פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024 , מועד א', שאלון: 35471

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. האורכים של המלפפונים במפעל מסוים מתפלגים נורמלית.

האורך הממוצע הוא $\bar{x}=10.56$ ס"מ וסטיית התקן היא 3 ס"מ.

כל המלפפונים שאורכם קטן מ- 12 ס"מ נארזים בקופסאות שימורים רגילות,

והשאר נארזים בקופסאות שימורים גדולות.

נחשב את ציון התקן עבור $x=12$ ס"מ, ובהתאם את האחוז המבוקש .

$$z=\frac{12-10.56}{3}=\frac{1.44}{3}=0.48$$

$$z=0.48 \quad \rightarrow p(z<0.48)=0.684=\boxed{68.4\%}$$

תשובה: 68.4% **מהמלפפונים נארזים בקופסאות שימורים רגילות**

ב. התברר שיש ביקוש למלפפונים קצרים במיוחד, ולכן הוחלט כי המלפפונים עברו מיון מחדש.

(1) רבע מן המלפפונים שאורכם קטן מ- 12 ס"מ נחשבים למלפפונים קצרים במיוחד .

$$\frac{1}{4}\cdot 68.4\%=17.1\%$$

תשובה: 17.1% **מהמלפפונים קצרים במיוחד.**

(2) נמצא את אורכו של המלפפון הארוך ביותר מבין הקצרים במיוחד, שעבורו $p=17.1\%=0.171$.

$$p=0.171 \quad \rightarrow z=-0.95$$

$$-0.95=\frac{x-10.56}{3} \quad /\cdot 3$$

$$-2.85=x-10.56$$

$$\boxed{x=7.71\,cm}$$

תשובה: אורכו של המלפפון הארוך ביותר, מבין המלפפונים הקצרים במיוחד, הוא 7.71 ס"מ.

ג. לאחר זמן מה הגיע למפעל משלוח חדש של מלפפונים (נסמן משתנה y), שגם אורכיהם מתפלגים נורמלית.

50% **מן המלפפונים במשלוח זה היו קצרים מ- 11.5 ס"מ, ולכן $\bar{y}=11.5$ ס"מ .**

12.5% **מן המלפפונים במשלוח זה היו ארוכים מ- 14.26 ס"מ,**

ולכן: $p(y<14.26)=100\%-12.5\%=87.5\%=0.875$.

$$p=0.875 \quad \rightarrow z=1.15$$

$$1.15=\frac{14.26-11.5}{s}$$

$$1.15s=2.76$$

$$\boxed{s=2.4\,cm}$$

תשובה: סטיית התקן של אורכי המלפפונים במשלוח החדש היא 2.4 ס"מ.

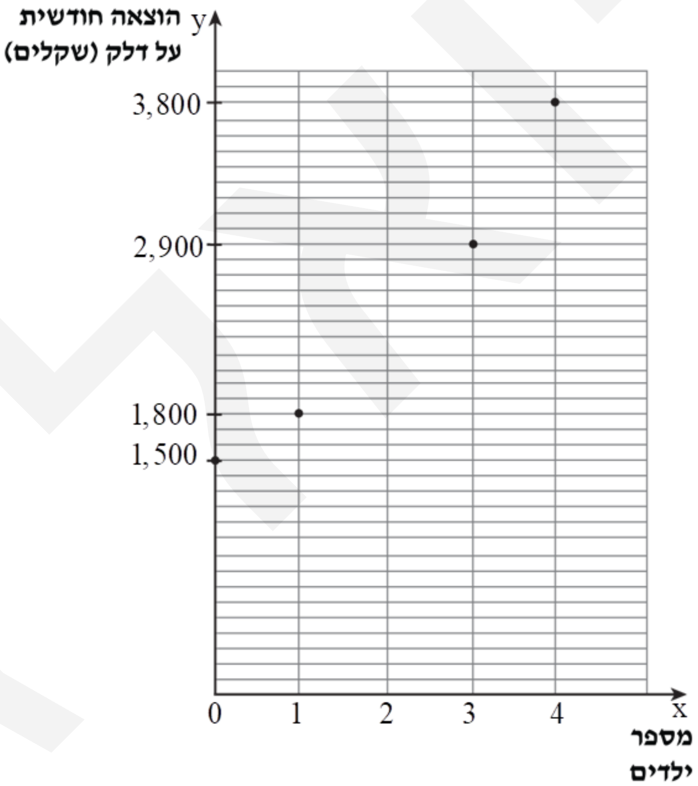
א. סטטיסטיקאית ערכה מחקר, בו בדקה את הקשר בין מספר הילדים שיש לזוג (המשתנה x)

האוכלוסייה שנבדקה 4 זוגות ממאגר הנתונים שלה.

נרכז את הנתונים בטבלה מתאימה.

מספר הילדים x	0	1	3	4
הוצאה על דלק (שקלים) y	1,500	1,800	2,900	3,800

נסרטט דיאגרמת פיזור מתאימה, ונרשום את ערכי הנקודות על הצירים.



ניתן לראות שקיימת מגמה של עלייה, ולכן נצפה לראות מקדם מתאם חיובי.

הנקודות מפוזרות בצורה די מהודקת סביב קשר לינארי עולה,

ולכן מקדם המתאם צפוי להיות חיובי חזק (מעל 0.7).

תשובה: הסרטוט מעל.

