פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, מועד ב, שאלון: 35372

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

בגרות פד יולי 24 מועד קיץ ב שאלון 35372

1

א. משוואת האלכסון AC היא $y=-\frac{1}{2}x+15$

הקודקוד A נמצא על האלכסון AC ועל ציר ה- y ולכן $x_A=0$, ו- $\boxed{A(0,15)}$.

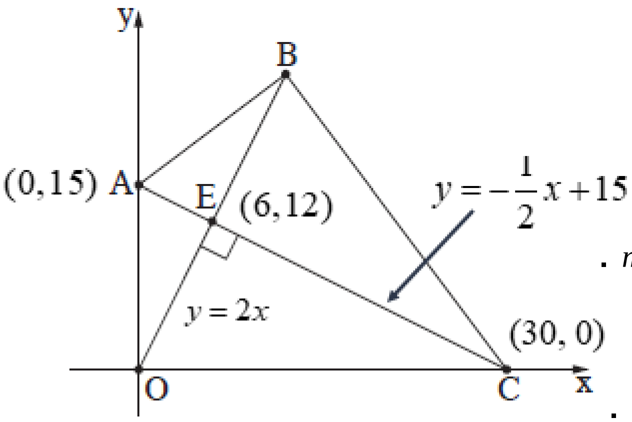
הקודקוד C נמצא על האלכסון AC על ציר ה- x, ולכן $y_C=0$.

$$0=-\frac{1}{2}x+15$$

$$\frac{1}{2}x=15 \quad /:(\frac{1}{2})$$

$$x=30 \quad \rightarrow \boxed{C(30,0)}$$

תשובה: $A(0,15)$, $C(30,0)$.



ב. נתון כי האלכסון AC מאונך לאלכסון OB, כאשר $m_{AC}=-\frac{1}{2}$.

$m_{AC}\cdot m_{OB}=-1\rightarrow m_{OB}=+2$, (שיפוע הופכי לנגדי).

נמצא את משוואת האלכסון OB, על-פי $m_{OB}=2$, ו- $O(0,0)$.

$$y-0=2(x-0)$$

$$\boxed{y=2x} \ .$$

תשובה: משוואת האלכסון OB היא $y=2x$.

ג. הנקודה E היא נקודת החיתוך של שני האלכסונים.

$$E\begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}x+15 \end{cases}$$

$$2x=-\frac{1}{2}x+15$$

$$2\frac{1}{2}x=15 \quad /:(2\frac{1}{2})$$

$$\left.\begin{matrix} x=6 \\ y=2\cdot 6=12 \end{matrix}\right\} \boxed{E(6,12)}$$

תשובה: $E(6,12)$.

נכתב ע"י עפר ילין

ג. הנקודה $E(6,12)$ **היא אמצע האלכסון** OB .

$$y_E = \frac{y_B + y_O}{2} \qquad\qquad x_E = \frac{x_B + x_O}{2}$$

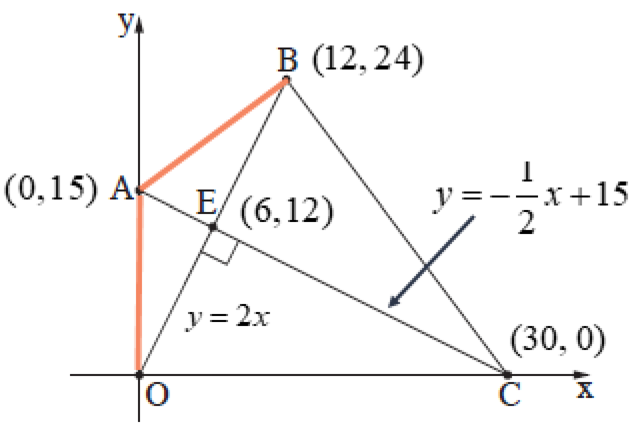
$$12 = \frac{y_B + 0}{2} \quad / \cdot 2 \qquad \text{ולכן } B(12,24) \qquad 6 = \frac{x_B + 0}{2} \quad / \cdot 2$$

$$24 = y_B \qquad\qquad 12 = x_B$$

ניתן גם למצוא את שיעורי הנקודה E **בשיטת הדילוגים, עם הפרשים שווים:** $x = 0, 6, 12$, $y = 0, 12, 24$.

