^2+(16-8)^2=80$$
$$(x-4)^2+64=80$$
$$(x-4)^2=16$$
$$x-4=4 \quad \to x=8 \quad \to \boxed{B(8,16)}$$
$$x-4=-4 \quad \to x=0 \quad \to A(0,16)$$

נמצא את משוואת הישר BC .

בעזרת $m_{BC}=1$ **(נתון) ו-** $B(8,16)$.

$$y-16=1(x-8)$$
$$y-16=x-8$$
$$\boxed{y=x+8}$$

תשובה: משוואת הישר BC **היא** $y=x+8$.

(2) נמצא את שיעורי הקודקוד C .

$$E\begin{cases} y = x+8 \\ (x-4)^2+(y-8)^2=80 \end{cases}$$

$$(x-4)^2+(x+8-8)^2=80$$

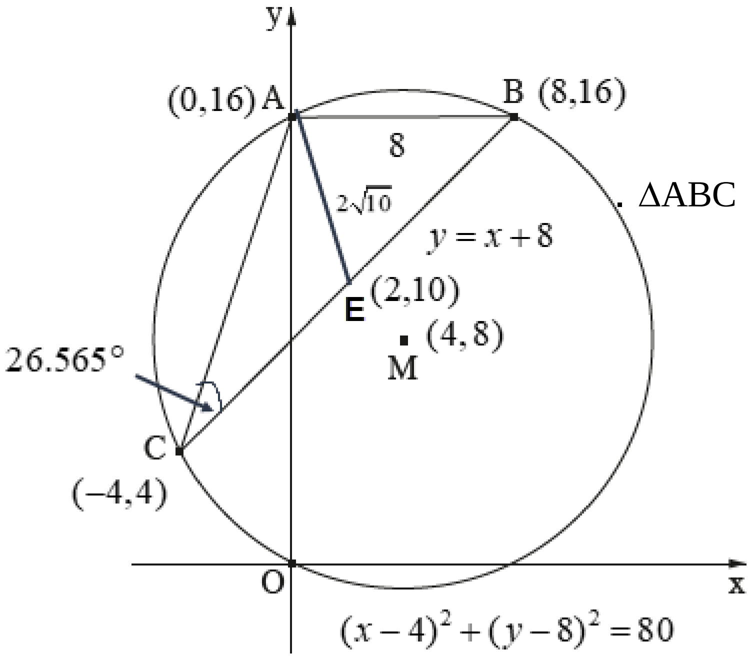
$$x^2-8x+16+x^2=80$$

$$2x^2-8x-64=0$$

$$x=8 \quad \to y=8+8=16 \quad \to B(8,16)$$

$$x=-4 \quad \to y=-4+8=4 \quad \to \boxed{C(-4,4)}$$

תשובה: $C(-4,4)$.



ג. הנקודה E **היא אמצע הצלע** BC.

נמצא את גודל $\measuredangle C$ **בעזרת משפט סינוסים ב-** ΔABC.

$$AB = x_B - x_A = 8-0=8$$

$$\frac{AB}{\sin \measuredangle C} = 2R_{\Delta ABC}$$

$$\frac{8}{2\cdot\sqrt{80}} = \sin\measuredangle C$$

$$\boxed{\measuredangle C = 26.565^\circ}$$

$\measuredangle C$ **חדה, כי** $\measuredangle BAC > 90^\circ$.

תשובה: $\measuredangle ACB = 26.565^\circ$.

ד. נמצא את רדיוס המעגל החוסם את ΔAEC **בעזרת משפט סינוסים ב-** ΔAEC.

$$\left.\begin{array}{l} x_E = \dfrac{-4+8}{2} = 2 \\ y_E = \dfrac{4+16}{2} = 10 \end{array}\right\} E(2,10)$$

$$AE = \sqrt{(0-2)^2+(16-10)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\frac{AE}{\sin\measuredangle C} = 2R_{\Delta AEC}$$

$$\frac{2\sqrt{10}}{2\cdot \sin 26.565^\circ} = R_{\Delta AEC}$$

$$\boxed{R_{\Delta AEC} = 5\sqrt{2} \approx 7.07}$$

תשובה: אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC **הוא** $5\sqrt{2}\approx 7.07$.