ב. הסטטיסטיקאית חישבה את סטיית התקן של המשתנה y וקיבלה כי $S_y = \sqrt{835{,}000}$,

(1) נמצא את הממוצעים של שני המשתנים.

$$\bar{x} = \frac{0+1+3+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\bar{y} = \frac{1{,}500+1{,}800+2{,}900+3{,}800}{4} = \frac{10{,}000}{4} = 2{,}500$$

תשובה: הממוצע של מספר בילדים שיש לזוג במדגם הוא 2 ילדים.

ההוצאה הממוצעות החודשית על דלק של זוג במדגם הוא 2,500 שקלים.

(2) נחשב את מקדם המתאם r בין שני המשתנים.

מקדם המתאם שווה לממוצע מכפלות ציוני התקן.

נחשב תחילה את סטיית התקן של המשתנה x , את S_x.

סטיית התקן היא:

$$S_x=\sqrt{\frac{(0-2)^2\cdot 1+(1-2)^2\cdot 1+(3-2)^2\cdot 1+(4-2)^2\cdot 1}{4}}=\sqrt{\frac{4+1+1+4=10}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\sqrt{2.5}$$

מצאנו כי: $\bar{x}=2$ **ילדים**, $S_x=1.58$ **ילדים**, $\bar{y}=2{,}500$ **שקלים**, $S_y=\sqrt{835{,}000}$ **שקלים** .

$$r=\frac{1}{N\cdot S_x\cdot S_y}\left((x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+\ldots+(x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})\right)$$

$$r=\frac{(0-2)(1{,}500-2{,}500)+(1-2)(1{,}800-2{,}500)+(3-2)(2{,}900-2{,}500)+(4-2)(3{,}800-2{,}500)}{4\cdot\sqrt{2.5}\cdot\sqrt{835{,}000}}$$

$$r=\frac{5{,}700}{4\cdot\sqrt{2.5}\cdot\sqrt{835{,}000}}$$

$$\boxed{r=0.986}$$

זהו מקדם מתאם חיובי חזק מאוד ($0.7<r<1$ נחשב למקדם מתאם חזק), קרוב לדטרמיניסטי,

כפי שניתן היה לחוש את זה מדיאגרמת הפיזור,

כאשר נראה שהנקודות "ממש" מסודרות על קו ישר עולה.

תשובה: מקדם המתאם הוא $r=0.986$.

ג. נמצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x .

$$m=r\cdot\frac{s_y}{s_x}\quad\rightarrow m=0.986\cdot\frac{\sqrt{835{,}000}}{\sqrt{2.5}}=570$$

נמצא את משוואת קו הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים.

$$y-2{,}500=570(x-2)$$

$$y-2{,}500=570x-1{,}140$$

$$\boxed{y=570x+1{,}360}$$

תשובה: משוואת ישר הרגרסיה, לניבוי ההוצאה החודשית על דלק לפי מספר הילדים,

היא $y=570x+1{,}360$.

ד. בעקבות עליית מחירי הדלק, עלתה ב- 6% ההוצאה החודשית של כל אחד מן הזוגות על דלק.

(1) העלאה ב- 6% , כלומר העלאה פי 1.06 של כל אחד מערכי המשתנה y ,

מגדילה את פיזור הנתונים בדיוק פי 1.06,

וסטיית התקן החדשה היא 968.6 שקלים $=\sqrt{835,000}\cdot 1.06$.

הסבר

- **ניתן לחשב את סטיית התקן מחדש ולראות (לא רשום ללא חישוב).**
- **סטיית התקן (בניגוד לממוצע) אינה מושפעת מתוספת של קבוע זהה לכל המדידות,**
  אך לעומת זאת אם כופלים את כל המדידות באותו קבוע,
  סטיית התקן מוכפלת גם היא באותו קבוע.

תשובה: ערכה של סטיית התקן של המשתנה y גדלה .

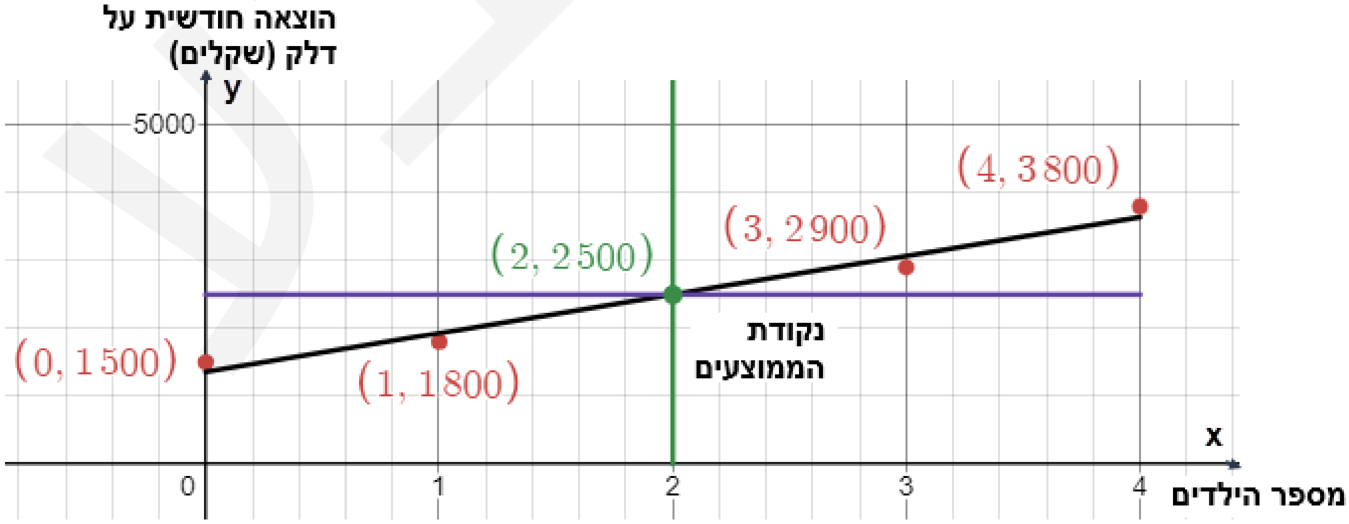
(2) שינוי ליניארי זהה של כל אחד מערכי אחד מהמשתנים, או שניהם, אינו משנה את מקדם המתאם.