רק לנמק, שההפרשים שווים בין שיעורי הנקודות כי הנקודה $E(6,12)$ **היא אמצע האלכסון** OB .

תשובה: $B(12,24)$.



ה. (1) נוכיח כי המשולש OAB **הוא שווה שוקיים.**

$$\left.\begin{aligned} OA &= y_A - y_O = 15 - 0 = 15 \\ BA &= \sqrt{(12-0)^2 + (24-15)^2} = 15 \end{aligned}\right\} OA = BA$$

תשובה: הוכחנו כי המשולש OAB **הוא שווה שוקיים.**

(2) נחשב את היקף המרובע $OABC$.

$$CO = x_C - x_O = 30 - 0 = 30$$

$$CB = \sqrt{(30-12)^2 + (0-24)^2} = 30$$

$$P_{OABC} = 15 + 15 + 30 + 30$$

$$\boxed{P_{OABC} = 90}$$

תשובה: היקף המרובע $OABC$ **הוא** 90 .

נכתב ע"י עפר ילין

2

במפעל מייצרים אבקות כביסה משני סוגים: אבקת כביסה ביתית ואבקת כביסה תעשייתית.
בטבלה מוצג הזמן הנדרש לכל אחת מן המכונות כדי לייצר טונה אחת של אבקת כביסה,
וגם הרווח של המפעל לכל טונה של אבקה מכל סוג .

א. נסמן ב- x את כמות אבקת הכביסה הביתית (טונות),
וב- y את כמות אבקת הכביסה התעשייתית (טונות).,
נוסיף לטבלה את האילוצים הנובעים ממגבלות השעות.

	זמן ערבוב במכונה א' (לטונה)	זמן אריזה במכונה ב' (לטונה)
x - אבקת כביסה ביתית	6 שעות	5 שעות
y - אבקת כביסה תעשייתית	4 שעות	15 שעות
אילוץ	לכל היותר 33 שעות	לכל היותר 45 שעות

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה,

והן מהעובדה שכמויות האבקות (בטונות) אינם שליליים.
תשובה: מערכת האילוצים של הבעיה היא:

$$\begin{cases} 6x+4y\le 33 \\ 5x+15y\le 45 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}.$$

נכתב ע"י עפר ילין

ב. נסרטט את התחום האפשרי המתאים לבעיה.

כדי לצייר את שני האילוצים הראשונים,

נבנה טבלת ערכים קטנה.

$6x+4y=33$

$x=0 \quad \rightarrow 4y=33 \quad \rightarrow y=8.25$

$y=0 \quad \rightarrow 6x=33 \quad \rightarrow x=5.5$

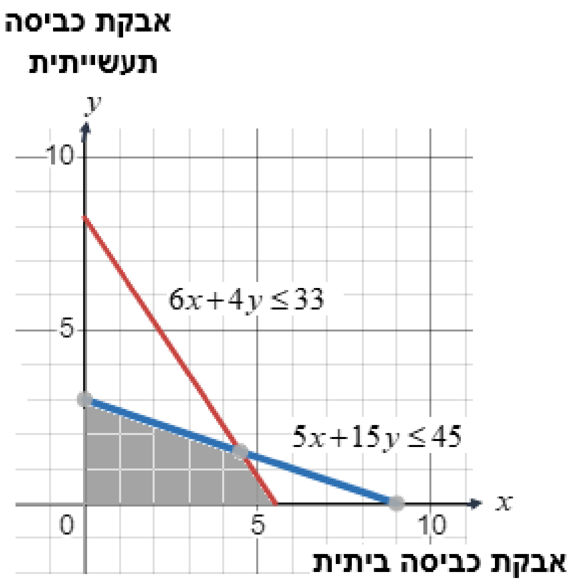
0	8.25
5.5	0

$5x+15y=45$

$x=0 \quad \rightarrow 15y=45 \quad \rightarrow y=3$

$y=0 \quad \rightarrow 5x=45 \quad \rightarrow x=9$

0	3
9	0



נציב $(0,0)$ **באילוץ** $6x+4y\le 33$ **ונקבל** $0\le 33$ **, ולכן** $(0,0)$ **אפשרית, ונצבע מתחת לישר.**

נציב $(0,0)$ **באילוץ** $5x+15y\le 45$ **ונקבל** $0\le 45$ **, ולכן** $(0,0)$ **אפשרית, ונצבע מתחת לישר.**

וכמובן, מדובר ברביע הראשון שבו $x\ge 0$ **, וגם** $y\ge 0$ **.**

תשובה: הסרטוט משמאל.