נכתב ע"י עפר ילין

6

בגרות פד יולי 24 מועד קיץ ב שאלון 35471

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+4}{5x-x^2}-b$ **(** b **הוא פרמטר).**

קצת קדם אנליזה : **נשים לב שהפונקציה היא הזזה אנכית** b **יחידות, של הפונקציה** $y=\frac{x+4}{4x-x^2}$.

בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$5x-x^2\neq 0 \quad \to x(5-x)\neq 0 \quad \to x\neq 0,5$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq 0,5$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{5x-x^2-(x+4)(5-2x)}{(5x-x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5x-x^2-(5x-2x^2+20-8x)}{(5x-x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5x-x^2-5x+2x^2-20+8x}{(5x-x^2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2+8x-20}{(5x-x^2)^2}}$$

$$x^2+8x-20=0$$

$$x=2 \quad \to f(2)=1 \quad \to (2,1-b)$$

$$x=-10 \quad \to f(-10)=1 \quad \to (-10,\ 0.04-b)$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה :

	-10		0		2		5		x
+	0	**-**		**-**	0	**+**		**+**	$f'(x)$
↗	**Max**	↘		↘	**Min**	↗		↗	**מסקנה**

תשובה: שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **הם** $(2,1-b)$ **מינימום,** $(-10,0.04-b)$ **מקסימום.**

ג. נתון כי הישר $y=-1$ **משיק לגרף הפונקציה** $f(x)$ **בנקודת המינימום שלה שהיא** $(2,1-b)$.

לכן $\boxed{b=2} \leftarrow -1=1-b$.

תשובה: $b=2$.

ד. נציב $b=2$ **בפונקציה** $f(x)$ **ונקבל** $f(x)=\frac{x+4}{5x-x^2}-2$,

כאשר שיעורי נקודות הקיצון הם: $(2,-1)$ **מינימום,** $(-10,-1.96)$ **מקסימום.**

(1) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים, של הפונקציה $f(x)$.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x: $x=0$ **ו-** $x=5$.

הביטוי השמאלי שואף ל- 0 **כאשר** $x\to\pm\infty$ **, כי חזקת המונה** (1) **קטנה מחזקת המכנה** (2),

ולכן $f(x)\to 0-2=-2$ **ו-** $y=-2$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** y.

הערה – לא נדרשים הסברים בבגרות.

תשובה: $x=0$, $x=5$, $y=-2$.

(2) נמצא את שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים.**

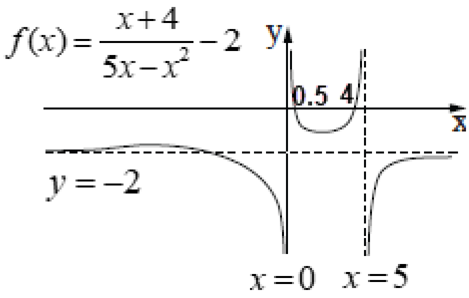
אין חיתוך עם ציר ה- y **כי** $x=0$ **לא בתחום ההגדרה של הפונקציה.**

בציר ה- x **, בו מתקיים** $y=0$:

$$0=\frac{x+4}{5x-x^2}-2 \quad /\cdot(5x-x^2)$$
$$0=x+4-2(5x-x^2)$$
$$0=x+4-10x+2x^2$$
$$0=2x^2-9x+4 \quad \to x=4, 0.5 \quad \to \boxed{(0.5,0),(4,0)}$$

תשובה: נקודת חיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים הן** $(0.5,0)$, $(4,0)$.

(3) הסקיצה המתאימה.



תשובה: השרטוט מעל.

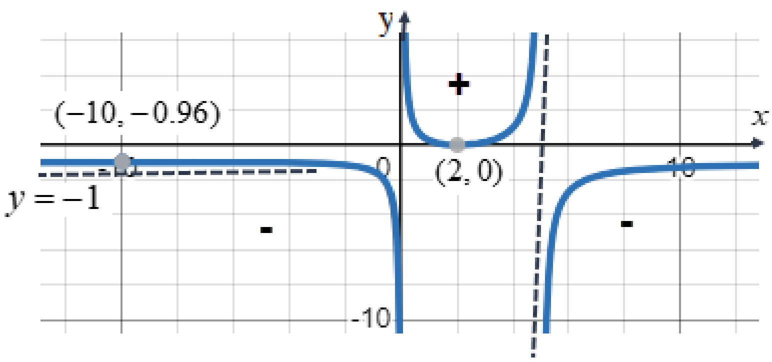
ה. נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת גם בתחום $x\neq 0,5$,

שפונקציית הנגזרת שלה מקיימת $g'(x)=f(x)+1$.

