

הנגזרת של מנת שתי פונקציות

נלמד עכשיו למצוא נגזרות של פונקציות רציונליות.

בכיתה י' למדנו במסגרת חשבון דיפרנציאלי לגזור פונקציות פולינום.
נזכיר את נוסחאות הגזירה העיקריות שנלמדו:

$$(1) \text{ הנגזרת של פונקציית חזקה: } (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(2) \text{ הנגזרת של סכום והפרש שתי פונקציות: } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(3) \text{ הנגזרת של פונקציה המוכפלת במספר קבוע: } (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(4) \text{ הנגזרת של פונקציה המחולקת במספר קבוע: } \left(\frac{f(x)}{k}\right)' = \frac{f'(x)}{k}$$

$$(5) \text{ הנגזרת של פונקציה מורכבת: } [(f(x))^n]' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$(6) \text{ הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות: } (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

כעת נציג נוסחה לנגזרת של פונקציות רציונליות.

כאשר נתונה פונקציית מנה $\frac{f(x)}{g(x)}$, ניתן למצוא את הנגזרת שלה לפי הנוסחה הבאה:

$$(g(x) \neq 0) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

במילים: הנגזרת של מנת שתי פונקציות שווה לנגזרת הפונקציה שבמונה כפול הפונקציה שבמכנה, פחות נגזרת הפונקציה שבמכנה כפול הפונקציה שבמונה ומחלקים את ההפרש המתקבל בריבוע הפונקציה שבמכנה.

נוסחה זו נקראת **הנוסחה לנגזרת של מנת שתי פונקציות** ובעזרתה ניתן למצוא נגזרת של כל פונקציה רציונלית גזירה. הנוסחה ניתנת להוכחה, אבל לא נוכיח אותה מאחר שהיא מבוססת על תכנים מתמטיים שאינם נמצאים בתכנית הלימודים של 4 יח"ל.

דוגמה:

$$\text{מצאו את הנגזרת של הפונקציה } y = \frac{5x-3}{2x-7}$$

פתרון:

$$\text{המונה הוא } f(x) = 5x - 3 \text{ ונגזרתו היא } f'(x) = 5$$

$$\text{המכנה הוא } g(x) = 2x - 7 \text{ ונגזרתו היא } g'(x) = 2$$

$$\text{נציב בנוסחה לנגזרת של מנת פונקציות. נקבל: } y' = \frac{5(2x-7) - 2(5x-3)}{(2x-7)^2}$$

$$\text{במונה נפתח סוגריים ונכנס איברים דומים. נקבל: } y' = \frac{10x - 35 - 10x + 6}{(2x-7)^2} = \frac{-29}{(2x-7)^2}$$

הערות:

- (1) לאחר שגוזרים לפי הנוסחה לנגזרת של מנת שתי פונקציות, בדרך כלל כדאי לפתוח סוגריים ולכנס איברים דומים **רק** במונה (כפי שעשינו בדוגמה).
(2) לרוב נקרא לנוסחת נגזרת זו בקיצור "נגזרת של מנה".
(3) הנוסחה מופיעה בדף הנוסחאות בבחינת הבגרות.

דוגמה:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - x + 1} \text{ של הפונקציה}$$

פתרון:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ ונגזרתו היא } f'(x) = 2x - 4.$$

$$g(x) = x^2 - x + 1 \text{ ונגזרתו היא } g'(x) = 2x - 1.$$

$$y' = \frac{(2x-4)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2-4x+5)}{(x^2-x+1)^2} \text{ נציב בנוסחה לנגזרת מנת שתי פונקציות:}$$

$$y' = \frac{3x^2 - 8x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} \text{ במונה נפתח סוגריים ונכנס איברים דומים. נקבל:}$$

הערות:

- (1) כאשר נתונה פונקציה שבמכנה שלה יש מספר קבוע לא מומלץ לגזור אותה לפי הנוסחה לנגזרת של מנת שתי פונקציות.

$$\left(\frac{f(x)}{a}\right)' = \frac{f'(x)}{a} \text{ פונקציה כזו מומלץ לגזור לפי הנוסחה:}$$

$$y = \frac{2x^3 - 7x}{5} \text{ היא } y' = \frac{6x^2 - 7}{5} \text{ לדוגמה: הנגזרת של הפונקציה}$$

- (2) נגזור את הפונקציה $y = \frac{a}{x}$ בעזרת הנוסחה לנגזרת של מנת שתי פונקציות.