הסבר

- **מקדם המתאם לא מושפע משינוי לינארי על כל אחד מהמשתנים,**
  גם אם השינוי הוא שינוי אחד למשתנה x ושינוי אחר למשתנה y.
- **אם בשינוי של המשתנה x,**
  המקדם המכפיל שונה בסימנו מהמקדם המכפיל בשינוי של המשתנה y,
  אז מקדם המתאם מתחלף בסימנו (אך לא בערכו המוחלט).

תשובה: ערכו של מקדם המתאם r לא השתנה.

העשרה



א. (1) נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- דירות הפונות לכיוון הפארק** $\bar{A}$ **- דירות הפונות לכיוון הכביש**

B **- דירות משופצות** $\bar{B}$ **- דירות שאינן משופצות**

<u>נתונים ומשמעויות מיידיות</u>

נדרשות שלוש משוואות, על-מנת למלא טבלת 2×2 **מלאה.**

(1) $P(A)=0.75 \quad \rightarrow P(\bar{A})=0.25$

(2) $N(B)=4N(\bar{B}) \quad \rightarrow P(B)=4P(\bar{B})$

(3) $P(B/\bar{A})=0.28 \quad \rightarrow P(\bar{B}/\bar{A})=0.72$

<u>פיתוח משוואות ונוסחת הסתברות מותנית</u>

$$P(B)=4P(\bar{B})$$
$$1-P(\bar{B})=4P(\bar{B})$$
$$1=5P(\bar{B})$$
$$P(\bar{B})=0.2 \quad \rightarrow P(B)=0.8$$

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$$
$$0.28=\frac{P(B\cap\bar{A})}{0.25}$$
$$0.07=P(B\cap\bar{A})$$

נציב בטבלה ונשלים אותה.

	A **לכיוון הפארק**	$\bar{A}$ **לכיוון הכביש**	
B **משופצות**	0.73	0.07	0.8
$\bar{B}$ **אינן משופצות**	0.02	0.18	0.2
	0.75	0.25	1

תשובה: ההסתברות לבחור דירה משופצת היא 0.8 .

(2) התשובה ישירות מתוך הטבלה: $P(\bar{A}\cap B)=0.07$.

תשובה: ההסתברות לבחור דירה שגם פונה לכיוון הכביש וגם משופצת היא 0.07 .

ב. בוחרים באקראי דירה מבין הדירות שאינן משופצות.

$$P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.18}{0.2}=0.9$$

תשובה: ההסתברות שדירה זו פונה לכיוון הכביש היא 0.9.

	לכיוון הכביש $\overline{A}$	לכיוון הפארק A	
0.8	0.07	0.73	משופצות B
0.2	0.18	0.02	אינן משופצות $\overline{B}$
1	0.25	0.75	

ד. 35 **דירות במתחם פונות לכיוון הכביש וגם משופצות, ועל פי תת סעיף א(2) חלקן מכלל הדירות הוא** 0.07**.**

מספר הדירות הכולל המתחם הוא $\frac{35}{0.07}=500$ **.**

החלק של הדירות שגם פונות לכיוון הפארק וגם משופצות הוא $P(A\cap B)=0.73$ **.**

מספר הדירות האלה הוא $0.73\cdot 500=365$ **.**

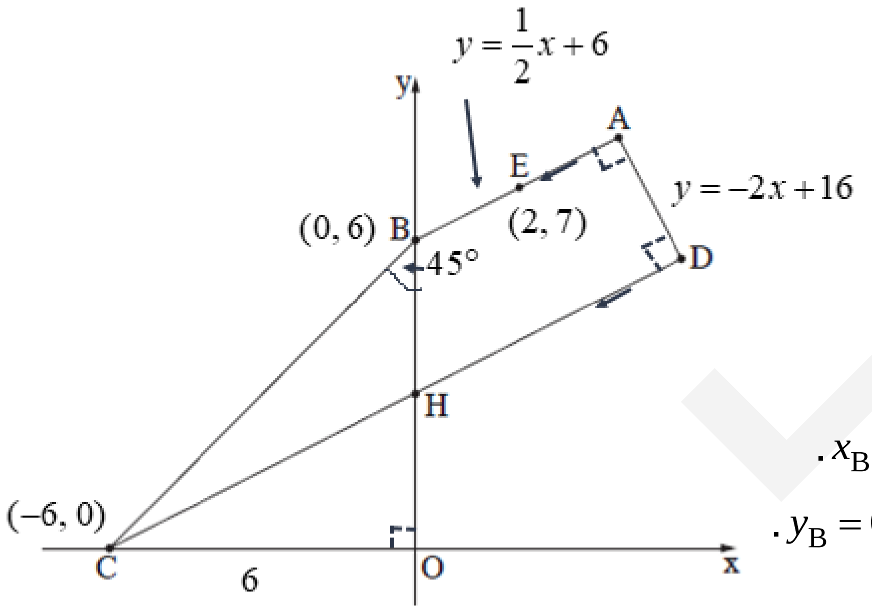
תשובה: 365 **דירות במתחם גם פונות לכיוון הפארק וגם משופצות.**

א. משוואת שוק הטרפז AD **היא** $y=-2x+16$ **, ושיפועו** (-2) .