זוהי הזזה אנכית יחידה אחת כלפי מעלה של $f(x)$,

כך שנקודות הקיצון הן $(2,0)$ מינימום, $(-10,-0.96)$ מקסימום.

נמחיש זאת בציור (נקודת המקסימום קצת לא נראית בגלל קרבתה לאסימפטוטה האופקית $y=-1$).



תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת מסומנים בציור,

ובהתאם $g(x)$ עולה בתחום $0<x<5$ ויורדת בתחום $x>5$ או $x<0$, ואין נקודות קיצון.

הסבר חלופי: גרף הנגזרת אינו חותך את ציר ה- x , אינו משנה סימן בנקודת ההשקה $(2,0)$,

ולכן אין שינוי בתחומי עלייה וירידה ואין קיצון.

תשובה: לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון.

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}x+5}$.

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$-\frac{1}{2}x+5\geq 0$$

$$-\frac{1}{2}x\geq -5 \quad /:(-\frac{1}{2}<0)$$

$$\boxed{x\leq 10}$$

תשובה: $x\leq 10$.

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל את הנקודה** $(0,0)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל את הנקודות** $(0,0)$ **,** $(10,0)$.

תשובה: $(0,0)$ **,** $(10,0)$.

קפצת קדם אולימפה : **נשים לב שהפונקציה היא אי-שלילית,**

ולכן נקודות האפס של הפונקציה, $(0,0)$, $(10,0)$, **הן נקודות מינימום, וביניהן תהייה נקודת מקסימום.**

ג. נמצא את שיעורי כל נקודות הקיצון ונקבע את סוגן. $(10,0)$ **בהכרח נקודת קיצון קצה.**

$$\boxed{f(x)=x^2\cdot\sqrt{-0.5x+5}}$$

$$f'(x)=2x\sqrt{-0.5x+5}+x^2\frac{-0.5}{2\sqrt{-0.5x+5}}$$

$$f'(x)=2x\sqrt{-0.5x+5}-\frac{x^2}{4\sqrt{-0.5x+5}}$$

$$f'(x)=\frac{8x(-0.5x+5)-x^2}{4\sqrt{-0.5x+5}}$$

$$f'(x)=\frac{-4x^2+40x-x^2}{\sqrt{-0.5x+5}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-5x^2+40x}{\sqrt{-0.5x+5}}}$$

$$0=-5x^2+40x=5x(-x+8)\quad\rightarrow x=0\rightarrow(0,0),\ x=8\quad\rightarrow(8,64)$$

$$f'(7)>0,\ f'(9)<0\quad\rightarrow\boxed{(8,64),\max}$$

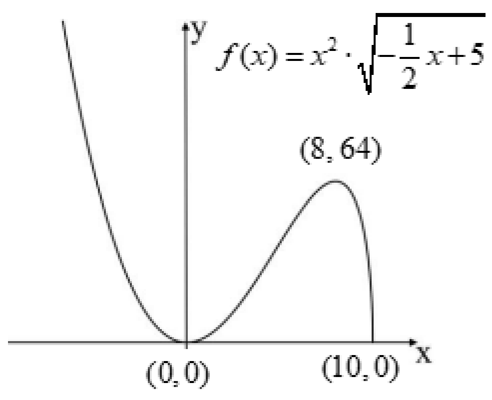
$$f'(-1)<0,\ f'(1)>0\quad\rightarrow\boxed{(0,0),\min}$$

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת המקסימום לנקודת הקצה $(10,0)$ **,**

הרי שנקודת הקצה היא נקודת מינימום.