$$y' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot a}{x^2} = -\frac{a}{x^2} \text{ נקבל: } \left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2} \text{ מתקבלת הנוסחה הבאה:}$$

- לדוגמה: את הפונקציה $y = \frac{8}{x}$ אפשר לגזור על פי הנוסחה לנגזרת של מנה.

$$y' = -\frac{8}{x^2} \text{ אבל אפשר גם לקצר ולרשום ישירות.}$$

- (3) נגזור את הפונקציה $y = \frac{a}{f(x)}$ בעזרת הנוסחה לנגזרת מנת שתי פונקציות.

$$y' = \frac{0 \cdot f(x) - f'(x) \cdot a}{[f(x)]^2} = \frac{-a \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} \text{ נקבל:}$$

$$\left(\frac{a}{f(x)}\right)' = \frac{-a \cdot f'(x)}{(f(x))^2} \text{ מתקבלת הנוסחה:}$$

לדוגמה:

$$y = \frac{6}{2x+1} \text{ היא } y' = -\frac{6 \cdot 2}{(2x+1)^2} \text{ , כלומר } y' = -\frac{12}{(2x+1)^2} .$$

אם נגזור את הפונקציה $y = \frac{6}{2x+1}$ על פי הנוסחה לנגזרת מנה, נקבל אותה תוצאה.

$$(4) \text{ פונקציות מהצורה } y = \frac{a}{x^n} \text{ או } y = \frac{a}{f(x)} \text{ אפשר לגזור על פי הנוסחה לנגזרת של מנת}$$

שתי פונקציות. המונה במקרה זה הוא קבוע ונגזרתו היא אפס.

דוגמה:

$$y = \frac{5}{x^2} \text{ גזרו את הפונקציה .}$$

פתרון:

נגזור על פי הנוסחה לנגזרת של מנת שתי פונקציות.

$$y' = \frac{0 \cdot x^2 - 2x \cdot 5}{(x^2)^2} = \frac{-10x}{x^4} = -\frac{10}{x^3} \text{ : נקבל .}$$

$$(5) \text{ פונקציות מהצורה } y = \frac{a}{(f(x))^n} \text{ אפשר לגזור על פי הנוסחה לנגזרת מנת שתי פונקציות.}$$

את המכנה אפשר לגזור על פי הנוסחה לנגזרת של פונקציה מורכבת:

$$\left[(f(x))^n \right]' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

עם זאת, מכיוון שהמכנה הוא לכל היותר ממעלה שנייה, אפשר גם לפתוח סוגריים במכנה לפני שגוזרים את הפונקציה.

דוגמה:

$$y = \frac{8}{(3x-4)^2} \text{ גזרו את הפונקציה .}$$

פתרון:

דרך א': המונה הוא $f(x) = 8$ ונגזרתו היא $f'(x) = 0$. המכנה הוא $g(x) = (3x-4)^2$ נגזור אותו על פי הנוסחה לנגזרת של פונקציה מורכבת: $g'(x) = 2(3x-4)^1 \cdot 3 = 6(3x-4)$.

$$y' = \frac{0(3x-4)^2 - 6(3x-4) \cdot 8}{((3x-4)^2)^2} = \frac{-48(3x-4)}{(3x-4)^4} \text{ : נציב בנוסחה לנגזרת מנה ונקבל .}$$

$$y' = -\frac{48}{(3x-4)^3} \text{ : אפשר לצמצם } (3x-4) \text{ ולקבל .}$$

הערה: בחלק מהמקרים נעדיף לא לצמצם, אלא להשאיר במכנה חזקה עם מעריך זוגי, כדי שהמכנה יהיה חיובי בכל תחום ההגדרה.

$$\text{דרך ב': נפתח סוגריים במכנה ונקבל את הפונקציה: } y = \frac{8}{9x^2 - 24x + 16}$$

$$\text{נגזור כמנת שתי פונקציות: } y' = \frac{0(9x^2 - 24x + 16) - (18x - 24) \cdot 8}{(9x^2 - 24x + 16)^2} = \frac{-144x + 192}{(9x^2 - 24x + 16)^2}$$

תרגילים

גזרו את הפונקציות הבאות :

