

הוצאת ספרים יואל גבע

עבודת קיץ לתלמידים

העולים לכיתה י' –

4 יחידות

קובץ זה כולל שאלות המסכמות את החומר שנלמד במתמטיקה בכיתה י'.

כדי לעזור לתלמידים והתלמידות להכין את עצמם באופן מיטבי ללימודי המתמטיקה בהמשך תיכון, הדגשנו את הכלים החשובים לרמת 4 יחידות בכיתה י', על פי תכנית הלימודים החדשה.

אנו מודעים לכך שתלמידים רבים לא הספיקו ללמוד חלק מהנושאים בגלל המצב, ולכן מומלץ לכל מורה לבחור שאלות בהתאם לכיתה שלו.

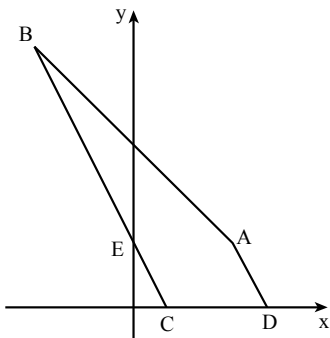
הנושאים שנכללים בקובץ:

גאומטריה, טריגונומטריה והנדסה אנליטית, כולל שאלות המשלבות יותר מנושא אחד. חשבון דיפרנציאלי של פולינומים (כולל קדם אנליזה). פונקציות עם שורשים ריבועיים וסטטיסטיקה תיאורית.

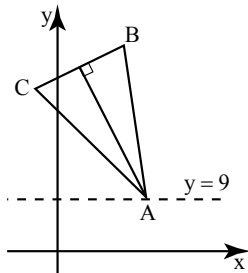
ברצוננו להודות מקרב לב לעפר ילין על היוזמה, הייעוץ הפדגוגי לשאלות, על בדיקת השאלות, על ההערות וההארות המצוינות ועל תמיכה בלתי מסויגת.

יואל גבע אריק דז'לדטי

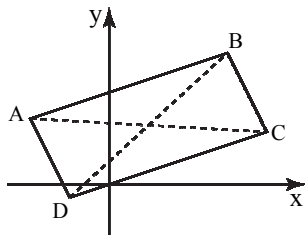
הנדסה אנליטית



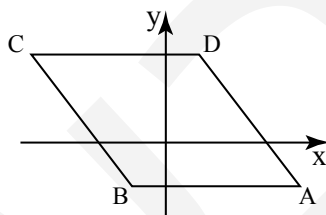
1. ABCD הוא מרובע שבו $BC \parallel AD$.
 הצלע AB מונחת על הישר $y = -x + 10$,
 והצלע CD מונחת על ציר ה-x.
 נתון: $C(2;0)$, $D(8;0)$, שיעור ה-x של הנקודה A הוא 6.
 א. מצאו את שיעור ה-y של הנקודה A.
 ב. מצאו את משוואת הישר AD.
 ג. מצאו את שיעורי הנקודה B.
 ד. הישר BC חותך את ציר ה-y בנקודה E.
 (1) הראו כי הישר AE מקביל לציר ה-x.
 (2) מצאו את שטח המשולש AEB.



2. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) נתון: $C(-1;14)$, $B(3;16)$.
 א. מצאו את משוואת הגובה לבסיס BC.
 ב. מצאו את שיעורי הקדקוד A, אם הוא נמצא על הישר $y = 9$.
 ג. קבעו האם הטענה הבאה נכונה: במשולש שווה שוקיים הגובה לשוק בהכרח מתלכד עם התיכון לשוק.
 ד. (1) מצאו את משוואת הגובה לשוק AC.
 (2) מצאו את משוואת התיכון לשוק AC.
 (3) קבעו על סמך תשובותיכם האם הגובה לשוק במשולש שווה שוקיים בהכרח מתלכד עם התיכון לשוק.



3. במרובע ABCD נתון: $AD = BC$, $AB = DC$.
 א. איזה מרובע הוא ABCD? נמקו.
 ב. משוואת הצלע AB היא $y = \frac{1}{3}x + 7$,
 ומשוואת הצלע AD היא $y = -2x - 7$.
 אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה $(3; 4.5)$.
 מצאו את שיעורי הקדקודים A ו-C.
 ג. מצאו את שיעורי הקדקודים B ו-D.

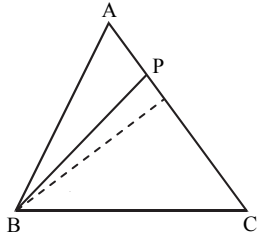


4. במעוין ABCD, משוואת הצלע DC היא $y = 8$.
 ומשוואת האלכסון BD היא $y = 2x + 2$.
 אלכסוני המעוין נחתכים על ציר ה-y.
 א. הוסיפו לציור את אלכסוני המעוין.
 ב. מצאו את משוואת האלכסון AC.
 ג. מצאו את קדקודי המעוין.

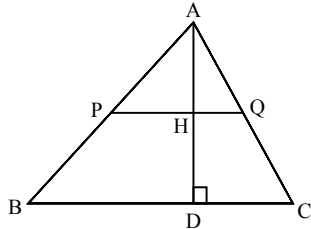
תשובות:

1. א. $y_A = 4$. ב. $y = -2x + 16$. ג. $(-6; 16)$. ד. (2) 36.
 2. א. $y = -2x + 17$. ב. $(4; 9)$. ג. לא נכונה. ד. (1) $y = x + 13$. (2) $y = 3x + 7$. (3) לא מתלכד.
 3. א. מקבילית. ב. $A(-6; 5)$, $C(12; 4)$. ג. $B(9; 10)$, $D(-3; -1)$.
 4. א. $y = -\frac{1}{2}x + 2$. ג. $A(12; -4)$, $B(-3; -4)$, $C(-12; 8)$, $D(12; 4)$.

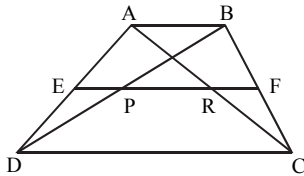
גאומטריה



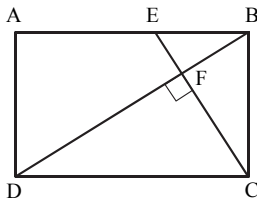
5. במשולש ABC הנקודה P נמצאת על הצלע AC.
נתון: $AP = 3$ ס"מ, $CP = 6$ ס"מ, $S_{\Delta CBP} = 24$ סמ"ר.
חשבו את שטח המשולש ABC.