ג. (1) הרווח של המפעל הוא $8{,}000$ **שקלים לכל טונה של אבקה ביתית,**

ו- $10{,}000$ **שקלים לכל טונה של אבקה תעשייתית.**

תשובה: פונקציית המטרה היא $f(x,y)=8{,}000x+10{,}000y$ **.**

(2) נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה – כמה טונות מכל סוג אבקה יש לייצר כדי להשיג רווח מקסימלי.

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין שני הישרים.

$$\begin{cases} 6x+4y=33 & /\cdot 5 \\ 5x+15y=45 & /\cdot(-6) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 30x+20y=165 \\ -30x-90y=-270 \end{cases}$$

$$-70y=-105 \quad /:(-70)$$

$$y=1.5$$

$$6x+4\cdot 1.5=33$$

$$6x+6=33$$

$$6x=27 \quad /:6$$

$$x=4.5 \quad \rightarrow \boxed{(4.5,1.5)}$$

נכתב ע"י עפר ילין

	$f(x,y)=8{,}000x+10{,}000y$
$(0,0)$	$f(0,0)=8{,}000\cdot 0+10{,}000\cdot 0=0$
$(0,3)$	$f(0,3)=8{,}000\cdot 0+10{,}000\cdot 3=30{,}000$
$(4.5,1.5)$	$f(4.5,1.5)=8{,}000\cdot 4.5+10{,}000\cdot 1.5=51{,}000$
$(5.5,0)$	$f(5.5,0)=8{,}000\cdot 5.5+10{,}000\cdot 0=44{,}000$

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא $51{,}000$ שקלים.

תשובה: למפעל כדאי לייצר 4.5 טון אבקת כביסה ביתית ו- 1.5 טון אבקת כביסה תעשייתית,
במחזור ייצור אחד, כדי להשיג רווח מקסימלי.

ד. במחזור ייצור מסוים הרווח המפעל $50{,}000$ שקלים.

במחזור זה ייצרו במפעל 2 טונות של אבקת כביסה תעשייתית, כלומר $y=2$.

נציב $y=2$ ו- $f(x,y)=50{,}000$ בפונקציית המטרה.

$$50{,}000=8{,}000x+10{,}000\cdot 2$$
$$50{,}000=8{,}000x+20{,}000$$
$$30{,}000=8{,}000x \quad /:8{,}000$$
$$\boxed{3.75=x}$$

תשובה: במפעל ייצרו 3.75 טון של אבקת כביסה ביתית במחזור ייצור זה.

.

נכתב ע"י עפר ילין

מספר העמודים בספרי נוער בספרייה עירונית מסוימת מתפלג נורמלית.

א. מספר העמודים הממוצע בספר הוא $\bar{x}=90$.

מספר העמודים של 7% **מספרי הנוער בספרייה __גדול__ מ-** 108 .