1. $y = \frac{2x}{x+4}$
2. $y = \frac{5x-3}{2x+7}$
3. $y = \frac{2x+3}{x}$
4. $y = \frac{3x-1}{6-x}$
5. $y = \frac{x^2}{x+2}$
6. $y = \frac{x^2+x+16}{x}$
7. $y = \frac{5}{x}$
8. $y = \frac{6}{4x-3}$
9. $y = \frac{9}{x^2}$
10. $y = \frac{6x}{x^2+1}$
11. $y = \frac{7x-3}{x^2+3x+6}$
12. $y = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$
13. $y = \frac{x^2-x+1}{x^2-x-1}$
14. $y = \frac{3x^2-7x+8}{2x^2+6x-7}$
15. $y = 3 + \frac{2x+1}{x-2}$
16. $y = 2x + \frac{11}{x^2}$
17. $y = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$
18. $y = 8 - \frac{x^2}{x-6}$
19. $y = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5}$
20. $y = \frac{5}{(x-8)^2}$
21. $y = \frac{2}{(3x+1)^2}$
22. $y = \frac{(x-2)^2}{x}$
23. $y = \frac{x+1}{(4x-3)^2}$
24. $y = \left(\frac{x-7}{x-3}\right)^2$

25. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2}{x+1}$.

א. מצאו את הנגזרת של הפונקציה.

ב. חשבו את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x = 3$.

ג. קבעו הפונקציה הנתונה עולה או יורדת בנקודה $x = 3$.

26. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-7}{x-3}$. חשבו את: א. $f'(5)$ ב. $f'(2)$ ג. $f'(0)$

27. נתונה הפונקציה $y = \frac{x+3}{x-1}$. מצאו את שיעור ה- x בנקודות שבהן ערך הנגזרת הוא -1 .

28. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

מצאו את שיעורי הנקודות על גרף הפונקציה שבהן מתקיים: $f'(x) = -3$.

תשובות:

- .1 $\frac{8}{(x+4)^2}$.2 $\frac{41}{(2x+7)^2}$.3 $-\frac{3}{x^2}$.4 $\frac{17}{(6-x)^2}$.5 $\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$.6 $\frac{x^2-16}{x^2}$.7 $-\frac{5}{x^2}$
- .8 $\frac{-24}{(4x-3)^2}$.9 $\frac{-18}{x^4} = \frac{-18}{x^3}$.10 $\frac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$.11 $\frac{-7x^2+6x+51}{(x^2+3x+6)^2}$.12 $\frac{-2x+3}{(x^2-3x+2)^2}$
- .13 $\frac{-4x+2}{(x^2-x-1)^2}$.14 $\frac{32x^2-74x+1}{(2x^2+6x-7)^2}$.15 $\frac{-5}{(x-2)^2}$.16 $\frac{2x^4-22x}{x^4}$ או $2-\frac{22}{x^3}$
- .17 $-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{3} = \frac{-9+x^2}{3x^2}$.18 $\frac{-x^2+12x}{(x-6)^2}$.19 $\frac{-1}{(x+5)^2} - \frac{1}{(x-5)^2} = \frac{-2x^2-50}{(x+5)^2(x-5)^2}$
- .20 $\frac{-10(x-8)}{(x-8)^4} = \frac{-10}{(x-8)^3}$.21 $\frac{-12(3x+1)}{(3x+1)^4} = \frac{-12}{(3x+1)^3}$.22 $\frac{(x-2)(x+2)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$
- .23 $\frac{(4x-3)(-4x-11)}{(4x-3)^4} = \frac{(-4x-11)}{(4x-3)^3}$.24 $\frac{8(x-3)(x-7)}{(x-3)^4} = \frac{8(x-7)}{(x-3)^3}$ או $\frac{8x^2-80x+168}{(x-3)^4}$
- .25 א. $y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ ב. $\frac{15}{16}$ ג. עולה. .26 א. 1 ב. 4 ג. $\frac{4}{9}$.27 $x = -1, x = 3$
- .28 $(3; 9), (1; -1)$

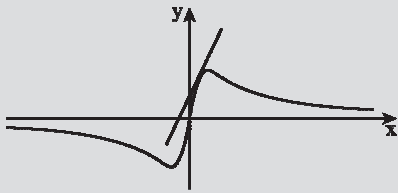
משיק – פונקציות רציונליות

למדנו ששיפוע משיק לגרף של פונקציה שווה לערך של נגזרת הפונקציה באותה נקודה.

הכרנו שני שימושים עיקריים הקשורים בשיפוע המשיק:
 שימוש א' – מציאת שיפוע משיק על פי שיעורי נקודת ההשקה.
 שימוש ב' – מציאת שיעורי נקודת ההשקה על פי שיפוע המשיק.