השוק מאונכת לבסיס AB **כי הטרפז ישר זווית והשוק** AD **מאונכת לשני הבסיסים.**

לכן שיפוע הבסיס AB **הופכי ונגדי והוא** $\frac{1}{2}$.

נמצא את משוואת הבסיס AB **בעזרת** $m_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}$ **ו-** $\mathrm{E}(2,7)$.



$$y-7=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y-7=\frac{1}{2}x-1$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}x+6}$$

הקודקוד B **נמצא על ציר ה-** y **, ולכן** $x_{\mathrm{B}}=0$.

נציב $x=0$ **במשוואת הבסיס** AB **ונקבל** $y_{\mathrm{B}}=6$.

תשובה: שיעורי הקודקוד B **הם** $(0,6)$.

ב. הנקודה C **נמצאות על ציר ה-** x **, ולכן** $y_{\mathrm{C}}=0$ **, ונסמן** $\mathrm{C}(c,0)$.

הקודקוד C **נמצא על החלק השלילי של ציר ה-** x **, ולכן** $c<0$.

נתון כי אורך השוק BC **(השוק הארוכה) של הטרפז הוא** $\sqrt{72}$.

$$\sqrt{72}=\sqrt{(c-0)^2+(0-6)^2}$$

$$72=c^2+36$$

$$36=c^2 \quad \rightarrow c=-6 \quad \leftarrow c<0$$

או משפט פיתגורס $\Delta\mathrm{CBO}$: $(\mathrm{CO})^2+6^2=72 \quad \rightarrow \mathrm{CO}=6$.

תשובה: שיעורי הקודקוד C **הם** $(-6,0)$.

ג. $\Delta\mathrm{CBO}$ **הוא ישר זווית ושווה שוקיים** $(\mathrm{CO}=\mathrm{BO}=6\,,\ \sphericalangle\mathrm{COB}=90^\circ)$.

במשולש שווה שוקיים זוויות בסיס שוות.

אפשר גם בטריגו: $\Delta\mathrm{COB}:\tan\sphericalangle\mathrm{CBO}=\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{BO}}=\frac{6}{6}=1 \quad \rightarrow \sphericalangle\mathrm{CBO}=45^\circ$

תשובה: $\sphericalangle\mathrm{CBO}=45^\circ$.

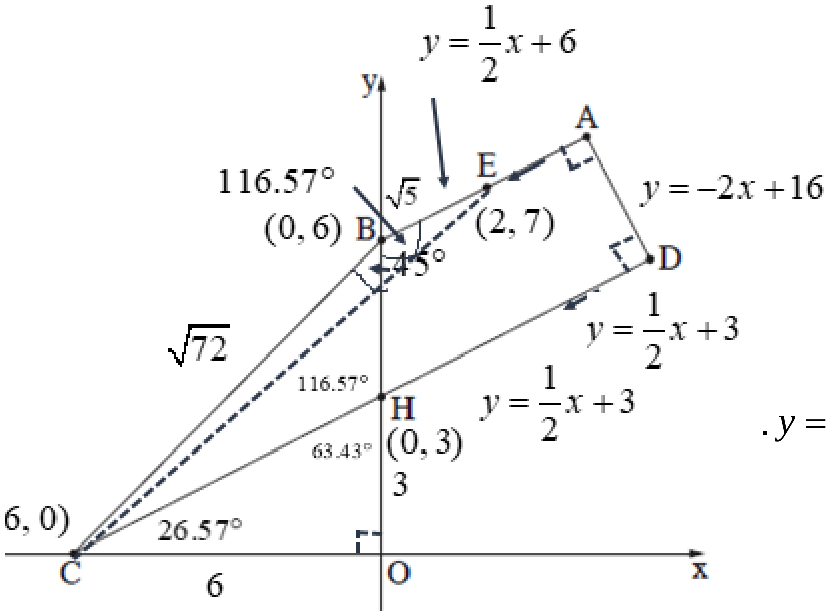
ד. (1) לישרים מקבילים (בסיסי הטרפז) שיפועים שווים, ולכן $m_{CD}=m_{AB}=\frac{1}{2}$.

נמצא את משוואת הבסיס CD

בעזרת $m_{CD}=\frac{1}{2}$ ו- $C(-6,0)$.

$$y-0=\frac{1}{2}(x-(-6))$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}x+3}$$



תשובה: משוואת הישר היא $y=\frac{1}{2}x+3$.

(2) הקשר בין שיפוע ישר לזווית <u>החדה</u> שהוא יוצר עם ציר ה- x נתון על ידי הנוסחה $m=\tan\alpha$.

$m_{CD}=\frac{1}{2}$, ולכן $\sphericalangle HCO=26.57°$.