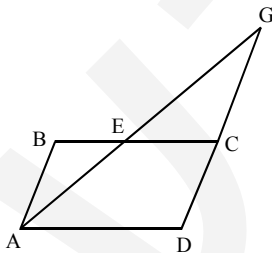
6. PQ הוא קטע אמצעים במשולש ABC. AD הוא גובה לצלע BC. הקטעים AD ו-PQ נחתכים בנקודה H.
א. הוכיחו: $AH = HD$. ראו הדרכה בתשובות.
ב. הסבירו מדוע AH הוא גובה במשולש APQ.
ג. הוכיחו: שטח המשולש ABC גדול פי 4 משטח המשולש APQ.



7. EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD, החותך את האלכסונים AC ו-BD בנקודות R ו-P בהתאמה.
א. הסבירו מדוע $EP = \frac{1}{2} AB$.
ב. הוכיחו: $EP = RF$.
ג. הוכיחו: $PR = \frac{DC - AB}{2}$.



8. במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB. נתון: $CE \perp DB$. F היא נקודת הפגישה של DB עם CE.
א. הוכיחו: $\Delta DCB \sim \Delta CBE$.
ב. הוכיחו בעזרת סעיף א': $BC^2 = DC \cdot BE$.
ג. נתון: $BE = 9$ מ"מ, $BC = 12$ מ"מ. חשבו את אורך האלכסון DB.

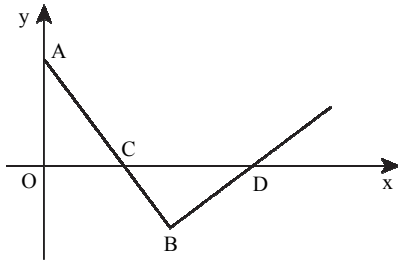


9. במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע BC, כך ש- $\frac{BE}{CE} = \frac{2}{3}$. שטח המשולש GEC הוא 18 סמ"ר.
א. הוכיחו: $\Delta AEB \sim \Delta GEC$.
ב. חשבו את שטח המשולש AEB.
ג. הוכיחו: $\Delta GAD \sim \Delta GEC$.
ד. חשבו את שטח המשולש GAD.
ה. חשבו את שטח המקבילית ABCD.

תשובות:

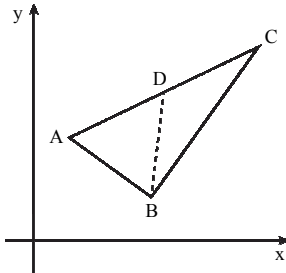
5. 36 סמ"ר.
6. א. הדרכה: התבוננו במשולש BOC.
ג. הדרכה: סמנו $AH = x$, $PQ = y$, והביעו את שטחי המשולשים ABC ו-APQ על ידי x ו-y.
8. ג. 20 מ"מ. 9. ב. 8 סמ"ר. ד. 50 סמ"ר. ה. 40 סמ"ר.

שאלות המשלבות הנדסה אנליטית עם גאומטריה

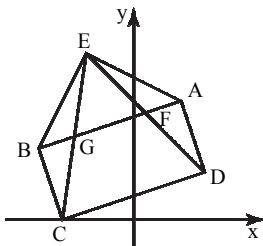


ה. עידו טוען ללא חישובים נוספים אפשר לדעת כי $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta DBC}$. האם הוא צודק? נמקו.

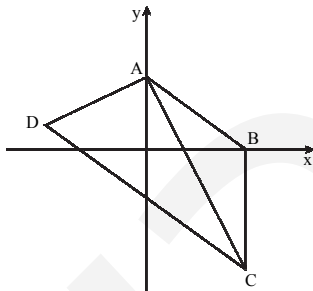
11. בציור נתונות הנקודות $A(0;4)$, $B(4.8;-2.4)$.
 הישר AB חותך את ציר ה-x בנקודה C.
 א. מצאו את שיעורי הנקודה C.
 ב. הוכיחו: $OC = BC$.
 ג. בנקודה B העבירו אנך לישר AB.
 האנך חותך את ציר ה-x בנקודה D.
 הוכיחו: $\Delta AOC \cong \Delta DBC$.
 ד. מהם שיעורי הנקודה D?



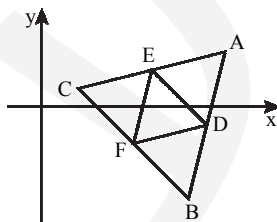
12. במשולש ABC נתון: $A(1;4)$, $B(5;1)$, $C(11;9)$.
 א. הוכיחו שהמשולש הוא ישר זווית.
 ב. הנקודה D נמצאת על הצלע AC, כך שמתקיים: $AD = BD$.
 הוכיחו: $AD = DC$. הדרכה: סמנו $\angle A = \alpha$.
 ג. הסבירו מדוע: $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CBD}$.
 אין צורך לחשב את השטחים.



13. במרובע ABCD נתון: $A(2;5)$, $B(-4;3)$, $C(-3;0)$, $D(3;2)$.
 א. הראו שהמרובע ABCD הוא מלבן.
 ב. הנקודה $E(-2;7)$ נמצאת מחוץ למלבן. הראו ש- $AE = BE$.
 ג. הוכיחו: $\Delta ADE \cong \Delta BCE$.
 ד. הוכיחו: $\angle AEG = \angle BEF$.



14. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$),
 AC חוצה את הזווית BCD.
 א. הראו כי $AB = BC$.
 ב. נתון: $A(0;3)$, $B(4;0)$.
 חשבו את אורך הקטע BC.
 ג. הקטע BC מאונך לציר ה-x.
 מצאו את משוואת האלכסון AC.



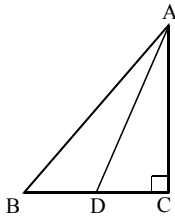
15. D, E ו-F הן נקודות האמצע של צלעות משולש ABC, ראו ציור.
 נתון: $D(9;-1)$, $E(6;2)$ ו- $F(5;-2)$.
 א. מצאו את משוואות צלעותיו של המשולש ABC.
 ב. מצאו את שיעורי הקדקודים A, B ו-C.