כמו כן, למדנו שאם נדע את שיפוע המשיק m ואת שיעורי נקודת ההשקה $(x_1; y_1)$,
 נוכל למצוא את **משוואת המשיק** על ידי הצבה בנוסחה $y - y_1 = m(x - x_1)$.
 הערה: אפשר גם להציב במשוואה $y = mx + b$.
 נראה עכשיו שימושים אלה עבור פונקציות רציונליות.

דוגמה:



לפניכם גרף הפונקציה $y = \frac{16x}{x^2 + 3}$.

לפונקציה מעבירים משיק בנקודה $(1; 4)$ שעל הגרף.

א. חשבו את שיפוע המשיק.

ב. מצאו את משוואת המשיק.

פתרון:

א. נגזור את הפונקציה על-פי הנוסחה לנגזרת של מנת שתי פונקציות.

המונה הוא $f(x) = 16x$ ונגזרתו היא $f'(x) = 16$.

המכנה הוא $g(x) = x^2 + 3$ ונגזרתו היא $g'(x) = 2x$.

$$\text{נקבל: } y' = \frac{16(x^2 + 3) - 2x \cdot 16x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{16x^2 + 48 - 32x^2}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-16x^2 + 48}{(x^2 + 3)^2}$$

כדי למצוא את שיפוע המשיק בנקודה $(1; 4)$ נציב $x = 1$ בנגזרת.

$$\text{נקבל: } y'_{(x=1)} = \frac{-16 \cdot 1^2 + 48}{(1^2 + 3)^2} = \frac{32}{4^2} = 2$$

שיפוע המשיק הוא 2.

הערה: אפשר היה להציב $x = 1$ בנגזרת מבלי לפתוח סוגריים ולכנס איברים דומים.

ב. הנוסחה למציאת משוואת משיק ישיר היא $y - y_1 = m(x - x_1)$.

נמצא את משוואת המשיק על-פי הנקודה $(1; 4)$ והשיפוע 2. נקבל: $y - 4 = 2(x - 1)$.

לאחר פתיחת סוגריים נקבל $y - 4 = 2x - 2$, ומכאן $y = 2x + 2$, וזו משוואת המשיק.

דוגמה:

מצאו שיעורי שתי נקודות על גרף הפונקציה $y = \frac{2x - 11}{x - 6}$, שבהן שיפוע המשיק לגרף הוא -0.25 .

פתרון:

נגזור את הפונקציה על-פי הנוסחה לנגזרת של מנת שתי פונקציות.

$$\text{נקבל: } y' = \frac{2(x - 6) - 1(2x - 11)}{(x - 6)^2} = \frac{2x - 12 - 2x + 11}{(x - 6)^2} = \frac{-1}{(x - 6)^2}$$

על פי הנתון שיפוע המשיק בנקודות הנ"ל הוא -0.25 , ולכן הנגזרת של הפונקציה בנקודות אלה שווה גם היא ל- -0.25 . נשווה את הנגזרת ל- -0.25 .

נקבל: $-\frac{1}{(x-6)^2} = -0.25$. נכפול במכנה המשותף ונקבל $-1 = -0.25(x-6)^2$.

נפתח סוגריים, נכנס איברים דומים ונקבל: $0.25x^2 - 3x + 8 = 0$

פתרונות המשוואה הריבועית הם: $x_1 = 8$ $x_2 = 4$

נציב בפונקציה $y = \frac{2x-11}{x-6}$. $y_1 = \frac{2 \cdot 8 - 11}{8 - 6} = 2.5$ $y_2 = \frac{2 \cdot 4 - 11}{4 - 6} = 1.5$

$(8; 2.5)$ $(4; 1.5)$

לסיכום, שיעורי נקודות ההשקה הם $(8; 2.5)$ ו- $(4; 1.5)$.

תרגילים

1. א. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{2x+1}{x-3}$ בנקודה שבה $x = 1$.

ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2}{x+8}$ בנקודה שבה $x = -4$.

ג. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x+1}{x^2-4x}$ בנקודה שבה $x = 2$.

ד. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{6}{x^2+1} - 2$ בנקודה שבה $x = -1$.

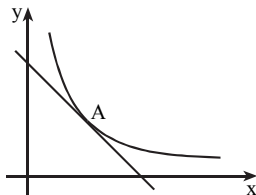
2. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ בתחום $x > 0$.

מעבירים לפונקציה משיק

בנקודה $A(1;1)$ שעל הגרף.

א. חשבו את שיפוע המשיק.