מכאן ש- $\sphericalangle OHC=63.43°$ ו- $\sphericalangle CHB=116.57°$ (זוויות צמודות משלימות ל- $180°$) .

אפשר גם להראות ש- $H(0,3)$,

ואז בטריגו: $\sphericalangle OHC=63.43° \leftarrow \Delta COH:\tan\sphericalangle OHC=\frac{CO}{HO}=\frac{6}{3}=2$.

תשובה: $\sphericalangle CHB=116.57°$.

ה. נחשב את שטח המשולש CBE.

$\sphericalangle EBH=\sphericalangle CHB=116.57°$ (זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)

$\sphericalangle EBC=116.57°+45°=161.57°$ (סכום זוויות)

$$BE=\sqrt{(2-0)^2+(7-6)^2}=\sqrt{5}$$

$$BC=\sqrt{72}$$

$$S_{\Delta CBE}=\frac{BE\cdot BC\cdot \sin\sphericalangle EBC}{2}$$

$$S_{\Delta CBE}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{72}\cdot\sin 161.57°}{2}=3$$

תשובה: שטח המשולש CBE הוא 3 .

א. AM **מאונך למשיק** CD **כי משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.**

AM **הוא גם חוצה זווית** CMD **, על פי הנתון.**

מכאן ש- ΔCMD **הוא שווה שוקיים, כי חוצה הזווית מתלכד עם הגובה.**

תשובה: הוכחנו כי ΔCMD **הוא שווה שוקיים.**

ב. משוואת המעגל היא $(x+3)^2+(y-8)^2=45$.

מכאן שמרכז המעגל הוא $M(-3,8)$ **ורדיוסו** $\sqrt{45}$.

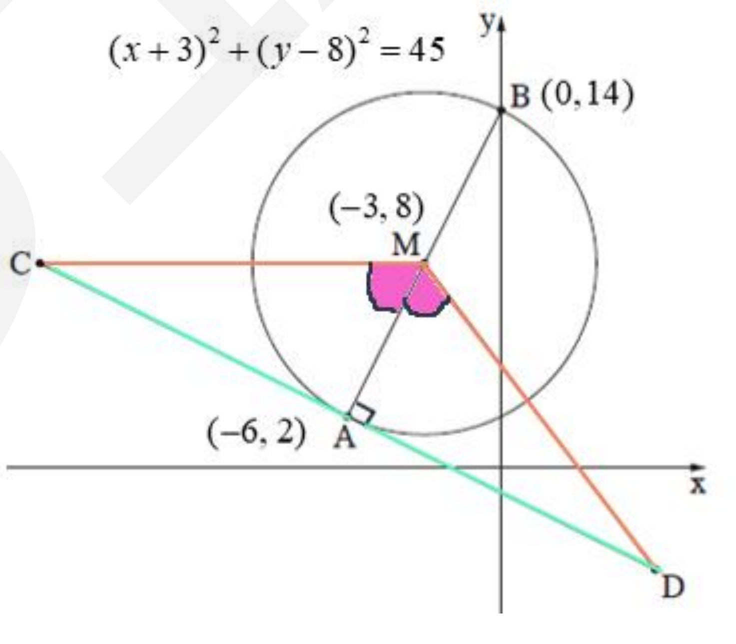
הקוטר AMB **חותך את ציר ה-** y **בנקודה** B **, ולכן** $x_B=0$.

$$(0+3)^2+(y-8)^2=45$$
$$(y-8)^2=36$$
$$y-8=6 \quad \rightarrow y=14 \quad \rightarrow \boxed{B(0,14)} \quad \leftarrow y_B>8$$
$$y-8=-6 \quad \rightarrow \cancel{y=2}$$

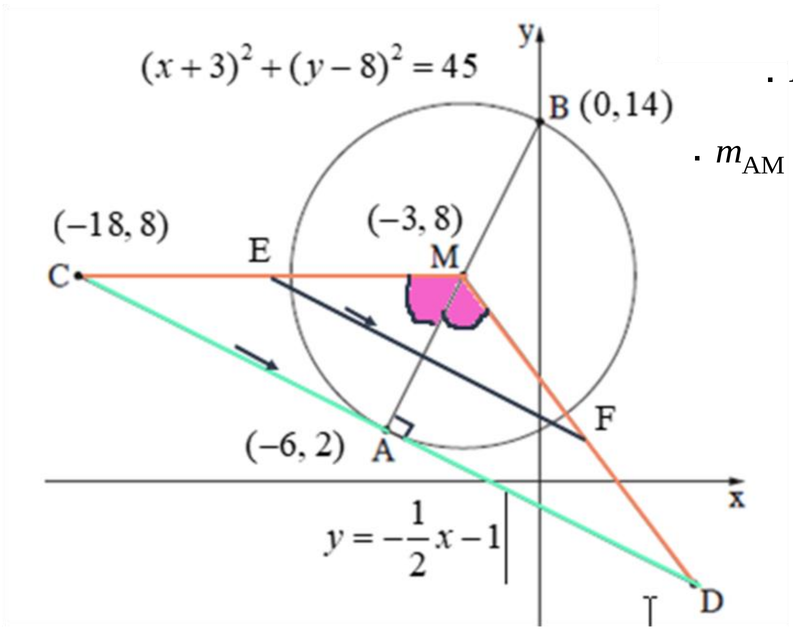
מרכז המעגל הוא כמובן אמצע הקוטר.