תשובות:

11. א. $C(3;0)$. ד. $D(8;0)$. ה. כן, משולשים חופפים הם שווי שטח. 12. א. B.
 13. א. הדרכה: הראו על ידי חישובי שיפועים, שצלעות סמוכות במרובע מאונכות זו לזו.
 14. ב. 5. ג. $y = -2x + 3$. 15. א. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$, $y = -x + 3$, $y = 4x - 37$. ב. $C(2;1)$, $A(10;3)$, $B(8;-5)$.

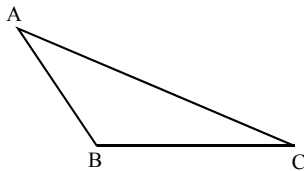
טריגונומטריה במישור

הערה: השאלות כוללות שימוש בפונקציות סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולשים ומרובעים, כולל סימון נעלמים, ושטח משולש.

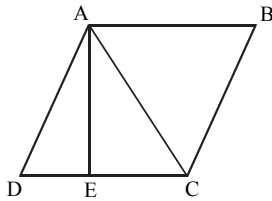


- 16.** AD הוא התיכון לניצב BC במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$). נתון: 6 ס"מ AC , $\angle ADC = 64^\circ$.
 א. חשבו את אורך הצלע BC.
 ב. חשבו את גודל הזווית ABC .

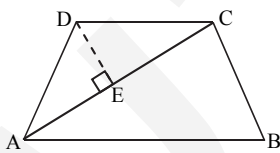
- 17.** במשולש שווה-שוקיים היקף המשולש גדול פי 3.6 מבסיס המשולש.
 א. סמנו ב- x את בסיס המשולש והביעו על ידי x את שוק המשולש.
 ב. מצאו את זווית הבסיס של המשולש.



- 18.** במשולש ABC הצלע AC ארוכה פי 3 מהצלע AB . נתון: $\angle BAC = 45^\circ$. שטח המשולש הוא $27\sqrt{2}$. מצאו את אורכי הצלעות AB ו- AC .



- 19.** נתון מעוין $ABCD$. גובה המעוין, AE , שווה ל- 12 ס"מ. אלכסון המעוין, AC , יוצר זווית בת 35° עם הגובה AE .
 א. חשבו את הזווית ACD ואת הזווית DAE .
 ב. חשבו את אורך הצלע של המעוין.
 ג. חשבו את שטח המעוין $ABCD$.

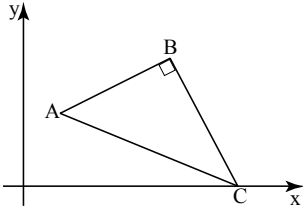


- 20.** בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel DC$) השוק AD שווה לבסיס הקטן DC . נתון: 20 ס"מ AC , $\angle CAB = 37^\circ$.
 א. מצאו את זווית המשולש ADC .
 ב. חשבו את אורך השוק AD .
 ג. חשבו את שטח הטרפז.

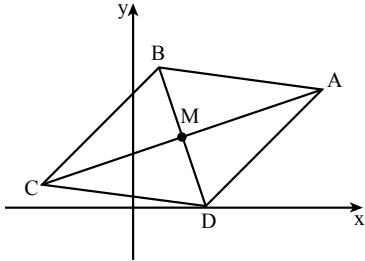
תשובות:

- 16.** א. 5.853 ס"מ. ב. 45.71° . **17.** א. $1.3x$. ב. 67.38° .
18. 6 ס"מ, 18 ס"מ. **19.** א. $\angle ACD = 55^\circ$, $\angle DAE = 20^\circ$. ב. 12.77 ס"מ. ג. 153.24 סמ"ר.
20. א. $74^\circ, 106^\circ, 74^\circ, 106^\circ$. ב. 12.52 ס"מ. ג. 192.2 סמ"ר.

שאלות המשלבות הנדסה אנליטית עם טריגונומטריה



21. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). נתון: $A(4;8)$, $B(16;14)$, והקדקוד C נמצא על ציר ה-x. א. מצאו את משוואת הניצב BC ואת שיעורי הקדקוד C. ב. מהם אורכי הצלעות BC ו-AC? ג. חשבו את זוויותיו החדות של המשולש ABC.

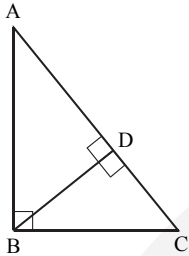


22. לפניכם מעוין ABCD. אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M. נתון: $A(8;5)$, $C(-4;1)$. א. מצאו את משוואת האלכסון BD. ב. נתון שהנקודה D נמצאת על ציר ה-x. מצא את שיעורי הנקודות D ו-B. ג. חשבו את זוויותיו של המעוין.

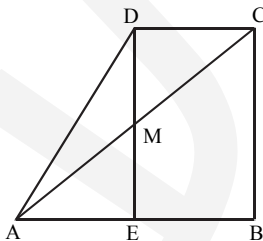
תשובות:

21. א. $C(23;0)$, $y = -2x + 46$. ב. $7\sqrt{5} = 15.65$, $5\sqrt{17} = 20.62$. ג. 49.37° , 40.63° .
22. א. $y = -3x + 9$. ב. $D(3;0)$, $B(1;6)$. ג. 126.87° , 53.13° , 126.87° , 53.13° .

שאלות המשלבות גאומטריה עם טריגונומטריה



23. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). BD הוא הגובה ליתר AC. א. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle ADB$. ב. הוכיחו: $AB^2 = AD \cdot AC$. ג. נתון: $AD:DC = 16:9$. חשבו את הזווית A. הדרכה: סמנו $AD = 16x$.

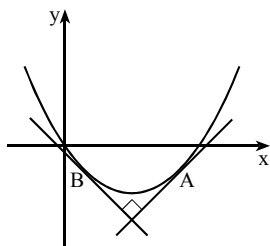


24. ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). האלכסון AC חותך את גובה הטרפז DE בנקודה M. נתון: $DM = ME$. א. הוכיחו: $\triangle CDM \cong \triangle AEM$. ב. הוכיחו: המרובע DCBE הוא מלבן. ג. הוכיחו: $AE = BE$. ד. נתון: $\angle BAC = 40^\circ$, $BE = 4$. (1) חשבו את גובה הטרפז. (2) חשבו את אורך השוק AD.