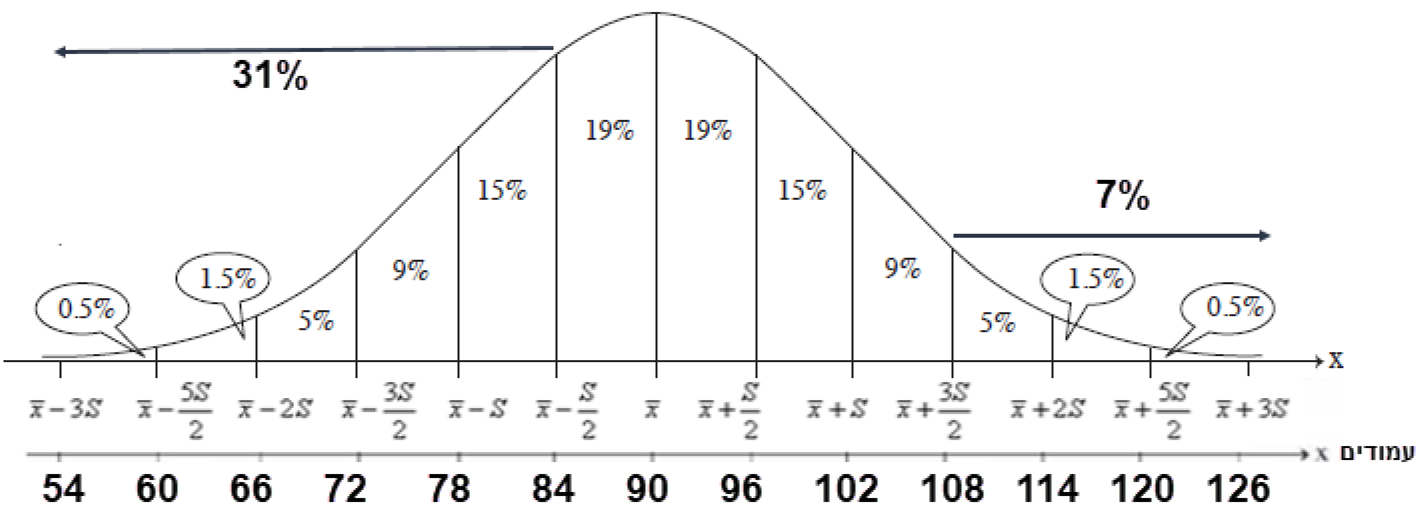
נחשב מימין לשמאל את האחוז המצטבר, עד שנקבל $0.5\%+1.5\%+5\%=7\%$.

לכן, מספר עמודים של 108 **גרם נמצא במרחק של** $\frac{3}{2}$ **סטיות תקן מעל לממוצע שהוא** 90 **עמודים.**

ההפרש במספרי העמודים הוא $108-90=18$**, וסטיית תקן אחת היא** 12 **עמודים** $=18:\frac{3}{2}$.

תשובה: סטיית התקן היא 12 **עמודים.**

ב. נשלים את הנתונים על גרף ההתפלגות הנורמלית, כאשר חצי סטיית תקן הוא 6 **עמודים** $=12:2$.

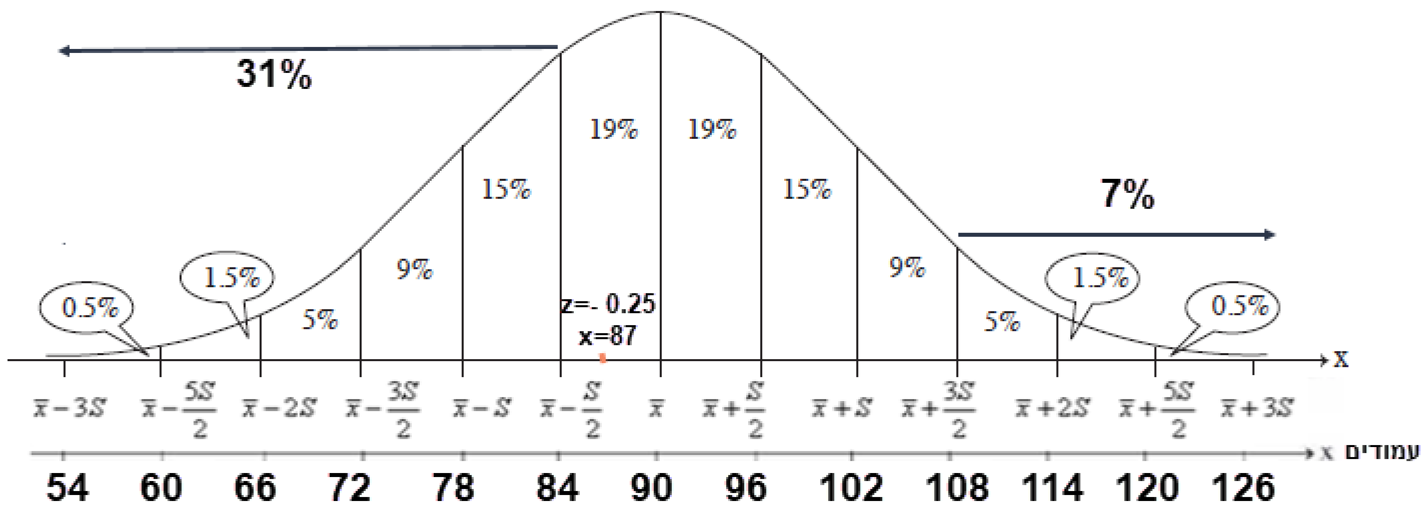


31% **מספרי הנוער, בעלי מספר העמודים __הקטן__ ביותר, מושאלים לשבוע אחד בלבד.**

נחשב מימין לשמאל את האחוז המצטבר, עד שנקבל $0.5\%+1.5\%+5\%+9\%+15\%=31\%$.