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \qquad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$
$$-3=\frac{x_A+0}{2} \qquad 8=\frac{y_A+14}{2}$$
$$-6=x_A \qquad 16=y_A+14$$
$$2=y_A$$

תשובה: $B(0,14)$, $A(-6,2)$.



ג. CM **מקביל לציר ה-** x , **ולכן** $y_{\mathrm{C}} = y_{\mathrm{M}} = 8$, **ונסמן** $\mathrm{C}(c, 8)$.



נמצא את משוואת המשיק CD ,

שהשיפוע שלו הופכי ונגדי לרדיוס המאונך AM .

$m_{\mathrm{AM}} = \frac{2-8}{-6-(-3)} = \frac{-6}{-3} = 2 \quad \rightarrow m_{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{2}$.

נמצא את משוואת המשיק CD

בעזרת $m_{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{2}$ **ו-** $\mathrm{A}(-6,-2)$.

$$y-2 = -\frac{1}{2}(x-(-6))$$

$$y-2 = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 1}$$

נציב $y_{\mathrm{C}} = 8$: $\boxed{\mathrm{C}(-18,8)} \leftarrow x=-18 \leftarrow 9 = -\frac{1}{2}x \leftarrow 8 = -\frac{1}{2}x - 1$.

תשובה: $\mathrm{C}(-18,8)$.

ד. EF **הוא קטע אמצעים ב-** $\Delta\mathrm{CMD}$ **כי מחבר אמצעי שתי צלעות.**

(1) נוכיח כי $\Delta\mathrm{CMD} \sim \Delta\mathrm{EMF}$

קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית.

לכן $\measuredangle\mathrm{MFE} = \measuredangle\mathrm{D}$, $\measuredangle\mathrm{MEF} = \measuredangle\mathrm{C}$ **(זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים)**

ומכאן שהמשולשים דומים על פי משפט דמיון זווית זווית.

תשובה: הוכחנו כי $\Delta\mathrm{CMD} \sim \Delta\mathrm{EMF}$.

(2) קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע השלישית.

מכאן שיחס הדמיון הוא $\frac{1}{2}$ **ויחס השטחים הוא** $\frac{1}{4}$

(יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון).

תשובה: היחס בין שטח המשולש CMD **ובין שטח המשולש** EMF **הוא** $\frac{S_{\Delta\mathrm{CMD}}}{S_{\Delta\mathrm{EMF}}} = 4$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-9}+4$.

קצת קדם אנליזה

נשים לב שהפונקציה היא פונקציה זוגית, ולכן הגרף שלה יהייה סימטרי לציר ה- y .

כיוון שהפונקציה מוגדרת עבור $x=0$ **, תהייה גם נקודת קיצון על ציר ה-** y .

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$x^2-9\neq 0 \quad \rightarrow x^2\neq 9 \quad \rightarrow x\neq \pm 3$$

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq \pm 3$.

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים, של הפונקציה $f(x)$.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x**:** $x=3$ **ו-** $x=-3$.

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y **: הישר** $y=6$.

(הביטוי השמאלי שואף ל- 2 **כאשר** $x\rightarrow \pm\infty$ **, כי חזקת המונה שווה לחזקת המכנה,**
ולכן $f(x)\rightarrow 2+4=6$ **)**

הערה – לא נדרשים הסברים בבגרות.

תשובה: $x=3$ **,** $x=-3$ **,** $y=6$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{4x(x^2-9)-2x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x(x^2-9-x^2)}{(x^2-9)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-36x}{(x^2-9)^2}}$$

$$-36x=0$$

$$x=0 \quad \rightarrow f(0)=4 \quad \rightarrow (0,4)$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה :

	-3		0		3		x
+		+	0	-		-	$f'(x)$
↗		↗	Max	↘		↘	מסקנה

תשובה: $(0,4)$ **מקסימום.**

ג. נמצא את שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

עם ציר ה- y מצאנו כבר: $(0,4)$.

עם ציר ה- x, בו מתקיים $y=0$.

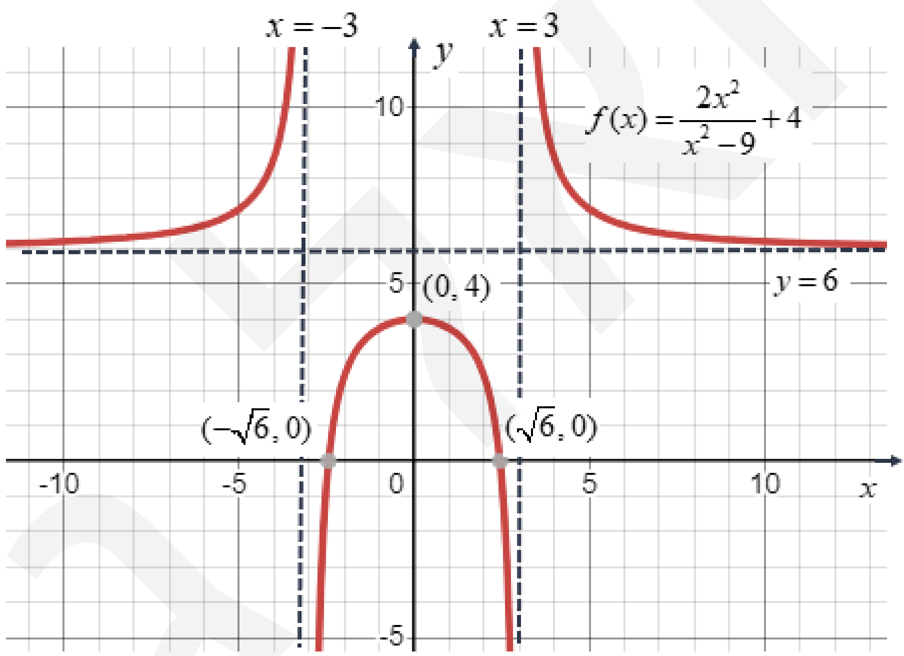
$$0=\frac{2x^2}{x^2-9}+4 \quad /\cdot(x^2-9)$$