תשובות:

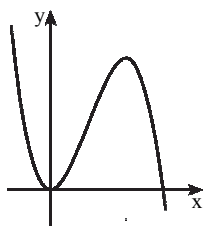
23. א. ג. 36.87° . 24. ד. (1) 6.713 ס"מ. (2) 7.814 ס"מ.

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים



1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 5x$.
 ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 3$.
 א. מצאו את שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.
 ב. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B מאונך למשיק בנקודה A (ראו ציור). מצאו את שיעורי הנקודה B.

2. המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^4}{2} - ax + 10$ בנקודה $x = 1$ מקביל לישר $y = -2x + 10$. מצאו את a.



3. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -x^3 + 9x^2$.
 א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ג. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.
 ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -2$?
 הדרכה: היעזרו בגרף הפונקציה.
 ה. מצאו לאילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ יורדת וחיובית.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + 8x^2 - 16x$.
 א. מצאו: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.
 ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x + 3)$.
 (1) בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$, כדי לקבל את הגרף של $g(x)$?
 (2) מהן שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
 (3) שרטטו (ללא חישובים נוספים) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. (1) לאילו ערכים של k, יש למשוואה $f(x) = k$ שני פתרונות?
 (2) לאילו ערכים של k, יש למשוואה $g(x) = k$ שני פתרונות?

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 18x^2 + 32$.
 א. הוכיחו שהפונקציה היא פונקציה זוגית.
 ב. מצאו: (1) נקודות קיצון. (2) תחומי עלייה וירידה. (3) נקודות חיתוך על הצירים.
 ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ד. מהם תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$?
 ה. היעזרו בסעיפים קודמים, ופתרו את אי השוויון $x^4 - 18x^2 + 32 < 0$.

6. הפונקציה $f(x) = 2x^3 - mx^2 + 12x$ מקיימת: $f'(3) = 12$.
 א. מצאו את m.
 ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ג. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
 ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - \frac{2x^3}{3}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
 ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ו. לאילו ערכי x מתקיים $f(x) < 0$ וגם $f'(x) > 0$?
 ז. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = -f(x)$. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
 הדרכה: הגרף של $-f(x)$ סימטרי לגרף של $f(x)$ לעומת ציר ה- x .
 ח. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = f(-x)$. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
 הדרכה: הגרף של $f(-x)$ סימטרי לגרף של $f(x)$ לעומת ציר ה- y .

תשובות:

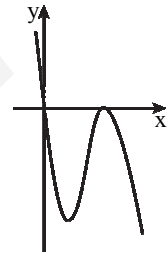
1. א. 1. ב. $(2; -6)$. 2. $a = 4$.
 3. א. $(0; 0)$ מינימום, $(6; 108)$ מקסימום. ב. עלייה: $0 < x < 6$, ירידה: $x > 6$ או $x < 0$.
 ג. $(0; 0)$, $(9; 0)$. ד. פתרון אחד. ה. $6 < x < 9$ או $x < 0$.
 4. א. (1) כל x . ב. (2) $(1\frac{1}{3}; -9\frac{13}{27})$ מינימום, $(4; 0)$ מקסימום.
 (3) עלייה: $1\frac{1}{3} < x < 4$, ירידה: $x > 4$ או $x < 1\frac{1}{3}$. (4) $(0; 0)$, $(4; 0)$.

ב. ג. (1) 3 יחידות שמאלה.

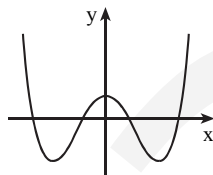
(2) $(-1\frac{2}{3}; -9\frac{13}{27})$ מינימום, $(1; 0)$ מקסימום.



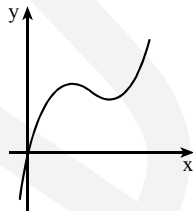
(3)



ד. (1) $k = -9\frac{13}{27}$, $k = 0$. (2) $k = -9\frac{13}{27}$, $k = 0$.

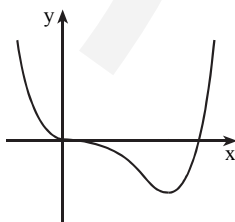


5. ב. (1) $(3; -49)$ מינימום, $(0; 32)$ מקסימום, $(-3; -49)$ מינימום. ג.
 (2) עלייה: $x > 3$ או $-3 < x < 0$. ירידה: $0 < x < 3$ או $x < -3$.
 (3) $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$, $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(0; 32)$.
 ד. $x > 4$ או $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ או $x < -4$.
 ה. $\sqrt{2} < x < 4$ או $-4 < x < -\sqrt{2}$.



ד.

6. א. $m = 9$. ב. $(0; 0)$.
 ג. $(1; 5)$ מקסימום,
 $(2; 4)$ מינימום.



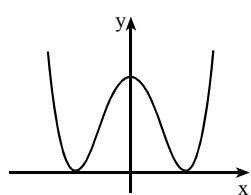
ה.

7. א. כל x .
 ב. $(0.5; -0.021)$ מינימום.
 ג. עלייה: $x > 0.5$, ירידה: $x < 0.5$.
 ד. $(\frac{2}{3}; 0)$, $(0; 0)$. ו. $0.5 < x < \frac{2}{3}$.
 ז. $(0.5; 0.021)$ מקסימום. ח. $(-0.5; -0.021)$ מינימום.

חשבון דיפרנציאלי – פונקציה מורכבת

8. נתונה הפונקציה $y = (x+2)^4$.
 א. מצאו את הנגזרת של הפונקציה.
 ב. לגרף הפונקציה מעבירים משיק בנקודה $(-1;1)$ שעל הגרף.
 ג. חשבו את שיפוע המשיק. (2) מצאו את משוואת המשיק.
 ד. חשבו את הזווית החדה שיוצר המשיק עם ציר ה- x .
9. נתונה פונקציה $f(x) = (x^2 - 1)^2$.
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. הוכיחו שהפונקציה היא פונקציה זוגית.
 ג. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
 ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ה. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 ו. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ז. הסבר מדוע הפונקציה היא אי שלילית לכל x .
 ח. (1) מצאו את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = f(x) - 6$.
 ט. (2) כמה נקודות אפס יש לפונקציה $g(x)$?
10. גזרו את הפונקציה $y = 2x^2(x+2)^4$.
הדרכה: בשלב ראשון גזרו אחד מגורמי המכפלה. בשלב השני יש להשתמש בנגזרת של מכפלת שתי פונקציות. הוציאו גורם משותף מקסימלי. השאירו את התשובה כמכפלה.