תשובה: מספר העמודים הגדול ביותר של ספר נוער שמושאל לשבע אחד בלבד הוא 84 .

נכתב ע"י עפר ילין



ג. (1) נחשב מימין לשמאל את האחוז המצטבר, עד שנגיע ל 66 עמודים: $0.5\%+1.5\%=2\%$.

תשובה: ל- 2% **מספרי הנוער מספר העמודים קטן מ-** 66 .

(2) בספרייה העירונית יש 800 **ספרי נוער סך הכול.**

ל- 2% **מספרי הנוער מספר העמודים שלהם קטן מ-** 66 **, ולכן** $2\%\cdot 800=0.02\cdot 800=16$ **ספרים.**

תשובה: על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, ל- 16 **ספרים מספר העמודים קטן מ-** 66 .

ד. הספרנית הוציאה מן הספרייה ספרים מסוימים.

היא הוציאה רק ספרים שציון התקן של מספר העמודים שלהם קטן מ- $z=-0.25$ **(הסתכלו בגרף ההתפלגות).**

ציון תקן של (-0.25) **אומר שזו הסטייה של הנתון מהממוצע, סטייה קטנה מחצי סטיית תקן.**

מספר העמודים, במרחק של חצי סטיית תקן מתחת לממוצע, הוא 84,

ולכן ייתכן שהספרנית הוציאה ספר שיש בו 85 **עמודים.**

פתרון חלופי: **נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן:** $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$.

$$-0.25=\frac{x-90}{12} \quad /\cdot 12$$
$$-3=x-90$$
$$\boxed{x=87\ pages}$$

הספרנית הוציאה רק ספרים שמספר העמודים שלהם קטן מ- 87 **(מסומן על גרף ההתפלגות הנורמלית),**

אז אפשרי שהוציאה ספר שיש בו 85 **עמודים.**

תשובה: ייתכן שהספרנית הוציאה ספר שיש בו 85 **עמודים.**

נכתב ע"י עפר ילין

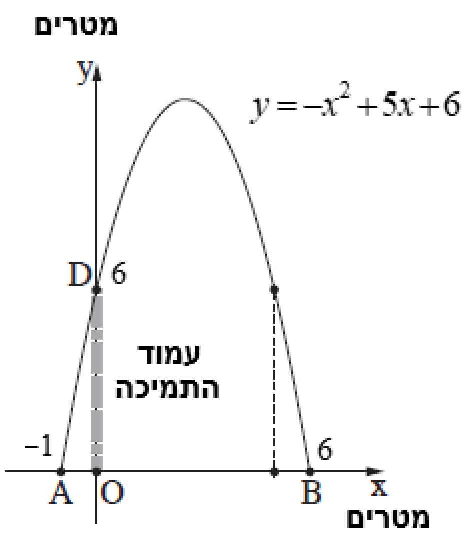
הפונקציה הריבועית $y=-x^2+5x+6$
מתארת את המסלול בצורת פרבולה
שמתחיל בנקודה A **ומסתיים בנקודה** B.
ציר ה- y **מתאר את גובה המסלול (במטרים)**
ציר ה- x **מונח על הקרקע ומתאר את המרחק (במטרים) מעמוד התמיכה** OD .