$$0=2x^2+4x^2-36$$

$$6x^2=36 \quad \rightarrow x^2=6 \quad \rightarrow \boxed{(-\sqrt{6},0),(\sqrt{6},0)}$$

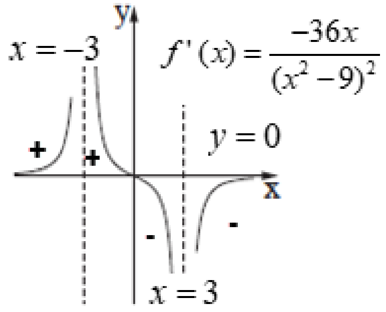
תשובה: $(0,4)$, $(\sqrt{6},0)$, $(-\sqrt{6},0)$.

ד. הסקיצה המתאימה.



תשובה: השרטוט מעל.

ה. גרף הנגזרת $f'(x)=\frac{-36x}{(x^2-9)^2}$ הוא גרף IV :



IV

- **תחום ההגדרה הוא** $x\neq\pm3$
- **אסימפטוטות:** $y=0$, $x=3$, $x=-3$.
- **נקודות אפס:** $(0,0)$.
- **סימני נגזרת, בהתאם לעלייה/ירידה של** $f(x)$ **ולטבלה שהכנו בסעיף ג.**
- $f(x)$ **זוגית ו-** $f'(x)$ **אי-זוגית, והגרף שלה סימטרי לראשית הצירים.**

תשובה: גרף IV מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ו. נקבע בעבור כל אחד מן ההיגדים האם הוא נכון או לא נכון, וננמק את תשובותינו.

(1) בכל נקודה בתחום $x>3$ **שיפוע המשיק לגרף הפונקציה** $f(x)$ **הוא חיובי.**

בתחום $x>3$ **מתקיים:** $f(x)$ **יורדת, הנגזרת שלילית ולכן שיפועי המשיק ל-** $f(x)$ **שליליים.**

תשובה: ההיגד אינו נכון.

(2) בכל נקודה בתחום $x<-3$ **שיפוע המשיק לגרף הפונקציה** $f(x)$ **הוא חיובי.**

בתחום $x<-3$ **מתקיים:** $f(x)$ **עולה, הנגזרת חיובית ולכן שיפועי המשיק ל-** $f(x)$ **חיוביים.**

תשובה: ההיגד נכון.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{5-2x}+bx$ **(** $b>0$ **פרמטר).**

גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x **בנקודה** $(-10,0)$.

נציב את שיעוריה בפונקציה.

$$0=\sqrt{5-2\cdot(-10)}+b\cdot(-10)$$
$$10b=5$$
$$\boxed{b=\frac{1}{2}}$$

תשובה: $b=\frac{1}{2}$.

ב. נציב $b=\frac{1}{2}$ **והפונקציה היא** $f(x)=\sqrt{5-2x}+\frac{1}{2}x$

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$5-2x\geq 0$$
$$-2x\geq -5 \quad /:(-2<0)$$
$$\boxed{x\leq 2.5}$$

תשובה: $x\leq 2.5$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם ציר ה-** y .

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל את הנקודה** $(0,\sqrt{5})$.

תשובה: $(0,\sqrt{5})$.

ד. נמצא את שיעורי כל נקודות הקיצון ונקבע את סוגן. $(2.5,1.25)$ **בהכרח נקודת קיצון קצה.**

$$f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{5-2x}}+\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{-2+\sqrt{5-2x}}{\sqrt{5-2x}}$$

$$0=-2+\sqrt{5-2x}$$

$$2=\sqrt{5-2x}\quad (\ )^2\quad \to test$$

$$4=5-2x\quad \to 2x=1\to, x=0.5$$

$$test:\quad 2\overset{?}{=}\sqrt{5-2\cdot 0.5}\to 2=2\quad o.k.$$

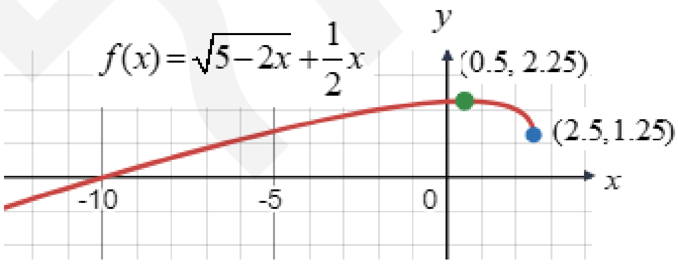
$$\left.\begin{matrix} f'(0)>0 & \nearrow \\ f'(1)<0 & \searrow \end{matrix}\right\}\to \boxed{(0.5,\ 2.25),\max}$$

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת המקסימום לנקודת הקצה $(2.5,1.25)$ **,**

הרי שנקודת הקצה היא נקודת מינימום.