ב. מצאו את משוואת המשיק.



3. לגרף הפונקציה $y = \frac{4x-1}{x^2-x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x = -2$.

א. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

ב. חשבו את שיפוע המשיק.

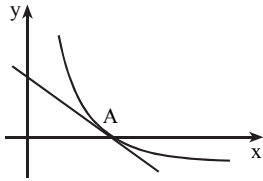
ג. מצאו את משוואת המשיק.

4. נתונה הפונקציה $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.


ב. חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ בנקודה שבה $x = 4$.

ג. מצאו את משוואת המשיק שבסעיף א'.



5. לפניכם גרף הפונקציה $y = \frac{6-2x}{x}$ בתחום $x > 0$.

- הגרף חותך את ציר ה- x בנקודה A (ראו ציור).
 א. מצאו את שיעורי הנקודה A.
 ב. בנקודה A מעבירים משיק לגרף הפונקציה. מצאו את משוואת המשיק.

6.  לגרף הפונקציה $y = \frac{x+6}{x-1}$ מעבירים משיק בנקודה על הגרף שבה שיעור ה- y הוא 2.

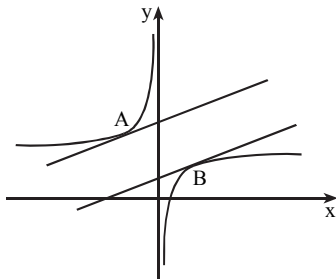
- א. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.
 ב. מצאו את משוואת המשיק.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3-x}{2x-1} + 1$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{3-x}{2x-1} + 1$ בנקודה שבה $x = 1$.
 ג. האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה שבה $x = 1$?

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x-9}$.

- א. מצאו את ערכי ה- x שעבורם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא -2.
 ב. מצאו את שיעורי הנקודות שעל גרף הפונקציה, שבהן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא -2.



9. בציור מתואר גרף הפונקציה $y = \frac{2x-1}{x}$.

- העבירו שני משיקים לפונקציה בנקודה A ובנקודה B (A משמאל ל-B, ראו ציור). שיפוע כל אחד מהמשיקים הוא $\frac{1}{4}$.
 א. מצאו את שיעורי נקודות ההשקה.
 ב. מצאו את משוואות המשיקים.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

- מצאו באילו נקודות שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא $\frac{3}{4}$.

11. נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{9-2x}{x-5}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצאו שיעורי שתי נקודות על גרף הפונקציה שבהן המשיק לגרף מקביל לישר $y = \frac{1}{4}x + 10$.

12. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2 - 7}{2x + 5}$.

מצאו את שיעורי הנקודות שבהן המשיקים לגרף הפונקציה מאונכים לישר $y = -\frac{1}{2}x + 27$.

13. לגרף הפונקציה $y = -x - \frac{1}{x+2}$ מעבירים משיק שמקביל לישר $3x + 4y - 12 = 0$.

א. מהו שיפוע המשיק?

ב. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה. כתבו את שתי האפשרויות.

14. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$.

א. מצאו את שיעורי הנקודות שבהן המשיקים

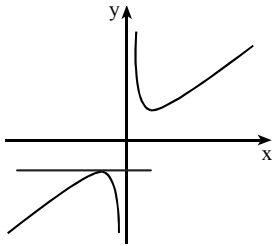
לגרף הפונקציה מקבילים לציר ה- x .

ב. אחת מהנקודות שמצאתם בסעיף א'

נמצאת ברביע השלישי, ראו ציור.

מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו.

ג. מהו המרחק של המשיק שמצאתם בסעיף ב' מציר ה- x ?



15. לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ מעבירים משיק בנקודה $x = 2$.

א. חשבו את שיפוע המשיק. ב. מצאו את משוואת המשיק.

16. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{16 - x^2}{x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. לגרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו -4 . מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

הפונקציה $h(x) = f(x) + 3$ מקיימת

ג. מעבירים לפונקציה $h(x)$ משיק ששיפועו -4 . מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

17. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו על גרף הפונקציה את שיעורי הנקודות שבהן המשיקים מאונכים לציר ה- y .

ג. מצאו את משוואות המשיקים מסעיף א'.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x - 7)$. מצאו על גרף הפונקציה את שיעורי הנקודות

שבהן המשיקים מאונכים לציר ה- y . אין צורך בנגזרת.

18. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x - 5}{x - 2}$.

א. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = -f(x)$. מעבירים לפונקציה $g(x)$ משיק בנקודה שבה $x = 1$.

חשבו את שיפוע המשיק. אין צורך בנגזרת.

19. לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x+2}{2x-5}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x = 4$.

- א. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה. (2) חשבו את שיפוע המשיק.
 ב. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = 2 \cdot f(x)$.
 מעבירים לפונקציה $h(x)$ משיק בנקודה שבה $x = 4$.
 (1) מצאו את שיעורי נקודת ההשקה. אין צורך להציב בפונקציה.
 (2) חשבו את שיפוע המשיק.

20. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

- א. הוכיחו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
 ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$.
 ג. היעזרו רק בסעיפים א' ו-ב' ומצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = -1$.

21. א. גזרו את הפונקציה $y = \frac{x-3}{x-5}$.

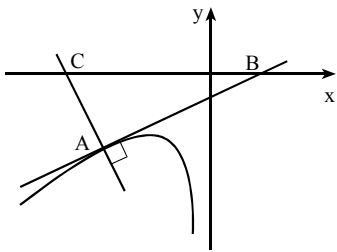
א. האם נכונה הטענה, שכל המשיקים לגרף הפונקציה הם בעלי שיפוע שלילי?

22. נתונה הפונקציה $y = \frac{4}{(3-2x)^2}$.

א. הראו שנגזרת הפונקציה היא $y' = \frac{16}{(3-2x)^3}$.

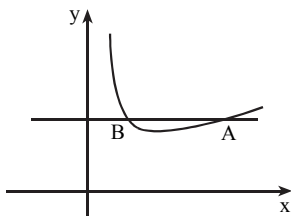
ב. מעבירים לפונקציה משיק ששיפועו 2. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

23. בציור מתואר גרף הפונקציה $y = x + \frac{1}{x+1}$ בתחום $x < -1$ ועליו הנקודה $A(-3; -3\frac{1}{2})$.



- בנקודה A מעבירים לגרף משיק החותך את ציר ה- x בנקודה B, וישר המאונך למשיק החותך את ציר ה- x בנקודה C (ראו ציור).
 א. מצאו את משוואת המשיק.
 ב. מצאו את משוואת הישר המאונך AC.
 ג. מצאו את שיעורי הנקודות B ו-C.
 ד. חשבו את שטח המשולש ABC.

24. הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה $y = 2x + \frac{1}{x}$ בנקודות A ו-B.



- מעבירים לגרף הפונקציה משיקים בנקודות אלה. המשיקים נפגשים בנקודה P.
 א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.
 ב. מצאו את משוואת המשיקים.
 ג. מצאו את שיעורי הנקודה P.

25 ★ נתונים הישר $y = -x + 6$ והפונקציה $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

- א. מצאו לאילו ערכים של x יש לישר ולפונקציה אותו שיפוע.
 ב. הציבו בפונקציה $f(x)$ ובמשוואת הישר הנתון את כל אחד מערכי ה- x שקיבלתם בסעיף א', וקבעו באיזו נקודה הישר הנתון משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

26 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{12}{x^2}$.

- הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של פונקציה אחרת $g(x)$, כלומר $g'(x) = f(x)$.
 לפונקציה $g(x)$ מעבירים משיק בנקודה $(2; -6)$.
 א. חשבו את שיפוע המשיק.
 ב. מצאו את משוואת המשיק.

27 נתונה פונקציה $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(2-x)^2}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$, ומקיימת $g'(x) = f(x)$.
 לפונקציה $g(x)$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x = 4$.
 (1) חשבו את שיפוע המשיק. (2) נתון: $g(4) = 1$. מצאו את משוואת המשיק הנ"ל.

תשובות:

1. א. $-\frac{7}{4}$. ב. -3 . ג. $-\frac{1}{4}$. ד. 3 . 2. א. -1 . ב. $y = -x + 2$.
3. א. $(-2; -1\frac{1}{2})$. ב. $-\frac{7}{12}$. ג. $y = -\frac{7}{12}x - 2\frac{2}{3}$. 4. א. $x \neq 0$. ב. 0 . ג. $y = 2$.
5. א. $(3; 0)$. ב. $y = -\frac{2}{3}x + 2$. 6. א. $(8; 2)$. ב. $y = -\frac{1}{7}x + 3\frac{1}{7}$. 7. א. $x \neq \frac{1}{2}$. ב. -5 . ג. יורדת.
8. א. $x = 7, x = 11$. ב. $(7; -3), (11; 5)$. 9. א. $A(-2; 2.5), B(2; 1.5)$. ב. $y = \frac{1}{4}x + 1, y = \frac{1}{4}x + 3$.
10. $(1; 1.5), (-3; -3.5)$. 11. א. $x \neq 5$. ב. $(7; -2.5), (3; -1.5)$. 12. $(-3; -2), (-2; -3)$.
13. א. $-\frac{3}{4}$. ב. $(0; -0.5), (-4; 4.5)$. 14. א. $(\frac{1}{2}; 4), (-\frac{1}{2}; -4)$. ב. $y = -4$. ג. 4 .
15. א. $\frac{3}{4}$. ב. $y = \frac{3}{4}x + 3$. 16. א. $x \neq 0$. ב. $(2; 3)$. ג. $(2; 6)$.
17. א. כל x . ב. $(2; \frac{1}{2}), (-1; -1)$. ג. $y = -1, y = \frac{1}{2}$. ד. $(9; \frac{1}{2}), (6; -1)$. 18. א. 3 . ב. -3 .
19. א. $(1; 4; 2), (2; -1)$. ב. $(1; 4; 4), (2; -1)$. 20. א. $\frac{1}{2}$. ב. $\frac{1}{2}$. ג. $-\frac{1}{2}$. 21. א. $y' = \frac{-2}{(x-5)^2}$. ב. כן.
22. א. $(\frac{1}{2}; 1)$. 23. א. $y = \frac{3}{4}x - 1\frac{1}{4}$. ב. $y = -1\frac{1}{3}x - 7\frac{1}{2}$. ג. $(1\frac{2}{3}; 0), (-5\frac{5}{8}; 0)$. ד. $\frac{73}{96}$.
24. א. $(1; 3), (\frac{1}{2}; 3)$. ב. $y = x + 2, y = -2x + 4$. ג. $(\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3})$. 25. א. $x = -1, x = 3$. ב. $(3; 3)$.
26. א. 3 . ב. $y = 3x - 12$. 27. א. $x \neq 2$. ב. $(1; -\frac{3}{4})$. ג. $y = -\frac{3}{4}x + 4$.

משיק – שאלות עם פרמטרים

דוגמה:

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+m}{x-2}$ בנקודה שבה $x=1$ הוא 3. מצאו את ערך הפרמטר m .

פתרון:

נגזור את הפונקציה. נקבל: $f'(x) = \frac{2x(x-2) - 1(x^2+m)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-m}{(x-2)^2}$

השיפוע בנקודה $x=1$ הוא 3 ולכן נציב בנגזרת $x=1$ ונשווה את הנגזרת ל-3. נקבל: $\frac{1^2-4\cdot 1-m}{(1-2)^2} = 3$, כלומר $\frac{-3-m}{1} = 3$. נקבל $-3-m=3$, ומכאן $m=-6$.

28. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{x-3}$ בנקודה שבה $x=2$ הוא 4.

א. מצאו את הערך של a .

ב. הציבו $a=-7$ ומצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

29. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2-kx}{x-3}$, k הוא פרמטר.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=4$ הוא -2.

א. מצאו את הערך של k ואת שיעורי נקודת ההשקה.

ב. הציבו את הערך של k שמצאתם בסעיף א' ומצאו את משוואת המשיק.

30. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{9-2x}{x+a}$ בנקודה שבה $x=3$ הוא $\frac{1}{4}$.

א. מצאו את שני הערכים של a .

ב. עבור הערך הקטן של a , מבין שתי האפשרויות שמצאתם:

(1) מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

(2) מצאו את משוואת המשיק.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) - 5$.

מעבירים לפונקציה $g(x)$ משיק בנקודה שבה $x=3$. מהו שיפוע המשיק?

31. המשיקים לגרף הפונקציה $y = \frac{3x+B}{x^2+1}$ בנקודות שבהן $x=1$ ו- $x=2$ מקבילים זה לזה.

מצאו את הפרמטר B .

32. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x+m}{1-x}$ בנקודה שבה $x=2$ הוא בעל שיפוע -1.

א. מצאו את הערך של m .

הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = -f(x)$.

ב. מעבירים לפונקציה $g(x)$ משיק בנקודה $x=2$. מהו שיפוע המשיק? אין צורך בנגזרת.

33. הישר $y = -4x + 15$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{16}{x^2} + a$.

- א. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.
 ב. מצאו את הערך של הפרמטר a .