א. נתונה הפרבולה $y=-x^2+5x+6$.
גובה עמוד התמיכה (OD) **, מסומן בנקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-** y .
בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $x=0$, **נקבל** $y=6$.
תשובה: גובה עמוד התמיכה (OD) **הוא** 6 **מטרים.**

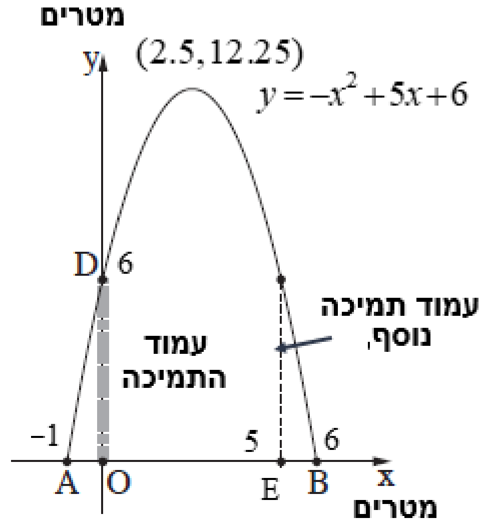
ב. בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y=0$ **מתקיים** $y=0$.

$$0=-x^2+5x+6$$
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-1)\cdot 6=49}}{2\cdot(-1)}$$
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm 7}{-2}$$
$$x_1=\frac{-5+7}{-2}=\frac{2}{-2}=-1 \quad \to x_A=-1$$
$$x_2=\frac{-5-7}{-2}=\frac{-12}{-2}=6 \quad \to x_B=6$$

ואורך הקטע AB **הוא** $AB=x_B-x_A=6-(-1)=7$.
תשובה: אורך הקטע AB **הוא** 7 **מטרים.**



נכתב ע"י עפר ילין



ג. דורון טיפס מן הנקודה A והגיע אל הנקודה B.

(1) שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה בעלת המקסימום $y=-x^2+5x+6$, מתקבל על ידי הנוסחה $x=-\frac{b}{2a}$.

$x=\frac{-5}{2\cdot(-1)}=\frac{-5}{-2}=2.5$.

נציב: $x=2.5$: $y=-2.5^2+5\cdot 2.5+6=12.25$

תשובה: הגובה המקסימלי של המסלול הוא 12.25 מטרים.

(2) תחום <u>הירידה</u> של הפרבולה הוא <u>מימין לקודקוד</u>, <u>ועד</u> לנקודה B .

תשובה: עבור ערכים של $2.5<x<6$ דורון נמצא על המסלול במגמת ירידה.

ד. כדי לחזק את המסלול בנו עמוד תמיכה נוסף, באותו הגובה של עמוד הבטון (OD),

כלומר בגובה של 6 מטרים .

נציב $y=6$ במשוואת הפרבולה.

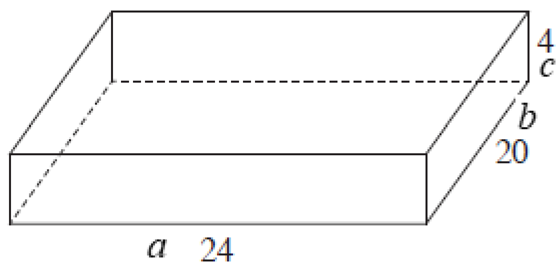
$$6=-x^2+5x+6$$
$$0=-x^2+5x$$
$$0=x(-x+5)$$
$$x=0 \quad \rightarrow x_O=0$$
$$-x+5=0 \quad \rightarrow x=5 \quad \rightarrow x_E=5$$

המרחק בין שני עמודי התמיכה הוא $OE=x_E-x_O=5-0=5$.

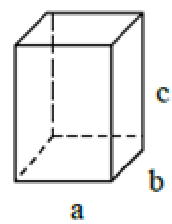
תשובה: המרחק בין שני עמודי התמיכה הוא 5 מטרים.

נכתב ע"י עפר ילין

ליאת אפתה עוגה בתבנית בצורת תיבה.



הנתונים בסרטוט הם בס"מ.

הגוף	סרטוט	שטח מעטפת (M)	שטח פנים (F)	נפח (V)
<u>תיבה</u> שמקצועות הבסיס שלה הן a ו- b והמקצוע הצדדי שלה הוא c		M = סכום שטחי הפאות הצדדיות $M = 2(a\cdot c + b\cdot c)$	$F = M + 2ab$ $F = 2(a\cdot b + b\cdot c + a\cdot c)$	$V = a\cdot b\cdot c$

א. נחשב את נפח התבנית , שצורתה תיבה.

נפח תיבה, שמקצועות הבסיס שלה הם a ו- b, והמקצוע הצדדי הוא c ,

הוא $V = a\cdot b\cdot c$.