תשובה: $(10,0)$ **מינימום,** $(8,64)$ **מקסימום,** $(0,0)$ **מינימום.**

ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=x^2\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}x+5}$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

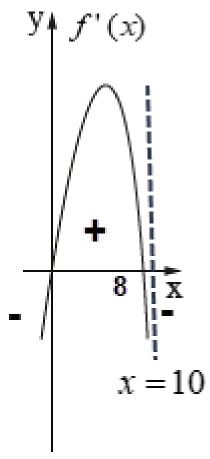
נכתב ע"י עפר ילין

ה. כאשר מזהים (או מציירים), את גרף הנגזרת $f'(x)=\frac{-5x^2+40x}{\sqrt{-0.5x+5}}$, נעזרים בשיקולים הבאים:

- נקודת אפס: $(8,0)$ ו- $(0,0)$ כי $f'(0)=f'(8)=0$.
- סימני נגזרת, בהתאם לתחומי העלייה/ירידה של $f(x)$,

  $f'(x)>0$ כאשר $0<x<8$.

  $f'(x)<0$ כאשר $8<x<10$ או $x<0$.
- תחום הגדרה: $x>10$ ואסימפטוטה אנכית $x=10$.



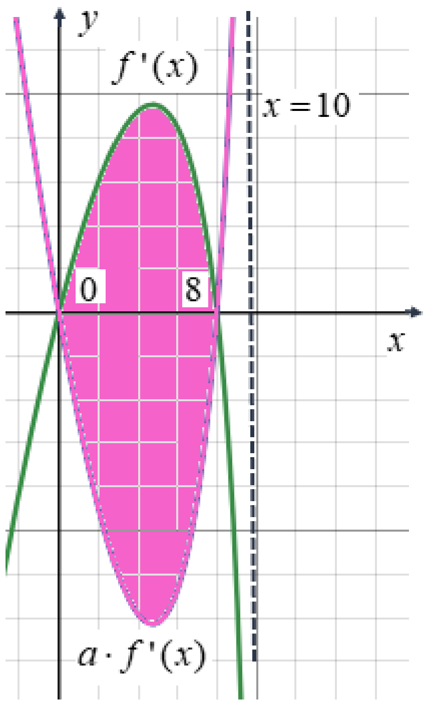
III

תשובה: גרף III מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ו. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי גרף הפונקציה $a\cdot f'(x)$ שווה ל- 160.

a הוא פרמטר שלילי, ולכן תחומי חיוביות/שליליות של הגרף של $a\cdot f'(x)$ הפוכים מאלו של $f'(x)$.

נביע באמצעות a את השטח המבוקש (צבוע בוורוד) ונשווה ל- 160:



$$S=\int_0^8 (f'(x)-a\cdot f'(x))\,dx = f(x)-a\cdot f(x)\Big]_0^8$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=8: & f(8)-a\cdot f(8)=64-64a \\ x=0: & f(0)-a\cdot f(0)=0-64\cdot 0=0 \end{array}\right\}$$

$$S=64-64a-0 \rightarrow \boxed{S=64-64a}$$

$$64-64a=160$$

$$-64a=96$$

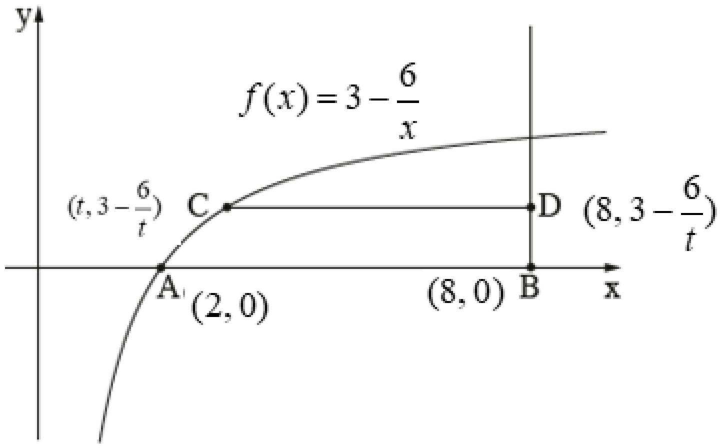
$$\boxed{a=-1.5}$$

תשובה: $a=-1.5$.

.