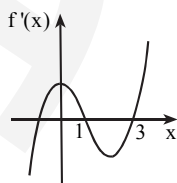
תשובות:



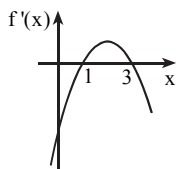
8. א. $y' = 4(x+2)^3$. ב. (1) 4. (2) $y = 4x + 5$. ג. 75.96° .
9. א. כל x .
 ג. (0;1) מקסימום, (1;0) מינימום, (-1;0) מינימום.
 ד. עלייה: $x > 1$ או $-1 < x < 0$ ירידה: $0 < x < 1$ או $x < -1$.
 ה. (0;1), (1;0), (-1;0).
 ח. (1) (0;-5) מקסימום, (1;-6) מינימום, (-1;-6) מינימום.
 ט. (2) שתי נקודות.
 10. $4x(x+2)^3(3x+2)$.

הקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת שלה

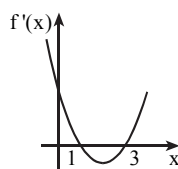
11. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בלבד – נקודת מקסימום ב- $x=1$ ונקודת מינימום ב- $x=3$. נתון שהנגזרת $f'(x)$ מתאפסת פעמיים בלבד.
 א. עבור אילו ערכי x מתקיים: (1) $f'(x) = 0$. (2) $f'(x) > 0$. (3) $f'(x) < 0$.
 ב. איזה מן הגרפים הבאים (1, 2, 3, 4) יכול לתאר את הגרף של $f'(x)$, הנגזרת של $f(x)$?



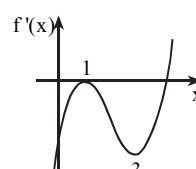
גרף 1



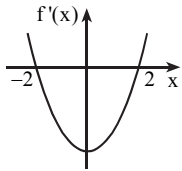
גרף 2



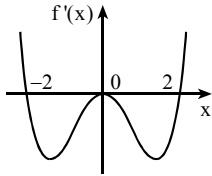
גרף 3



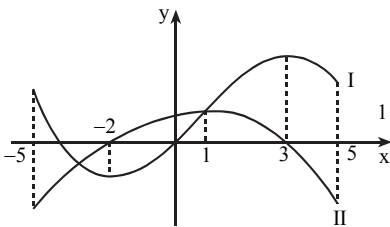
גרף 4



12. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
 א. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$.
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 ג. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
 ד. נתון גם: $f(0) = 0$.
 שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



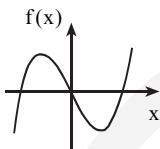
13. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
 א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
 ב. נתון: $f(0) = 0$.
 שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ג. לגרף הפונקציה $f(x)$ העבירו משיקים המקבילים לציר ה- x . מהם שיעורי ה- x של נקודות ההשקה של המשיקים האלה?
 ד. נתון גם כי משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x) = 3x^5 - 20x^3$. מצאו את משוואות המשיקים שבסעיף ג'.



14. בציור שלפניך מתוארים, הגרפים I ו-II בתחום $-5 \leq x \leq 5$. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$, והאחר של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 א. איזה מהגרפים הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$?
 ב. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (כולל נקודות קצות התחום), וקבעו את סוג הקיצון.

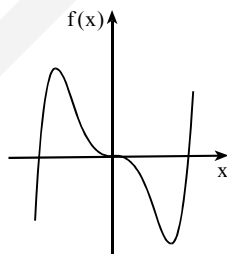
תשובות:

11. א. (1) $x=1$, $x=3$. (2) $x > 3$ או $x < 1$. (3) $1 < x < 3$. ב. גרף 3.



ד.

12. א. חיוביות: $x > 2$ או $x < -2$, שליליות: $-2 < x < 2$.
 ב. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 2$.
 ג. $x = -2$ מקסימום, $x = 2$ מינימום.

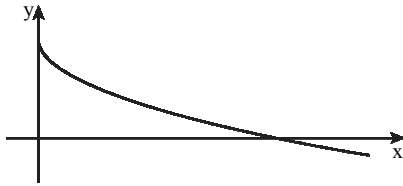


13. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 2$.
 ג. $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$.
 ד. $y = -64$, $y = 64$, $y = 0$.

14. א. גרף I הוא של $f(x)$. הסבר אפשרי: כאשר גרף I עולה, אז גרף II הוא חיובי, וכאשר גרף I יורד, אז גרף II הוא שלילי.
 ב. $x = 5$ מינימום, $x = 3$ מקסימום, $x = -2$ מינימום, $x = -5$ מקסימום.

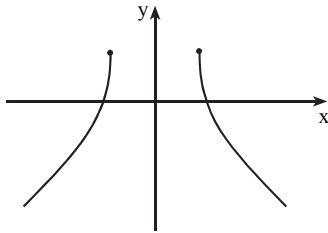
פונקציות עם שורשים ריבועיים

הערה: השאלות מיועדות לכיתות שהספיקו ללמוד נושא זה.



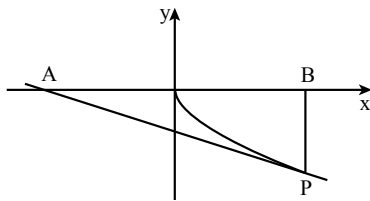
1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -\sqrt{x} + 3$.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הצירים.
- כתבו את תחומי החיוביות של הפונקציה.
- כתבו את תחומי השליליות של הפונקציה.



2. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -\sqrt{x^2 - 25} + 3$.

- תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \leq -5$ או $x \geq 5$. הערה: גרף הפונקציה כולל את שני הענפים שבשרטוט.
- הראו שהפונקציה היא פונקציה זוגית.
- מצאו את שיעורי נקודות קצה תחום ההגדרה של הפונקציה, וקבעו עבור כל נקודה אם היא מינימום או מקסימום.
- נתון הישר $y = k$, k הוא מספר. מצאו את הערכים של k , שעבורם יש לגרף הפונקציה ולישר $y = k$ שתי נקודות משותפות.



3. מעבירים ישר המשיק לפונקציה $y = -\sqrt{4x}$ בנקודה P ושיפועו $-\frac{1}{3}$.

- מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.
- מצאו את משוואת המשיק.
- המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ב' חותך את ציר ה-x בנקודה A. האנך מנקודה P לציר ה-x חותך את ציר ה-x בנקודה B. חשבו את שטח המשולש ABP.

4. נתונה הפונקציה $y = (x-2)\sqrt{x}$.

- מצאו את הנגזרת של הפונקציה. יש להשתמש בנוסחה לנגזרת של מכפלת שתי פונקציות.
- מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה על הגרף שבה $x = 4$.

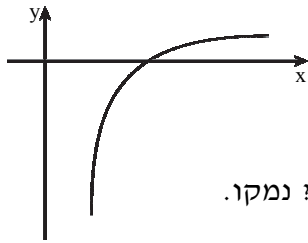


5. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצאו את כל נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
- הסבירו מדוע בתחום $x \geq 0$ מתקיים אי השוויון $2\sqrt{x} - x \leq 1$.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = -f(x)$.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x) = f(x+1)$.

6. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + k}$ בנקודה שבה $x = 2$ הוא $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

- מצאו את הערך של k .
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבעו את סוגן.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = 3f(x) + m$. נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$ היא $(1; 7)$. מצאו את הערך m .



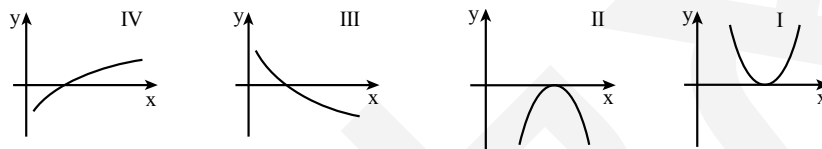
7. נתונה פונקציה $f(x)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x-2}}$$

- א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 ב. מצאו באיזו נקודה חותך גרף הנגזרת $f'(x)$ את ציר ה- x .
 ג. באיזה תחום הנגזרת $f'(x)$ היא חיובית, ובאיזה תחום היא שלילית? נמקו.
 ד. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?
 ה. נתון כי משוואת הפונקציה הנתונה היא $f(x) = x - 6\sqrt{x-2}$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

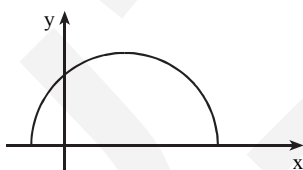
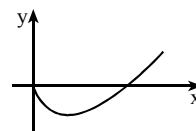
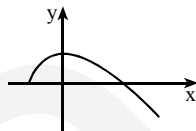
8. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4x} - 6x$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 (3) מצאו את השיעורים של כל נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
 ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. איזה גרף מבין הגרפים I, II, III, IV, עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $1 \leq x \leq 10$? נמקו.



תשובות:

1. א. $x \geq 0$. ב. $(0;3)$, $(9;0)$. ג. $0 \leq x < 9$. ד. $x > 9$. 2. א. $(5;3)$ מקסימום, $(-5;3)$ מינימום. ג. $k \leq 3$.
 3. א. $P(9;-6)$. ב. $y = -\frac{1}{3}x - 3$. ג. 54. 4. א. $\frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$. ב. $y = 2\frac{1}{2}x - 6$.
 5. א. (1) $x \geq 0$. (2) $(4;0)$, $(0;0)$. (3) $(1;1)$ מקסימום, $(0;0)$ מינימום.
 ב. חיוביות: $0 < x < 4$, שליליות: $x > 4$.
 ד.

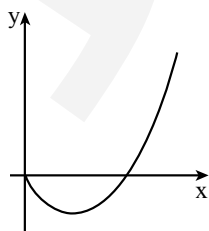


6. א. $k = 3$. ב. $-1 \leq x \leq 3$.

- ג. $(1;2)$ מקסימום מוחלט,
 $(3;0)$ מינימום מוחלט,
 $(-1;0)$ מינימום מוחלט.
 ה. $m = 1$.

7. א. $x > 2$. ב. $(11;0)$. ג. חיובית: $x > 11$, שלילית: $2 < x < 11$.
 ד. עלייה: $x > 11$, ירידה: $2 < x < 11$. ה. $(11;-7)$ מינימום.

8. א. (1) $x \geq 0$. (2) $(0;0)$, $(9;0)$. ב.
 (3) $(0;0)$ מקסימום, $(4;-8)$ מינימום.
 ג. IV. הסבר: ל- $f(x)$ נקודת מינימום פנימית עבור $x = 4$,
 לכן גרף הנגזרת $f'(x)$ עובר ב- $x = 4$ משליליות לחיוביות.
 ומבין הגרפים הנתונים, הגרף המתאים הוא גרף IV.



4. בטבלה מתוארת התפלגות השכר השעתי (בשקלים) של פועלים בחברת כוח אדם בתחום הבנייה.

השכר	140–159.99	120–139.99	100–119.99	80–99.99	60–79.99
מספר הפועלים	1	3	5	4	2

- א. מהו הרוחב של כל קבוצה?
 ב. כמה פועלים נבדקו בסך הכול?
 ג. כמה אחוזים מהפועלים שנבדקו הם בעלי שכר שעתי שהוא לפחות 120 שקלים?
 ד. שרטטו היסטוגרמה המתארת בקבוצות שוות רוחב את התפלגות השכר הנתונה.
 ה. שני פועלים ששכרם השעתי הוא 85 שקלים קיבלו העלאה של 10 שקלים לשעה.
 (1) האם ההיסטוגרמה השתנתה?
 (2) האם ההיסטוגרמה הייתה משתנית אם שני הפועלים היו מקבלים העלאה בשכר של 20 שקלים לשעה? נמקו.

5. במפעל בדקו את המשכורת החודשית של העובדים. התפלגות המשכורות מתוארת בטבלה:

מספר העובדים	10	10	14	20	10	6
המשכורת החודשית (בשקלים)	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000	10,000

- א. (1) העריכו ללא חישובים: האם המשכורת החודשית הממוצעת גבוהה מ-8,000 שקלים או נמוכה מ-8,000 שקלים? נמקו.
 (2) נסו לאמוד בין אילו שתי משכורות בטבלה נמצאת המשכורת החודשית הממוצעת.
 ב. חשבו את המשכורת החודשית הממוצעת של עובדי המפעל.
 ג. מצאו את המשכורת החודשית הממוצעת של עובדי המפעל שמשכורתם החודשית גבוהה מהמשכורת הממוצעת.
 ד. במפעל אחר, המשכורת החודשית של כל אחד מהעובדים היא 7,000 שקלים. קבעו מהי המשכורת הממוצעת, למרות שלא ידוע מספר העובדים באותו מפעל.