נפח התבנית הוא $V = 24\cdot 20\cdot 4 = 1{,}920$ **סמ"ק.**

תשובה: נפח התבנית הוא $1{,}920$ **סמ"ק.**

ב. (1) ליאת הוציאה את העוגה מן התבנית וחתכה אותה לקוביות זהות.

נתון שאורך הצלע של כל קוביה הוא 4 **ס"מ.**

נפח קוביה, שאורך המקצוע שלה הוא a **, הוא** $V = a^3$.

נפח קוביית העוגייה הוא $V = 4^3 = 64$ **סמ"ק.**

מספר הקוביות הוא $1{,}920 : 64 = 30$.

תשובה: ליאת חתכה את העוגה ל- 30 **קוביות.**

נכתב ע"י עפר ילין

(2) ליאת ציפתה בשוקולד את הפאה העליונה ואת ארבע הפאות הצדדיות של כל קוביית שוקולד .

כלומר, היא ציפתה 5 **פאות של** 30 **קוביות, סה"כ ציפתה** 150 **פאות** $= 30 \cdot 5$.

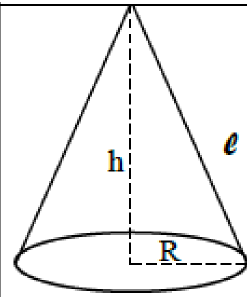
כל פאה של קובייה היא ריבוע, ששטחו 16 **סמ"ר** $= 4^2 = 4 \cdot 4$.

השטח הכולל שציפתה הוא $2{,}400$ **סמ"ר** $= 16 \cdot 150$.

או: ציפוי לכל קוביה הוא 80 **סמ"ר** $= 5 \cdot 16 = 5 \cdot 4^2 = 5 \cdot 4 \cdot 4$.

עבור ציפוי לכל 30 **הקוביות:** $2{,}400$ **סמ"ר** $= 80 \cdot 30$.

תשובה: השטח הכולל שליאת ציפתה בשוקולד הוא $2{,}400$ **סמ"ר.**

<u>חרוט</u> r הוא רדיוס בסיס החרוט ℓ הוא הקו היוצר h הוא גובה החרוט		$M = \pi \cdot R \cdot l$	$F = M + \pi \cdot R^2$	$V = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$

ליאת הכינה מקצפת קישוטים בצורת חרוט,
והניחה קישוט אחד על כל אחת מן הקוביות

ג. (1) היקף הבסיס של כל חרוט הוא 3π **ס"מ והגובה שלו** 2 **ס"מ** $= h$.

היקף מעגל נתון על ידי הנוסחה: $L = 2\pi \cdot R$.

נציב $L = 3\pi$ **ונקבל** $3\pi = 2\pi \cdot R$.

אם נחלק ב- 2π **נקבל ש-** 1.5 **ס"מ** $= R$.

תשובה: אורך הרדיוס של בסיס החרוט הוא 1.5 **ס"מ.**

(2) נפח חרוט, ששטח הבסיס שלו הוא S **וגובהו הוא** h**, הוא** $V = \dfrac{S \cdot h}{3}$.

שטח הבסיס שצורתו עיגול הוא: 2.25π **סמ"ר** $= S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 1.5^2$

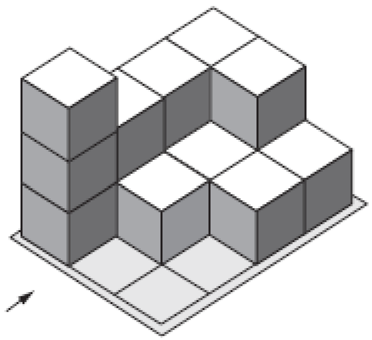
נפח קישוט אחד, בצורת חרוט, הוא $1.5\pi \approx 4.712$ **סמ"ק** $= V = \dfrac{2.25\pi \cdot 2}{3}$.

עבור קישוטים לכל 30 **הקוביות, נדרש** $45\pi \approx 141.37$ **סמ"ק** $= V = 1.5\pi \cdot 30$.