תשובה: $(2.5,1.25)$ **מינימום,** $(0.5,\ 2.25)$ **מקסימום.**

ה. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **.**

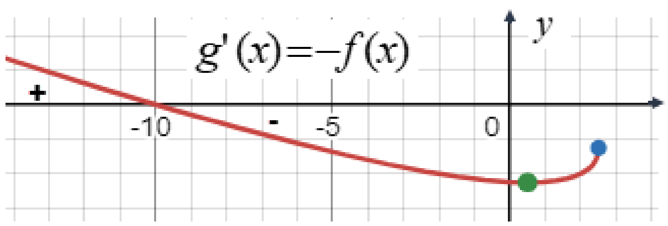


תשובה: הסרטוט מעל.

ו. נתונה הפונקציה $g(x)$ **כך ש-** $g'(x)=-f(x)$ **, ושתיהן מוגדרות בתחום** $x\le 2.5$ **.**

זו טרנספורמציה של סיבוב סביב ציר ה- x **,**

כאשר תחומי חיוביות/שליליות מתחלפים וגם תחומי עלייה וירידה מתחלפים.



לכן $g'(x)$ **עוברת מחיוביות לשליליות עבור** $x=-10$ **ו-** $g(x)$ **מעלייה לירידה ומקבלים מקסימום.**

תשובה: $x=-10$ **מקסימום של** $g(x)$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{48}{x^2}+1$ **, המוגדרת לכל** $x\neq 0$ **, והסרטוט שלה.**

נשים לב שהפונקציה זוגית: $f(-x)=\frac{48}{(-x)^2}+1=\frac{48}{x^2}+1=f(x)$.

מכאן שאם $x_B=t$ $(t>0)$ **אז** $x_C=-t$**, כי הישר** BC **מקביל לציר ה-** x .

נסמן $B(t,\frac{48}{t^2}+1)$ **נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון, ואז** $C(-t,\frac{48}{t^2}+1)$ **ברביע השני.**

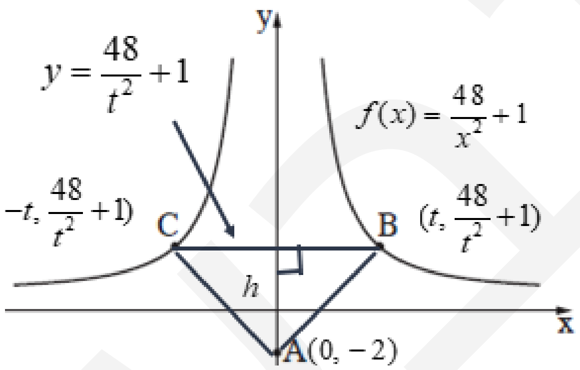
תשובה: $B(t,\frac{48}{t^2}+1)$ **,** $C(-t,\frac{48}{t^2}+1)$**.**

ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *שטח המשולש* ABC.

$A(0,-2)$ **נקודה על ציר ה-** y .

BC **מקביל לציר ה-** x**, ולכן** $BC=x_B-x_C=t-(-t)=2t$ **, ומשוואתו** $y=\frac{48}{t^2}+1$.

הגובה מונח על ציר ה- y **, ולכן** $h=\frac{48}{t^2}+1-(-2)=\frac{48}{t^2}+3$.



$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot h}{2}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{2t\cdot(\frac{48}{t^2}+3)}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{48}{t}+3t}$$

$$S'=\frac{0-48\cdot 1}{t^2}+3$$

$$\boxed{S'=\frac{-48+3t^2}{t^2}}$$

$$0=-48+3t^2$$

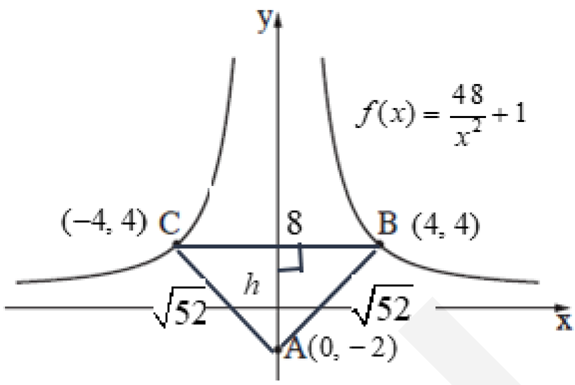
$$t=4,\ \cancel{t=-4}\ \leftarrow t<0$$

$$\left.\begin{array}{l} s'(3)<0 \ \searrow \\ s'(5)>0 \ \nearrow \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{t=4,\min}$$

תשובה: $t=4$**, עבורו שטח המשולש** ABC **מינימלי.**

ג. נרשום את שיעורי הנקודות עבור $t=4$.

$B(4,4)$, $C(-4,4)$ **, וכמובן** $A(0,-2)$.



$$BC=4-(-4)=8$$

$$AB=\sqrt{(4-0)^2+(4+2)^2}=\sqrt{52}$$

ΔABC **שווה שוקיים** $AB=AC$ **(הגובה מתלכד עם התיכון)**

והיקף המשולש הוא $8+2\sqrt{52}\approx 22.42$.

תשובה: הקף המשולש ABC **, עבור** $t=4$**, הוא כ-** 22.42.