6. הטבלה שלפניכם מציגה את התפלגות מספר החדרים לדירה במלון דירות.

מספר הדירות	10	x	12	6
מספר החדרים	2	3	4	5

- א. ממוצע מספר החדרים בדירה במלון זה הוא 3.25. חשבו את x.
 ב. דנה מנהלת חברה, שבה 120 עובדים. היא מעוניינת להזמין את כל עובדיה לבילוי סוף שבוע, שבו כל עובד מקבל חדר. האם במלון הדירות יש מספיק חדרים כדי לארח את כל עובדי החברה?

7. נתונה רשימה של מספר ימי ההיעדרות מהעבודה (במהלך שנה) של שישה עובדים

בחברת שמירה: 12, 12, 12, 12, 12, 3.

- א. חשבו את הממוצע ואת החציון של מספר ימי ההיעדרות של העובדים.
 ב. יואב טוען שהחציון מייצג טוב יותר מהממוצע את ימי ההיעדרות. נסו לנמק בעד דעתו.
 ג. עידו טוען שהממוצע מייצג טוב יותר מהחציון את ימי ההיעדרות. נסו לנמק בעד דעתו.

8. מספר השירים ששרה מקהלת זמר בכל הופעה משתנה בהתאם לדרישה. הטבלה שלפניכם מתארת את התפלגות מספר השירים ששרה המקהלה במשך השנה:

מספר השירים	5	6	7	8	9
מספר ההופעות	4	7	10	6	12

- א. חשבו את חציון מספר השירים ששרה המקהלה במשך השנה.
 ב. מה יהיה החציון, אם נוסיף לנתונים המקוריים הופעה אחת שבה המקהלה שרה 8 שירים?
 ג. מה יהיה החציון, אם נוסיף לנתונים המקוריים 3 הופעות שבהן המקהלה שרה 8 שירים?
 ד. מה יהיה החציון, אם נוסיף לנתונים המקוריים 4 הופעות שבהן המקהלה שרה 8 שירים?

9. בטבלה מתוארת התפלגות מספר המכוניות הפרטיות שיש למשפחות ביישוב מסוים:

מספר המכוניות	0	1	2	3	4
מספר המשפחות	2	18	18	16	9

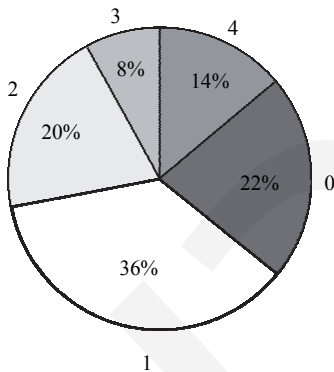
- א. מהו השכיח של מספר המכוניות? רשמו את שתי האפשרויות.
 ב. חשבו את השכיחות היחסית של כל אחד משני השכיחים.
 ג. מוסיפים ליישוב מספר משפחות חדשות.
 מהו מספר המשפחות הנמוך ביותר שעלינו להוסיף כדי שהשכיח היחיד יהיה 4 מכוניות?

10. במבחן שכבתי התקבלו הציונים המתוארים בטבלה שמשמאל. נתון: $y > x$.
 א. מהו השכיח? מהו החציון?
 ב. האם הממוצע קרוב יותר ל- x או ל- y ? נמקו.
 ג. מי גדול יותר – החציון או הממוצע?

הציון	x	y
מספר התלמידים	10	20

11. השכר הממוצע של הפועלים שעובדים במפעל הוא 7,200 שקלים. למפעל נוספו שלושה פועלים: אחד ששכרו 6,700 שקלים, שני ששכרו 7,400 שקלים ושלישי ששכרו 8,100 שקלים.
 א. חשבו את ממוצע השכר של שלושת הפועלים שהתווספו.
 ב. קבעו האם ממוצע השכר החדש גדול, קטן או שווה לממוצע השכר המקורי.

12. בשני בתי ספר נערך מבחן. בבית הספר הראשון לומדים 200 תלמידים, ובבית הספר השני לומדים 600 תלמידים. הציון הממוצע של התלמידים בבית הספר הראשון היה גבוה ב-8 נקודות מהציון הממוצע של התלמידים בבית הספר השני.
 הציון הממוצע של כלל התלמידים בשני בתי הספר היה 72.
 א. מהו הציון הממוצע של התלמידים בכל בית ספר?
 ב. לבית הספר הראשון הצטרפו 40 תלמידים שהציון הממוצע שלהם הוא 93.
 מה הממוצע החדש בבית ספר זה?



13. ביישוב אבוקה נערך סקר בקרב בני 30 ומעלה.
 בסקר נשאלו התושבים על מספר הפעמים בשבוע בו הם עוסקים בפעילות גופנית, והתקבלה הדיאגרמה שלפניכם.
 א. חשבו את מספר הפעמים הממוצע בשבוע, בו עוסקים התושבים בפעילות גופנית.
 ב. מי לדעתכם משקף טוב יותר את הפעילות הגופנית ביישוב בקרב בני ה-30 ומעלה, הממוצע או השכיח? נמקו.
 ג. מהו מספר הפעמים החציוני בשבוע, בו עוסקים התושבים בפעילות גופנית.
 ד. מועצת היישוב שמה לה למטרה להגביר את הפעילות הגופנית בקרב התושבים. כתוצאה מכך, מחצית מהתושבים שלא עסקו כלל בפעילות גופנית, החלו לעסוק בפעילות גופנית פעם בשבוע. מהו הממוצע החדש?

14. נבדקו הציונים של חמישה תלמידים בשני מקצועות: ביולוגיה וכימיה.
 להלן הציונים בביולוגיה: 89, 89, 89, 90, 91, 91, 91.
 להלן הציונים בכימיה: 80, 80, 80, 90, 100, 100, 100.
 א. מהו הציון הממוצע בכל אחד משני המקצועות?
 ב. באיזה משני המקצועות פיזור הציונים גדול יותר להערכתכם? ענו ללא חישובים.
 ג. חשבו את סטיית התקן של הציונים בכל מקצוע, ובדקו את תשובתכם לסעיף ג'.
 ד. האם טווח הציונים משקף בצורה טובה את ההבדל בפיזור הנתונים בשני המקצועות?