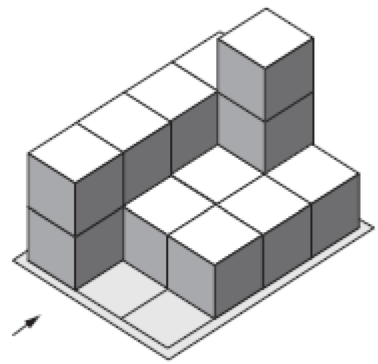
תשובה: הנפח של הקצפת הדרוש להכנת כל החרוטים הוא $45\pi \approx 141.37$ **סמ"ק.**

נכתב ע"י עפר ילין

בסרטוט שלפניכם מתוארים שני מבנים הבנויים מקוביות זהות.
החץ בסרטוט מסמן את המבט מלפנים.
נשים לב שבשני המבנים יש ארבע שורות ושלושה טורים.



מבנה ב'



מבנה א'

א. (1) נביט על המבנה השמאלי, מבנה ב'.

נראה שבשורה הרביעית יש מימין לשמאל, קוביה אחת, 2 קוביות, 2 קוביות מתאים לתרשים החלקי.

בתרשים הימני (מבנה א') יש 3 קוביות בטור האמצעי שבשורה הרביעית, ולכן הוא אינו מתאים.

תשובה: תרשים המספרים מתאים למבנה ב'.

(2) נשלים את תרשים המספרים, בעבור מבנה ב', שקבענו בתת-סעיף א(1).

בשורה השלישית, מימין לשמאל: קוביה אחת, קוביה אחת, 2 קוביות.

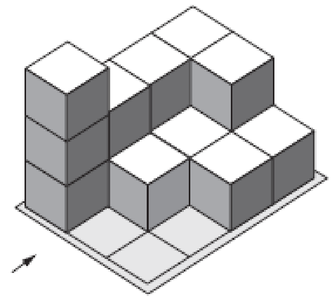
בשורה השנייה, מימין לשמאל: אין קוביות, קוביה אחת, 2 קוביות.

בשורה הראשונה, מימין לשמאל: אין קוביות, אין קוביות, 3 קוביות.

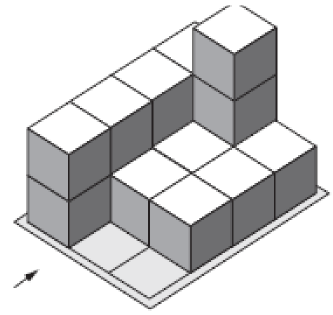
2	2	1
2	1	1
2	1	0
3	0	0

תשובה: תרשים המספרים של מבנה ב', מעל.

נכתב ע"י עפר ילין



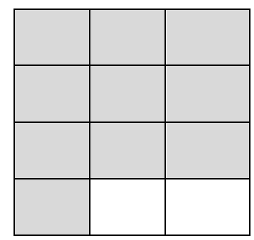
מבנה ב'



מבנה א'

ב. נביט על המבנה מימין, מבנה א'.

נראה שיש קוביות בכל המשבצות, למעט בשתי המשבצות מימין בשורה הראשונה .



תשובה: התרשים של המבט מלמעלה של מבנה א', מעל.

ג. נספור את הקוביות בשני המבנים, או לפי המבט לפנים, או לפי תרשים המספרים המתאים.

מבנה א': $1+3+2+1+1+2+1+1+2+0+0+2=16$.

מבנה ב': $1+2+2+1+1+2+0+1+2+0+0+3=15$.

ומספר הקוביות במבנה א' גדול ב- $16-15=1$

תשובה: מספר הקוביות במבנה א' גדול באחת ממספר הקוביות במבנה ב'.

ד. נקבע עבור על אחד מן היגדים $1-2$ **אם הוא נכון או לא נכון.**

1. המבט מלמעלה של מבנה א' <u>זהה</u> למבט מלמעלה של מבנה ב'.

נביט על המבנה משמאל, מבנה א'.

נראה שאין קוביות במשבצת הימנית בשורה השנייה, בניגוד למבנה א' .

תשובה: ההיגד אינו נכון.

2. המבט מימין של מבנה א' <u>שונה</u> מן המבט משמאל של מבנה ב'.

עבור מבנה א' מימין רואים גובה של: 3 **קוביות,** 2 **קוביות,** 2 **קוביות,** 2 **קוביות.**

עבור מבנה ב' משמאל רואים גובה של: 3 **קוביות,** 2 **קוביות,** 2 **קוביות,** 2 **קוביות.**

ולכן המבטים דווקא זהים !

תשובה: ההיגד אינו נכון.

נכתב ע"י עפר ילין