34 ★ נתונה הפונקציה $f(x) = kx^2 + \frac{2}{x-3}$, k הוא פרמטר.

הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 4$ מאונך לישר $y = -\frac{1}{2}x + 6$.
 א. מצאו את הערך של k .

הציבו $k = \frac{1}{2}$ וענו על הסעיפים הבאים:

- ב. מצאו את משוואת המשיק.
 ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = -3 \cdot f(x)$.
 מעבירים לפונקציה $g(x)$ משיק בנקודה שבה $x = 4$.
 מהו שיפוע המשיק?

35. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x}{A-3} - \frac{A}{x}$

בנקודה $x = 1$ הוא 5.

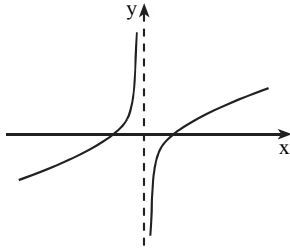
א. מצאו את הערך של A .

ב. נתון שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

היעזרו בסעיף א' ומצאו את שיפוע המשיק

לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = -1$.

אין צורך להיעזר בנגזרת.



36. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = 2x^2 + ax + 18$ ו- $g(x) = -\frac{2a}{x}$.

א. שיפוע הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ שווה לשיפוע הפונקציה $g(x)$

בנקודה שבה $x = 2$.

חשבו את הפרמטר a .

ב. מצאו את משוואת הישר המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

ג. הראו שהישר שמצאת בסעיף ב' משיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 2$.

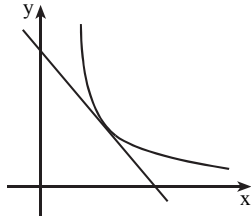
37. נתונה הפונקציה $y = \frac{-a}{(3x-5)^2}$.

א. הראו שנגזרת הפונקציה היא $y' = \frac{6a}{(3x-5)^3}$.

ב. מעבירים משיק בנקודה שבה $x = 1$. שיפוע המשיק הוא 9.

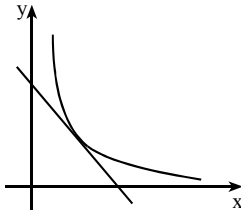
מצאו את הערך של a .

38. לגרף הפונקציה $y = \frac{9}{x}$ מעבירים משיק בנקודה $(a; \frac{9}{a})$ ברביע הראשון. ★



- א. הביעו באמצעות a את שיפוע המשיק.
 ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.
 ג. חשבו את שטח המשולש שיוצר המשיק עם הצירים.
 רשמו ערך מספרי, ללא הפרמטר a .

39. לגרף הפונקציה $y = \frac{4}{x}$ מעבירים משיק בנקודה $x = m$ ברביע הראשון. ★



- א. הביעו באמצעות m את שיפוע המשיק, ואת משוואת המשיק.
 ב. הביעו באמצעות m את שיעורי נקודות החיתוך בין המשיק לצירים.
 ג. ידוע שסכום אורכי הקטעים שמשיק זה יוצר עם הצירים הוא 10. מצאו את m .

40. שיפוע הפונקציה $f(x) = x^2 + bx + 12$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 14. א. מצאו את ערך הפרמטר b .

ב. שרטטו את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ באותה מערכת צירים.

תשובות:

28. א. $a = -7$. ב. $(2; 5)$. 29. א. $k = 2$, $(4; 8)$. ב. $y = -2x + 16$.

30. א. $a = -5$ או $a = -9$. ב. $(1) (3; -\frac{1}{2})$. $(2) y = \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{4}$. ג. $\frac{1}{4}$. 31. $B = 1\frac{1}{17}$.

32. א. $m = -2$. ב. 1. 33. א. $(2; 7)$. ב. $a = 3$. 34. א. $k = \frac{1}{2}$. ב. $y = 2x + 2$. ג. -6 .

35. א. $A = 4$. ב. 5. 36. א. $a = -8$. ב. $y = -4x + 16$. 37. א. $a = 6$.

38. א. $(1) -\frac{9}{a^2}$. $(2) y = -\frac{9}{a^2}x + \frac{18}{a}$. ב. $(0; \frac{18}{a})$, $(2a; 0)$. ג. 18.

39. א. $y = \frac{-4}{m^2}x + \frac{8}{m}$, $\frac{-4}{m^2}$. ב. $(0; \frac{8}{m})$, $(2m; 0)$. ג. $m = 1$ או $m = 4$.

40. א. $b = 8$. ב.