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה $f(x)=3-\frac{6}{x}$ **, המוגדרת לכל** $x\neq 0$ **, והגרף שלה בתחום** $x>0$ **.**



גרף הפונקציה $f(x)$ **חותך את ציר ה-** x **בנקודה** A **ולכן** $y_A=0$ **.**

$$0=3-\frac{6}{x} \quad / \cdot x$$
$$0=3x-6$$
$$-3x=-6 \quad /:(-3)$$
$$x=2 \quad \rightarrow \boxed{A(2,0)}$$

נסמן ב- t **את שיעור ה-** x **של הנקודה** C $(2<t<8)$ **שעל גרף הפונקציה** $f(x)=3-\frac{6}{x}$ **.**

ובהתאם שיעורי הם $C(t,3-\frac{6}{t})$ **.**

הישר BD **מאונך לציר ה-** x **, ולכן** $x_D=x_B=8$ **.**

הישר CD **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $y_D=y_C=3-\frac{6}{t}$ **ו-** $D(8,3-\frac{6}{t})$ **.**

תשובה: $A(2,0)$ **,** $C(t,3-\frac{6}{t})$ **,** $D(8,3-\frac{6}{t})$**.**

ב. הפונקציה שיש להביא למקסימום היא שטח המשולש ACD.

לצלע CD יש גובה חיצוני, המאונך לציר ה- x .

CD מקביל לציר ה- x, ולכן $CD = x_D - x_C = 8 - t$.

הגובה מאונך לציר ה- x ,. ולכן $h = 3 - \frac{6}{t} - 0 = 3 - \frac{6}{t}$ $h = \frac{48}{t^2} + 1 - (-2) = \frac{48}{t^2} + 3$.

$$S_{\Delta ACD} = \frac{CD \cdot h}{2}$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{(8-t)\cdot(3-\frac{6}{t})}{2}$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\cdot(24 - \frac{48}{t} - 3t + 6)$$

$$\boxed{S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\cdot(30 - \frac{48}{t} - 3t)}$$

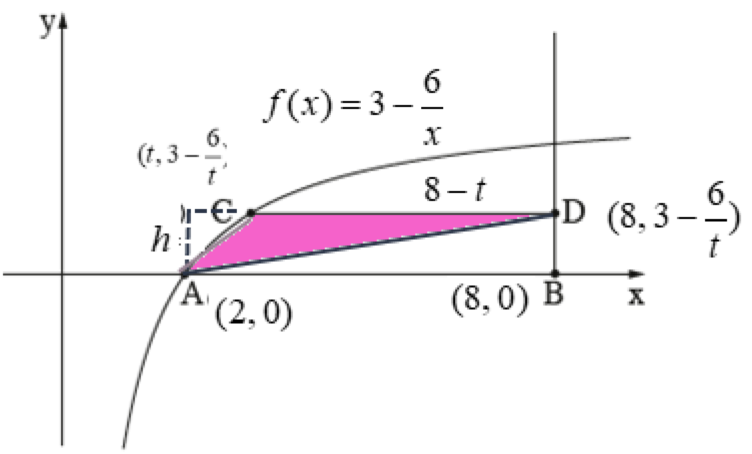
$$S' = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{0 - 48\cdot 1}{t^2} - 3)$$

$$\boxed{S' = \frac{1}{2}\cdot\frac{48 - 3t^2}{t^2}}$$

$$0 = 48 - 3t^2$$

$$t = 4, \cancel{t = -4} \quad \leftarrow 2 < t < 8$$

$$\left.\begin{matrix} s'(3) < 0 \\ s'(5) > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{t = 4, \max}$$



עבור $t = 4$ שיעורי הנקודה C הם $(4, 1.5)$

תשובה: עבור $C(4, 1.5)$, שטח המשולש ACD מקסימלי.

ג. השטח המקסימלי הוא $S(4) = \frac{1}{2}\cdot(30 - \frac{48}{4} - 3\cdot 4) = 3$ או פשוט $S_{\Delta ACD} = \frac{CD\cdot h}{2} = \frac{4\cdot 1.5}{2} = 3$.

מכאן שייתכן ששטח המשולש ACD שווה ל- 1 .

תשובה: ייתכן ששטח המשולש ACD שווה ל- 1 .

נכתב ע"י עפר ילין