15. לפניכם התפלגות הציונים של קבוצת תלמידים שנבחנה במתמטיקה :

מספר התלמידים	5	7	10	18
הציון	70	80	90	100

- א. חשבו את ממוצע הציונים.
 ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.
 ג. (1) מצאו את השכיח והחציון.
 (2) מבין שלושת מדדי המרכז (ממוצע, חציון ושכיח), קבעו איזה מדד מייצג את התפלגות הציונים באופן פחות טוב.

16. להלן התפלגות הציונים של קבוצת תלמידים במבחן :

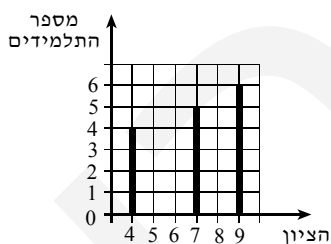
הציון	6	7	8	9	10
מספר התלמידים	4	9	x	9	4

- א. הראו כי ממוצע הציונים במבחן הוא 8.
 ב. כמה תלמידים קיבלו ציון 8, אם **סטיית התקן** במבחן זה היא $\frac{5}{6}$?

17. מורה חישב ומצא שממוצע הציונים של תלמידים הוא 60, וסטיית התקן היא 1.8. בהמשך הוסיף המורה ציון של תלמיד נוסף, והתברר שהממוצע של כל התלמידים נשאר 60.
 א. מהו הציון של התלמיד הנוסף? נמקו את תשובתכם.
 ב. האם סטיית התקן לאחר הוספת הציון גדולה, קטנה או שווה לסטיית התקן לפני ההוספה? אין צורך בחישוב אלגברי.
 ג. בחרו את התשובה הנכונה: אם נתונה קבוצת נתונים שסטיית התקן שלהם אינה אפס, ומוסיפים נתון שערכו שווה לממוצע, סטיית התקן גדלה/ קטנה / לא משתנה.
 ד. (1) האם הטווח של הציונים גדל, קטן או לא השתנה בעקבות הוספת הציון?
 (2) האם הטווח משקף לנו שפיזור הציונים השתנה בעקבות הצטרפות התלמיד?

תשובות:

1. א. המשתנה הוא צבע הפרח, והוא משתנה איכותי. ב. לבן. ג. לבן. ד. $\frac{8}{80} = \frac{1}{10}$.
 ה. 1 (או 100%) . ו. קטן.



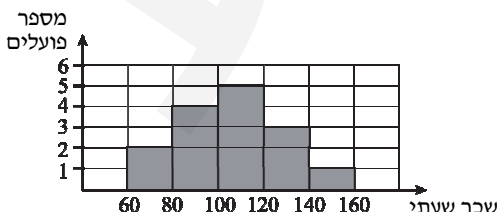
א.

ציון	4	7	9
מספר תלמידים	4	5	6

ג. $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

- ד. ורד צודקת. קל לראות זאת בדיאגרמה.
 ה. (1) השכיחות היחסית של הציון 9 גדלה.
 (2) השכיחות היחסית של הציון 4 קטנה.

3. א. טלוויזיה. ב. כן. ג. 400. ד. 140. ה. 42. ו. 10.5%. ז. 49.



4. א. 20 שקלים. ב. 15 פועלים. ג. 26.67%.
 ד. השכר על ציר ה-x בשקלים.
 ה. (1) לא. (2) כן, גובה מלבן השכר 80-100 היה יורד ב-2 יחידות, וגובה מלבן השכר 100-120, היה עולה ב-2 יחידות.

5. א. (1) נמוכה מ-8,000 שקלים.
 הסבר: מספר העובדים שמשכורתם נמוכה מהמשכורת הממוצעת, גדול ממספר העובדים שמשכורתם גבוהה מהמשכורת הממוצעת.
 (2) בין 7,000 ל-8,000 שקלים. ב. 7,800 שקלים. ג. 8,611.11 שקלים. ד. 7,000 שקלים.
6. א. $x = 28$. ב. כן, במלון הדירות יש 182 חדרים, ולעובדי החברה מספיקים 120 חדרים.
7. א. הממוצע הוא 10.5, החציון הוא 12.
 ב. כמעט כל המשתנים זהים בערכם לחציון שערכו 12, ולכן הוא מייצג טוב את המשתנים.
 ג. הממוצע מתחשב בכל ערכי המשתנים, לכן הוא נמוך מ-12, וזה נותן ייצוג גם לעובד שהיו לו 3 ימי היעדרות. החציון אינו מתחשב בעובד זה, ותלוי רק במשתנים האמצעיים.
8. א. 7 שירים. ב. 7 שירים. ג. 7.5 שירים. ד. 8 שירים.
9. א. יש שני שכיחים: מכונית אחת או שתי מכוניות. ב. $\frac{2}{7}$. ג. 10 משפחות.
10. א. השכיח הוא y והחציון הוא y . ב. מספר התלמידים שקיבלו את הציון y גדול ממספר התלמידים שקיבלו את הציון x , ולכן הממוצע יהיה קרוב יותר ל- y מאשר ל- x . ג. החציון.
11. א. 7,400 שקלים. ב. גדול מהממוצע המקורי.
12. א. בבית הספר הראשון הממוצע הוא 78, בבית הספר השני הממוצע הוא 70. ב. 80.5.
13. א. 1.56 פעמים בשבוע. ב. הממוצע. ג. פעם אחת בשבוע. ד. 1.67 פעמים בשבוע.
14. א. ביולוגיה: 90, כימיה: 90. ב. בכימיה.
 ג. $S_{\text{ביולוגיה}} = 0.9258$, $S_{\text{כימיה}} = 9.258$. סטיית התקן בכימיה אכן גדולה יותר. ד. כן.
15. א. 90.25. ב. 10.60. ג. (1) שכיח - 100, חציון - 90. (2) השכיח. 16. ב. 46 תלמידים.
17. א. אם מוסיפים ציון שאינו משפיע על הממוצע, הרי הוא שווה לממוצע, כלומר שווה ל-60.
 ב. הציון הנוסף שווה לממוצע, לכן הוא מקטין את הפיזור, כלומר מקטין את סטיית התקן.
 ג. קטנה. ד. (1) לא השתנה. (2) לא משקף.